Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов»

Факультет физико-математических и естественных наук

Рекомендовано МССН

«Математика и механика»

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины

Алгебра

Рекомендуется для направления подготовки/специальности

01.03.01 Математика

Квалификация (степень выпускника) Бакалавр

1. Цели и задачи дисциплины: сформировать представление о комплексе идей и методов алгебры, развить математическую культуру студента и подготовить его к усвоению других основных математических курсов. Реализация указанной цели включает последовательное изложение теоретического материала на лекциях, при котором все основные результаты снабжаются строгими доказательствами; отработку приемов решения задач на практических занятиях; промежуточный и итоговый контроль выявляют степень усвоения полученных навыков.

2. Место дисциплины в структуре ООП:
Цикл Б.1 Базовая часть часть Б1.О.01.07.
Необходимо знание алгебры в объеме школьного курса; дисциплина является предшествующей к курсам дифференциальной геометрии, дифференциальных уравнений, аналитической механике, дискретной математике, комплексному анализу, физике.
(указывается цикл, к которому относится дисциплина; формулируются требования к входным знаниям, умениям и компетенциям студента, необходимым для ее изучения; определяются дисциплины, для которых данная дисциплина является предшествующей)

3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций

№ п/п	Шифр и наименование компетенции	Предшествующие дисциплины	Последующие дисциплины (группы дисциплин)
Общепрофессиональные компетенции			
	ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности		Комплексный анализ, Уравнения с частными производными, Базы данных

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать: понятие линейного пространства, определителя, ранга матрицы, подпространства, операций над подпространствами, базиса и размерности, решения СЛУ и однородной СЛУ, скалярного произведения, ортогонализации, евклидова пространства, билинейной и квадратичной функций.

Уметь: вычислять определители матриц, вычислять ранги матриц, вычислять обратные матрицы, находить решения системы линейных уравнений, определять базис и размерность линейного пространства, определять канонический вид и индексы квадратичных форм.

Владеть: линейными пространствами, операциями над ними, аппаратом теории матриц для решения СЛУ, элементами теории операторов и квадратичных форм а также евклидовых пространств.

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов	Модули							
		1	2	3	4	1	2	3	4
Аудиторные занятия (всего)		54	40	72	48				
В том числе:									
Лекции		18	16	18	16				
Практические занятия (ПЗ)									
Семинары (С)		36	24	36	32				
Лабораторные работы (ЛР)									
Самостоятельная работа (всего)		90	68	90	132				
В том числе:	-	-		-		-		-	
Курсовой проект (работа)									
Расчетно-графические работы									
Реферат									
Другие виды самостоятельной работы									
Вид промежуточной аттестации (зачет, экзамен)									
Общая трудоемкость час		144	108	144	180				
зач. Ед.		4	3	4	5				

5. Содержание дисциплины

5.1. Содержание разделов дисциплины

Семестр 1

Тема. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

Содержание лекций: Система линейных уравнений. Совместность и определенность. Эквивалентность систем. Матрица коэффициентов и расширенная матрица системы. Элементарные преобразования. Приведение матриц и систем линейных уравнений к ступенчатому виду. Метод Гаусса.

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач , подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием: Исследование и решение систем линейных уравнений.

Тема. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Ранг системы векторов.

Содержание лекций: Линейная зависимость строк (столбцов). Основная лемма о линейной зависимости, базис строк (столбцов). Совпадение числа векторов в различных базисах одной и той же системы строк (столбцов). Ранг матрицы. Инвариантность ранга системы строк (столбцов) матрицы при элементарных преобразованиях её строк. Вычисление ранга матрицы приведением её к ступенчатому виду. Критерий совместности и определенности системы линейных уравнений в терминах рангов матриц. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений.

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач , подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием: Установление линейной зависимости (независимости) заданной системы строк (столбцов). Выражение вектора через векторы заданного базиса. Вычисление ранга матрицы приведением к ступенчатому виду. Нахождение фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений.

Тема. Подстановки. Определители. Основные свойства, методы вычисления и приложения.

Содержание лекций: Группа подстановок конечного множества, знак подстановки (четность), знакопеременная группа, разложение подстановки в произведение транспозиций и независимых циклов.Определитель квадратной матрицы, его основные свойства (линейность, кососимметричность, определитель транспонированной матрицы). Изменение определителя при элементарных преобразованиях строк (столбцов) матрицы. Определитель треугольной матрицы. Критерий равенства определителя нулю. Определитель матрицы с углом нулей. Определитель Вандермонда. Миноры и алгебраические дополнения элементов. Разложение определителя по строке (столбцу). Лемма о '"фальшивом" разложении определителя. Формулы Крамера для решения определенных квадратных систем линейных уравнений.

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач: Операции над подстановками, определение чётности заданной подстановки.Вычисление определителей малых порядков. Вычисление определителей с помощью приведения матрицы к треугольному виду элементарными преобразованиями. Вычисление определителей с помощью разложения определителя по строке (столбцу). Вычисление определителей с помощью рекуррентных соотношений. Применение формул Крамера для решения определенных квадратных систем линейных уравнений.

Тема. Операции над матрицами. Применения матриц.

Содержание лекций: Операции над матрицами и их свойства. Обобщенная ассоциативность. Транспонирование произведения матриц. Умножение матрицы на диагональную матрицу слева и справа. Единичная матрица, ее единственность. Скалярные матрицы. Обратная матрица, ее единственность. Критерий существования и формула вычисления элементов обратной матрицы. Умножение треугольных матриц. Матричные единицы и их умножение. Элементарные матрицы и их связь с элементарными преобразованиями. Определитель произведения матриц. Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований. Миноры прямоугольной матрицы. Вычисление ранга матрицы с помощью миноров (теорема о ранге матрицы). Ранг произведения матриц. Матричная запись системы линейных уравнений. Строение общего решения неоднородной системы уравнений, его геометрическая интерпретация

.*Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач , подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием:* Выполнение различных операций над матрицами. Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований и с помощью алгебраических дополнений. Решение линейных матричных уравнений. Вычисление ранга матриц с помощью окаймляющих миноров.

Тема. Комплексные числа.

Содержание лекций: Основные алгебраические структуры: кольца, поля. Поле комплексных чисел. Комплексная плоскость. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Операция сопряжения комплексных чисел и ее свойства. Формула Муавра. Корни целой степени из комплексного числа. Группа комплексных корней из единицы.

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач , подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием: Операции над комплексными числами, вычисление корней из комплексного числа, решение уравнений в комплексных числах. Применение комплексных чисел к вычислению некоторых сумм и решению геометрических задач.

Тема. Многочлены одной переменной.

Содержание лекций: Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Возможность и единственность деления на ненулевой многочлен с остатком. Наибольший общий делитель двух многочленов, его выражение через многочлены, алгоритм Евклида. Неприводимые многочлены. Факториальность кольца многочленов и кольца целых чисел. Многочлен как функция. Схема Горнера. Корни многочлена, кратность корня. Понижение кратности корня при дифференцировании, избавление от кратных корней. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел. Неприводимые многочлены над полями комплексных и действительных чисел. Интерполяционный многочлен, формула Лагранжа и метод Ньютона для его построения. Поле рациональных дробей. Простейшие дроби. Разложение правильной дроби в сумму простейших дробей, случай вещественного и комплексного полей. Границы корней многочлена. Теорема Декарта. Метод Штурма отделения вещественных корней многочлена.

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач , подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием: Деление на многочленов с остатком. Нахождение наибольшего общего делителя двух многочленов и его линейного выражения через заданные многочлены с помощью алгоритма Евклида. Проверка неприводимости заданного многочлена над различными полями, признак Эйзенштейна. Разложение многочленов на неприводимые множители. Применение схемы Горнера, определение кратности корня многочлена, избавление от кратных корней. Построение интерполяционных многочленов. Разложение правильной дроби в сумму простейших дробей, случай вещественного и комплексного полей. Нахождение числа вещественных корней многочлена методом Штурма.

Тема. Многочлены нескольких переменных.

Содержание лекций: Кольцо многочленов от нескольких переменных. Лексикографический порядок на одночленах. Старший член произведения многочленов. Симметрические многочлены, их выражение через элементарные симметрические многочлены, формулы Виета. Результант двух многочленов, его выражение через корни многочленов. Дискриминант многочлена, выражение дискриминанта через корни многочлена. Решение уравнений степени 3 и 4.

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач , подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием: Выражение симметрических многочленов через элементарные симметрические многочлены. Применение формул Виета. Вычисление результантов и дискриминантов. Исключение неизвестных из систем полиномиальных уравнений.

Тема. Линейные пространства и подпространства.

Содержание лекций: Линейное пространство. Определение,примеры. Линейнаяоболочка. Аффинное пространство. Линейное подпространство. Линейное многообразие. Факторпространство. Теорема о сумме размерностей подпространства и факторпространства. Линейная (не)зависимость системы векторов. Ранг системы векторов. Размерность. Базис. Координаты. Пересечение и сумма подпространств. Теорема об их размерностях. Прямая сумма подпространств. Внешняя прямая сумма. Двойственное пространство. Двойственный базис. Пример: двойственное пространство к пространству многочленов степени не выше n и его базис. Изоморфизм линейных пространств. Изоморфность линейных пространств одинаковой размерности. Второе двойственное пространство. Канонический изоморфизм между пространством и его вторым двойственным.

Семестр 2

Тема. Евклидовы и эрмитовы пространства.

Содержание лекций Евклидовы и эрмитовы пространства. Неравенство Коши–Буняковского и неравенство треугольника. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Ортогональное дополнение. Проекция и ортогональная составляющая. Расстояние от вектора до подпространства, угол между вектором и подпространством. Метод наименьших квадратов. Псевдорешение. Ортогональные (унитарные) матрицы. Разложение невырожденной матрицы в произведение ортогональной (унитарной) на верхнетреугольную. Определитель Грама. Объем n-мерного параллелепипеда. Критерий невырожденности матрицы Грама.

Тема. Линейные операторы

Содержание лекций Линейные отображения. Ядро и образ линейного отображения. Теорема о сумме размерностей ядра и образа. Матрица линейного отображения. Зависимость от базисов. Линейные операторы. Ядро и образ оператора. Инвариантное подпространство. Ограничение оператора и фактор-оператор. Вид матрицы оператора, обладающего инвариантным подпространством. (Не)вырожденные операторы. Собственные значения и собственные векторы. Существование нетривиальных инвариантных подпространств в случае алгебраически замкнутого поля. Операторы проектирования. Их алгебраическая и геометрическая характеризация. Многочлены от операторов. Аннулирующий многочлен. Минимальный многочлен. Характеристический многочлен. Их корни. Присоединенные векторы. Корневые подпространства. Стабилизация ядер степеней оператора. Теорема Гамильтона–Кэли. Теорема о разложении в прямую сумму корневых подпространств (для случая алгебраически замкнутого поля). Теорема Жордана о приведении к нормальной форме. Единственность Жордановой формы. Овеществление и комплексификация линейных пространств и операторов. Существование одномерных или двумерных инвариантных подпространств у операторов в вещественных линейных пространствах.

Тема. Операторы в евклидовых и эрмитовых пространствах. Билинейные и квадратичные формы.

Содержание лекций Сопряженный оператор. Единственность. Существование. Инвариантность подпространств и их ортогональных дополнений относительно оператора и его сопряженного. Самосопряженные и кососимметрические операторы, их канонический вид. Нормальные операторы, связь нормальности с диагонализируемостью. Одновременное приведение к каноническому виду двух самосопряженных операторов. Операторы, сохраняющие скалярное произведение. Изометрии. Канонический вид унитарного оператора. Канонический вид ортогонального оператора. Неотрицательные операторы. Квадратный корень из неотрицательного оператора. Полярное разложение операторов. Билинейные, полуторалинейные, квадратичные функции. Правое и левое ядро. Невырожденность. Матрица билинейной (полуторалинейной) функции, ее изменение при заменах базиса. (Косо)симметричные и (косо)эрмитовы функции. Ортогональное дополнение относительно (косо)симметричной билинейной (эрмитовой полуторалинейной) функции. Его размерность. Сумма подпространства и его ортогонального дополнения. Второе ортогональное дополнение. Нормальный вид (косо)симметричных билинейных функций в вещественных и комплексных линейных пространствах, эрмитовых полуторалинейных функций. Теорема инерции. Теорема Якоби. Критерий Сильвестра. Операторы, сохраняющие невырожденную (косо)симметричную билинейную (эрмитову полуторалинейную) функцию. Соответствующие группы. Описание группы O(1, 1). Изотропные подпространства в симплектическом пространстве. Лагранжевы подпространства. Существование для любого изотропного подпространства содержащего его лагранжева подпространства. Существование дополнительного лагранжева подпространства для любого лагранжева подпространства в симплектическом пространстве. Канонический изоморфизм между билинейными функциями и линейными операторами в евклидовом пространстве. Приведение симметрической билинейной функции к каноническому виду в евклидовом пространстве. Канонический вид квадратичной функции и принцип минимакса. Приведение пары квадратичных функций к диагональному виду. Обобщенный характеристический многочлен. Теорема об одновременном приведении одной квадратичной функции к каноническому виду, а другой (положительно определенной) – к нормальному виду.

Тема. Основные понятия теории групп
Содержание лекций: Понятие группы, подгруппы, гомоморфизма, изоморфизма и автоморфизма. Примеры групп. Циклические подгруппы, порядок элемента, циклические группы и их подгруппы. Теорема Кэли. Смежные классы, теорема Лагранжа и следствия из неё, индекс подгруппы.

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач: Проверка аксиом группы на примерах. Нахождение порядков элементов групп. Нахождение числа элементов циклической группы, имеющих заданный порядок. Решение уравнений вида $x^k=e$ в циклической группе.

Тема: Конечно порождённые абелевы группы
Содержание: Конечно порождённые и свободные абелевы группы. Подгруппы свободной абелевой группы, теорема о согласованных базисах. Универсальное свойство свободной абелевой группы. Разложение конечно порожденной абелевой группы в прямую сумму циклических групп. Периодическая часть абелевой группы.

Итоговый контроль знаний

Экзамен/зачет

Сводная оценочная таблица дисциплины

БАЛЛЬНО-РЕЙТИНГОВАЯ СИСТЕМА ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ

по дисциплине_**________________АЛГЕБРА___________,** для специальности__НМ__,

Вид задания	Сумма баллов
1. Контрольная работа N 1	25
2. Контрольная работа N 2	25

3. Работа на семинаре и домашние задания	15
4.. Коллоквиум	
5. Реферат	
6. Посещение занятий	
7. Работа на семинаре	
8. Экзамен/зачет	35
ИТОГО	100

5.2 Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми

№ п/п	Наименование обеспечиваемых (последующих) дисциплин	№ № разделов данной дисциплины, необходимых для изучения обеспечиваемых (последующих) дисциплин									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	**Математический анализ**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
2.	**Аналитическая геометрия**	**1**	**1**		**1**				**1**		
3.	**Комплексный анализ**								**1**		
4.	**Дифференциальные уравнения**	**1**	**1**	**1**	**1**				**1**		
5.	**Аналитическая механика**				**1**						
6.	**Оптика**							**1**			
7	**Квантовая механика**	**1**	**1**		**1**		**1**				

5.3. Разделы дисциплин и виды занятий

Семестр 1

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практ. зан.	Лаб. зан.	Семин	СРС	Всего час.
	Модуль 1						
	Тема. Матрицы. Операции над матрицами.	2	4			12	24

	Тема. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.	2	4			12	24
	Тема. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Ранг системы векторов.	4	8			12	24
	Тема. Подстановки. Определители. Основные свойства, методы вычисления и приложения.	8	16			24	48
	Тема. Обратная матрица	2	4			6	12
	Модуль 2						
	Тема. Комплексные числа	2	3			5	10
	Тема. Многочлены и рациональные функции одной переменной	4	6			10	20
	Тема. Многочлены нескольких переменных	2	3			5	10
	Тема. Линейные пространства и подпространства.	8	12			20	40

Семестр 2

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практ. зан.	Лаб.зан.	Семин	СРС	Всего час.
	Модуль 3						
	Тема. Евклидовы и эрмитовы пространства	9	15			24	48
	Тема.. Линейные операторы	9	15			24	48
	Тема . Операторы в евклидовых и эрмитовых пространствах. Билинейные и квадратичные формы	9	15			24	48
	Модуль 4						
	Тема. Основные понятия теории групп	8	16			24	48
	Тема. Абелевы группы	8	16			24	48

6. Лабораторный практикум не предусмотрен

7. Практические занятия (семинары)

См. п. 5.3.

8. Курсовые работы .

1. Теорема Абеля о неразрешимости в радикалах общего алгебраического уравнения 5-й степени.

2. Поле разложения многочлена. Доказательство Гаусса основной теоремы алгебры.
3. Базисы Гребнера и системы алгебраических уравнений.
4. Решение систем линейных уравнений в целых числах.
5. Уравнение Пелля.
6. Симплициальные комплексы. Гомологии и когомологии симлициальных комплексов.
7. Каноническая форма Фробениуса линейного оператора.
8. Фундаментальная группа топологического пространства. Теорема Брауэра о неподвижной точке (случай плоскости).
9. Алгебраические комплексы, их гомологии. Точные последовательности. Лемма о пяти изоморфизмах.
10. Теоремы Силова.
11. Линейные представления конечных групп.
12. Рациональные и эллиптические кривые.
13. Алгебра Ли. Когомологии алгебры Ли.
14. Нильпотентные и разрешимые алгебры Ли.
15. Модули.
16. Гиперкомплексные числа и теорема Фробениуса.
17. Неархимедовы поля. Нестандарнтый анализ.

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

а) Основная литература:

1. Винберг Э.Б. «Курс алгебры» (любое издание).
2. Гельфанд И.М. «Лекции по линейной алгебре» (любое издание).
3. Курош А.Г. «Курс высшей алгебры» (любое издание).
4. Кострикин А.И «Введение в алгебру», М.: «Наука», 1977.
5. Кострикин А.И. «Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры», М.: Физматлит, 2001.
6. Кострикин А.И. «Введение в алгебру. Ч. 2. Линейная алгебра», М.: Физматлит, 2001.
7. Попов А.М. «Лекции по линейной алгебре», М.: РУДН, 2010.
8. Проскуряков А.Г. «Сборник задач по линейной алгебре» (любое издание).
9. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. «Сборник задач по высшей алгебре) (любое издание)..
10. Под ред. Кострикина А.И. «Сборник задач по алгебре» (любое издание).
11. Под ред. Смирнова Ю.М. «Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре», 2-е издание, М. «Логос», 2005.

б) Дополнительная литература:

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., Физ.-мат. литература, 2000.
2. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. М., Наука, 1976.
3. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М., Наука, 1987.
4. Халмош П. «Конечномерные векторные пространства», М.: Физматлит, 1963.
5. Алексеев В.Б. «Теорема Абеля в задачах и решениях» (любое издание).
6. Ляпин Е.С., Айзенштат А.Я., Лесохин М.М. «Упражнения по теории групп», М., «Наука», 1967.

(Вся литература имеется в библиотеке РУДН или в электронной библиотеке на кафедре)

в) Программное обеспечение пакет «Maple»,

г) Базы данных, информационно-справочные и поисковые системы (кафедра обладает обширной электронной библиотекой)

10. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

учебная аудитория для проведения семинарских занятий, большая аудитория (лекционный зал) для чтения лекций, ноутбук - 1шт., проектор - 1шт., экран - 1шт., ксерокс - 1 шт., принтер - 1шт., сканер - 1 шт.

11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:

В каждом модуле проводятся по две контрольные работы. Студентам, набравшим низкие баллы на контрольных работах, в обязательном порядке предписывается посещать дополнительные консультации лектора.

Разработчик:

д.ф.-м.н.,
профессор Математического института
им. С.М. Никольского А.Ю. Савин

Директор Математического института
им. С.М. Никольского,
д.ф.-м.н., профессор А.Л.Скубачевский

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов»

Факультет физико-математических и естественных наук

Математический институт им. С.М.Никольского

УТВЕРЖДЕН

На заседании института

« » 2020 г.,

протокол №

Директор института

______________ А.Л.Скубачевский

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по учебной дисциплине **«Алгебра»**

Рекомендуется для направления подготовки

01.03.01 «Математика»

Квалификация (степень) выпускника

Бакалавр

Квалификация (степень) выпускника

Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине «Алгебра Модуль 1

Код контролируемой компетенции или ее части	Контролируемый раздел дисциплины	Контролируемая тема дисциплины	Наименование оценочного средства														
			Текущий контроль												Промежуточная аттестация		
			Опрос	Тест	Коллоквиум	Контрольная работа	Выполнение ЛР	Выполнение КР/КП	СРС(Вып.ДЗ)	Реферат	Выполнение РГР	…	…	…	Зачет	…	…
ОПК-1	Раздел «Матрицы. СЛАУ »	Тема 1: Матрицы. СЛАУ»				25			8						20		
ОПК-1	Определители	Тема 2: Определители»				25			7						15		
		ИТОГО:				50			15						35		

БРС по дисциплине «Алгебра» Направление/Специальность: 01.03.01 «Математика» Модуль 2

Код контролир уемой	Контролируемый раздел дисциплины	Контролируемая тема дисциплины	Наименование оценочного средства	
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация

			Опрос	Тест	Коллоквиум	Контрольная работа	Выполнение ЛР	Выполнение КР/КП	СРС(Выполнение ДЗ)	Реферат	Выполнение РГР	…	…	…	Зачет	…
ОПК-1	Раздел«Комплексные числа. Многочлены »	Тема«Комплексн. числа. Многочлены »				25			8						20	
ОПК-1	Раздел Линейные пространства	Тема Линейные пространства				25			7						15	
		ИТОГО:				50			15						35	

БРС по дисциплине «Алгебра» Направление/Специальность: 01.03.01 «Математика» Модуль 3

Код контролируемой компетенции или ее части	**Контролируемый раздел дисциплины**	**Контролируемая тема дисциплины**	**Наименование оценочного средства**														
			Текущий контроль												**Промежуточная аттестация**		
			Опрос	**Тест**	**Коллоквиум**	**Контрольная работа**	**Выполнение ЛР**	**Выполнение КР/КП**	**СРС(Выполнение ДЗ)**	**Реферат**	**Выполнение РГР**	**…**	**…**	**…**	**Зачет**	**…**	**…**
ОПК-1	Раздел Евклидовы пространства»	Тема Евклидовы пространствах»				25			8						20		
ОПК-1	Раздел Линейные операторы	Тема Линейные операторы				25			7						15		

		ИТОГО:				50			15						35		

БРС по дисциплине «Алгебра» Направление/Специальность: 01.03.01 «Математика» Модуль 4

Код контролируемой компетенции или ее части	Контролируемый раздел дисциплины	Контролируемая тема дисциплины	Наименование оценочного средства														
			Текущий контроль												Промежуточная аттестаци		
			Опрос	Тест	Коллоквиум	Контрольная работа	Выполнение ЛР	Выполнение КР/КП	СРС(Выполнение ДЗ)	Реферат	Выполнение РГР	…	…	…	Зачет	…	…
ОПК-1	Раздел Основные понятия теории групп »	Тема «Основные понятия теории групп»				25			8						20		
ОПК-1	Раздел Абелевы группы	Тема Абелевы группы				25			7						15		
		ИТОГО:				50			15						35		

Перечень оценочных средств

по дисциплине **Алгебра**

п/п	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в фонде

Аудиторная работа			
	Контрольная работа	Форма проверки качества усвоения студентами учебного материала в соответствии с утвержденной программой.	Комплект вариантов
	Экзамен	Форма проверки качества усвоения студентами учебного материала и выполнения в процессе обучения всех учебных поручений в соответствии с утвержденной программой.	список экзаменационных вопросов
Самостоятельная работа			
	СРС (домашнее задание)	Форма проверки качества усвоения студентами учебного материала в соответствии с утвержденной программой.	Примерный вариант домашнего задания

Приложение 3

Дисциплина **Алгебра**

Вопросы экзамена

1. Системы линейных уравнений и их решение методом Гаусса. СЛУ в матричной форме.

2. Общее и частное решение СЛУ. Однородные и неоднородные системы.

3. Перестановки и подстановки. Определитель n-го порядка. Свойства определителей. Матрицы элементарных преобразований строк и столбцов и их свойства. Миноры, алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке (столбцу).

4. Определитель произведения матриц. Методы вычисления определителей.

5. Обратная матрица. Решение СЛУ методом Крамера.

6. Теорема Кронекера - Капелли. Системы однородных линейных уравнений. Фундаментальная система решений.

7. n-мерные векторы. Линейная зависимость и независимость. Базис и ранг системы векторов.

8. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы.

9. Линейное пространство, линейное подпространство. Линейная зависимость векторов. Размерность пространства. Базис.

10. Линейное подпространство как линейная оболочка и как множество решений однородной СЛУ. Пересечение и сумма подпространств.

11. Определение линейной зависимости системы векторов и базисных векторов системы.

12. Линейные пространства, линейная зависимость системы векторов, подпространства, размерность, базис, координаты вектора подпространства, зависимость координат вектора от выбора базиса.

13. Преобразования координат при изменении базиса, матрица преобразования. Параметризация множества всех базисов группой невырожденных матриц.

14. Подпространство линейного пространства. Операции над подпространст-вами. Теорема о размерности суммы подпространств.

15.Евклидовы пространства. Скалярное произведение .Неравенство Коши – Буняковского.

16.Ортогональное дополнение. Задача об ортогональной проекции и ортогональной составляющей. Ортогональные базисы.

17.Матрица Грама и ее свойства. Ортогонализация Грама – Шмидта.

18. Билинейные формы, матрица билинейной формы и ее зависимость от базиса.

19. Квадратичные формы. Канонические базисы. Теорема Лагранжа.

20. Индексы квадратичной формы и их независимость от выбора канонического базиса.

21. Знакоопределенность квадратичной формы. Критерий Сильвестра.

22. Ортогональные базисы. Существование и построение ортогонального базиса. Ортогональные преобразования координат. Матрица ортогонального преобразования.

24. Сопряженный оператор и его свойства.

25. Ортогональный оператор. Матрица ортогонального оператора.

26. Самосопряженный оператор. Свойства ССО.

Каждому студенту достается билет, содержащий 2 вопроса из данного перечня. Ответ на каждый вопрос оценивается от 0 до 12 баллов в зависимости от полноты и правильности ответов.

Примерные варианты домашних заданий

по дисциплине **Алгебра**

3.1. Перемножить перестановки в указанном и обратном порядках:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

3.6. Определить четность перестановок:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

17.1. Перемножить матрицы:

з) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

6.9. Найти все значения λ, при которых вектор b линейно выражается через векторы a_1, a_2, a_3:

а) $a_1 = (2, 3, 5)$, $a_2 = (3, 7, 8)$, $a_3 = (1, -6, 1)$, $b = (7, -2, \lambda)$;

6.12. Найти какой-нибудь базис системы векторов и выразить через этот базис остальные векторы системы:

а) $a_1 = (5, 2, -3, 1)$, $a_2 = (4, 1, -2, 3)$, $a_3 = (1, 1, -1, -2)$, $a_4 = (3, 4, -1, 2)$, $a_5 = (7, -6, -7, 0)$;

8.1. Найти общее решение и одно частное решение системы линейных уравнений, используя метод Гаусса:

а) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2; \end{cases}$

8.4. Найти общее решение и фундаментальную систему решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0, \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0, \\ -x_3 + x_5 = 0, \end{cases}$

10.4. Пользуясь определением, вычислить следующие определители:

а) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$;

12.1. Разлагая по третьей строке, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

13.1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix}$;

14.1. Вычислить следующие определители методом рекуррентных соотношений (см. 4.1):

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}$;

18.9. Найти с помощью элементарных преобразований обратную к матрице:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

20.1. Вычислить выражения:

а) $(2+i)(3-i) + (2+3i)(3+4i)$;

б) $(2+i)(3+7i) - (1+2i)(5+3i)$;

ж) $\dfrac{(2+i)(4+i)}{1+i}$; з) $\dfrac{(3-i)(1-4i)}{2-i}$;

20.11. Решить уравнения:

а) $z^2 = i$; б) $z^2 = 3 - 4i$;

21.2. Вычислить выражения:

а) $(1+i)^{1000}$; б) $(1+i\sqrt{3})^{150}$; в) $(\sqrt{3}+i)^{30}$;

25.1. Разделить многочлен $f(x)$ с остатком на многочлен $g(x)$:

а) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$, $g(x) = x^2 - 3x + 1$;

б) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$, $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

29.1. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших дробей над полем комплексных чисел:

а) $\dfrac{x^2}{(x-1)(x+2)(x+3)}$; б) $\dfrac{1}{x^4+4}$; в) $\dfrac{x}{(x^2-1)^2}$;

31.9. Следующие многочлены выразить в виде многочленов от элементарных симметрических многочленов:

а) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$;

34.3. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций:

а) $\sin x$, $\cos x$;

б) 1, $\sin x$, $\cos x$;

в) $\sin x$, $\sin 2x$, $\dots$, $\sin nx$;

34.14. Доказать, что системы векторов линейно независимы, и дополнить их до базиса пространства строк:

а) $a_1 = (2, 2, 7, -1)$, $a_2 = (3, -1, 2, 4)$, $a_3 = (1, 1, 3, 1)$;

35.7. Выяснить, какие из следующих совокупностей многочленов образуют подпространства в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ (см. 34.12) и найти их базисы и размерности:

а) многочлены, имеющие данный корень $\alpha \in \mathbb{R}$;

б) многочлены, имеющие данный корень $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$;

в) многочлены, имеющие данные корни $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$;

г) многочлены, имеющие данный простой корень $\alpha \in \mathbb{R}$.

35.11. Найти базис и размерность линейной оболочки следующей системы векторов:

а) $a_1 = (1, 0, 0, -1)$, $a_2 = (2, 1, 1, 0)$, $a_3 = (1, 1, 1, 1)$, $a_4 = (1, 2, 3, 4)$, $a_5 = (0, 1, 2, 3)$;

35.14. Найти размерности суммы и пересечения линейных оболочек систем векторов пространства $\mathbb{R}^4$:

а) $S = \langle(1, 2, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\rangle$,
$T = \langle(1, 0, 1, 0), (1, 3, 0, 1)\rangle$;

35.15. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ и $\langle b_1, b_2, b_3\rangle$:

а) $a_1 = (1, 2, 1)$, $b_1 = (1, 2, 2)$,
$a_2 = (1, 1, -1)$, $b_2 = (2, 3, -1)$,
$a_3 = (1, 3, 3)$, $b_3 = (1, 1, -3)$;

35.16. Найти систему линейных уравнений, задающую систему векторов:

а) $\langle(1, -1, 1, 0),\ (1, 1, 0, 1),\ (2, 0, 1, 1)\rangle$;

37.32. Не производя вычислений, выяснить, эквивалентны ли билинейные функции:

а) $f_1(x, y) = 2x_1y_2 - 3x_1y_3 + x_2y_3 - 2x_2y_1 - x_3y_2 + 3x_3y_1$,
$f_2(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_1y_3 - 3x_3y_1$;

37.33. Привести к каноническому виду кососимметрические билинейные функции:

а) $x_1y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 + 2x_2y_3 + x_3y_1 - 2x_3y_2$;

б) $2x_1y_2 + x_1y_3 - 2x_2y_1 + 3x_2y_3 - x_3y_1 - 3x_3y_2$;

38.11. При каких значениях λ следующие квадратичные функции являются положительно определёнными:

а) $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

б) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$;

40.15. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

40.16. Выяснить, какие из следующих матриц можно привести к диагональному виду путём перехода к новому базису над полем $\mathbb{R}$ или над полем $\mathbb{C}$:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$;

41.1. Найти жорданову форму матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;

43.7. Дополнить до ортогонального базиса систему векторов евклидова и эрмитова пространства:

а) $((1, -2, 2, -3), (2, -3, 2, 4))$;

б) $((1, 1, 1, 2), (1, 2, 3, -3))$;

43.18. Найти уравнения, задающие ортогональное дополнение к подпространству, заданному системой уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$

43.21. Найти расстояние от вектора x до подпространства, заданного системой уравнений:

а) $x = (2, 4, 0, -1)$, $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0; \end{cases}$

43.28. Найти длины сторон и внутренние углы треугольника ABC в пространстве $\mathbb{R}^5$:

а) $A = (2, 4, 2, 4, 2)$, $B = (6, 4, 4, 4, 6)$, $C = (5, 7, 5, 7, 2)$;

43.38. Найти угол между вектором x и подпространством L:

а) $L = \langle(3, 4, -4, -1), (0, 1, -1, 2)\rangle$, $x = (2, 2, 1, 1)$;

43.43. Найти угол между подпространствами

$\langle(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0,)\rangle$, $\langle(1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1)\rangle$.

45.4. Найти собственный ортонормированный базис и матрицу в этом базисе оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$;

45.19. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную функцию к главным осям:

а) $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$;

б) $11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$;

46.6. Найти канонический базис и матрицу в этом базисе ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

а) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$;

46.16. Представить в виде произведения положительного самосопряжённого и ортогонального операторов оператор, заданный в некотором ортонормированном базисе матрицей:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

51.7. В евклидовом пространстве найти расстояние от точки a до плоскости P, если:

а) $a = (4, 1, -4, -5)$, $P = (3, -2, 1, 5) + \langle (2, 3, -2, -2), (4, 1, 3, 2) \rangle$;

51.14. В евклидовом пространстве найти расстояние между плоскостями P_1 и P_2, если:

а) $P_1 : \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \end{cases}$

$P_2 = (0, 2, 6, -5) + \langle (-7, 1, 1, 1), (-10, 1, 2, 3) \rangle$;

55.1. Какие из указанных числовых множеств с операциями являются группами:

а) $(A, +)$, где A одно из множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$;

б) $(A, \cdot)$, где A одно из множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$;

в) $(A_0, \cdot)$, где A одно из множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, а $A_0 = A \setminus \{0\}$;

г) $(n\mathbb{Z}, +)$, где n натуральное число;

55.5. Какие из указанных ниже совокупностей отображений множества $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ в себя образуют группу относительно умножения:

а) множество всех отображений;

б) множество всех инъективных отображений;

в) множество всех сюръективных отображений;

г) множество всех биективных отображений;

д) множество всех чётных перестановок;

е) множество всех нечётных перестановок;

ж) множество всех транспозиций;

55.10. Доказать, что множество функций вида

$$y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

где a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc \neq 0$, является группой относительно операции композиции функций.

55.31. Найти группы автоморфизмов групп:

а) $\mathbb{Z}$; б) $\mathbf{Z}_p$; в) $\mathbf{S}_3$;

г) $\mathbf{V}_4$; д) $\mathbf{D}_4$; е) $\mathbf{Q}_8$.

55.38. Будут ли изоморфны группы

а) $\mathbf{SL}_2(3)$; б) $\mathbf{S}_4$; в) $\mathbf{A}_5$?

56.3. Найти порядок элемента группы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_5$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_6$;

в) $\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \in \mathbb{C}^*$; г) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \in \mathbb{C}^*$;

56.15. В циклической группе $\langle a \rangle$ порядка n найти все элементы g, удовлетворяющие условию $g^k = e$, и все элементы порядка k при:

а) $n = 24$, $k = 6$; б) $n = 24$, $k = 4$;

в) $n = 100$, $k = 20$; г) $n = 100$, $k = 5$;

д) $n = 360$, $k = 30$; е) $n = 360$, $k = 12$;

ж) $n = 360$, $k = 7$.

57.1. Найти все орбиты группы G невырожденных линейных операторов, действующих на n-мерном пространстве V, если:

а) G — группа всех невырожденных линейных операторов;

б) G группа ортогональных операторов;

в) G группа операторов, матрицы которых в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$ диагональны;

г) G — группа операторов, матрицы которых в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$ верхние треугольные.

57.2. Найти стационарную подгруппу G_a вектора $a = e_1 + e_2 + \ldots$ $\ldots + e_n$, если:

а) G — группа из 57.1, в); б) G — группа из 57.1, г).

57.12. Найти порядок:

а) группы вращений куба;

б) группы вращений тетраэдра;

в) группы вращений додекаэдра.