Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов»

Факультет физико-математических и естественных наук

Рекомендовано МССН
«Математика и механика»

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины: «Функциональный анализ»

Рекомендуется для направления (ий) подготовки (специальности (ей))

01.03.01 «Математика»
(указываются код и наименования направления(ий)
подготовки (специальности (ей) и/или профилей (специализаций)

Квалификация (степень) выпускника ___________бакалавр___________
(указывается квалификация (степень) выпускника в соответствии с ОС ВПО РУДН)

1. Цели и задачи дисциплины: Целью изучения курса «Функциональный анализ» является знакомство студентов с основами современной теории меры, функциональных пространств и операторов. Основное содержание связано с линейной теорией – элементы нелинейного функционального анализа более подробно освещаются в последующей дисциплине «Нелинейные модели математической физики». С одной стороны, к созданию функционального анализа привели различные прикладные задачи. С другой стороны, функциональный анализ уже давно стал универсальным языком математики, объединяя общие теории, выросшие из основных понятий математического анализа. Курс необходим для усвоения практически всех последующих математических дисциплин направления.

2. Место дисциплины в структуре ООП:

СДМ, Б.3 Профессиональный, Б.3.2 Вариативная часть; требуются знания математического анализа, алгебры, дифференциальных уравнений. Является предшествующей для дисциплин (модулей): уравнения математической физики, нелинейные модели математической физики, численные методы, методы оптимизации, управляемые системы с последействием, дисциплины по выбору, спецсеминар, научно-исследовательской работа.

3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование и развитие следующих компетенций:

ПК-1.004: Проведение работ в сфере профессионального обучения, профессионального образования и дополнительного профессионального образования

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать: теорию меры и интегала Лебега, основные факты о функциональных пространствах и линейных операторах в банаховых и гильбертовых пространствах, первоначальные сведения о нелинейных отображениях.

Уметь: формулировать прикладные задачи в терминах и на языке функционального анализа и применять результаты функционального анализа при решении прикладных задач в таких областях как дифференциальные уравнения, вычислительная математика и оптимизация.

Владеть*:* приемами исследования сходимости, полноты, компактности в различных метрических и линейных нормированных пространствах, методами решения уравнений с линейными и нелинейными операторами в функциональных пространствах, а также вариационных задач.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет **7** зачетных единиц.

Вид учебной работы	Всего	Семестры

	часов	В	С		
Аудиторные занятия (всего)	118	54	64		
В том числе:					
Лекции	50	18	32		
Практические занятия (ПЗ)	68	36	32		
Семинары (С)					
Лабораторные работы (ЛР)					
Самостоятельная работа (всего)	134	54	80		
В том числе:					
Курсовая работа					
Домашние задания	98	54	44		
Подготовка к экзамену	36		36		
Общая трудоемкость час	252	108	144		
зач. ед.	7	3	4		

5. Содержание дисциплины

Курс состоит из четырех основных разделов.

5.1. Содержание разделов дисциплины

Раздел 1. Теория меры и интеграла Лебега.

Построение меры Лебега в $\mathbf{R}^n$. Продолжение меры (объема) с кольца элементарных множеств на σ-кольцо измеримых множеств. Измеримые функции и действия над ними. Интеграл Лебега от простой функции. Построение интеграла для произвольной неотрицательной измеримой функции. Обобщение на случай знакопеременных и комплекснозначных функций.

Основные свойства интеграла Лебега. Теорема Леви о монотонной сходимости. Теорема Фату. Теорема Лебега об ограниченной сходимости. Теорема Фубини. Пространство Лебега $L_1(Q)$, его полнота, плотность непрерывных функций в $L_1(Q)$.

Раздел 2. Метрические пространства.

Аксиомы и основные понятия метрического пространства. Примеры. Полные метрические пространства. Компактные множества в метрических пространствах. Пространство непрерывных функций. Непрерывные отображения метрических пространств. Неподвижные точки. Принцип сжимающих отображений и его применения к алгебраическим, интегральным, и обыкновенным дифференциальным уравнениям.

<u>Раздел 3.</u> Банаховы и гильбертовы пространства.

Аксиомы и основные понятия линейного пространства. Нормированные и банаховы пространства. Примеры: пространства числовых последовательностей l_p, пространства непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций $C^k(\bar{U})$, лебеговы пространства $L_p(Q)$. Неравенства Гельдера и Минковского. Теорема Стоуна-Вейерштрасса.

Сопряженное пространство. Сильная и слабая сходимость в банаховом пространстве, связь между ними. Представление линейных непрерывных функционалов в некоторых пространствах. Слабая сходимость функционалов. Теорема Хана-Банаха (в случае сепарабельного пространства) и ее применения.

Пространства со скалярным произведением. Гильбертовы пространства. Представление линейных непрерывных функционалов в гильбертовом пространстве. Примеры: пространства l_2 и $L_2(Q)$. Задача о наилучшем приближении. Разложение гильбертова пространства в сумму ортогональных подпространств. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля-Стеклова. Полные ортогональные системы. Теорема Рисса-Фишера.

<u>Раздел 4.</u> Линейные операторы в банаховых и гильбертовых пространствах.

Ограниченность и норма линейного оператора. Критерий ограниченности. Пространство линейных ограниченных операторов. Связь между сильной и равномерной сходимостью. Принцип равномерной ограниченности, теорема Банаха-Штейнгауза и ее применения. Обратный оператор. Теорема Банаха об обратном операторе. Замкнутые операторы. Теорема о замкнутом графике.

Резольвента оператора, спектр оператора, собственные элементы и собственные значения. Формула спектрального радиуса. Ряд Неймана. Компактные операторы. Спектр компактного оператора. Теоремы Фредгольма.

Сопряженный оператор, линейность, ограниченность, норма. Сопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Самосопряженные операторы, унитарные операторы, неотрицательные и положительно определенные операторы, ортопроекторы. Спектральные свойства компактных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Теорема Гильберта-Шмидта.

Элементы теории неограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Сопряженный к неограниченному оператору. Симметрические и самосопряженные операторы. Преобразование Кэли, индексы дефекта.

5.2 Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами

№	Наименование	№ № разделов данной дисциплины, необходимых для

п/п	обеспечиваемых (последующих) дисциплин	изучения обеспечиваемых (последующих) дисциплин								
		1	2	3	4					
1.	Уравнения математической физики	+	+	+	+					
2.	Нелинейные модели математической физики	+	+	+	+					
3.	Численные методы	+	+	+	+					
4.	Методы оптимизации	+	+	+	+					
5.	Управляемые системы с последействием	+	+	+	+					

5.3. Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекции	Практич. занятия	Лаб.	СРС	Всего часов
1.	Теория меры и интеграла Лебега.	12	12		33	57
2.	Метрические пространства.	12	12		33	57
3.	Банаховы и гильбертовы пространства.	14	24		33	71
4.	Линейные операторы в банаховых и гильбертовых пространствах.	12	20		35	67

6. Лабораторный практикум: не предусмотрен.

7. Практические занятия (семинары):

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудоемкость (час.)
1		Кольцо и σ-кольцо множеств, мера Лебега	2
2		Измеримые функции	2
3		Интеграл Лебега, конструкция, основные свойства	2
4		Предельный переход под знаком интеграла	2
5		Кратный и повторный интегралы	2
6		Лебегово пространство	2
7		Аксиомы метрики, примеры метрических пространств	2

8		Полнота	2
9		Компактность	2
10		Теорема Арцела	2
11		Применения принципа сжимающих отображений	4
12		Аксиомы линейного пространства	2
13		Норма	2
14		Банаховы пространства $C^k(\bar{U})$, всюду плотные семейства функций в $C(\bar{U})$	2
15		Банаховы пространства l_p и $L_p(Q)$, неравенства Гельдера и Минковского	2
16		Сопряженное пространство, норма функционала	2
17		Общий вид линейного непрерывного функционала в пространстве l_p и $L_p(Q)$, и $C[0,1]$.	2
18		Сильная и слабая топологии в банаховом пространстве, слабая компактность	2
19		Применения теоремы Хана-Банаха	2
20		Скалярное произведение, неравенство Коши-Буняковского, тождество параллелограмма	2
21		Гильбертовы пространства l_2 и $L_2(Q)$, ортонормированные системы	2
22		Ряды Фурье	4
23		Доказательство ограниченности и нахождение нормы линейного оператора в банаховом пространстве	2
24		График оператора, замкнутые операторы	2
25		Обратный оператор	2
26		Различные виды сходимости в пространстве линейных ограниченных операторов	2
27		Спектр ограниченного оператора в банаховом пространстве, примеры вычисления спектра	4
28		Компактные операторы, уравнения с компактным оператором	4
29		Сопряженный к ограниченному оператору в гильбертовом пространстве, нахождение сопряженного оператора.	2
30		Неограниченные операторы в гильбертовом пространстве.	2

8. Примерная тематика курсовых проектов (работ):

1. Обобщенные функции.

2. Преобразование Фурье.

3. Пространства Соболева.

4. Фундаментальные решения дифференциальных операторов.

5. Банаховы алгебры.

6. Преобразование Гельфанда.

7. Спектральное разложение нормальных операторов.

8. Функциональное исчисление нормальных операторов.

9. Нелинейные операторы. Элементы дифференциального исчисления в банаховых пространствах.

10. Теорема Шаудера о неподвижной точке.

11. Монотонные операторы.

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

а) **Основная литература**

Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. − М.: Высшая школа, 1982. – 271 с.

Рудин У. Основы математического анализа. − М.: Мир, 1976. – 320 с.

Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.

Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 296 с.

Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. – М.: Наука, 1984. – 256 с.

б) **Дополнительная литература**

Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 544 с.

Рудин У. Функциональный анализ. − М.: Мир, 1975. – 445 с.

Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. − М.: Мир, 1977. – 232 с.

В.А. Садовничий. Теория операторов. – М.: Изд. МГУ, 2004. – 384 с.

А.А. Кириллов, А.Д. Гвишиани. Теоремы и задачи функционального анализа. – М.: Наука, 1988. – 400 с.

Вся литература имеется в библиотеке РУДН *и/или в электронном виде на кафедре.*

в) программное обеспечение Windows, Microsoft Office, Maple, TeX, WinEdt.

г) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы: Yandex, Goole, MathNet.

10. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Лекционная аудитория в учебном корпусе РУДН, ул. Орджоникидзе, 3 (ауд. 509, 398)

Ноутбуки – 12 шт, мультимедийный проектор – 1 шт, экран – 1шт.

11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:

Курс состоит из лекций и практических занятий и сопровождается самостоятельной работой студента. Соотношение часов между ними следующее:

– в четвертом семестре – 2 часа лекций, 2 часа практических занятий и 4 часа самостоятельной работы в неделю,

– в пятом семестре – 2 часа лекций, 2 часа практических занятий и 4 часа самостоятельной работы в неделю.

В каждом семестре проводятся две контрольные работы, результаты которых входят в балльно-рейтинговую систему оценки знаний. Каждая контрольная работа занимает целое практическое занятие (2 часа). Рекомендуемое время проведения контрольных работ – 7-я и 14-я недели семестра. Результаты выполнения домашних заданий также входят в балльно-рейтинговую систему оценки знаний.

Кроме того, в оценку работы студента в пятом семестре входит выполнение курсовой работы. Тема курсовой работы связана с одним из важных разделов функционального анализа, не затронутым на лекциях. Изучение теоретического материала закрепляется решением задачи на выбранную тему.

Особенность курса заключается в его практической направленности: за каждым понятием, теоретическим положением, теоремой и т.д. стоит определенный набор задач, умение решать которые является основным показателем успешного освоения курса. Базой для данного курса являются непосредственно предшествующие курсы математического анализа, алгебры и геометрии. С другой стороны, данный курс является фундаментом для последующих дисциплин, таких как уравнения математической физики, нелинейные модели математической физики, управляемые системы с последействием.

Разработчики:

Профессор МИ
им. С.М. Никольского ____________________ Л..Е. Россовский

Директор МИ
им. С.М. Никольского ____________________ А.Л. Скубачевский

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Факультет физико-математических и естественных наук

Математический институт имени С.М.Никольского

УТВЕРЖДЕН
На заседании института
« » 2021 г.,
протокол №
Директор института

______________ А.Л. Скубачевский

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по учебной дисциплине Функциональный анализ

Рекомендуется для направления подготовки 01.03.01 Математика

Квалификация (степень) выпускника Бакалавр

Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине «Функциональный анализ (семестр В)**»**
название

Направление/Специальность: 01.03.01 «Математика»
шифр название

Код контролируемой компетенции или ее части	Контролируемый раздел дисциплины	Контролируемая тема дисциплины	Наименование оценочного средства					Баллы темы	Баллы раздела
			Текущий контроль				Промежуточная аттестация		
			Контрольная работа 1	Контрольная работа 2	СРС (ДЗ)	Курсовая работа	Экзамен		
ПК-1.004, УК-4	Теория меры и интеграла	Мера	5		2		5	12	30
		Интеграл Лебега	5		3		10	18	
ПК-1.004, УК-4	Метрические пространства	Полнота и компактность	3	2	3		10	18	30
		Непрерывные отображения	2	3	2		5	12	
ПК-1.004, УК-4	Банаховы и гильбертовы пространства	Банаховы пространства		10	10		20	40	40
		Гильбертовы пространства							
		ИТОГО:	15	15	20		50	100	100

Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине «Функциональный анализ (семестр С)**»**
название

Направление/Специальность: 01.03.01 «Математика»
шифр название

Код контролируемой компетенции или ее части	Контролируемый раздел дисциплины	Контролируемая тема дисциплины	Наименование оценочного средства					Баллы темы	Баллы раздела
			Текущий контроль				Промежуточная аттестация		
			Контрольная работа 1	Контрольная работа 2	СРС (ДЗ)	Курсовая работа	Экзамен		
ПК-1.004, УК-4	Банаховы и гильбертовы пространства	Банаховы пространства							30
		Гильбертовы пространства	10		5		15	30	
ПК-1.004, УК-4	Линейные операторы	Ограниченные операторы	10	10	5		20	45	70
		Неограниченные операторы		10			15	25	
		ИТОГО:	20	20	10		50	100	100

Комплект экзаменационных билетов
по дисциплине Функциональный анализ

Дисциплина Функциональный анализ
(наименование дисциплины)

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

1. Линейность интеграла Лебега.
2. Теоремы Вейерштрасса об аппроксимации.

Составитель ______________________________ Л.Е.Россовский
(подпись)

Директор института___________________ А.Л. Скубачевский
(подпись)

«____»___________________20 г.

Дисциплина Функциональный анализ
(наименование дисциплины)

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 2

1. Плотность непрерывных функций в L2(-π, π).
2. Принцип Шаудера существования неподвижной точки.

Составитель ______________________________ Л.Е.Россовский
(подпись)

Директор института___________________ А.Л. Скубачевский
(подпись)

«____»___________________20 г.

Дисциплина Функциональный анализ
(наименование дисциплины)

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 3

1. Теорема Банаха-Штейнгауза.
2. Сопряженный оператор. Определение и свойства.

Составитель ______________________________ Л.Е.Россовский
(подпись)

Директор института___________________ А.Л. Скубачевский
(подпись)

«____»___________________20 г.

Примерный перечень оценочных средств
по дисциплине Функциональный анализ

12.1. Перечень оценочных средств

п/п	**Наименование оценочного средства**	**Краткая характеристика оценочного средства**	**Представление оценочного средства в фонде**
		Аудиторная работа	
	Контрольная работа	Форма проверки качества усвоения студентами учебного материала в соответствии с утвержденной программой.	Комплект вариантов контрольных работ
	Экзамен	Форма проверки качества усвоения студентами учебного материала и выполнения в процессе обучения всех учебных поручений в соответствии с утвержденной программой.	Комплект экзаменационных билетов, список экзаменационных вопросов
		Самостоятельная работа	
	Индивидуальное домашнее задание	Форма проверки качества усвоения студентами учебного материала в соответствии с утвержденной программой.	Комплект вариантов домашних заданий

Домашние задания (пример заданий)

Supplement 1

Complementary questions and problems on the course of Functional Analysis, 4th semester Applied Mathematics

Task 1. Prove the following implication in a Banach space:

$$x_n \to x,\ n \to \infty \quad \Longrightarrow \quad s_n = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \to x,\ n \to \infty.$$

Task 2. Let H be a Hilbert space and a sequence $x_n \in H$ converge to x weakly in H. Prove the existence of a subsequence x_{n_k} such that

$$\left\| \frac{x_{n_1} + \ldots + x_{n_k}}{k} - x \right\| \to 0, \quad k \to \infty.$$

Task 3. Let $A : H \to B$ be a bounded linear operator acting from a Hilbert space H to a Banach space B and Ω be the closed unit ball in H. Is it true that the image $A(\Omega)$ of the ball Ω under the mapping A is a closed set in B?

Task 4. Let B be a Banach space. Prove that the convex hull $Co(M)$ of any finite set $M = \{x_i \in B\,(i = 1, \cdots, n)\}$ is closed in B.

Task 5. Let vectors $x_1, \cdots, x_n$ form a basis of a finite dimensional Euclidean space E^n and $M = \{0, x_1, \cdots, x_n\}$. Prove that the convex hull $Co(M)$ has a non-empty interior.

Task 6. Let Ω be a compact set in a Banach space such that $\|x\| \geqslant R$ for each $x \in \Omega$. Prove that the set $\Omega' = \{Rx/\|x\| : x \in \Omega\}$ is also compact.

Task 7. Apply the Schauder fixed point theorem to the integral equation

$$u(x) = \int_0^1 K(x,y)u^2(y)\,dy + f(x)$$

Контрольные работы (пример заданий)

Supplement 2

Functional analysis, 5th semester
Test 2.1, Variant 1

Task 1. Let E be a Banach space and $x_n \in E$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Prove that if $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, then the series $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ converges in E.

Task 2. Make sure that the operator

$$T : L_2(0,1) \to L_1(0,1), \quad Tf(x) = f(x^{4/3})$$

is bounded and find its norm.

Task 3. Let a continuous linear functional $f : H^1(-1,1) \to \mathbb{C}$ be given by

$$f(x) = \int\limits_{-1}^{1} e^{-t}(x(t) + x'(t))\, dt.$$

Find the element $y \in H^1(-1,1)$ such that $f(x) = (x, y)_{H^1(-1,1)}$.

Task 4. Calculate the distance from the function $u(t) = \cos t$ to the subspace $\mathring{H}^1(0,1)$ of the space $H^1(0,1)$ with the standard inner product.

Hint: Find the orthogonal complement to $\mathring{H}^1(0,1)$ in $H^1(0,1)$ first.

Task 5. Let $A : H \to B$ be a bounded linear operator acting from a Hilbert space H to a Banach space B and Ω be the closed unit ball in H. Is it true that the image $A(\Omega)$ of the ball Ω under the mapping A is a closed set in B?

Functional analysis, 5th semester
Test 2.1, Variant 2

Task 1. Let x_n and y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ be Cauchy sequences in a normed space E. Prove that the number sequence $\lambda_n = \|x_n - y_n\|$ converges.

Task 2. Fixed points $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant 1$, define an operator $A : C[0,1] \to C[0,1]$ by setting

$$Ax(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} t^k x(t_k).$$

Find $\|A\|$.

Task 3. Let a continuous linear functional $f : H^1(-1,1) \to \mathbb{C}$ be given by

$$f(x) = \int_{-1}^{1} (x(t) \cos t + x'(t) \sin t) \, dt.$$

Find the element $y \in H^1(-1,1)$ such that $f(x) = (x, y)_{H^1(-1,1)}$.

Task 4. Calculate the distance from the function $u(t) = t^2$ to the subspace $\widetilde{H}^1(0,1) = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = 2v(1)\}$ of the space $H^1(0,1)$ with the standard inner product.

Hint: Find the orthogonal complement to $\widetilde{H}^1(0,1)$ in $H^1(0,1)$ first.

Task 5. Let $A : H \to B$ be a bounded linear operator acting from a Hilbert space H to a Banach space B and Ω be the closed unit ball in H. Is it true that the image $A(\Omega)$ of the ball Ω under the mapping A is a closed set in B?

Functional analysis, 5th semester
Test 2.1, Variant 2

Task 1. Let x_n and y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ be Cauchy sequences in a normed space E. Prove that the number sequence $\lambda_n = \|x_n - y_n\|$ converges.

Task 2. Fixed points $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant 1$, define an operator $A : C[0,1] \to C[0,1]$ by setting

$$Ax(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t^k x(t_k).$$

Find $\|A\|$.

Task 3. Let a continuous linear functional $f : H^1(-1,1) \to \mathbb{C}$ be given by

$$f(x) = \int_{-1}^{1} (x(t)\cos t + x'(t)\sin t)\, dt.$$

Find the element $y \in H^1(-1,1)$ such that $f(x) = (x, y)_{H^1(-1,1)}$.

Task 4. Calculate the distance from the function $u(t) = t^2$ to the subspace $\widetilde{H}^1(0,1) = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = 2v(1)\}$ of the space $H^1(0,1)$ with the standard inner product.

Hint: Find the orthogonal complement to $\widetilde{H}^1(0,1)$ in $H^1(0,1)$ first.

Task 5. Let $A : H \to B$ be a bounded linear operator acting from a Hilbert space H to a Banach space B and Ω be the closed unit ball in H. Is it true that the image $A(\Omega)$ of the ball Ω under the mapping A is a closed set in B?

Functional analysis, 5th semester
Test 2.1, Variant 2

Task 1. Let x_n and y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ be Cauchy sequences in a normed space E. Prove that the number sequence $\lambda_n = \|x_n - y_n\|$ converges.

Task 2. Fixed points $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant 1$, define an operator $A : C[0, 1] \to C[0, 1]$ by setting

$$Ax(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} t^k x(t_k).$$

Find $\|A\|$.

Task 3. Let a continuous linear functional $f : H^1(-1, 1) \to \mathbb{C}$ be given by

$$f(x) = \int_{-1}^{1} (x(t) \cos t + x'(t) \sin t)\, dt.$$

Find the element $y \in H^1(-1, 1)$ such that $f(x) = (x, y)_{H^1(-1,1)}$.

Task 4. Calculate the distance from the function $u(t) = t^2$ to the subspace $\widetilde{H}^1(0, 1) = \{v \in H^1(0, 1) : v(0) = 2v(1)\}$ of the space $H^1(0, 1)$ with the standard inner product.

Hint: Find the orthogonal complement to $\widetilde{H}^1(0, 1)$ in $H^1(0, 1)$ first.

Task 5. Let $A : H \to B$ be a bounded linear operator acting from a Hilbert space H to a Banach space B and Ω be the closed unit ball in H. Is it true that the image $A(\Omega)$ of the ball Ω under the mapping A is a closed set in B?

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО КУРСУ

4 семестр

1. Функции множества.
2. Мера элементарных множеств в евклидовом пространстве. Регулярность меры.
3. Внешняя мера множества. Свойства внешней меры симметрической разности множеств.
4. Продолжение меры с кольца элементарных множеств на σ-кольцо измеримых множеств.
5. Измеримые функции и действия над ними.
6. Интеграл Лебега от простой функции. Построение интеграла для произвольной неотрицательной измеримой функции.
7. Интеграл Лебега от знакопеременных и комплексных функций.
8. Простейшие свойства интеграла Лебега.
9. Счетная аддитивность интеграла Лебега.
10. Линейность интеграла Лебега.
11. Теорема Леви о монотонной сходимости.
12. Теорема Фату.
13. Теорема Лебега об ограниченной сходимости.
14. Теорема Фубини.
15. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана-Стилтьеса. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.
16. Пространство Лебега $L_2(-\pi, \pi)$, его полнота.
17. Плотность непрерывных функций в $L_2(-\pi, \pi)$.
18. Ортогональные системы в $L_2(-\pi, \pi)$. Теорема Рисса-Фишера.
19. Полные ортогональные системы. Равенство Парсеваля.
20. Полнота тригонометрической системы в $L_2(-\pi, \pi)$
21. Алгебры функций.
22. Теорема Стоуна.
23. Теоремы Вейерштрасса об аппроксимации.
24. Метрическое пространство. Основные понятия. Примеры.
25. Полнота метрического пространства. Теорема о вложенных шарах.
26. Полное метрическое пространство не является объединением счетного числа нигде не плотных множеств (теорема Бэра).
27. Компактные множества в метрических пространствах. Эквивалентные определения компактности.
28. Пространство непрерывных функций. Теорема Арцела — Асколи.
29. Непрерывные отображения метрических пространств. Оператор Немыцкого.
30. Принцип сжимающих отображений.
31. Примеры применения принципа сжимающих отображений.
32. Теорема Брауэра о неподвижной точке (схема доказательства для произвольной размерности n, полное доказательство для n=1).
33. Нормированные и банаховы пространства. Примеры: лебеговы пространства, пространства последовательностей, пространства непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций.
34. Выпуклая оболочка.
35. Нелинейные вполне непрерывные операторы и их конечномерные аппроксимации.
36. Принцип Шаудера существования неподвижной точки.
37. Примеры применения принципа Шаудера.
38. Теоремы о неподвижных точках, вытекающие из принципа Шаудера.

5 семестр

1. Линейные операторы в нормированных пространствах. Непрерывность, ограниченность и норма линейного оператора.
2. Пространство линейных ограниченных операторов. Сильная и равномерная сходимости.

3. Сопряженное к нормированному пространству, его полнота.
4. Теорема Банаха-Штейнгауза.
5. Обратный оператор. Теорема Банаха об обратном операторе.
6. Теорема об открытом отображении (без доказательства).
7. Замкнутые линейные операторы. Норма графика. Примеры.
8. Представление линейных непрерывных функционалов в пространствах Lp(0,1).
9. Представление линейных непрерывных функционалов в пространствах последовательностей.
10. Представление линейных непрерывных функционалов в пространстве непрерывных функций на отрезке.
11. Гильбертово пространство. Неравенство Коши, тождество параллелограмма. Примеры гильбертова пространства.
12. Ортогональное дополнение. Разложение гильбертова пространства в ортогональную сумму подпространств.
13. Теорема Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.
14. Теорема Хана-Банаха (доказательство для вещественного сепарабельного нормированного пространства).
15. Теорема Хана-Банаха (доказательство для общего случая комплексного нормированного пространства).
16. Следствия из теоремы Хана-Банаха. Дополняемость конечномерных подпространств.
17. Сопряженный оператор. Определение и свойства.
18. Изометрическое вложение нормированного пространства во второе сопряженное. Рефлексивные банаховы пространства.
19. Слабая сходимость в нормированном пространстве. Свойства слабого предела. Слабая замкнутость, слабая компактность.
20. Связь между замкнутостью и слабой замкнутостью в нормированном пространстве. Теорема Мазура (доказательство для гильбертова пространства).
21. Компактность ограниченных множеств в рефлексивном банаховом пространстве (доказательство для сепарабельного пространства).
22. Свойства компактных операторов. Образ компактного оператора.
23. Компактность сопряженного оператора.
24. Свойства оператора $\lambda I - T$, $\lambda \neq 0$, когда оператор T компактен. Альтернатива Фредгольма.
25. Спектр компактного оператора.
26. Сопряженный оператор в смысле гильбертова пространства. Теоремы Фредгольма для уравнения с компактным оператором в гильбертовом пространстве.
27. Самосопряженные компактные операторы в гильбертовом пространстве. Теорема Гильберта-Шмидта.

Критерии оценки

по дисциплине Функциональный анализ

Итоговая оценка выставляется по сумме набранных баллов за практические занятия и экзамен.

95-100 баллов:

- активное участие в мероприятиях, предусмотренных программой дисциплины;
- систематизированное, глубокое и полное освоение навыков и компетенций по всем разделам программы дисциплины;
- использование научной терминологии, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;

- умение эффективно использовать методику программы дисциплины в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- выраженная способность самостоятельно и творчески решать поставленные задачи;
- полная самостоятельность и творческий подход при изложении материала по програмке дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной программой дисциплины и преподавателем.

86- 94 балла:

- участие в мероприятиях, предусмотренных программой дисциплины;
- систематизированное, глубокое и полное освоение навыков и компетенций по всем разделам программы дисциплины;
- использование научной терминологии, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- умение эффективно использовать методику программы дисциплины в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать поставленные задачи в нестандартных производственных ситуациях;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной программой дисциплины и преподавателем.

69-85 баллов:

- участие в мероприятиях, предусмотренных программой дисциплины;
- систематизированное и полное освоение навыков и компетенций по всем разделам программы дисциплины;
- умение использовать методику программы дисциплины в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- усвоение основной литературы, рекомендованной программой дисциплины.

51-68 баллов:

- участие в мероприятиях, предусмотренных программой дисциплины;
- систематизированное и полное освоение навыков и компетенций по всем разделам программы дисциплины;
- удовлетворительное умение использовать методику программы дисциплины в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- удовлетворительное усвоение основной литературы;

31 - 50 баллов – НЕ ЗАЧТЕНО:

- недостаточно полный объем навыков и компетенции в рамках программы дисциплины;
- неумение использовать в практической деятельности научной терминологии, изложение ответа на вопросы с существенными стилистическими и логическими ошибками;
- слабое умение использовать методику программы дисциплины в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- удовлетворительное усвоение основной литературы.

0-30 баллов, НЕ ЗАЧТЕНО:

- отсутствие умений, навыков, знаний и компетенции в рамках программы дисциплины;
- невыполнение лабораторных заданий; отказ от ответа по программе дисциплины;
- игнорирование занятий по дисциплине по неуважительной причине.