

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Факультет физико-математических и естественных наук

Математический институт им. С.М. Никольского

Рекомендовано МССН/МО

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

**Наименование дисциплины:**

**Функциональные пространства**

**Рекомендуется для направления подготовки/специальности**

01.04.01 «Математика»

*(указываются код и наименование направления подготовки/специальности)*

**Направленность программы (профиль):**

«Неклассические задачи анализа и дифференциальных уравнений, математическое моделирование и машинное обучение»

Квалификация (степень) выпускника магистр

*(наименование образовательной программы в соответствии с направленностью (профилем))*

**1. Цели и задачи дисциплины:** основной целью курса является освоение студентами основ современной теории функциональных пространств и ее приложений к задачам современного математического и функционального анализа. Изучение основных свойств пространств Соболева (обобщенные производные, интегральное представление Соболева, приближение бесконечно дифференцируемыми функциями, теоремы вложения, теорема о следах, теоремы о продолжении за пределы области определения).

**2. Место дисциплины в структуре ОП ВО:**

Дисциплина **Функциональные пространства** относится к вариативной части учебного плана.

В таблице № 1 приведены предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций дисциплины в соответствии с матрицей компетенций ОП ВО.

Таблица № 1

**Предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций**

№ п/п	Шифр и наименование компетенции	Предшествующие дисциплины	Последующие дисциплины (группы дисциплин)
<b>Профессиональные компетенции</b>			
	ПК-4. способностью разрабатывать и анализировать концептуальные и теоретические модели решаемых задач проектной и производственно-технологической деятельности	-	Курсовая работа, Государственный экзамен
	ПК-9. способностью к преподаванию математических дисциплин и информатики в общеобразовательных организациях, профессиональных образовательных организациях и образовательных организациях высшего образования	-	Дополнительные главы математического моделирования, Государственный экзамен

**3. Требования к результатам освоения дисциплины:**

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

ПК-4. способностью разрабатывать и анализировать концептуальные и теоретические модели решаемых задач проектной и производственно-технологической деятельности

ПК-9. способностью к преподаванию математических дисциплин и информатики в общеобразовательных организациях, профессиональных образовательных организациях и образовательных организациях высшего образования

В результате изучения дисциплины студент должен:

**Знать:** определения и основные свойства обобщенных производных, пространств Соболева, теоремы о приближении функций из пространств Соболева бесконечно дифференцируемыми функциями, теоремы вложения и сопутствующие интегральные неравенства, понятие следа функции, определение и основные свойства пространств Никольского-Бесова с нецелым порядком гладкости, теоремы о существовании и об описании следов функций из пространств Соболева, теоремы о продолжении за пределы области определения с сохранением и ухудшением дифференциальных свойств.

**Уметь:** применять основные свойства обобщенных производных, пространств Соболева, пространств Никольского-Бесова для решения задач математического и функционального анализа и теории дифференциальных уравнений с частными производными.

**Владеть:** различными современными методами оценивания интегралов, методами работы с нормами интегральных операторов в лебеговых пространствах.

#### 4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры			
		1	2	3	4
<b>Аудиторные занятия (всего)</b>	68			36	32
В том числе:	-	-	-	-	-
<i>Лекции</i>				9	8
<i>Практические занятия (ПЗ)</i>				27	24
<i>Семинары (С)</i>					
<i>Лабораторные работы (ЛР)</i>					
<b>Самостоятельная работа (всего)</b>	148			72	76
Общая трудоемкость	216 час 6 зач. ед.			108	108

#### 5. Содержание дисциплины

##### 5.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела (темы)
1.	Обобщенные производные	Определение обобщенных производных. Примеры. Замкнутость операции обобщенного дифференцирования.
2.	Пространства Соболева.	Определение пространств Соболева. Примеры. Полнота пространств Соболева.
3.	Операторы усреднения	Операторы усреднения с постоянным и переменным шагом.
4.	Плотность гладких функций	Плотность множества бесконечно непрерывно дифференцируемых функций в пространствах Соболева.
5.	Классы областей	Области, звездные относительно шара, и области, удовлетворяющие условию конуса.
6.	Интегральное представление Соболева	Многомерная формула Тейлора. Интегральное представление Соболева для областей, звездных относительно шара.
7.	Неравенства типа интегрального представления	Следствия из интегрального представления Соболева
8.	Максимальный оператор	Оценки нормы максимального оператора

##### 5.2. Разделы дисциплин и виды занятий

№	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практ.	Лаб.	Семина	СРС	Все-
---	---------------------------------	-------	--------	------	--------	-----	------

п/п			зан.	зан.			го час.
1.	Обобщенные производные	2	6			18	26
2.	Пространства Соболева.	2	6			18	26
3.	Операторы усреднения	2	6			18	26
4.	Плотность гладких функций	2	6			18	26
5.	Классы областей	2	6			18	26
6.	Интегральное представление Соболева	2	6			18	26
7.	Неравенства типа интегрального представления	2	6			18	26
8.	Максимальный оператор	3	9			22	34

## 6. Лабораторный практикум *не предусмотрен*

## 7. Практические занятия (семинары) (при наличии)

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудо-емкость (час.)
1	1.	Обобщенные производные	6
2	2.	Пространства Соболева.	6
3	3.	Операторы усреднения	6
4	4.	Плотность гладких функций	6
5	5.	Классы областей	6
6	6.	Интегральное представление Соболева	6
7	7.	Неравенства типа интегрального представления	6
8	8.	Максимального оператор	9

## 8. Примерная тематика курсовых работ

Курсовые работы не предусмотрены дисциплиной.

## 9. Учебно-методическое обеспечение дисциплины:

(указывается наличие печатных и электронных образовательных и информационных ресурсов)

а) основная литература

1. С. Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Любое издание.

2. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. Интегральные представления функций и теоремы вложения. Любое издание.

3. V. I. Burenkov. Sobolev spaces on domains, B.G. Teubner, Stuttgart-Leipzig, 1998.

б) дополнительная литература

1. В. И. Буренков. Функциональные пространства. Основные интегральные неравенства, связанные с пространствами  $\square$ . М.: РУДН, 1989.

2. В. И. Буренков. Функциональные пространства. Пространства Соболева. Часть 1. М.: РУДН, 1991.

3. В. И. Буренков. Функциональные пространства. Пространства Соболева. Часть 2. М.: РУДН, 1994.

## 10. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

учебная аудитория для проведения семинарских занятий, большая аудитория (лекционный зал) для чтения лекций, ноутбук - 1шт., проектор - 1шт., экран - 1шт., ксерокс - 1 шт., принтер - 1шт., сканер - 1 шт.

## 11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:

Соответствие систем оценок (используемых ранее оценок итоговой академической успеваемости, оценок ECTS и балльно-рейтинговой системы (БРС) оценок текущей успеваемости) (В соответствии с Приказом Ректора №996 от 27.12.2006 г.):

Баллы БРС	Традиционные оценки в РФ	Баллы для перевода оценок	Оценки	Оценки ECTS
86 – 100	5	95 - 100	5+	A
		86 - 94	5	B
69 – 85	4	69 - 85	4	C
51 – 68	3	61 - 68	3+	D
		51 - 60	3	E
0 – 50	2	31 - 50	2+	FX
		0 - 30	2	F

1. Студенты обязаны сдавать все задания в сроки, установленные преподавателем.
2. В балльно-рейтинговую систему оценки знаний в течение семестра входят работа на занятии, выполнение домашних заданий и проработка текущего материала. Выдается 4 домашних задания на обозначенные в ФОС темы, каждое из которых оценивается из 10 баллов. По указанным разделам проводится опрос, который максимально оценивается 20 баллами.
3. Студент допускается к итоговому контролю с любым количеством баллов, набранным в семестре. Итоговый контроль содержит 2 задания. На подготовку к ответу отводится 1 час, после чего производится устный опрос студента. Оценивается работа из 50 баллов независимо от количества баллов, полученных в течение семестра.
4. Если после итогового контроля студент получил менее 31 балла, то ему выставляется оценка F и он должен повторить дисциплину в установленном порядке. Если же в итоге студент получил не менее 31 балла, т.е. FX, то ему разрешается добор необходимого (до 51) количества баллов путём повторного одноразового выполнения предусмотренных итоговых контрольных мероприятий; при этом аннулируются, по усмотрению преподавателя, соответствующие предыдущие результаты. Ликвидация задолженностей проводится в период с 07.02 по 28.02 (с 07.09 по 28.09) по согласованию с деканатом.

**12. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю) – прилагается.**

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС 3++ РУДН.

### Разработчики:

профессор Математического института

им. С.М. Никольского  
должность, название кафедры



подпись

В.И. Буренков  
инициалы, фамилия

### Руководитель программы

профессор

Математического института им. С.М. Никольского  
должность, название кафедры



подпись

А.В. Фаминский  
инициалы, фамилия

### Директор Математического института

им. С.М. Никольского



подпись

А.Л. Скубачевский

название кафедры

инициалы, фамилия

**Приложение 1.**  
(обязательное)

**Математический институт им. С.М. Никольского**  
(наименование кафедры)

УТВЕРЖДЕН

на заседании института

«\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г., протокол №\_\_

Директор института

\_\_\_\_\_ А.Л.Скубачевский  
(подпись)

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**  
**ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

**Функциональные пространства**  
(наименование дисциплины)

по направлению 01.04.01 "Математика"  
(код и наименование направления подготовки)

**магистр**  
Квалификация (степень) выпускника

Таблица № 2

Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине «Функциональные пространства»  
название

Направление/Специальность: по направлению 01.04.01 "Математика"

Раздел	Тема	Формы контроля уровня освоения ООП												Баллы темы	Баллы раздела	
		Опрос	Тест	Коллоквиум	Реферат	Выполнение ЛР	Выполнение ДЗ	Выполнение РГР	Выполнение КР	Выполнение КП	Работа на занятии	Работа на Инт. Занятии	Экзамен			Прочие формы контроля
Современные проблемы математики и прикладной математики	Преобразования Фурье основных и обобщенных функций										1		3	1	5	100
	Преобразование Фурье функций из <input type="checkbox"/>									1		3	1	5		
	Преобразование Фурье функций из <input type="checkbox"/> . Теория Планшереля.									1		3	1	5		
	Преобразование Фурье функций из <input type="checkbox"/> .									1		3	1	5		
	Определение и основные свойства Фурье-мультипликаторов									1		3	1	5		
	Теоремы Лизоркина и Михлина – Хермандера о мультипликаторах интеграла Фурье									1		3	1	5		
	Некоторые применения теорем о мультипликаторах									1		3	1	5		

интеграла Фурье															
Подпространство функций с ограниченным спектром										1		3	1	5	
Пространство Соболева										1		3	1	5	
Теоремы вложения для пространств Соболева						4				1		3	1	9	
Свойства модулей непрерывности										1		3	1	5	
Общие свойства пространств Никольского-Бесова										1		4	1	6	
Вложение пространств Никольского-Бесова без изменения метрики										1		4	1	6	
Взаимосвязь обобщенных производных и разностей										1		3	1	5	
Разностная характеристика пространств Соболева										1		3	1	5	
Включение производных в нормы пространств Никольского-Бесова										1		3	1	5	
Вложение разных метрик для пространств Никольского-Бесова.						4				1		3	1	9	
Описание следов на подпространстве меньшей размерности										1		3	1	5	



**ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО КУРСУ**

- 1.1. Преобразование Фурье основных и обобщенных функций. Связь преобразования Фурье со сдвигом, сверткой и дифференцированием.
- 1.2. Преобразование Фурье интегрируемых функций, его основные свойства. Сверточная алгебра Винера.
- 1.3. Преобразования Фурье функций с интегрируемым с квадратом. Теория Планшереля, изометричность оператора Фурье (равенство Парсевала).
- 1.4. Понятие об интерполяционной теории линейных операторов. Интерполяционная теорема Рисса-Торина и ее применение в теории преобразований Фурье. Теорема Хаусдорфа-Юнга.
- 1.5. Мультипликаторы интеграла Фурье. Преобразования Фурье интегрируемых функций как Фурье-мультипликаторы.
- 1.6. Основная теорема о мультипликаторах Фурье.
- 1.7. Теоремы Михлина-Хермандера и Лизоркина о мультипликаторах Фурье.
- 1.8. Некоторые применения теорем о мультипликаторах Фурье.
- 1.9. Характеристические функции выпуклых многогранников как мультипликаторы Фурье. Проблема характеристической функции шара и результат Ч. Феффермана.
- 1.10. Интегральное представление функции с ограниченным спектром.
- 1.11. Неравенство Бернштейна для функции с ограниченным спектром.
- 1.12. Неравенство разных метрик Никольского для функции с ограниченным спектром.
- 1.13. Следы функций и неравенство разных измерений Никольского для функции с ограниченным спектром.
- 1.14. Усреднение функций по Соболеву, его связь с обобщенным дифференцированием.
- 1.15. Совпадение слабых и сильных обобщенных производных по Соболеву. Формула Лейбница для обобщенных производных.
- 1.16. Замкнутость обобщенного дифференцирования. Пространство Соболева, его полнота.
- 1.17. Интегральное представление Соболева и следствия из него.
- 1.18. Оценки промежуточных производных для функций из пространств Соболева.
- 1.19. Вложение разных метрик для пространств Соболева.
- 2.1. Свойства конечных разностей и модулей непрерывности как нелинейных дробных характеристик гладкости функций. Свойства монотонности и оценки модулей непрерывности.
- 2.2. Теорема Маршо о связи модулей непрерывности различных порядков.
- 2.3. Определение пространств Никольского - Бесова, их общие свойства.
- 2.4. Эквивалентные нормы в пространствах Никольского-Бесова (без применения теоремы Маршо).
- 2.5. Эквивалентные нормы в пространствах Никольского-Бесова (с применением теоремы Маршо).
- 2.6. Критерий принадлежности функции  пространству Никольского-Бесова.
- 2.7. Вложение пространств Никольского-Бесова без изменения метрики.
- 2.8. Операторы усреднения, свойства их ядер. Интегральные представления разностей через производные. Теоремы о свойствах операторов усреднения.
- 2.9. Разностные критерии принадлежности обобщенных производных по направлениям к .
- 2.10. Эквивалентные нормы и разностная характеристика пространств Соболева.
- 2.11. Эквивалентные нормы в пространствах Никольского-Бесова с использованием обобщенных производных и модулей непрерывности.

- 2.12. Представление функций из пространств Никольского- Бесова разложениями в ряды по функциям с ограниченным спектром (с использованием конструкции Джексона).
- 2.13. Представление функций из пространств Никольского- Бесова разложениями в ряды по функциям с ограниченным спектром (с использованием конструкции приближения порядка наилучшего).
- 2.14. Эквивалентные нормы в пространствах Никольского- Бесова в терминах разложений в ряды по функциям с ограниченным спектром.
- 2.15. Формулировка и доказательство теоремы вложения разных метрик. Неулучшаемость теоремы вложения.
- 2.16. Понятие следа на подпространстве меньшей размерности. Теорема о точном описании пространства следов для пространств Никольского- Бесова.
- 2.17. Предельный случай теоремы о следах. Отсутствие линейных операторов продолжения в предельном случае.