

*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Российский университет дружбы народов»*

*Факультет физико-математических и естественных наук*

Рекомендовано МССН  
*02.00.00 «Компьютерные и  
информационные науки»*

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Наименование дисциплины:**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**

**Рекомендуется для направления подготовки**

**02.03.01 Математика и компьютерные науки**

*(указываются код и наименование направления подготовки/специальности)*

**Квалификация (степень) выпускника бакалавр**

*(указывается квалификация (степень) выпускника в соответствии с ОС ВО РУДН)*

**1. Цели и задачи дисциплины:** сформировать представление о комплексе идей и методов математического анализа.

## **2. Место дисциплины в структуре ОП ВО:**

Дисциплина «Математический анализ» относится к обязательной части блока 1 учебного плана.

В таблице № 1 приведены предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций дисциплины в соответствии с матрицей компетенций ОП ВО.

### **Предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций**

№ п/п	Шифр и наименование компетенции	Предшествующие дисциплины	Последующие дисциплины (группы дисциплин)
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>			
	ОПК-1.	Аналитическая геометрия	Теория вероятностей и математическая статистика, Дифференциальные уравнения, Функциональный анализ Математическое моделирование, Государственный экзамен

ОПК-1. Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности.

## **3. Требования к результатам освоения дисциплины:**

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций ОПК-1

*(указываются в соответствии с ОС ВО РУДН)*

ОПК-1. Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности.

ОПК-1.1 Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

ОПК-1.2 Умеет использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности

ОПК-1.3 Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний

В результате изучения дисциплины студент должен:

**Знать:**

- основы математического анализа, необходимые для решения прикладных математических задач;
- формулировки и схему доказательства основных теорем фундаментальной математики.

**Уметь:**

- применять на практике методы математического анализа для решения прикладных задач.

**Владеть:**

- навыками применения математических методов и современного математического инструментария для анализа и решения задач.

**4. Объем дисциплины и виды учебной работы**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 13 зачетных единиц.

Вид учебной работы	Всего часов	Семестр (модуль)		
		семестр 1 модуль 2	семестр 2 модуль 3	семестр 3 модуль 5
<b>Аудиторные занятия (всего)</b>	216	72	72	72
В том числе:	-	-	-	-
<i>Лекции</i>	108	36	36	36
<i>Практические занятия (ПЗ)</i>	108	36	36	36
<i>Семинары (С)</i>				
<i>Лабораторные работы (ЛР)</i>				
<b>Самостоятельная работа (всего)</b>	252	72	108	72
Общая трудоемкость час	468	144	180	144
зач. ед.	13	4	5	4

**5. Содержание дисциплины**

**5.1. Содержание разделов дисциплины**

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела (темы)
1.	<b>Множества и функции</b>	Элементы теории множеств. Мощность множества. Теорема Кантора. Действительные числа. Функция (отображение).
2.	<b>Пределы последовательностей и функций</b>	Предел последовательности. Монотонные последовательности. Число $e$ . Предел функции. Критерий Коши. Непрерывность функции. Точки разрыва функции. Непрерывность сложной и обратной функций.
3	<b>Производная и ее применение</b>	Производная функции. Дифференциал. Производная обратной и сложной функции. Производные высших порядков. Производные функций, заданных неявно и параметрически. Теоремы Ферма, Ролля, Коши, Лагранжа. Формула Тейлора. Экстремумы функции. Точки перегиба, асимптоты. Исследование функций. Правила Лопиталя.
4	<b>Неопределенный</b>	Понятие неопределенного интеграла. Замена переменных

	<b>интеграл</b>	в неопределенном интеграле, интегрирование по частям. Интегрирование рациональных и иррациональных функций. Интегрирование дифференциальных биномов. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ и т.д. Подстановки Эйлера. Интегрирование выражений с тригонометрическими функциями.
5	<b>Определенный интеграл</b>	Определенный интеграл. Критерий Лебега. Суммы и интегралы Дарбу. Критерий Дарбу. Оценки интеграла Римана, монотонность интеграла и теорема о среднем. Интеграл и производная. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в интеграле Римана. Приложения интеграла: вычисление длины кривой, площади криволинейной трапеции и объема тел вращения. Приложения определенного интеграла к вычислению длины кривой, площади и объема. Кривые в евклидовом пространстве, кривизна кривой. Несобственные интегралы (НИ). Критерий Коши, признаки Дирихле и Абеля сходимости НИ.
6	<b>Функции нескольких переменных</b>	Метрические пространства. Открытые и замкнутые множества в $R^n$ и их свойства. Компакты в $R^n$ и их свойства. Последовательности в $R^n$ и их сходимость. Непрерывные функции в $R^n$ . Свойства функции, заданной на компакте. Дифференцируемые функции в $R^n$ . Дифференцирование сложной функции. Градиент, геометрический смысл дифференциала. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора функции $n$ переменных. Точки локального экстремума функции $n$ переменных. Основные теоремы о неявных функциях. Система неявных функций. Якобиан, теорема об обратном отображении. Условный экстремум функции $n$ переменных.
7	<b>Кратные интегралы</b>	Интеграл Римана на $n$ -мерном промежутке. Критерии Лебега и Дарбу интегрируемости функции. Допустимые множества и интегралы на них. Общие свойства интеграла Римана на множестве $R^n$ . Сведение кратного интеграла к повторному. Теорема Фубини. Двойной интеграл: приведение к повторному, замена переменных, приложения. Тройной интеграл и его вычисление. Замена переменных в тройном интеграле. Несобственные интегралы двух и трех переменных. Вычисление площадей плоских фигур. Вычисление объемов тел.
8	<b>Криволинейные и поверхностные интегралы</b>	Криволинейный интеграл 1-го рода. Криволинейный интеграл 2-го рода. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Формула Грина. Поверхности и их ориентация, площадь поверхности. Поверхностный интеграл 1-го рода. Поверхностный интеграл 2-го рода. Формула Остроградского-Гаусса. Формула Стокса.
9	<b>Элементы теории поля</b>	Скалярные и векторные поля. Градиент, дивергенция, циркуляция, ротор. Специальные поля. Обратная задача векторного анализа. Приложения криволинейных и

		поверхностных интегралов в задачах теории поля.
10	<b>Числовые и функциональные ряды</b>	Числовые ряды. Критерий Коши. Основные свойства сходящихся рядов. Признаки сравнения, Даламбера и Коши сходимости рядов с неотрицательными членами. Интегральный признак Коши сходимости ряда. Абсолютная и условная сходимость ряда. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда. Свойства сходящихся рядов. Теорема Римана. Признаки Абеля и Дирихле. Поточечная и равномерная сходимость функционального ряда. Критерий Коши, признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов. Степенной ряд и его свойства. Ряд Тейлора. Разложение функции в ряд Тейлора.
11	<b>Ряды Фурье</b>	Ортогональная система функций. Ряды Фурье. Свойства ряда Фурье. Неравенство Бесселя. Сходимость в среднем. Тригонометрический ряд Фурье и его свойства. Разложение функций в ряд Фурье. Теорема Дирихле. Принцип локализации Римана. Метод средних арифметических суммирования ряда Фурье. Теорема Вейерштрасса. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье.

## 5.2. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практ. зан.	Лаб. зан.	Семи н.	СРС	Всего час.
I.1.	Множества и функции	4	4			8	16
I.2.	Пределы последовательностей и функций	8	8			16	32
I.3.	Производная и ее применение	12	12			24	48
I.4.	Неопределенный интеграл	12	12			24	48
II.1.	Определенный интеграл	12	12			36	60
II.2.	Функции нескольких переменных	14	14			40	68
II.3.	Числовые, функциональные и степенные ряды	10	10			32	52
III.1.	Кратные интегралы	10	10			20	40
III.2.	Криволинейные и поверхностные интегралы	10	10			20	40
III.3.	Элементы теории поля	6	6			12	24
III.4.	Ряды Фурье	10	10			20	40
	Итого:	108	108			252	468

## 6. Лабораторный практикум не предусмотрен

## 7. Практические занятия (семинары)

№ п/п	Темы практического занятия	Трудо- емкость (час.)
I.1.	Множества и функции	4
I.2.	Пределы последовательностей и функций	8
I.3.	Производная и ее применение	12
I.4.	Неопределенный интеграл	12
II.1.	Определенный интеграл	12
II.2.	Функции нескольких переменных	14
II.3.	Числовые, функциональные и степенные ряды	10
III.1.	Кратные интегралы	10
III. 2.	Криволинейные и поверхностные интегралы	10
III. 3.	Элементы теории поля	6
III. 4.	Ряды Фурье	10

## 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебная аудитория для проведения учебных занятий (в том числе для практического и лекционного типов занятий, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации).

Компьютерные (дисплейные) классы с доступом к сети Интернет и электронно-образовательной среде Университета для проведения обучающимися самостоятельной работы и компьютерного тестирования обучающихся (при необходимости).

## 9. Информационное обеспечение дисциплины

а) программное обеспечение:

- продукты Microsoft - операционная система, пакет офисных приложений, MS Teams и др. (подписка Enrollment for Education Solutions (EES)).
- Программное обеспечение со свободной лицензией (free):
  - браузер Chrome (лицензия Google Chrome Terms of Service);
  - медиа-плеер (например, VLC Media Player, лицензия GPL-2),
  - Adobe Reader (лицензия Adobe Software License Agreement).
  - офисный пакет LibreOffice (лицензия MPL-2.0)
  - Octave (лицензия GPL-3)

б) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы:

- библиотека РУДН: <http://lib.rudn.ru/>
- ТУИС РУДН: <https://esystem.rudn.ru/>

## 10. Учебно-методическое обеспечение дисциплины:

а) Основная литература:

1. Сборник задач по математике для вузов : учебное пособие для вузов: в 4-х ч. Ч.1 : Линейная алгебра и основы математического анализа / В.А. Болгов; Под общ. ред. А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича. - 3-е изд., испр. ; Репринтное воспроизведение издания 1993 года. - М. : Альянс, 2014, 2017, 2020
2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие / Б.П. Демидович. - Изд. 13-е, испр. - Москва : ЧеРо, 1997. - 624 с. : ил. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=459722>
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: учебник: В 3-х т., М. : Дрофа, 2006, 2008, все годы издания.

4. Основы математического анализа : учебник. Ч. 1, 2 / Г.М. Фихтенгольц. - 8, 9-е изд., стереотип. - СПб. : Лань, 2006, 2008, все годы издания.

**б) Дополнительная литература:**

1. Математический анализ. 3-й семестр : учебное пособие для студентов факультета физико-математических и естественных наук РУДН. Ч. 4 / Е.И. Галахов, О.А. Салиева. - М. : Изд-во РУДН, 2011. - 67 с.  
[http://lib.rudn.ru/MegaPro2/UserEntry?Action=Rudn\\_FindDoc&id=362695&idb=0](http://lib.rudn.ru/MegaPro2/UserEntry?Action=Rudn_FindDoc&id=362695&idb=0)
2. Несобственные интегралы : учебное пособие / Е.И. Галахов, О.А. Салиева. - М. : Изд-во РУДН, 2010. - 39 с.  
[http://lib.rudn.ru/MegaPro2/UserEntry?Action=Rudn\\_FindDoc&id=358322&idb=0](http://lib.rudn.ru/MegaPro2/UserEntry?Action=Rudn_FindDoc&id=358322&idb=0)

**11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:**

**11.1 Структура практических занятий**

На практических занятиях решаются задачи и упражнения по текущим темам

**11.2 Самостоятельная работа студента**

Еженедельно студенты получают домашнее задание по текущей теме практического занятия. Следующее практическое занятие начинается с проверки выполненного домашнего задания, вопросов по домашнему заданию и его обсуждения. После этого происходит переход к следующим задачам по текущей или новой теме.

На практических занятиях у доски задачи и упражнения решаются в основном кем-то из вызванных студентов. При этом все присутствующие студенты должны контролировать и записывать решение на доске, а также устно отвечать на возникающие при решении вопросы.

**12. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю).**

ФОС по дисциплине представлен в приложении к данной программе.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО РУДН.

**Разработчик:**

Доцент Математического института  
им. С.М. Никольского, к.ф.-м.н., доцент

 Т.В. Лисейкина


**Директор**

Математического института им. С.М. Никольского,  
д.ф.-м.н., профессор

 А.Л.Скубачевский

**Руководитель программы**

Заведующий кафедрой  
прикладной информатики и теории вероятностей,  
д.т.н., проф.

 К.Е. Самуилов

*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Российский университет дружбы народов»*

*Факультет физико-математических и естественных наук*

**Математический институт имени С.М.Никольского**

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

**Наименование дисциплины:**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**

**Рекомендуется для направления подготовки**

**02.03.01 Математика и компьютерные науки**

*(указываются код и наименование направления подготовки/специальности)*

**Направленность программы (профиль)**

**Математика и компьютерные науки**

*(наименование образовательной программы в соответствии с направленностью (профилем))*

**Квалификация (степень) выпускника бакалавр**

*(указывается квалификация (степень) выпускника в соответствии с ОС ВО РУДН)*



## Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине «Математический анализ»

Направление: 02.03.01 — Математика и компьютерные науки

Код контролируемой компетенции или ее части	Контролируемый раздел дисциплины	Контролируемая тема дисциплины	Наименование оценочного средства				Баллы темы	Баллы раздела
			Аудиторная работа		Самостоятельная работа	Экзамен		
			Коллоквиум	Контрольная работа	Выполнение ДЗ			
ОПК-1	Раздел 1: Множества и функции	Тема 1: Множества и функции	2	6	2	6	16	16
ОПК-1	Раздел 2: Пределы последовательностей и функций	Тема 1: Пределы последовательностей	4	6	2	6	18	36
		Тема 2: Пределы функций	4	6	2	6	18	
ОПК-1	Раздел 3: Производная и ее применение	Тема 1: Производная		12	4	12	28	48
		Тема 2: Исследование функций		6	4	10	20	
		<b>ИТОГО I сем.:</b>	<b>10</b>	<b>36</b>	<b>14</b>	<b>40</b>	<b>100</b>	<b>100</b>
ОПК-1	Раздел 4: Неопределенный интеграл	Тема 1: Основные понятия	2	3	2	4	11	36
		Тема 2: Интегрирование рациональных выражений	2	3	2	4	11	
		Тема 3: Интегрирование иррациональных и других выражений	2	6	2	4	14	
ОПК-1	Раздел 5:	Тема 1: Основные понятия	2	6	2	4	14	25

	Определенный интеграл	Тема 2: Геометрические приложения	2	3	2	4	11	
ОПК-1	Раздел 6: Функции нескольких переменных	Тема 1: Топология $R^n$			2	8	10	29
		Тема 2: Пределы и производные ФНП		15	2	12	19	
		<b>ИТОГО II сем.:</b>	<b>10</b>	<b>36</b>	<b>14</b>	<b>40</b>	<b>100</b>	<b>100</b>
ОПК-1	Раздел 1: Кратные интегралы	Тема 1: Кратные интегралы	4	10	2	10	26	26
ОПК-1	Раздел 2: Криволинейные и поверхностные интегралы	Тема 1: Криволинейные интегралы	2	5	2	6	15	30
		Тема 2: Поверхностные интегралы	2	5	2	6	15	
ОПК-1	Раздел 3: Элементы теории поля	Тема 1: Элементы теории поля	2	2	2	2	8	8
ОПК-1	Раздел 4: Числовые и функциональные ряды	Тема 1: Числовые ряды		3	2	4	9	27
		Тема 2: Функциональные ряды		3	2	4	9	
		Тема 3: Степенные ряды		3	2	4	9	
ОПК-1	Раздел 5: Ряды Фурье	Тема 1: Ряды Фурье		3	2	4	9	9
		<b>ИТОГО III сем.:</b>	<b>10</b>	<b>34</b>	<b>16</b>	<b>40</b>	<b>100</b>	<b>100</b>

ОПК-1. Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности.

ОПК-1.1 Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

ОПК-1.2 Умеет использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности

ОПК-1.3 Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний

## ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

### Домашние задания

Индивидуальное домашнее задание предусмотрено по разделу «Производная и ее применение», тема «Исследование функций».

#### Вариант 1

Построить графики функций:

1)  $y = \frac{1}{4}(x - 3)(x^2 + 3x + 6)$ ;

2)  $y = (2x + 1)$ ;

3)  $y = \ln(x^2 + 1)$ ;

4)  $y = \sqrt[3]{1 + x^3}$ .

Найти наибольшее значение функции на отрезке:

5)  $y = (x - 3)\sqrt{x^2 - 2}$  при  $x \in [\sqrt{2}, 4]$ .

#### Вариант 2

Построить графики функций:

1)  $y = (2 - x)(x^2 - x - 2)$ ;

2)  $y =$ ;

3)  $y = \sqrt{x}(\ln x - 2)$ ;

4)  $y = \frac{2x^3 + 2x^2 - 3x - 1}{2 - 4x^2}$ .

Найти наименьшее значение функции на отрезке:

5)  $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$  при  $x \in [-4, 2]$ .

# Контрольные работы (пример заданий)

## 1 семестр (2 модуль)

### Контрольная работа №1. Предел функции.

#### Вариант 1

Вычислить пределы:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 4x - 5}$
2.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 8x + 3}{4x^2 + 7x + 3}$
3.  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{4 - \sqrt{10+x}}{2 - \sqrt{10-x}}$
4.  $\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x+3}{9-x^2}$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{\operatorname{tg}^2 3x} - 1) \operatorname{ctg}^2 x$
6. Доказать, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} = 0$ , и найти  $\delta(\varepsilon)$  при  $\varepsilon = 0.1; 0.01; 0.001$ .
7. Определить тип точек разрыва функции  $y = \frac{|x-1|}{x^2-1}$ .

#### Вариант 2

Вычислить пределы:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{2x^3 - x^2 - 4x + 3}$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+15x} - \sqrt[3]{8-5x}}{5x}$
4.  $\lim_{x \rightarrow -5-0} \frac{\sqrt{x^2 + 10x + 25}}{x+5}$
5.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 7x + 3}{\operatorname{arctg}(x-3)}$
6. Доказать, что  $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$  и найти  $\delta(\varepsilon)$  при  $\varepsilon = 0.1; 0.01; 0.001$ .
7. Определить тип точек разрыва функции  $y = \frac{x-1}{\sin(x-1)}$ .

Контрольная работа №2. Производная.

Вариант 1

1.  $f(1)=2, g(x)=f(x^2). g'(1)=?$
2.  $y(x) = \frac{1}{2e^x(\cos x - \sin x)}. y'(x)=?$
3.  $y(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}. y'(x)=?$
4.  $y(x) = 1 - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - \operatorname{ctg} x. y'(x)=?$
5.  $\begin{cases} x(t) = \ln(1 + t^2), \\ y(t) = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases} y'_x(t)=?$
6.  $y(x) = y'(x)=?$
7. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенно  $\sqrt[4]{80}$ .

Вариант 2

1.  $f(x)=a^x. f'(0)=1. a=?$
2.  $y(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x \operatorname{tg} x + 1}. y'(x)=?$
3.  $y(x) = 1 - \frac{2\sqrt{x}+1}{x} y'(x)=?$
4.  $y(x) = 3x^3 \ln^2 x - 2x^3 \ln x + \frac{2x^3}{3}. y'(x)=?$
5.  $\begin{cases} x(t) = 1 + \sqrt{1 - 2t}, \\ y(t) = \arccos \sqrt{2t}. \end{cases} y'_x(t)=?$
6.  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{3x+1}}{(2x-1)^2 \sqrt{1-4x}} f'(0)=?$
7.  $\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{y}{2} = 1. dy=?$

2 семестр (3 модуль)

Контрольная работа №1. Интеграл

Вариант 1

Найти неопределенные интегралы:

1.  $\int \arcsin 3x dx.$
2.  $\int \frac{xdx}{x^2-5x+6}.$
3.  $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}.$
4.  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x}$
5.  $\int \frac{dx}{\sin 3x + \sin a}.$
6.  $\int \frac{2\sin x + 3\cos x}{\sin x - 2\cos x} dx.$
7. Найти предел суммы  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{e^{\frac{k}{n}}}{n}.$
8. Вычислить определенный интеграл  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \operatorname{tg}^2 x}.$

Вариант 2

1.  $\int \operatorname{tg}^2 x dx.$

2.  $\int \frac{x-1}{2+x-x^2} dx$ .
3.  $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x-1}}$ .
4.  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$ .
5.  $\int \frac{dx}{\cos 2x + \cos a}$ .
6.  $\int \frac{\sin x - 3 \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx$ .
7. Найти предел суммы  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k e^{\frac{k}{n}}}{n^2}$ .
8. Вычислить определенный интеграл  $\int_0^{\pi/4} \arcsin 2x dx$ .

*Контрольная работа №2. Приложения определенного интеграла  
и функции многих переменных*

*Вариант 1*

1. Найти длину дуги кривой  $\rho = \frac{1}{1+\cos\phi} \left( -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \right)$ .
2. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, полученной при вращении отрезка кривой  $y=2x-x^2$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) вокруг оси  $Ox$ .
3. Построить линии уровня функции  $z = |x| + y$ .
4. Найти  $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$ , если  $u = x \ln(xy)$ .
5. Найти производную функции  $z=x^2-y^2$  в точке  $M(1,1)$  в направлении  $l$ , составляющем угол  $\alpha=30^\circ$  с положительным направлением оси  $Ox$ .
6. Найти  $dz$ , если  $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1$ .
7. Исследовать на условный экстремум функцию  $z=x^2+y^2$  при условии  $x+2y=1$ .

*Вариант 2*

1. Найти длину дуги кривой  $y = \ln \cos x$  ( $0 \leq x \leq \pi/4$ ).
2. Найти площадь сектора, ограниченного кривой  $r=4+3\cos\phi$  ( $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ).
3. Найти двойной предел  $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow \pi} \frac{1-\cos xy}{x^2}$ .
4. Найти  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  в точке  $(-1,1)$ , если  $u = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ .
5. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить  $\sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$ .
6. Написать уравнение нормали в точке  $M_0(-3,4,-12)$  к поверхности  $x^2+y^2+z^2=169$ .
7. Исследовать на экстремум функцию  $z=x^3+y^3-3xy$ .

**3 семестр (5 модуль)**

*Контрольная работа №1. Кратные интегралы.*

*Вариант 1.*

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_{-1}^1 \int_{x\sqrt{-1}}^{1-\sqrt{x}\sqrt{f(x,y)}} dy$ .
2. Вычислить двойной интеграл:  $\iint_S (x \sin y + y \cos x) dx dy$ ,  $S = \{(x, y): 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2\}$ .
3. Вычислить двойной интеграл:  $\iint_G x dx dy$ ,  $G = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 9, x > 0\}$ .
4. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_G x dx dy dz$ ,  $G = \{(x, y, z): x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$ .

5. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_G x^2 z dx dy dz, G = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \leq 16, 0 \leq z \leq 1\}$ .

*Вариант 2.*

1. Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin x} f(x, y) dy$ .

2. Вычислить двойной интеграл:  $\iint_S \frac{y}{x^2} dx dy, S = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq x^2\}$ .

3. Вычислить двойной интеграл:  $\iint_G \sqrt{x - y} dx dy, G = \{(x, y): \frac{4}{5}x \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 4\}$ .

4. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_G (2x + y - z) dx dy dz, G = \{(x, y, z): x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 3\}$ .

5. Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_G x^2 z dx dy dz, G = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \leq 25\}$ .

*Контрольная работа №2. Криволинейные и поверхностные интегралы.*

*Вариант 1.*

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_C \frac{z^2}{x^2 + y^2} ds$ , где  $C$  -

первый виток винтовой линии  $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = at \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0)$ .

2. Вычислить непосредственно криволинейный интеграл второго рода

$\oint_C (x^2 - 1) y dx + (y^2 + 1) x dy$ ,

где  $C$  - окружность  $x^2 + y^2 = R^2$ , пробегаемая против хода часовой стрелки.

3. Вычислить интеграл из задачи 2 с помощью формулы Грина.

4. Вычислить непосредственно поверхностный интеграл второго рода  $\iint_S x^2 y dy dz + x y^2 dz dx + x y z dx dy$ ,

где  $S$  - внешняя сторона поверхности тела  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ .

5. Вычислить интеграл из задачи 4 с помощью формулы Гаусса-Остроградского.

*Вариант 2.*

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:  $\int_C \arctan \frac{y}{x} ds$ , где  $C$  - часть окружности  $x^2 + y^2 = a^2$ , лежащая в первой четверти.

2. Вычислить непосредственно криволинейный интеграл второго рода  $\oint_C (x + y) dx + (x - y) dy$ , где  $C$  - окружность  $x^2 + y^2 = 12$ , пробегаемая против хода часовой стрелки.

3. Вычислить интеграл из задачи 2 с помощью формулы Грина.

4. Вычислить непосредственно поверхностный интеграл второго рода

$\iint_S \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{x^2 + y^2 + z^2}$ ,

где  $S$  - внешняя сторона сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ .

5. Вычислить интеграл из задачи 4 с помощью формулы Гаусса-Остроградского.

*Контрольная работа №3. Ряды*

*Вариант 1*

1. Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ .

2. Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2n}$ .

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty}$

4. Доказать равномерную сходимость функциональной последовательности  $\frac{\sqrt{nx}}{1+nx}$  на полупрямой  $[1; +\infty)$ .
5. Найти область сходимости степенного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n +$
6. Разложить в ряд по степеням  $x-1$  функцию  $y = \frac{x}{2-2x+x^2}$ .
7. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию  $y = |x+1|$  на интервале  $(0, \pi)$ .

*Вариант 2*

1. Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ .
2. Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ .
3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty}$
4. Доказать равномерную сходимость функционального ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{2+n^4 x^2}$  на всей прямой.
5. Найти область сходимости степенного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty}$
6. Разложить в ряд по степеням  $x$  функцию  $y = \sqrt[4]{16-x^2}$ .
7. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию  $y = |x-1|$  на интервале  $(0, \pi)$ .



# Перечень вопросов итоговой аттестации по курсу

## 1 семестр (2 модуль)

1. Основные понятия теории множеств.
2. Счетные и несчетные множества. Счетность множества рациональных чисел. Несчетность множества действительных чисел.
3. Определение функции действительного переменного. Область определения. Область значений. Обозначения.
4. График функции. Способы задания функции.
5. Обратная функция. Графики взаимно обратных функций.
6. Композиция, или сложная функция.
7. Четные и нечетные функции и их графики. Периодическая функция.
8. Определение функций: а) возрастающей, б) убывающей, в) неубывающей, г) невозрастающей. Определение монотонной функции.
9. Определение последовательности.
10. Определение конечного предела числовой последовательности, обозначение. Определение бесконечно малой последовательности.
11. Определение бесконечного предела числовой последовательности. Определение бесконечно большой последовательности.
12. Определение сходящейся последовательности. Определение расходящейся последовательности.
13. Определение последовательностей: а) возрастающей, б) убывающей, в) неубывающей, г) невозрастающей. Определение монотонной последовательности.
14. Определение ограниченной последовательности.
15. Сформулировать теорему Вейерштрасса (достаточное условие сходимости последовательности).
16. Свойства последовательности  $\{(1+1/n)^n\}$ .
17. Свойства пределов последовательностей. Доказать одно из свойств.
18. Сформулировать теорему о произведении бесконечно малой последовательности на ограниченную.
19. Сформулировать и доказать теорему об ограниченности сходящейся последовательности.
20. Определение подпоследовательности.
21. Сформулировать и доказать теорему Больцано-Вейерштрасса.
22. Определение фундаментальной последовательности.
23. Сформулировать критерий Коши сходимости последовательности.
24. Определение  $\varepsilon$ -окрестности точки. Определение проколотой  $\varepsilon$ -окрестности точки.
25. Определение конечного предела функции в точке. Определение конечного предела функции в точке справа (слева). Односторонние пределы. Иллюстрации.
26. Определение бесконечного предела функции в точке. Иллюстрации.
27. Определение конечного предела функции на бесконечности. Иллюстрации.
28. Определение бесконечного предела функции на бесконечности. Иллюстрации.
29. Правила вычисления пределов функций, связанные с многочленами и с иррациональными выражениями.
30. Определения бесконечно малой и бесконечно большой функции.
31. Сформулировать теорему о связи бесконечно больших и бесконечно малых функций.
32. Доказать свойство предела функции в терминах бесконечно малых.
33. Свойства бесконечно малых функций. Доказать одно из свойств.
34. Сформулировать и доказать теорему о двух милиционерах.
35. Сформулировать и доказать теорему о сохранении знака неравенства при переходе к пределу.
36. Свойства пределов функций. Доказать одно из свойств.

37. Первый замечательный предел. Доказать.
38. Сформулировать второй замечательный предел.
39. Сформулировать следствия первого замечательного предела. Доказать одно из них.
40. Сформулировать следствия второго замечательного предела. Доказать одно из них.
41. Определение бесконечно малых одного порядка при  $x \rightarrow a$ . Обозначение. Примеры.
42. Определение эквивалентных бесконечно малых при  $x \rightarrow a$ . Обозначение. Примеры.
43. Определение бесконечно малых более высокого порядка, чем заданная, при  $x \rightarrow a$ . Обозначение. Примеры.
44. Определение бесконечно больших одного порядка при  $x \rightarrow a$ . Обозначение. Примеры.
45. Определение эквивалентных бесконечно больших при  $x \rightarrow a$ . Обозначение. Примеры.
46. Определение бесконечно больших более высокого порядка, чем заданная, при  $x \rightarrow a$ . Обозначение. Примеры.
47. Доказать теорему о замене бесконечно малых эквивалентными.
48. Записать таблицу эквивалентных бесконечно малых (8 случаев).
49. Определение функции, непрерывной в точке.
50. Определение функции, непрерывной в точке справа.
51. Определение функции, непрерывной в точке слева.
52. Определение функции, непрерывной на множестве.
53. Сформулировать свойства функций, непрерывных в точке. Доказать одно из свойств.
54. Определение приращения функции в точке.
55. Сформулировать и доказать теорему о необходимом и достаточном условии непрерывности функции в точке.
56. Сформулировать теорему о наибольших и наименьших значениях функции на отрезке.
57. Определение производной функции в точке.
58. Доказать одно из свойств производной функции в точке.
59. Сформулировать правила дифференцирования функций.
60. Доказать три любые формулы вычисления производных основных элементарных функций.
61. Логарифмическое дифференцирование и дифференцирование неявно заданных функций (примеры применения).
62. Теорема (производная обратной функции) с доказательством. Примеры вывода формул производных обратных функций.
63. Производная параметрически заданной функции. Примеры вычисления производных параметрически заданной функции в фиксированной точке с параметром  $t_0$ .
64. Определение дифференцируемой функции в фиксированной точке  $x_0$ .
65. Определение дифференциала первого порядка функции в фиксированной точке  $x_0$ .
66. Теорема (необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке) с доказательством.
67. Теорема об инвариантности формы дифференциала первого порядка.
68. Определение производных и дифференциалов высших порядков.
69. Определение точек максимума, точек минимума, точек экстремума функции (строгого и нестрогого). Определение максимума, минимума, экстремума функции (строгого и нестрогого). Иллюстрация различных ситуаций.
70. Теорема Ферма с доказательством. Иллюстрация. Определение стационарной точки и ее связь с экстремумами функции.
71. Необходимое условие экстремума (с доказательством).
72. Теорема Ролля (с доказательством).
73. Теорема Коши (с доказательством).
74. Теорема Лагранжа (с доказательством). Иллюстрации.
75. Теорема о необходимом и достаточном условии постоянства функции на интервале (с доказательством).
76. Теорема о достаточном условии возрастания (убывания) функции на интервале (с доказательством).

77. Правило Лопиталья (доказательство). Различные ситуации раскрытия неопределенностей с помощью правила Лопиталья (примеры).
78. Формула Тейлора в окрестностях точки  $a$ . Определение многочлена Тейлора  $n$ -го порядка.
79. Определение остаточного члена формулы Тейлора  $n$ -го порядка.
80. Формула Тейлора с остаточным членом формы Пеано.
81. Формула Маклорена. Формула Маклорена некоторых элементарных функций.
82. Теорема (первое достаточное условие экстремума функции) с доказательством.
83. Теорема (второе достаточное условие экстремума функции) с доказательством.
84. Сформулировать правила нахождения наименьших и наибольших значений функции на отрезке.
85. Определение функции, выпуклой вверх (вниз) на интервале  $(a,b)$ .
86. Теорема (достаточное условие выпуклости вверх (вниз) графика функции) с доказательством.
87. Определение точки перегиба. Теорема (необходимое условие точки перегиба) с доказательством.
88. Теорема (первое достаточное условие точки перегиба) с доказательством.
89. Теорема (второе достаточное условие точки перегиба) с доказательством.
90. Определение вертикальной асимптоты.
91. Определение и правило нахождения наклонной асимптоты.

## 2 семестр (3 модуль)

1. Определение первообразной. Свойства первообразных с доказательством.
2. Определение неопределенного интеграла с расшифровкой обозначений. Свойства неопределенного интеграла с доказательством.
3. Таблица неопределенных интегралов с доказательством.
4. Методы замены переменных и подведения под знак дифференциала при вычислении неопределенных интегралов. Примеры.
5. Метод интегрирования по частям с доказательством.
6. Определения: а) рациональной дроби; б) правильной рациональной дроби; в) неправильной рациональной дроби; г) простейших рациональных дробей (4 типа).
7. Методы интегрирования простейших рациональных дробей. Примеры.
8. Методы интегрирования правильных и неправильных рациональных дробей. Примеры.
9. Методы интегрирования иррациональных выражений.
10. Универсальная тригонометрическая подстановка при вычислении неопределенных интегралов. Примеры.
11. Интегральная сумма Римана.
12. Мелкость разбиения.
13. Верхняя и нижняя суммы Дарбу.
14. Интеграл Римана.
15. Теорема о необходимом условии интегрируемости функции (с доказательством).
16. Критерий интегрируемости Дарбу (формулировка).
17. Свойство линейности определенного интеграла.
18. Свойство аддитивности определенного интеграла.
19. Свойство монотонности определенного интеграла.
20. Интегрируемость произведения интегрируемых функций.
21. Интегрируемость абсолютной величины интегрируемой функции.
22. Теорема о среднем интегральном значении функции (формулировка).
23. Теорема о непрерывности интеграла как функции верхнего предела (с доказательством).
24. Теорема о дифференцировании интеграла по верхнему пределу (с доказательством).
25. Теорема Ньютона-Лейбница (с доказательством).
26. Замена переменных в определенном интеграле.

27. Интегрирование по частям в определенном интеграле.
28. Площадь криволинейной трапеции.
29. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах.
30. Длина дуги кривой в декартовых координатах.
31. Длина дуги кривой в полярных координатах.
32. Длина дуги кривой, заданной параметрически.
33. Объем тела вращения.
34. Площадь поверхности вращения.
35. Несобственный интеграл первого рода.
36. Несобственный интеграл второго рода.
37. Сходимость несобственных интегралов.
38. Критерий сравнения для сходимости несобственных интегралов (с доказательством).
39. Признак Дирихле сходимости несобственных интегралов.
40. Признак Абеля сходимости несобственных интегралов.
41. Функция нескольких переменных.
42. Расстояние между двумя точками в  $R^n$ .
43. Норма элемента  $R^n$ .
44. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца (с доказательством).
45. Неравенство треугольника в  $R^n$  (с доказательством).
46. Шаровая окрестность точки в  $R^n$ .
47. Открытое множество.
48. Окрестность точки в  $R^n$ .
49. Окрестность бесконечно удаленной точки в  $R^n$ .
50. Точка прикосновения множества.
51. Замкнутое множество.
52. Теорема о связи между открытыми и замкнутыми множествами (с доказательством).
53. Замыкание множества.
54. Теорема о замкнутости замыкания множества (с доказательством).
55. Ограниченное множество.
56. Компактное множество.
57. Необходимое и достаточное условие компактности множества (с доказательством).
58. Предел последовательности точек в  $R^n$ .
59. Предел функции нескольких переменных в точке.
60. Непрерывность функции нескольких переменных в точке.
61. Непрерывность функции нескольких переменных в области.
62. Частные производные первого порядка функции нескольких переменных в точке.
63. Полное приращение функции нескольких переменных.
64. Дифференцируемость функции нескольких переменных в точке.
65. Дифференциал первого порядка от функции нескольких переменных.
66. Теорема о связи дифференцируемости и непрерывности функции нескольких переменных в точке (с доказательством).
67. Теорема о необходимом условии дифференцируемости функции нескольких переменных в точке (с доказательством).
68. Теорема о достаточном условии дифференцируемости функции двух переменных в точке (с доказательством).
69. Теорема о дифференцировании сложной функции двух переменных (с доказательством).
70. Инвариантность формы дифференциала функции нескольких переменных (с доказательством).
71. Градиент функции нескольких переменных.
72. Производная функции нескольких переменных по направлению заданного вектора.
73. Касательная плоскость к графику функции двух переменных.
74. Нормаль к графику функции двух переменных.

75. Частные производные высших порядков от функции нескольких переменных.
76. Дифференциалы высших порядков от функции нескольких переменных.
77. Формула Тейлора  $n$ -го порядка для функции нескольких переменных в точке.
78. Остаточный член формулы Тейлора  $n$ -го порядка для функции нескольких переменных в точке в форме Лагранжа и Пеано.
79. Теорема о независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования (с доказательством).
80. Точка строгого (нестрогого) максимума (минимума, экстремума) функции многих переменных.
81. Теорема о необходимом условии экстремума функции многих переменных (с доказательством).
82. Стационарная точка функции многих переменных.
83. Квадратичная форма.
84. Положительно (отрицательно) определенная квадратичная форма.
85. Неотрицательно (неположительно) полуопределенная квадратичная форма.
86. Знакопеременная квадратичная форма.
87. Теорема о достаточном условии экстремума функции многих переменных (схема доказательства).
88. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы.
89. Достаточное условие максимума функции двух переменных.
90. Достаточное условие минимума функции двух переменных.
91. Условный экстремум функций нескольких переменных.
92. Функция Лагранжа. Необходимое условие условного экстремума функций нескольких переменных (с доказательством).
93. Достаточное условие условного экстремума функций нескольких переменных (с доказательством).

### 3 семестр (5 модуль)

- 1) Интеграл Римана на  $n$ -мерном промежутке.
- 2) Критерии Лебега и Дарбу интегрируемости функции.
- 3) Допустимые множества и интегралы на них.
- 4) Общие свойства интеграла Римана на множестве  $\mathbb{R}^n$ .
- 5) Сведение кратного интеграла к повторному. Теорема Фубини.
- 6) Двойной интеграл: приведение к повторному, замена переменных, приложения.
- 7) Тройной интеграл и его вычисление. Замена переменных в тройном интеграле.
- 8) Несобственные интегралы двух и трех переменных.
- 9) Криволинейный интеграл 1-го рода.
- 10) Криволинейный интеграл 2-го рода.
- 11) Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Формула Грина.
- 12) Поверхности и их ориентация, площадь поверхности.
- 13) Поверхностный интеграл 1-го рода.
- 14) Поверхностный интеграл 2-го рода.
- 15) Формула Остроградского-Гаусса.
- 16) Формула Стокса.
- 17) Скалярные и векторные поля. Градиент, дивергенция, циркуляция, ротор.
- 18) Специальные поля. Обратная задача векторного анализа.
- 19) Числовой ряд, его сумма, сходимость, остаток.
- 20) Основные свойства числовых рядов.
- 21) Необходимое условие сходимости числового ряда (с доказательством).
- 22) Теорема об остатке числового ряда (с доказательством).

- 23) Критерий Коши сходимости числовых рядов. Расходимость гармонического ряда.
- 24) Признаки сравнения числовых рядов (с доказательством).
- 25) Признак Даламбера сходимости неотрицательных числовых рядов (с доказательством).
- 26) Радикальный признак Коши (с доказательством).
- 27) Интегральный признак сходимости неотрицательных числовых рядов (с доказательством). Сходимость обобщенного ряда Дирихле.
- 28) Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница (с доказательством).
- 29) Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов. Теорема о связи абсолютной и обычной сходимости (с доказательством).
- 30) Переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов.
- 31) Теорема Римана об условно сходящихся рядах.
- 32) Признаки Дирихле и Абеля сходимости рядов (с доказательством).
- 33) Функциональные последовательности и ряды. Поточечная и равномерная сходимость.
- 34) Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости функциональной последовательности (с доказательством).
- 35) Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.
- 36) Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов (с доказательством).
- 37) Теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда (с доказательством).
- 38) Почленное дифференцирование и интегрирование функциональных рядов.
- 39) Степенные ряды. Теорема Абеля (с доказательством).
- 40) Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда.
- 41) Ряды Тейлора и Маклорена.
- 42) Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена.
- 43) Ортогональная система функций. Ряды Фурье.
- 44) Свойства ряда Фурье. Неравенство Бесселя. Сходимость в среднем.
- 45) Тригонометрический ряд Фурье и его свойства.
- 46) Теорема Дирихле. Принцип локализации Римана.
- 47) Метод средних арифметических суммирования ряда Фурье. Теорема Вейерштрасса.