

*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Российский университет дружбы народов»*

*Факультет физико-математических и естественных наук*

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Наименование дисциплины**

Нелокальные краевые задачи

**Рекомендуется для направления подготовки/специальности**

01.04.02 Прикладная математика и информатика

магистерская программа «Математические модели в междисциплинарных исследованиях»

**Квалификация (степень выпускника) Магистр**

**1. Цели и задачи дисциплины:** знакомство с основными свойствами и современными методами качественного исследования неклассических задач для уравнений с частными производными, включая эллиптические уравнения с нелокальными краевыми условиями и краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений.

## 2. Место дисциплины в структуре ОП ВО:

Дисциплина «Нелокальные краевые задачи» относится к вариативной части блока 1 учебного плана.

В таблице № 1 приведены предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций дисциплины в соответствии с матрицей компетенций ОП ВО.

Таблица № 1

### Предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций

№ п/п	Шифр и наименование компетенции	Предшествующие дисциплины	Последующие дисциплины (группы дисциплин)
Общепрофессиональные компетенции			
	ОПК-4. Способен комбинировать и адаптировать существующие информационно-коммуникационные технологии для решения задач в области профессиональной деятельности с учетом требований информационной безопасности	-	Междисциплинарный экзамен, Научный семинар
Профессиональные компетенции			
	ПК.5. Способностью управлять проектами, планировать научно-исследовательскую деятельность, анализировать риски, управлять командой проекта	-	Междисциплинарный экзамен

## 3. Требования к результатам освоения дисциплины

В результате изучения дисциплины студент должен:

**Знать:** основные типы нелокальных краевых задач для эллиптических уравнений, постановки краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений, понятие и основные свойства пространств Соболева и весовых пространств, свойство фредгольмовой разрешимости, эффект нарушения гладкости решений.

**Уметь:** исследовать разрешимость и регулярность решений нелокальных краевых задач для эллиптических уравнений, а также краевых задач для некоторых классов функционально-дифференциальных уравнений в различных функциональных пространствах.

**Владеть:** основными качественными методами исследования названных задач, включая теорию банаховых алгебр, технику локализации, метод срезающих функций, метод априорных оценок, построение регуляризаторов, метод продолжения по параметру.

## 4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетные единицы.

Вид учебной работы	Всего часов	Модули			
		1	2	3	4
<b>Аудиторные занятия (всего)</b>			32		
В том числе:					
Лекции			16		
Практические занятия (ПЗ)					
Семинары (С)			16		
Лабораторные работы (ЛР)					
<b>Самостоятельная работа (всего)</b>			112		
В том числе:					
Подготовка к опросу					
Домашние задания			76		
Промежуточная аттестация (экзамен)			36		
Общая трудоемкость	час		144		
	зач. ед.		4		

## 5. Содержание дисциплины

### 5.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела (темы)
1	<b>Введение</b>	Используемые в курсе функциональные пространства, интерполяционные неравенства, факты из теории краевых задач для эллиптических уравнений с параметром, а также краевых задач для эллиптических уравнений в негладких областях; происхождение нелокальных краевых задач и их классификация.
2	<b>Задача с носителем нелокальных членов внутри области</b>	Постановка задачи, интерпретация нелокального условия. Пример: решение методом разделения переменных задачи для уравнения Пуассона в круге с нелокальным условием, связывающим след искомой функции на границе круга с ее следом на внутренней окружности. Априорная оценка и разрешимость эллиптической краевой задачи с параметром в нормах пространств Соболева, зависящих от параметра. Доказательство априорной оценки в пространствах Соболева решений задачи для эллиптического уравнения с нелокальным краевым условием в случае, когда носитель нелокальных членов лежит внутри области. Фредгольмова разрешимость в пространствах Соболева, дискретность и секториальная структура спектра нелокальной краевой задачи.
3	<b>Задача с подходом носителя нелокальных членов к границе вне</b>	Решение модельной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в бесконечном плоском угле в пространствах с весом. Переход к ограниченной области, метод локализации. Постановка задачи

	<b>точек сопряжения</b>	для уравнения Пуассона с нелокальным условием, связывающими след функции на части границы с ее следом на многообразии, лежащим в замыкании области и имеющим непустое пересечение с границей. Доказательство априорной оценки решений в весовых пространствах. Построение правого регуляризатора в весовых пространствах для оператора нелокальной краевой задачи, метод компенсации нелокальных членов.
4	<b>Задача с подходом носителя нелокальных членов к точкам сопряжения</b>	Решение модельной нелокальной задачи для уравнения Пуассона в бесконечном угле на плоскости с краевым условием, связывающим след искомой функции на стороне угла с ее следом на луче внутри угла. Исследование нелокальной задачи с параметром на отрезке, условия однозначной разрешимости. Постановка нелокальной задачи для эллиптического уравнения в ограниченной плоской области с подходом носителя нелокальных членов к точкам сопряжения. Доказательство априорной оценки и построение правого регуляризатора. Исследование асимптотики решений вблизи точек сопряжения.

### 5.3. Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекции	Практич. занятия	Лаб.	СРС	Всего часов
1.	Введение	2	2		28	32
2.	Задача с носителем нелокальных членов внутри области	4	4		28	36
3.	Задача с подходом носителя нелокальных членов к границе вне точек сопряжения	6	6		28	40
4.	Задача с подходом носителя нелокальных членов к точкам сопряжения	4	4		28	36

6. Лабораторный практикум не предусмотрен

### 7. Практические занятия

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудоемкость (час.)
1	1	Введение	2
2	2	Задача с носителем нелокальных членов внутри области	4
3	3	Задача с подходом носителя нелокальных членов к границе вне точек сопряжения	6
4	4	Задача с подходом носителя нелокальных членов к точкам сопряжения	4

8. Курсовые работы не предусмотрены.

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

а) Основная литература:

1. *Скубачевский А.Л.* Неклассические краевые задачи, I. В журнале "Современная математика. Фундаментальные направления", М.: РУДН, 2007 (том 26).
2. *Скубачевский А.Л.* Неклассические краевые задачи, II. В журнале "Современная математика. Фундаментальные направления", М.: РУДН, 2009 (том 33).

б) Дополнительная литература:

1. *Т. Като.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972.
2. *Гуревич П.Л.* Асимптотика решений нелокальных эллиптических задач в плоских углах. Труды семинара им. И.Г. Петровского, 23 (2003), 93-126.
3. *Гуревич П.Л.* Нелокальные эллиптические задачи с нелинейными преобразованиями переменных вблизи точек сопряжения. Известия РАН. Сер. мат., 67 (2003), 71-110.

Вся литература имеется в библиотеке РУДН или в электронной библиотеке института.

в) Программное обеспечение – пакет «Maple»

г) Базы данных, информационно-справочные и поисковые системы - Математический институт

**10. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**

учебная аудитория для проведения семинарских занятий, большая аудитория (лекционный зал) для чтения лекций, ноутбук - 1шт., проектор - 1шт., экран - 1шт., ксерокс - 1 шт., принтер - 1шт., сканер - 1 шт.

**11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:**

Соответствие систем оценок (используемых ранее оценок итоговой академической успеваемости, оценок ECTS и балльно-рейтинговой системы (БРС) оценок текущей успеваемости) (В соответствии с Приказом Ректора №996 от 27.12.2006 г.):

Баллы БРС	Традиционные оценки в РФ	Баллы для перевода оценок	Оценки	Оценки ECTS
86 – 100	5	95 - 100	5+	A
		86 - 94	5	B
69 – 85	4	69 - 85	4	C
51 – 68	3	61 - 68	3+	D
		51 - 60	3	E
0 – 50	2	31 - 50	2+	FX
		0 - 30	2	F

1. Студенты обязаны сдавать все задания в сроки, установленные преподавателем.
2. В балльно-рейтинговую систему оценки знаний в течение семестра входят работа на занятии, выполнение домашних заданий и проработка текущего материала. Выдается 4 домашних задания на обозначенные в ФОС темы, каждое из которых оценивается из 10 баллов. По указанным разделам проводится опрос, который максимально оценивается 20 баллами.
3. Студент допускается к итоговому контролю с любым количеством баллов, набранным в семестре. Итоговый контроль содержит 2 задания. На подготовку к ответу отводится 1 час, после чего производится устный опрос студента. Оценивается работа из 50 баллов независимо от количества баллов, полученных в течение семестра.
4. Если после итогового контроля студент получил менее 31 балла, то ему выставляется оценка F и он должен повторить дисциплину в установленном порядке. Если же в итоге студент получил не менее 31 балла, т.е. FX, то ему разрешается добор необходимого (до 51) количества баллов путём повторного одноразового выполнения предусмотренных итоговых контрольных мероприятий; при этом аннулируются, по усмотрению преподавателя, соответствующие предыдущие результаты. Ликвидация задолженностей проводится в период с 07.02 по 28.02 (с 07.09 по 28.09) по согласованию с деканатом.

**12. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю) – прилагается.**

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС 3++ РУДН.

**Профессор**  
Математического института  
им. С.М. Никольского



Л.Е. Россовский

**Директор**  
Математического института  
им.С.М. Никольского



А.Л. Скубачевский

*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»*

Факультет физико-математических и естественных наук

**Математический институт им. С.М. Никольского**

УТВЕРЖДЕН

На заседании института

« » 201 г.,

протокол №

Директор института

\_\_\_\_\_ А.Л. Скубачевский

### **ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

по учебной дисциплине Нелокальные краевые задачи

**Рекомендуется для направления подготовки**  
01.04.02 Прикладная математика и информатика

Магистерская программа «Математические модели в междисциплинарных исследованиях»

**Квалификация (степень) выпускника Магистр**

Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине Нелокальные краевые задачи

Направление/Специальность: 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»

Магистерская программа «Математические модели в междисциплинарных исследованиях»

Код контролируемой компетенции или ее части	Контролируемый раздел дисциплины	Контролируемая тема дисциплины	Наименование оценочного средства				Баллы	Баллы
			Текущий контроль			Промежуточная аттестация		
			Домашние задания	Контрольная работа	Опрос			
ОПК-4, ПК.5	Введение	Типы нелокальных краевых условий для эллиптических уравнений				10	10	20
		Функциональные пространства	10				10	
	Эллиптические задачи с нелокальными условиями внутри области	Эллиптические задачи с параметром в ограниченных областях, априорные оценки решений	10				10	30
		Разрешимость и индекс в пространствах Соболева эллиптической задачи с нелокальными условиями внутри области	10			10	20	
	Нелокальн	Модельная задача в	10				10	30



	ые эллиптические задачи в плоских областях с носителями нелокальных членов вне множества точек сопряжения	угле в пространстве с весом						
		Нелокальная краевая задача для уравнения Пуассона в плоской области с носителем нелокальных членов вблизи границы				20	20	
	Нелокальн ые эллиптические задачи в плоских областях с носителями нелокальных членов вблизи точек сопряжения				20		20	20
	Итого		40		20	40	100	100

**Перечень оценочных средств**  
по дисциплине Нелокальные краевые задачи

/п	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в фонде
<i>Аудиторная работа</i>			
1	Опрос	Средство контроля, организованное как специальная беседа преподавателя с обучающимся на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, и рассчитанное на выяснение объема знаний, обучающегося по определенному разделу или теме.	Примерные вопросы
3	Экзамен	Форма проверки качества усвоения студентами учебного материала и выполнения в процессе обучения всех учебных поручений в соответствии с утвержденной программой.	Комплект экзаменационных билетов, список экзаменационных вопросов
<i>Самостоятельная работа</i>			
1	СРС (домашнее задание)	Форма проверки качества усвоения студентами учебного материала в соответствии с утвержденной программой.	Примерные варианты домашнего задания

### Приложение 3

Дисциплина *Нелокальные краевые задачи*

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1**

1. Нелокальные краевые задачи для эллиптических уравнений с параметром и с носителем нелокальных данных внутри области. Постановка задачи. Определение граничного оператора.
2. Разрешимость в весовых пространствах модельной нелокальной задачи для уравнения Пуассона в плоском угле.

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 2**

1. Априорные оценки решений нелокальных краевых задач с параметром в случае носителя нелокальных данных внутри области.
2. Интерполяционные неравенства в весовых пространствах.

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 3**

1. Разрешимость в пространствах Соболева и спектральные свойства нелокальных краевых задач для эллиптических уравнений с параметром в случае носителя нелокальных данных внутри области.
2. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в плоском угле в весовых пространствах. Сведение к краевой задаче с параметром на отрезке.

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 4**

1. Весовые пространства В.А. Кондратьева в плоском угле. Определение. Преобразования нормы.

2. Нелокальная краевая задача для уравнения Пуассона в плоской ограниченной области с носителем нелокальных данных вблизи границы. Априорная оценка решений в весовых пространствах.

#### ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 5

1. Свойства весовых пространств в ограниченной области. Теорема о компактности вложения.

2. Фредгольмова разрешимость в весовых пространствах нелокальной краевой задачи для уравнения Пуассона с носителем нелокальных данных вблизи границы.

#### ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 6

1. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в плоском угле в весовых пространствах. Сведение к краевой задаче с параметром на отрезке.

2. Нелокальные краевые задачи для эллиптических уравнений с параметром и с носителем нелокальных данных внутри области. Постановка задачи. Определение граничного оператора.

#### ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 7

1. Теорема о разрешимости задачи Дирихле для уравнения Пуассона в плоском угле в весовых пространствах.

2. Априорные оценки решений нелокальных краевых задач с параметром в случае носителя нелокальных данных внутри области.

#### ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 8

1. Интерполяционные неравенства в весовых пространствах.

2. Нелокальная краевая задача для уравнения Пуассона в плоской ограниченной области с носителем нелокальных данных вблизи границы. Априорная оценка решений в весовых пространствах.

#### ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 9

1. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области в весовых пространствах. Априорная оценка решений и следствия из нее.

2. Разрешимость в пространствах Соболева и спектральные свойства нелокальных краевых задач для эллиптических уравнений с параметром в случае носителя нелокальных данных внутри области.

#### ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 10

Фредгольмова разрешимость задачи Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области в весовых пространствах.

2) Свойства весовых пространств в ограниченной области. Теорема о компактности вложения.

#### ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 11

1. Нелокальная краевая задача для уравнения Пуассона в плоской ограниченной области с носителем нелокальных данных вблизи границы. Априорная оценка решений в весовых пространствах.

2. Весовые пространства В.А. Кондратьева в плоском угле. Определение. Преобразования нормы.

#### ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 12

1. Фредгольмова разрешимость в весовых пространствах нелокальной краевой задачи для уравнения Пуассона с носителем нелокальных данных вблизи границы.

2. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области в весовых пространствах. Априорная оценка решений и следствия из нее.

**Каждому студенту достается по одному билету из данного перечня. Ответ на каждый вопрос оценивается от 0 до 20 баллов в зависимости от полноты и правильности ответов.**

## ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО КУРСУ

1. Нелокальные краевые задачи для эллиптических уравнений с параметром и с носителем нелокальных данных внутри области. Постановка задачи. Определение граничного оператора.
2. Априорные оценки решений нелокальных краевых задач с параметром в случае носителя нелокальных данных внутри области.
3. Разрешимость в пространствах Соболева и спектральные свойства нелокальных краевых задач для эллиптических уравнений с параметром в случае носителя нелокальных данных внутри области.
4. Весовые пространства В.А. Кондратьева в плоском угле. Определение. Преобразования нормы.
5. Свойства весовых пространств в ограниченной области. Теорема о компактности вложения.
6. Интерполяционные неравенства в весовых пространствах.
7. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в плоском угле в весовых пространствах. Сведение к краевой задаче с параметром на отрезке.
8. Теорема о разрешимости задачи Дирихле для уравнения Пуассона в плоском угле в весовых пространствах.
9. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области в весовых пространствах. Априорная оценка решений и следствия из нее.
10. Фредгольмова разрешимость задачи Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области в весовых пространствах.
11. Нелокальная краевая задача для уравнения Пуассона в плоской ограниченной области с носителем нелокальных данных вблизи границы. Априорная оценка решений в весовых пространствах.
12. Фредгольмова разрешимость в весовых пространствах нелокальной краевой задачи для уравнения Пуассона с носителем нелокальных данных вблизи границы.
13. Разрешимость в весовых пространствах модельной нелокальной задачи для уравнения Пуассона в плоском угле.

### Примерные варианты домашнего задания по дисциплине Нелокальные краевые задачи

1. Вывести интерполяционное неравенство для весовых пространств (5 баллов)
  2. Найти спектр нелокальной задачи для оператора второй производной на отрезке (5 баллов).
- 
1. Показать, что фредгольмовость ограниченного линейного оператора в банаховых пространствах равносильна существованию априорной оценки правого регуляризатора (5 баллов).
  2. Вывести интерполяционное неравенство для пространств Соболева (5 баллов).
- 
1. Выяснить, при каких соотношениях между растворами углов в угловых точках и показателями гладкости и веса нелокальная краевая задача для уравнения Пуассона фредгольмова (5 баллов).
  2. Привести примеры нарушения компактности вложения весовых пространств (5 баллов).

**Примеры вопросов к опросу**  
по дисциплине Нелокальные краевые задачи

1. Что такое метод локализации?
2. Для каких типов нелокальных краевых условий модельная задача является нелокальной?
3. Дайте определение нормы в весовом пространстве.
4. Почему нелокальные задачи в случае подхода носителя нелокальных членов к границе рассматриваются в пространствах с весом?
5. Дайте определение обобщенного решения нелокальной краевой задачи.
6. Может ли обобщенное решение нелокальной краевой задачи при подходе носителя нелокальных членов к точкам сопряжения сохранять гладкость?
7. Как считаются коэффициенты в асимптотике решения нелокальной краевой задачи вблизи точки сопряжения?

Правильный ответ на каждый вопрос оценивается двумя баллами.