Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Факультет физико-математических и естественных наук

Рекомендовано МССН

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Рекомендуется для направления (ий) подготовки (специальности (ей))

01.04.01 «*Математика*»,
специализация «Неклассические задачи анализа и дифференциальных уравнений, математическое моделирование и машинное обучение»

Квалификация (степень) выпускника **магистр**

(указывается квалификация (степень) выпускника в соответствии с ОС ВО РУДН)

1. Цели и задачи дисциплины: Дисциплина «Топологические методы в эллиптической теории» является одной из начальных дисциплин направления подготовки «Математика», с которых начинается обучение в магистратуре и подготавливающих студента к изучению последующих дисциплин.

Основная цель курса – знакомство обучающимися с основными понятиями и методами эллиптической теории, включая теорию Фредгольма и элементы алгебраической топологии. Развитие этих теорий в XX веке привело к получению знаменитой формулы индекса Атьи-Зингера для индекса эллиптического оператора на замкнутом многообразии.

2. Место дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Топологические методы в эллиптической теории» относится к базовой компоненте блока 1 учебного плана. В таблице № 1 приведены предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций дисциплины в соответствии с матрицей компетенций ОП ВО.

Предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций

№ п/п	Шифр и наименование компетенции	Предшествующие дисциплины	Последующие дисциплины (группы дисциплин)
Общепрофессиональные компетенции			
	ОПК-1. Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики	История и методология математики	Функциональные пространства

3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать, основные понятия теории фредгольмовых и эллиптических операторов.
Уметь применять методы алгебраической топологии в простейших прикладных задачах.
Владеть определениями фундаментальной группы, дифференциальных форм, когомологий.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры			
		1	2	3	4
Аудиторные занятия (всего)	32		32		
В том числе:					

Лекции	16		16		
Практические занятия (ПЗ)	16		16		
Семинары (С)					
Лабораторные работы (ЛР)					
Самостоятельная работа (всего)	40		40		
В том числе:					
Курсовой проект (работа)					
Расчетно-графические работы					
Реферат					
Другие виды самостоятельной работы	40		40		
Вид промежуточной аттестации (экзамен)	36		36		
Общая трудоемкость час	108		108		
зач. Ед.	3		3		

5. Содержание дисциплины

5.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела (темы)
1.	Теория Фредгольма	Компактные операторы.Операторы конечного ранга. Компактные операторы. *-Алгебра компактных операторов. Условия компактности интегральных операторов. Фредгольмовы операторы.Определение фредгольмовости. Свойства фредгольмовых операторов.Теорема Никольского-Аткинсона. Определение индекса. Свойства индекса. Операторы Теплица Ограниченность. Символ. Формула композиции. Теорема о фредгольмовости операторов Теплица.
2.	Элементы алгебраической топологии	Фундаментальная группа пространства Пути. Петли. Гомотопность путей. Определение фундаментальной группы. Индуцированное отображение. Его гомотопическая инвариантность. Фундаментальная группа пространства II Гомотопические эквивалентности пространств.Инвариантность фундаментальной группы относительно гомотопических эквивалентностей. Накрытия. Универсальные накрытия. Вычисление фундаментальной группы при помощи накрытий. Дифференциальные формы и когомологии де Рама Формулы индекса операторов Теплица.Формулы индекса дифференциальных операторов в Rn.

5.2. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практ. зан.	Лаб. зан.	СРС	Всего час.

1.	Теория Фредгольма	8	8		20	36
2.	Элементы алгебраической топологии	8	8		20	36
	Контроль знаний					36
	Итого:	16	16		40	108

6. Лабораторный практикум не предусмотрен

7. Практические занятия (семинары)

№ п/п	Темы практического занятия	Трудоемкость (час.)
1.	Вводное занятие	2
2.	Компактные операторы	2
3.	Фредгольмовы операторы	2
4.	Операторы Теплица	2
5.	Вычисление фундаментальных групп	2
6.	Вычисление фундаментальных групп	2
7.	Вычисление когомологий в простейших ситуациях	2
8.	Контрольная работа по дифференциальным формам	2

8. Курсовые работы не предусмотрены**.**

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

а) основная литература:

1. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. 2015. МЦНМО. Глава 3.
2. Мищенко А.С. Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. 2020. МГУ.
3. Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии. 2016. МГУ (параграфы 12 и 30 --- дифференциальные формы; 31,32- гомотопии, накрытия)

б) дополнительная литература

4. Пале Р. Семинар по теореме Атьи и Зингера об индексе. М. Мир. 1970.

10. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

учебная аудитория для проведения семинарских занятий, большая аудитория (лекционный зал) для чтения лекций.

11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:

Для успешного освоения данного курса необходимо посещать занятия. На лекциях будут подробно разбираться все понятия и методы, будут разобраны репрезентативные примеры. На семинарах разбираются типичные задачи как вычислительного плана, так и задачи на доказательство. Кроме этого будут выдаваться задачи для самостоятельного решения.

11.1 Структура практических занятий

В каждом семестре на итоговый контроль знаний отводится 45 баллов, ещё 55 баллов отводится на выполнение контрольной работы, активной работы на семинарских занятиях и выполнение домашних заданий. Итоговая сумма баллов – 100.

Соответствие систем оценок (используемых ранее оценок итоговой академической успеваемости, оценок ECTS и балльно-рейтинговой системы (БРС) оценок текущей успеваемости) (В соответствии с Приказом Ректора №996 от 27.12.2006 г.):

Баллы БРС	Традиционные оценки в РФ	Баллы для перевода оценок	Оценки	Оценки ECTS
86 – 100	5	95 - 100	5+	A
		86 - 94	5	B
69 – 85	4	69 - 85	4	C
51 – 68	3	61 - 68	3+	D
		51 - 60	3	E
0 – 50	2	31 - 50	2+	FX
		0 - 30	2	F

1. Студенты обязаны сдавать все задания в сроки, установленные преподавателем.
2. Отсрочка в сдаче домашнего задания считается уважительной только в случае болезни студента, что подтверждается наличием у него медицинской справки.
3. Студент допускается к итоговому контролю с любым количеством баллов, набранным в семестре, но при условии, что у него имеется теоретическая возможность получить не менее 31 балла.
4. Если в итоге за семестр студент получил менее 31 балла, то ему выставляется оценка F и он должен повторить дисциплину в установленном порядке. Если же в итоге студент получил не менее 31 балла, т.е. F_x, то ему разрешается добор необходимого (до 51) количества баллов путём повторного одноразового выполнения предусмотренных итоговых контрольных мероприятий; при этом аннулируются, по усмотрению преподавателя, соответствующие предыдущие результаты. Ликвидация задолженностей проводится в период с 07.02 по 28.02 по согласованию с деканатом.
5. Итоговая контрольная работа (итоговый контроль) содержит от 3 до 6 вопросов (или заданий). На подготовку к ответу отводится 1 час, после чего производится устный опрос студента. Оценивается работа из 60 баллов независимо от оценки, полученной в семестре.

11.2 Самостоятельная работа студента

Еженедельно студенты получают домашнее задание по текущей теме практического занятия. Следующее практическое занятие начинается с проверки выполненного домашнего задания, вопросов по домашнему заданию и его обсуждения. После этого происходит переход к следующим задачам по текущей или новой теме.

На практических занятиях у доски задачи и упражнения решаются в основном кем-то из вызванных студентов. При этом все присутствующие студенты должны контролировать и записывать решение на доске, а также устно отвечать на возникающие при решении вопросы.

Разработчик:

д.ф.-м.н.,
профессор Математического института
им. С.М. Никольского А.Ю. Савин

Директор Математического института
им. С.М. Никольского,
д.ф.-м.н., профессор А.Л.Скубачевский

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов»

Факультет физико-математических и естественных наук

Математический институт им. С.М.Никольского

УТВЕРЖДЕН

На заседании института

« »   202_ г.,

протокол №

Директор института

______________ А.Л.Скубачевский

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по учебной дисциплине

«ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ»

Рекомендуется для направления подготовки

01.04.01 «*Математика»,*

специализация

«Неклассические задачи анализа и дифференциальных уравнений,

математическое моделирование и машинное обучение»

Квалификация (степень) выпускника

Магистр

Квалификация (степень) выпускника

Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине «Топологические методы в эллиптической теории Модуль 2

Код контролируемой компетенции или ее части	Контролируемый раздел дисциплины	Контролируемая тема дисциплины	Наименование оценочного средства															Б т
			Текущий контроль												Промежуточная аттестация			
			Опрос	Тест	Коллоквиум	Контрольная работа	Выполнение ЛР	Выполнение КР/КП	СРС(Вып.ДЗ)	Реферат	Выполнение РГР	…	…	…	Зачет	…	…	
ОПК-1	Теория Фредгольма	Тема 1: Теория Фредгольма							25						25			
ОПК-1	Элементы алгебр. топологии	Тема 2: Элементы алгебр. топологии				25			5						20			
		ИТОГО:				25			30						45			

Перечень оценочных средств

по дисциплине **Топологические методы в эллиптической теории**

п/п	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в фонде
Аудиторная работа			
	Контрольная работа	Форма проверки качества усвоения студентами учебного материала в соответствии с утвержденной программой.	Комплект вариантов
	Экзамен	Форма проверки качества усвоения студентами учебного материала и выполнения в процессе обучения всех учебных поручений в соответствии с утвержденной программой.	список экзаменационных вопросов
Самостоятельная работа			
	СРС (домашнее задание)	Форма проверки качества усвоения студентами учебного материала в соответствии с утвержденной программой.	Примерный вариант домашнего задания

Приложение 3

Дисциплина

Топологические методы в эллиптической теории

Вопросы экзамена

1. Компактные операторы и их свойства
2. Фредгольмовы операторы и их свойства.
3. Теорема Аткинсона
4. Индекс и его свойства.
5. Преобразование Фурье и его свойства. Символ дифферециального оператора
6. Пространства Соболева и их свойства.
7. Понятие о псевдодифференциальном операторе.
8. Символ дифференциального оператора. Формула композиции.
9. Символ дифференциального оператора. Формула замены переменной.
10. Алгебра Грассмана. Свойства. Примеры.
11. Дифференциальные формы в Rn. Внешний дифференциал. Свойства.
12. Индуцированное отображение на формах. Естественность внешнего дифференциала.
13. Комплекс де Рама. Примеры. Связь с векторным анализом
14. Когомологии де Рама. Замкнутые формы. Точные формы.
15. Индуцированное отображение в когомологиях. Гомотопическая инвариантность.
16. Когомологии Rn и шара. Когомологии окружности. Когомологии кольца.
17. Когомологии плоской области с дырками.
18. Интегрирование по фундаментальному циклу.
19. Характер Черна эллиптического символа. Его свойства.
20. Формула Атьи-Зингера.

Каждому студенту достается билет, содержащий 2 вопроса из данного перечня и задачу из списка ниже. Ответ на каждый вопрос оценивается от 0 до 15 баллов в зависимости от полноты и правильности ответов. Задача оценивается от 0 до 15 баллов в зависимость от полноты и правильности решения.

Примерные варианты домашних заданий и задач экзамена

по дисциплине **Топологические методы в эллиптической теории**

Блок 1. Гомеоморфизм

7.61. Доказать, что плоскость с приклеенной к ней ручкой гомеоморфна двум кольцам, склеенным, как показано на рис. 56.

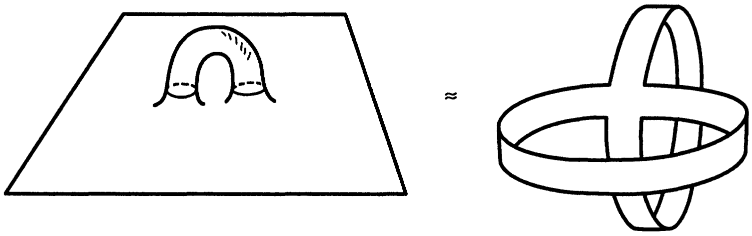

Рис. 56

7.66. Рассмотрим «топологического человека», т. е. сферу с двумя ручками.

а) Может ли топологический человек «расцепить» руки путем гладкой изотопии (см. рис. 61)?

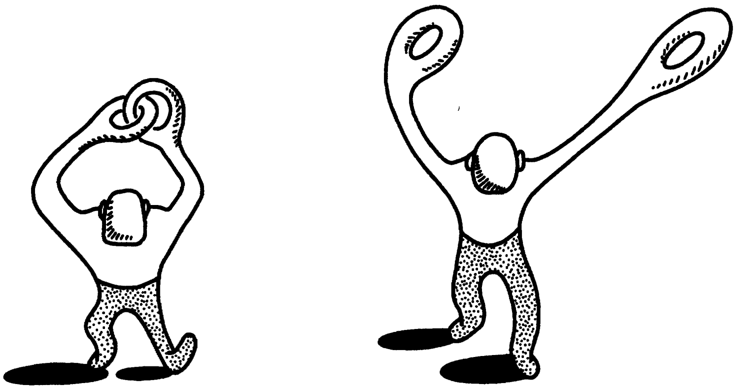

Рис. 61

23.13. Разрезать крендель (сферу с двумя ручками) так, чтобы получился плоский связный восьмиугольник.

14.45. Доказать, что $SO(n)$ — связное топологическое пространство; $O(n)$ состоит из двух компонент связности. Доказать, что $U(n)$, $SU(n)$ — связные топологические пространства.

14.46. Доказать, что группа $GL(n, \mathbb{C})$, рассматриваемая как подмножество в пространстве всех комплексных матриц размера $n \times n$, — открытое и связное подмножество.

14.47. Доказать, что группа $GL^{+}(n, \mathbb{R})$ вещественных матриц размера $n \times n$ с положительным определителем — связное топологическое пространство.

14.48. Доказать, что группа $GL(n, \mathbb{R})$ вещественных невырожденных матриц размера $n \times n$ — топологическое пространство, состоящее из двух связных компонент.

14.49 Доказать, что группа SL(2,R) матриц с определителем равным единице гомеоморфна произведению $S^1 x R^2$.

14.59. Доказать, что открытый диск $x^2 + y^2 < 1$ и плоскость $\mathbb{R}^2(x, y)$ гомеоморфны. Доказать, что открытый квадрат $\{|x| < 1, |y| < 1\}$ и плоскость $\mathbb{R}^2(x, y)$ гомеоморфны. Доказать, что интервал $0 < x < 1$ и открытый квадрат $\{|x| < 1, |y| < 1\}$ не гомеоморфны.

14.60. Доказать, что куб $\{|x_i| \leqslant 1,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ и шар $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 1\right\}$ гомеоморфны. Доказать, что открытый куб и открытый шар диффеоморфны.

14.61. Доказать, что шар $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 1\right\}$ и верхнее полушарие сферы $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1,\ x_{n+1} \geqslant 0\right\}$ гомеоморфны.

14.62. Доказать, что эллипсоид $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n+1} \dfrac{x_i^2}{a_i^2} = 1\right\}$ гомеоморфен сфере S^n.

14.63. Гомеоморфны ли отрезок $0 \leqslant x \leqslant 1$ и буква T?

14.64. Доказать, что интервал $(-1, 1)$ гомеоморфен прямой $(-\infty, \infty)$. Доказать, что любые два интервала гомеоморфны.

14.65. Гомеоморфны ли шар и сфера?

14.66. Доказать следующие гомеоморфизмы:

а) $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k \approx S^{n-k-1} \times \mathbb{R}^{k+1}$;

б) $S^n \setminus S^k \approx S^{n-k-1} \times \mathbb{R}^{k+1}$.

14.67. Доказать гомеоморфность пространств

$$\mathbb{R}^3 \setminus S^1 \quad \text{и} \quad \mathbb{R}^3 \setminus \left(\{y = z = 0\} \cup \{(1, 1, 1)\}\right).$$

14.74. Дать классификацию с точностью до гомеоморфизма букв русского алфавита.

Блок 2. Гомотопии

15.1. Доказать, что $f\colon X \to Y$ гомотопно отображению в точку, если:

а) $X = \mathbb{R}^n$; б) $Y = \mathbb{R}^n$.

15.6. Дать классификацию букв русского алфавита с точностью до гомотопической эквивалентности.

15.7. а) Доказать, что двумерное плоское кольцо гомотопически эквивалентно окружности.

б) Доказать, что лист Мёбиуса гомотопически эквивалентен окружности.

32.5. Доказать, что тор с диском, натянутым на меридиан, гомотопически эквивалентен букету $S^1 \vee S^2$.

32.6. Доказать, что тор с диском, натянутым на меридиан и параллель, гомотопически-эквивалентны сфере S^2.

32.28. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ две зацепленные окружности S_1^1 и S_2^1 (см. рис. 108). Предъявить геометрическое доказательство соотношения $aba^{-1}b^{-1} = 1$ в группе $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (A \cup B), x_0)$.

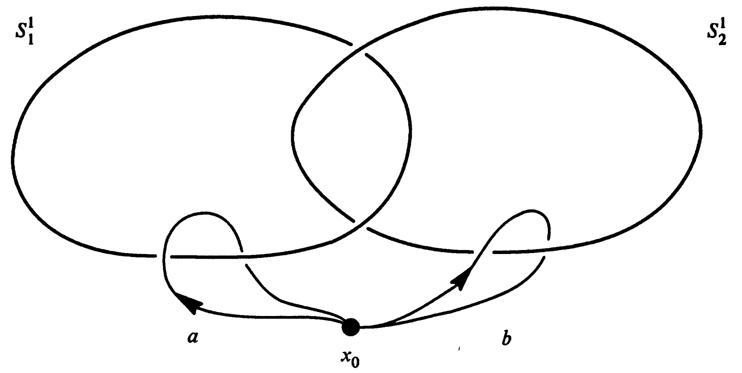

Рис. 108

32.99 Найти гомотопические группы тора с дыркой

32.100 Из R^3 удалили точку и прямую, которая не проходит через эту точку. Найти гомотопические группы полученного пространства.

Блок 3. Гомотопические группы. Точные последовательности.

16. Покажите, что если расслоение (E, B, p) обладает сечением (т.е. таким непрерывным отображением $s\colon\ B \to E$, что $p \circ s = \mathrm{id}_B$) или если слой является ретрактом пространства E, то

$$\pi_n(E) \cong \pi_n(B) \oplus \pi_n(F).$$

17. Покажите, что если слой расслоения (E, B, p) стягивается в точку по E, то $\pi_n(B) \cong \pi_n(E) \oplus \pi_{n-1}(F)$.

Упражнения. 13. Если A есть ретракт (не обязательно деформационный) пространства X, то (при всех n)

$i_*\colon\ \pi_n(A) \to \pi_n(X)$ есть мономорфизм,

$j_*\colon\ \pi_n(X) \to \pi_n(X, A)$ есть эпиморфизм,

$\partial\colon\ \pi_n(X, A) \to \pi_{n-1}(A)$ есть нулевой гомоморфизм

и $\pi_n(X) = \pi_n(X, A) \oplus \pi_n(A)$.

14. Если A стягиваемо по X в точку, то

$j_*\colon\ \pi_n(X) \to \pi_n(X, A)$ есть мономорфизм,

$\partial\colon\ \pi_n(X, A) \to \pi_{n-1}(A)$ есть эпиморфизм,

$i_*\colon\ \pi_n(A) \to \pi_n(X)$ есть нулевой гомоморфизм

и $\pi_n(X, A) = \pi_n(X) \oplus \pi_{n-1}(A)$.

15. Если существует гомотопия $f_t\colon\ X \to X$, загоняющая X в A, т.е. такая, что $f_0 = \mathrm{id}$ и $f_1(X) \subset A$, то

$\partial\colon\ \pi_n(X, A) \to \pi_{n-1}(A)$ есть мономорфизм,

$i_*\colon\ \pi_n(A) \to \pi_n(X)$ есть эпиморфизм,

$j_*\colon\ \pi_n(X) \to \pi_n(X, A)$ есть нулевой гомоморфизм

и $\pi_n(A) = \pi_n(X) \oplus \pi_{n+1}(X, A)$.

Упражнение 19. Пусть

$$1 \to A_1 \to \cdots \to A_n \to 1$$

– точная последовательность. Докажите, что если группы A_i конечны и a_i – их порядки, то $\Sigma (-1)^i a_i = 0$, а если A_i – конечнопорожденные абелевы группы и r_i – их ранги, то $\Sigma(-1)^i r_i = 0$.

Блок 4. Гомологии

Построить клеточное разбиение и вычислить гомологии следующих пространств:

1) кольцо $\{(x,y) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$

2) круг $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$

3) крендель (сфера с 2 ручками):

4) тор с дыркой

5) шар $\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$

6) полноторие

7) лист Мёбиуса

8) шаровой слой $\{(x,y,z) \mid 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4\}$

9) букет $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$

10) n-мерный шар

11*) n- мерный тор

12) трёхмерное вещественное проективное пространство $\mathbb{RP}^3$

13) двумерное комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^2$

14) найти гомологии дополнения $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{S}^1$ (окружность вложена в пространство незаузлено)

15) Яблоко имеет форму шара. Червячок проел в яблоке полость в форме полнотория. Найти гомологии оставшейся части яблока.

16) предыдущая задача с учётом того, что червяк ещё проел цилиндрическую полость, соединяющую поверхность яблока и торическую полость внутри яблока.

17) записать цепной комплекс для поверхности тетраэдра

Примерный вариант контрольной работы по дифференциальным формам

1. Найти $\omega_1 \wedge \omega_2$

a) $\omega_1 = 3\,dz \wedge dx - dy \wedge dw$, $\omega_2 = -dt + 3\,dx - dy$

b) $\omega_1 = 3t\,dt - x\,dx - y\,dy$, $\omega_2 = -dt - dy + dx$

c) $\omega_1 = 2\,dx \wedge dy - dz \wedge dw$, $\omega_2 = dw \wedge dz + dy \wedge dx$

d) $\omega_1 = 3t\,dt \wedge dx - dt \wedge dz$, $\omega_2 = dy \wedge dx + 4\,dy \wedge dz$

2. Найти $d\omega$

a) $\omega = (x^2 y - 7y^2)\,dx + 5y^2 x\,dy$

b) $\omega = 3z\,dx \wedge dy - 8xyz\,dy \wedge dz - 7\,dx \wedge dz$

c) $\omega = e^x y\,dx \wedge dz - 8\cos(2y)x^3\,dy \wedge dz$

d) $\omega = (xy^3 - 5)\,dx + 8xyz\,dy$

3. Сделать подстановку в форму

$\omega = x^2 y\,dx \wedge dy$

a) $x = r\cos 2\varphi$, $y = r\sin 2\varphi$

b) $x = uv$ $\quad y = \frac{u}{v^2}$

c) $x = e^u$, $y = u e^v$

d) $x = \sqrt{t}$, $y = \sqrt{st}$