Рекомендовано МССН

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Факультет физико-математических и естественных наук

ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины:

Уравнения с частными производными

Рекомендуется для направления подготовки

01.03.01 Математика

(указываются код и наименование направления подготовки)

Направленность программы (профиль)

Математика

(наименование образовательной программы в соответствии с направленностью (профилем))

Квалификация (степень) выпускника бакалавр

(указывается квалификация (степень) выпускника в соответствии с ОС ВО РУДН)

1. Цели и задачи дисциплины:

Познакомить студентов с фундаментальными понятиями, лежащими в основе современной теории уравнений с частными производными – преобразованием Фурье, пространствами обобщённых функций и пространствами Соболева. Изложить основополагающие подходы к решению задач для уравнений в частных производных, порожденных практическими проблемами и применяемых в математической физике, современных инженерных и междисциплинарных исследованиях. Изложить основные методы решения различных задач для уравнений в частных производных – начальных, краевых, смешанных задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений 2-го порядка. Познакомить студентов с основами и методами теории нелинейных уравнений 1-го порядка

2. Место дисциплины в структуре ООП:

Блок 1, вариативная часть.

Необходимо знание алгебры, математического анализа, аналитической и дифференциальной геометрии, теории функций действительной и комплексной переменной, дифференциальных уравнений. Дисциплина является предшествующей к курсам «Обобщенные функции», «Методы оптимизации», к дисциплинам, изучаемым в магистратуре «Нелинейный анализ, оптимизация и математическое моделирование».

Является завершающей для математических дисциплин: «Математический анализ», «Комплексный анализ», «Функциональный анализ», «Дифференциальные уравнения».

3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

ПК-1 Способен к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать: классификацию линейных уравнений в частных производных второго порядка и постановку начальных, краевых и смешанных задач для наиболее важных уравнений математической физики**,** понятие и основные свойства пространств Соболева и пространства обобщённых функций, классические и функциональные методы исследования задач математической физики, понятия обобщенных решений нелинейных эволюционных уравнений первого порядка.

Уметь: решать начальные, краевые и смешанные задачи для уравнений с частными производными методами характеристик, разделения переменных, преобразования Фурье, потенциалов и проективными (Ритца и Галеркина), строить обобщенные решения нелинейных эволюционных уравнений первого порядка.

Владеть: основными функционально-аналитическими методами теории уравнений с частными производными, а также приближенными методами решений задач математической физики – Ритца и Галеркина.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 12 зачетных единиц.

№	**Вид учебной работы**	**Всего часов**	**Семестры**			
			9	**A**	**B**	**C**
1.	**Аудиторные занятия (ак. часов)**	153	27	32	54	40
	В том числе:					
1.1.	Лекции	68	9	16	27	16
1.2.	Прочие занятия	85	18	16	27	24
	В том числе:					

1.2.1.	*Практические занятия (ПЗ)*	85	18	16	27	24
1.2.2.	*Семинары (С)*					
1.2.3.	*Лабораторные работы (ЛР)*					
2.	**Самостоятельная работа студентов (ак. часов)**	279	9	76	126	68
	В том числе:					
2.1.	Курсовой проект (работа)					
2.2.	Расчетно-графические работы					
2.3.	Реферат					
2.4.	Подготовка и прохождение промежуточной аттестации	63				63
	Другие виды самостоятельной работы		9	76	126	5
3.	**Общая трудоемкость (ак. часов)**	432	36	108	180	108
	Общая трудоемкость (зачетных единиц)	12	1	3	5	3

Примечание: * - количество часов/зачетных единиц в случае, если студент выбрал (не более чем в одном из семестров) курсовую работу по уравнениям с частными производными (курсовые работы по выбору студента).

5. Содержание дисциплины

5.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1.	Математические модели физических процессов	Вывод уравнений колебаний струны и теплопроводности. Начальные и краевые условия, их физический смысл. Уравнения Лапласа и Пуассона.
2.	Общая теория задачи Коши для уравнений с частными производными	Нормальное уравнение и нормальная задача Коши. Теорема Ковалевской (без док-ва). Характеристические векторы и характеристические поверхности. Задача Коши с начальными данными на произвольной поверхности. Эллиптические и гиперболические уравнения.
3.	Классификация уравнений 2-го порядка и их приведение к каноническому виду	Приведение к каноническому виду уравнений 2-го порядка в фиксированной точке. Классификация уравнений 2-го порядка. Приведение к каноническому виду уравнений 2-го порядка на плоскости.
4.	Уравнение колебаний струны	Общее решение однородного уравнения колебаний струны. Формула Даламбера решения задачи Коши для уравнения колебаний струны. Принцип Дюамеля. Метод распространяющихся волн решения начально-краевых задач. Сильные и слабые разрывы решений, их распространение вдоль характеристик. Задача Коши для гиперболического уравнения 2-го порядка на плоскости.
5.	Задача Коши для волнового уравнения	Характеристический конус и энергетическое неравенство для волнового уравнения. Формулы Кирхгофа (без док-ва) и Пуассона решения задачи Коши для волнового уравнения. Распространение волн, принцип Гюйгенса.
6.	Преобразование Фурье	Определение преобразования Фурье и его основные свойства. Пространство Шварца быстро убывающих функций. Обратное преобразование Фурье.
7.	Задача Коши для уравнения	Построение решения задачи Коши для уравнения теплопроводности с помощью преобразования Фурье.

	теплопроводности	Формула Пуассона, ядро Пуассона. Принцип максимума для уравнения теплопроводности в ограниченном цилиндре и в слое.
8.	Обобщённые функции медленного роста	Пространство обобщённых функций медленного роста и заданные в нём операции, примеры. Преобразование Фурье обобщённых функций медленного роста. Свёртка обобщённой функции медленного роста и функции из пространства Шварца, преобразование Фурье свёртки. Преобразование Фурье регулярной обобщённой функции медленного роста, теорема Планшереля. Вывод формулы Кирхгофа.
9.	Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов	Определение фундаментального решения линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами, теорема Хёрмандера (без док-ва). Фундаментальные решения оператора Лапласа на плоскости и в пространстве, оператора теплопроводности и волнового оператора.
10.	Уравнения Лапласа и Пуассона, гармонические функции	Формулы Грина. Представление решения уравнения Пуассона через потенциалы. Гармонические функции и их свойства: теоремы о среднем, принцип максимума. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области, функция Грина и её свойства. Построение функции Грина для шара, формула Пуассона решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре. Задача Дирихле для уравнения Лапласа на плоскости. Задача Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области. Неравенство Гарнака, теорема Лиувилля, теорема об устранимой особенности и оценке производной гармонической функции.
11.	Метод Фурье (метод разделения переменных)	Метод Фурье на примерах решения начально-краевых задач для уравнения теплопроводности и уравнения колебаний струны. Построение классических решений.
12.	Усреднение функций	Определение операции усреднения функций. Свойства средних функций.
13.	Обобщённые производные по Соболеву	Определение обобщённой производной по Соболеву, единственность обобщённой производной. Свойства обобщённых производных.
14.	Пространства Соболева	Пространства Соболева 1-го порядка с квадратичной суммируемостью, полнота, сепарабельность. Неравенство Фридрихса. Теорема Реллиха-Кондрашова. Следы функций из пространства Соболева, формула интегрирования по частям.
15.	Обобщённые решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона	Определение обобщённого решения в пространстве Соболева задачи Дирихле для уравнения Лапласа, корректности определения. Теорема существования и единственности. Метод Ритца построения обобщённого решения.
16.	Задача на собственные значения задачи Дирихле для уравнения Лапласа	Сведение задачи на собственные значения задачи Дирихле для уравнения Лапласа к нахождению собственных значений положительного самосопряжённого компактного оператора. Свойства собственных значений и собственных функций задачи

		Дирихле для уравнения Лапласа. Неравенство Стеклова.
17.	Обобщённые решения начально-краевой задачи для волнового уравнения	Определение обобщённого решения в пространстве Соболева начально-краевой задачи для волнового уравнения в ограниченном цилиндре. Построение решения методом Фурье. Единственность решения. Энергетическое равенство.
18.	Обобщённые решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности	Определение обобщённого решения в пространстве Соболева начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в цилиндре. Единственность решения. Построение решения методом Галёркина. Описание метода Галёркина для уравнения Пуассона и его связь с методом Ритца.
19.	Корректность постановки краевой задачи	Понятие корректно поставленной краевой задачи, примеры. Теорема об условии некорректности постановки задачи Коши, следствие для однородного нормального уравнения.
20.	Задача Коши для квазилинейных уравнений 1-го порядка	Вывод уравнения Эйлера, как примера рассматриваемых уравнений. Случай линейного уравнения 1-го порядка, решение методом характеристик. Определение характеристики квазилинейного уравнения. Теорема существования и решения классического решения задачи Коши. Формирование сильных и слабых разрывов. Понятие обобщённого решения квазилинейного уравнения 1-го порядка. Условие Ранкина-Гюгонио. Метод «исчезающей вязкости», условие допустимости разрыва. Закон возрастания энтропии. Определение обобщённого энтропийного решения по Кружкову, теорема Кружкова (без док-ва). Свойства энтропийных решений. Построение решения задачи Римана о распаде разрыва.

5.2 Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами

№ п/п	Наименование обеспечиваемых (последующих) дисциплин	№ № разделов данной дисциплины, необходимых для изучения обеспечиваемых (последующих) дисциплин								
1.	Обобщенные функции	6	8	9	12					
2.	Концепции современного естествознания (7 семестр)	1	2	5	7	10	11	19		
3.	Спецсеминар	3	4	13	14	15	16	17	18	20

5.3. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела	Лекц.	Практические занятия и лабораторные работы			СРС	Всего
			ПЗ/С	ЛР	из них в ИФ		
1.	Математические модели физических процессов	2	2		2	13	17
2.	Общая теория задачи Коши для	2	2		2	13	17

	уравнений с частными производными						
3.	Классификация уравнений 2-го порядка и их приведение к каноническому виду	4	6		6	13	23
4.	Уравнение колебаний струны	4	4		4	13	21
5.	Задача Коши для волнового уравнения	2	4		4	13	19
6.	Преобразование Фурье	6	4		4	13	23
7.	Задача Коши для уравнения теплопроводности	4	2		2	13	19
8.	Обобщённые функции медленного роста	6	4		4	13	23
9.	Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов	2	2		2	13	17
10.	Уравнения Лапласа и Пуассона, гармонические функции	4	2		2	13	19
11.	Промежуточный контроль					13	13
12.	Метод Фурье (метод разделения переменных)	2	18		18	13	33
13.	Усреднение функций	2	7		2	13	22
14.	Обобщённые производные по Соболеву	4	7		2	13	24
15.	Пространства Соболева	4	7		2	13	24
16.	Обобщённые решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона	4	7		2	13	24
17.	Задача на собственные значения задачи Дирихле для уравнения Лапласа	2	7		2	13	22
18.	Обобщённые решения начально-краевой задачи для волнового уравнения	4	2		2	13	19
19.	Обобщённые решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности	4	2		2	13	19
20.	Корректность постановки краевой задачи	2	2		2	13	17
21.	Задача Коши для квазилинейных уравнений 1-го порядка	4	4		4	19	27
	Итого:	68	85		70	279	432

5.4. Описание интерактивных занятий:

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Вид занятий	Трудоемкость (час.)
1	1	Построение математических моделей физических	беседа	2

		процессов.		
2	2	Нахождение характеристических векторов и характеристических поверхностей для уравнений с частными производными.	беседа	2
3	3	Приведение к каноническому виду линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.	беседа	2
4	3	Приведение к каноническому виду линейных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами в плоских областях.	беседа	4
5	4	Применение формулы Даламбера для решения задачи Коши для уравнения колебаний струны.	беседа	2
6	4	Метод распространяющихся волн решения начально-краевых задач для уравнения колебаний струны.	беседа	2
7	5	Применение формул Кирхгофа и Пуассона для решения задачи Коши для волнового уравнения.	беседа	2
8	5	Метод характеристик решения задачи Коши для уравнения гиперболического типа на плоскости.	беседа	2
9	6	Вычисление преобразования Фурье.	беседа	2
10	6	Применение преобразования Фурье для решения краевых задач для уравнений с частными производными.	беседа	2
11	7	Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности с помощью формулы Пуассона.	беседа	2
12	8	Операции над обобщёнными функциями медленного роста.	беседа	4
13	9	Построение фундаментальных решений линейных дифференциальных операторов.	беседа	2
14	10	Построение решений задачи Дирихле для уравнения Лапласа.	беседа	2
15	12	Нахождение собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.	беседа	2
16	12	Решение методом Фурье (разделения переменных) начально-краевых задач для линейных эволюционных уравнений в случае одной пространственной переменной.	беседа	4
17	12	Решение методом Фурье краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольных областях.	беседа	4
18	12	Решение методом Фурье краевых задач для уравнения Пуассона в круговых областях.	беседа	4
19	12	Решение методом Фурье начально-краевых задач для эволюционных уравнений св случае двух пространственных переменных.	беседа	2

20	12	Общие идеи метода Фурье (разделения переменных)	круглый стол	2
21	13	Построение средних функций.	беседа	2
22	14	Нахождение обобщённых производных.	беседа	2
23	15	Проверка принадлежности функций пространствам Соболева.	беседа	2
24	16, 17	Обобщенные решения краевых задач для эллиптических уравнений. Вариационный метод решения.	беседа	4
25	18	Обобщённые решения начально-краевых задач для гиперболических уравнений. Метод Галёркина.	круглый стол	2
26	19	Метод Галёркина решения начально-краевых задач для параболических уравнений.	беседа	2
27	20	Примеры корректных постановок краевых задач.	круглый стол	2
28	21	Построение решений нелинейных эволюционных уравнений первого порядка методом характеристик. Возникновение разрывов.	беседа	2
29	22	Энтропийные решения. Построение решений задачи Римана о распаде разрыва.	беседа	2

6. Лабораторный практикум: Не предусмотрен.

7. Практические занятия (семинары)

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудо-емкость (час.)
1.	1	Построение математических моделей физических процессов.	2
2.	2	Нахождение характеристических векторов и характеристических поверхностей для уравнений с частными производными.	2
3.	3	Приведение к каноническому виду линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.	6
4.	3	Приведение к каноническому виду линейных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами в плоских областях.	4
5.	4	Применение формулы Даламбера для решения задачи Коши для уравнения колебаний струны.	4
6.	4	Метод распространяющихся волн решения начально-краевых задач для уравнения колебаний струны.	4
7.	5	Применение формул Кирхгофа и Пуассона для решения задачи Коши для волнового уравнения.	2
8.	5	Метод характеристик решения задачи Коши для уравнения гиперболического типа на плоскости.	4
9.	6	Вычисление преобразования Фурье.	2

10.	6	Применение преобразования Фурье для решения краевых задач для уравнений с частными производными.	2
11.	7	Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности с помощью формулы Пуассона.	
12.	8	Операции над обобщёнными функциями медленного роста.	18
13.	9	Построение фундаментальных решений линейных дифференциальных операторов.	7
14.	10	Построение решений задачи Дирихле для уравнения Лапласа.	7
15.	12	Нахождение собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.	7
16.	12	Решение методом Фурье (разделения переменных) начально-краевых задач для линейных эволюционных уравнений в случае одной пространственной переменной.	7
17.	12	Решение методом Фурье краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольных областях.	7
18.	12	Решение методом Фурье краевых задач для уравнения Пуассона в круговых областях.	2
19.	12	Решение методом Фурье начально-краевых задач для эволюционных уравнений в случае двух пространственных переменных.	2
20.	12	Общие идеи метода Фурье (разделения переменных)	2
21.	13	Построение средних функций.	4
22.	14	Нахождение обобщённых производных.	2
23.	15	Проверка принадлежности функций пространствам Соболева.	2
24.	16, 17	Обобщенные решения краевых задач для эллиптических уравнений. Вариационный метод решения.	6
25.	18	Обобщённые решения начально-краевых задач для гиперболических уравнений. Метод Галёркина.	4
26.	19	Метод Галёркина решения начально-краевых задач для параболических уравнений.	4
27.	20	Примеры корректных постановок краевых задач.	4
28.	21	Построение решений нелинейных эволюционных уравнений первого порядка методом характеристик. Возникновение разрывов.	2
29.	22	Энтропийные решения. Построение решений задачи Римана о распаде разрыва.	4

8. Примерная тематика курсовых проектов (работ)

- Доказательство теоремы Ковалевской.
- Эллиптичность систем уравнений по Петровскому и по Дуглису-Ниренбергу.

- Теорема Хольмгрена о единственности решений задачи Коши в классе неаналитических функций.
- Задача Гурса для уравнения гиперболического типа на плоскости.
- Функции Бесселя.
- Сферические функции.
- Потенциалы для уравнения Пуассона.
- Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в пространстве.
- Уравнение Гельмгольца.
- Задача Дирихле для уравнений эллиптического типа.
- Лемма Жиро и теорема о знаке косой производной в граничной точке гармонической функции.
- Внешние краевые задачи для уравнения Лапласа.

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

а) основная литература

1. Масленникова В.Н. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: изд-во РУДН, 1997.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.; Наука, 1981
3. Владимиров В.С. (ред.). Сборник задач по уравнениям математической физики. Издание третье. М.: Физматлит, 2001.
4. Горицкий А.Ю., Кружков С.Н., Чечкин Г.А. Уравнения с частными производными первого порядка. М.: изд-во МГУ, 1999.

б) дополнительная литература

1. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
2. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977.
3. Ладыженская. О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
4. Шамаев А.С. (ред.). Сборник задач по уравнениям с частными производными. М.: Бином, 2005.
5. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М.; Мир, 1977..

в) программное обеспечение: не требуется.

г) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы: не тербуются

10. Материально-техническое обеспечение дисциплины:
Общий аудиторный фонд: поточные аудитории Зал № 1, Зал № 2, 485, 495, 497 в учебном корпусе РУД, ул. Орджоникидзе, д. 3 (проекторы –3 шт.); групповые аудитории в учебном корпусе РУДН, ул. Орджоникидзе, д. 3 на 3, 4 и 5 этажах.

11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:
В каждом семестре на итоговый контроль знаний отводится 50 баллов, ещё 50 баллов отводится на посещение занятий и выполнение домашних заданий. Итоговая сумма баллов в каждом семестре – 100.

Соответствие систем оценок (используемых ранее оценок итоговой академической успеваемости, оценок ECTS и балльно-рейтинговой системы (БРС) оценок текущей успеваемости) (В соответствии с Приказом Ректора №996 от 27.12.2006 г.):

Баллы БРС	Традиционные оценки в РФ	Баллы для перевода оценок	Оценки	Оценки ECTS
86 – 100	5	95 - 100	5+	A

		86 - 94	5	B
69 – 85	4	69 - 85	4	C
51 – 68	3	61 - 68	3+	D
		51 - 60	3	E
0 – 50	2	31 - 50	2+	FX
		0 - 30	2	F

1. Студенты обязаны сдавать все задания в сроки, установленные преподавателем.
2. Отсрочка в сдаче домашнего задания считается уважительной только в случае болезни студента, что подтверждается наличием у него медицинской справки.
3. Студент допускается к итоговому контролю с любым количеством баллов, набранным в семестре, но при условии, что у него имеется теоретическая возможность получить не менее 31 балла.
4. Если в итоге за семестр студент получил менее 31 балла, то ему выставляется оценка F и он должен повторить дисциплину в установленном порядке. Если же в итоге студент получил не менее 31 балла, т.е. F_x, то ему разрешается добор необходимого (до 51) количества баллов путём повторного одноразового выполнения предусмотренных итоговых контрольных мероприятий; при этом аннулируются, по усмотрению преподавателя, соответствующие предыдущие результаты. Ликвидация задолженностей проводится в период с 07.02 по 28.02 (с 07.09 по 28.09) по согласованию с деканатом.
5. Итоговая контрольная работа (итоговый контроль) содержит от 3 до 6 вопросов (или заданий). На подготовку к ответу отводится 1 час, после чего производится устный опрос студента. Оценивается работа из 50 баллов независимо от оценки, полученной в семестре.

На СРС выносятся еженедельные домашние задания, состоящие из контрольных теоретических вопросов и задач по текущей теме. Результаты выполнения домашних заданий и активность на практических занятиях входят в балльно-рейтинговую систему оценки знаний.
Текущие контроли проводятся в форме 4 письменных контрольных работ, в конце каждого семестра проводится письменный итоговый контроль.

Разработчик

д.ф.-м.н., проф. **А.В. Фаминский**

Директор Математического института,
д.ф.-м.н., профессор **А.Л. Скубачевский**

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Факультет физико-математических и естественных наук

Математический институт имени С.М.Никольского

УТВЕРЖДЕН
На заседании института
« » 2020 г.,
протокол №
Директор института

______________ А.Л.Скубачевский

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по учебной дисциплине Уравнения с частными производными

Рекомендуется для направления подготовки

01.03.01 Математика

Квалификация (степень) выпускника

Бакалавр

Квалификация (степень) выпускника

Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине _____Уравнения с частными производными______
название

Направление/Специальность: 01.03.01 ____________________________Математика___________
шифр название

Код контролируемой компетенции	Контролируемый раздел дисциплины	Контролируемая тема дисциплины	Наименование оценочного средства															Баллы темы	Баллы раздела
			Текущий контроль												Промежуточная аттестация				
			Опрос	Тест	Коллоквиум	Контрольная работа	Выполнение ЛР	Выполнение КР/КП	Выполнение ДЗ	Реферат	Выполнение РГР	Работа на инт. зан.	…	…	Экзамен/Зачет	…	…		
ОПК-1, ПК-1	Уравнения с частными производными-1	Математические модели физических процессов						-	1						5			**6**	100
		Общая теория задачи Коши для уравнений с частными производными						-	1						5			**6**	
		Классификация уравнений 2-го порядка и их приведение к каноническому виду						10	1						5			**16**	
		Уравнение колебаний струны						10	1						5			**16**	
		Задача Коши для						5	1						5			**11**	

		волнового уравнения																	
		Преобразование Фурье						5	1						5			**11**	
		Задача Коши для уравнения теплопроводности						5	1						5			**11**	
		Обобщённые функции медленного роста						-	1						5			**6**	
		Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов						-	1						5			**6**	
		Уравнения Лапласа и Пуассона, гармонические функции						5	1						5			**11**	
		ИТОГО:						**40**	**10**						**50**			**100**	100

Код контролируемой компетенции или ее части	**Контролируемый раздел дисциплины**	**Контролируемая тема дисциплины**	**Наименование оценочного средства**															**Баллы темы**	**Баллы раздела**
			Текущий контроль												**Промежуточная аттестация**				
			Опрос	**Тест**	**Коллоквиум**	**Контрольная работа**	**Выполнение ЛР**	**Выполнение КР/КП**	**Выполнение ДЗ**	**Реферат**	**Выполнение РГР**	**Работа на зан.**	**…**	**…**	**Экзамен/Зачет**	**…**	**…**		
ОПК-1, ПК-	Уравнения с частными	Метод Фурье (метод разделения переменных)						40				1			5			**46**	100

1	производными-2	Усреднение функций						-				1			5			**6**	
		Обобщённые производные по Соболеву						**-**				1			5			**6**	
		Пространства Соболева						-				1			5			**6**	
		Обобщённые решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона						-				1			5			**6**	
		Задача на собственные значения задачи Дирихле для уравнения Лапласа						-				1			5			**6**	
		Обобщённые решения начально-краевой задачи для волнового уравнения						5				1			5			**6**	
		Обобщённые решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности						-				1			5			**6**	
		Корректность постановки краевой задачи						-				1			5			**6**	
		Задача Коши для квазилинейных уравнений 1-го порядка						-				1			5			**6**	
		ИТОГО:						**40**				**10**			**50**			**100**	100

Перечень оценочных средств
по дисциплине Уравнения с частными производными

п/п	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в фонде
Аудиторная работа			
	Экзамен	Форма проверки качества усвоения студентами учебного материала и выполнения в процессе обучения всех учебных поручений в соответствии с утвержденной программой.	Экзаменационные билеты
Самостоятельная работа			
	Индивидуальное домашнее задание	Форма проверки качества усвоения студентами учебного материала в соответствии с утвержденной программой.	Темы индивидуальных домашних заданий

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО КУРСУ (1-2 модули)

1. Вывод уравнения колебаний струны. Начальные условия, три типа краевых условий, их физический смысл.
2. Вывод уравнения теплопроводности. Начальные условия, три типа краевых условий, их физический смысл. Уравнения Пуассона и Лапласа как стационарный вариант уравнения теплопроводности.
3. Уравнение нормального вида, нормальная задача Коши. Аналитические функции, теорема Ковалевской (без док-ва).
4. Характеристический вектор, характеристическая поверхность и характеристика слабо нелинейного уравнения. Примеры. Эллиптические и гиперболические слабо нелинейные уравнения.
5. Задача Коши для слабо нелинейных уравнений 1-го порядка на плоскости с начальным условием на кривой, возможность её сведения к задаче Коши с начальным условием на прямой. Постановка общей задачи Коши для линейных уравнений с начальными данными, заданными на произвольной гиперповерхности, обобщение теоремы Ковалевской (без док-ва).
6. Замена переменных в слабо нелинейном уравнении 2-го порядка. Приведение слабо нелинейных уравнений 2-го порядка к каноническому виду в фиксированной точке с помощью линейной замены переменных. Классификация слабо нелинейных уравнений 2-го порядка в терминах собственных чисел матрицы главной части уравнения.
7. Лемма о связи между характеристиками слабо нелинейного уравнения 2-го порядка на плоскости и 1-ми интегралами обыкновенного дифференциального уравнения характеристик. Классификация слабо нелинейных уравнений 2-го порядка на плоскости в терминах коэффициентов главной части уравнения.
8. Приведение к каноническому виду слабо нелинейных гиперболических уравнений 2-го порядка на плоскости с помощью характеристик.
9. Приведение к каноническому виду слабо нелинейных параболических уравнений 2-го порядка на плоскости с помощью характеристик.

10. Приведение к каноническому виду слабо нелинейных эллиптических уравнений 2-го порядка на плоскости с помощью характеристик.
11. Лемма об общем решении однородного уравнения колебаний струны.
12. Задача Коши для уравнения колебаний струны, существование и единственность решения. Формула Даламбера. Принцип Дюамеля. Сильные и слабые разрывы, распространение разрывов вдоль характеристик.
13. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши с начальными данными на кривой для линейного гиперболического уравнения на плоскости, приведённого к каноническому виду (без док-ва), общий принцип нахождения области единственности решения задачи Коши для линейного гиперболического уравнения на плоскости (без док-ва).
14. Энергетическое неравенство для однородного волнового уравнения. Характеристический конус. Единственность решения задачи Коши.
15. Формула Кирхгофа (без док-ва). Вывод формулы Пуассона из формулы Кирхгофа.
16. Распространение волн. Принцип Гюйгенса, диффузия волн.
17. Исследование начально-краевой задачи на полуоси для однородного уравнения колебаний струны методом распространяющихся волн. Условия согласования граничных данных. Обобщённые решения, сильные и слабые разрывы.
18. Преобразование Фурье в пространстве $L_1(R^n)$. Пример: $u(x)=\exp(-a|x|^2)$, $a>0$.
19. Пространство Шварца быстро убывающих функций $S(R^n)$. Преобразование Фурье в пространстве $S(R^n)$, непрерывность операции.
20. Свойства преобразования Фурье: линейность, подобие, сдвиг образа и прообраза, дифференцирование образа и прообраза.
21. Свёртка функций, дифференцирование свёртки, преобразование Фурье свёртки.
22. Свойство перестановочности функций в интеграле от произведения одной функции и преобразования Фурье другой.
23. Обратное преобразование Фурье и его связь с прямым преобразованием Фурье. Биективность преобразования Фурье в пространстве $S(R^n)$.
24. Задача Коши для уравнения теплопроводности в пространстве $S(R^n)$.
25. Ядро Пуассона, его свойства. Формула Пуассона.
26. Разрешимость задачи Коши для уравнения теплопроводности в классе ограниченных функций.
27. Распространение тепла в пространстве.
28. Принцип максимума для однородного уравнения теплопроводности в ограниченной области. Единственность решения начально-краевой задачи.
29. Принцип максимума для задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности. Единственность решения в классе ограниченных функций.
30. Вывод формулы Кирхгофа.
31. Фундаментальные решения оператора Лапласа на плоскости и в пространстве, их свойства.
32. Формулы Грина.
33. Представление решения уравнения Пуассона в ограниченной области через потенциалы.
34. Гармонические функции, их свойства: теорема о потоке тепла, теоремы о среднем значении по сфере и по шару, бесконечная дифференцируемость.
35. Принцип максимума для гармонических функций.
36. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области. Единственность решения. Функция Грина, представление решения через функцию Грина. Симметрия функции Грина.
37. Функция Грина для шара.
38. Теорема о разрешимости задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре. Формула Пуассона.
39. Задача Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области и е\"е свойства.

40. Теорема о равномерно сходящейся последовательности гармонических функций.
41. Неравенство Гарнака, 1-я теорема Лиувилля для гармонических функций.
42. Теорема об устранимой особенности для гармонических функций.
43. Теорема об оценке производных гармонических функций. 2-я теорема Лиувилля для гармонических функций.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО КУРСУ (3-4 модули)

1. Метод Фурье (разделения переменных) для уравнения теплопроводности на отрезке.
2. Метод Фурье (разделения переменных) для уравнения колебаний струны на отрезке.
3. Определение операции усреднения функций. Простейшие свойства средних функций. Теорема о равномерной сходимости средних функций.
4. Теоремы об оценке и сходимости средних функций в пространстве $L_p(\Omega)$. Плотность пространства Шварца в пространстве $L_p(R^n)$.
5. Определение обобщённой производной по Соболеву. Лемма о равенстве нулю локально суммируемой функции. Единственность обобщённой производной по Соболеву.
6. Простейшие свойства обобщённых производных. Примеры обобщённых производных.
7. Свойства усреднения обобщённых производных, предельного перехода для обобщённых производных и обобщённой производной произведения функций.
8. Свойство классичности непрерывных обобщённых производных.
9. Связь понятия обобщённой производной с понятием абсолютно непрерывной функции на отрезке.
10. Определение пространства Соболева $H^1(\Omega)$, свойство полноты этого пространства.
11. Определение пространства $H^1{}_0(\Omega)$, сепарабельность пространств $H^1(\Omega)$ и $H^1{}_0(\Omega)$, неравенство Фридрихса.
12. Понятие правильной области, свойство плотности бесконечно гладких функций в пространстве $H^1(\Omega)$ для правильной области. Примеры правильных областей.
13. Теорема Реллиха--Кондрашова.
14. След функции из пространства $H^1(\Omega)$ на границе правильной области. Формула интегрирования по частям. След на границе области функции из пространства $H^1{}_0(\Omega)$.
15. Определение обобщённого решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Связь с классическими решениями. Единственность обобщённого решения. Вещественнозначность обобщённого решения.
16. Теорема о существовании обобщённого решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Два метода доказательства.
17. Метод Ритца построения обобщённого решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона.
18. Задача на собственные значения задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Сведение к задаче на собственные значения для линейного положительного самосопряжённого вполне непрерывного оператора.
19. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Дирихле для оператора Лапласа. Точная константа в неравенстве Фридрихса. Неравенство Стеклова.
20. Определение обобщённого решения начально-краевой задачи для волнового уравнения. Теорема существования и единственности решения (док-во существования методом Фурье).
21. Теорема существования и единственности обобщённого решения начально-краевой задачи для волнового уравнения (док-во единственности).
22. Энергетическое равенство для обобщённого решения начально-краевой задачи для волнового уравнения.
23. Определение обобщённого решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности. Теорема существования и единственности решения (док-во единственности).

24. Теорема существования и единственности обобщённого решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности (док-во существования методом Галёркина).
25. Понятие корректности постановки краевых задач. Примеры корректно поставленных задач.
26. Теорема об условии некорректности постановки задачи Коши. Следствие для однородного нормального уравнения.
27. Вывод уравнения Эйлера.
28. Задача Коши для линейного уравнения 1-го порядка, нахождение решений методом характеристик.
29. Характеристики квазилинейного уравнения 1-го порядка и их свойства.
30. Теорема существования и единственности классического решения задачи Коши для квазилинейного уравнения 1-го порядка.
31. Примеры формирования особенностей решений задачи Коши для уравнения Эйлера.
32. Понятие обобщённого решения квазилинейного уравнения 1-го порядка. Эквивалентность классических и гладких обобщённых решений. Сильные разрывы. Условие Ранкина--Гюгонио.
33. Распространение слабых разрывов вдоль характеристик. Пример неединственности обобщённого решения задачи Коши для уравнения Эйлера.
34. Метод "исчезающей вязкости". Условие допустимости разрыва.
35. Закон возрастания энтропии.
36. Определение обобщённого энтропийного решения (по Кружкову) задачи Коши для квазилинейного уравнения 1-го порядка. Теорема Кружкова о существовании и единственности обобщённого энтропийного решения (без док-ва). Лемма о выполнении интегрального тождества для обобщённых энтропийных решений и следствие из него.
37. Лемма о выполнении условия допустимости разрывов для обобщённых энтропийных решений.
38. Лемма об обобщённых энтропийных решениях как пределах решений уравнений "с вязкостью".
39. Задача Римана о распаде разрыва для квазилинейных уравнений 1-го порядка. Автомодельные решения.
40. Решение задачи Римана в случае строго выпуклой функции состояния. Ударные волны и волны разрежения.

Темы индивидуальных домашних заданий (1-2 модули)

1. Привести к каноническому виду уравнение с постоянными коэффициентами.
2. Привести к каноническому виду уравнение с переменными коэффициентами на плоскости.
3. Найти решение задачи Коши для гиперболического уравнения на плоскости.
4. Найти решение начально-краевой задачи для уравнения колебаний струны.
5. Нарисовать профиль полуограниченной струны в заданные моменты времени.
6. Найти решение задачи Коши для волнового уравнения на плоскости или в пространстве.
7. Найти решение задачи Коши для уравнения теплопроводности.
8. Найти решение краевой задачи для уравнения Лапласа с помощью преобразования Фурье.

Темы индивидуальных домашних заданий (3-4 модули)

1. Найти решение начально-краевой задачи методом Фурье.
2. Найти решение начально-краевой задачи методом Фурье.

3. Найти решение начально-краевой задачи методом Фурье.
4. Найти решение начально-краевой задачи методом Фурье.
5. Найти решение краевой задачи в прямоугольнике методом Фурье.
6. Найти решение начально-краевой задачи методом Фурье в случае двух пространственных переменных.
7. Найти решение краевой задачи методом Фурье в круговой области.
8. Найти решение краевой задачи методом Фурье в круговом сегменте.