

*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»*

*Факультет физико-математических и естественных наук  
Рекомендовано МССН*

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Вариационные задачи**

**Рекомендуется для направления подготовки**

**01.06.01 «Математика и механика»**

**Направленность программы (профиль)**

**«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»**

## 1. Цели и задачи дисциплины

Основной целью дисциплины «Вариационные задачи» является овладение основными методами современного вариационного исчисления, составляющими основу для расширения области применения прямых вариационных методов и симметричного анализа. Среди них – методы построения вариационных принципов для уравнений с непотенциальными операторами, метод Ритца, метод наименьших квадратов, вариационные симметрии и др. Развитие логического мышления.

## 2. Место дисциплины в структуре ОП ВО:

Дисциплина «Вариационные задачи» относится к вариативной части блока 1 учебного плана.

В таблице № 1 приведены предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций дисциплины в соответствии с матрицей компетенций ОП ВО.

Таблица № 1

### Предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций

№ п/п	Шифр и наименование компетенции	Предшествующие дисциплины	Последующие дисциплины (группы дисциплин)
Профессиональные компетенции			
	ПК-2 владение знаниями в области теории функциональных пространств (лебеговы пространства, пространства Соболева, пространства Никольского-Бесова и др.) и ее применениями к теории дифференциальных уравнений с частными производными, включая разрешимость и гладкость решений краевых задач для эллиптических уравнений, в области нелинейного анализа, теории экстремальных задач и оптимального управления	-	Общая теория функционально-дифференциальных уравнений; Нелинейные уравнения в частных производных; Вариационный анализ дифференциальных уравнений; Математические методы в экономике.
	ПК-3 умение сформулировать задачу исследования и пути ее осуществления, обобщить полученные результаты и сделать соответствующие выводы, должен понимать практические аспекты получаемых теоретических результатов		
Универсальные компетенции			

	<p>УК-1 способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях</p> <p>УК-2 способность проектировать и осуществлять комплексные исследования, в том числе междисциплинарные, на основе целостного системного научного мировоззрения с использованием знаний в области истории и философии науки</p> <p>УК-3 готовность участвовать в работе российских и международных исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач</p> <p>УК-5 способность планировать и решать задачи собственного профессионального и личностного развития</p>	-	<p>Общая теория функционально-дифференциальных уравнений;</p> <p>Методы теории оптимального управления;</p> <p>Математические методы в экономике.</p>
--	---	---	---

### 3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций: УК-1, УК-2, УК-3, УК-5, ПК-2, ПК-3

В результате изучения дисциплины студент должен:

**Знать:** Постановки основных краевых задач математической физики, понятия симметричного, положительного и положительно определенного операторов, метод Рунге, метод наименьших квадратов, понятие потенциального оператора, условия потенциальности, понятие минимизирующей последовательности и методы ее построения, понятие гамильтонового оператора, элементы алгебры Ли, вариационные симметрии.

**Уметь:** Решать задачи по всем разделам курса на уровне, задаваемом прилагаемыми примерами.

**Владеть:** Началами каждого из излагаемых в курсе разделов.

### 4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость курса «Вариационные задачи» составляет 2 зачетных единиц.

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры			
<b>Аудиторные занятия (всего)</b>		1			
В том числе:	-	-	-	-	-
<i>Лекции</i>	6	6			

Практические занятия (ПЗ)	12	12			
Семинары (С)					
Лабораторные работы (ЛР)					
<b>Самостоятельная работа (всего)</b>	<b>54</b>	<b>54</b>			
Общая трудоемкость час	72	72			
	2	2			
зач. ед.					

## 5. Содержание дисциплины

### 5.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1.	Прямая вариационная задача	Производная и дифференциал Гато. Экстремальные точки функционала. Билинейные и квадратичные функционалы. Уравнения Эйлера – Лагранжа. Симметричные, положительные и положительно определенные операторы. Метод Ритца.
2.	Потенциальные операторы и вариационные симметрии	Потенциальные операторы. Критерий потенциальности и формула для построения функционала. Условия потенциальности систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с производными первого порядка. Алгебраическое и геометрическое значения условий потенциальности. Классические гамильтоновы системы и их потенциальность. Условия потенциальности систем дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с частными производными. Вариационные симметрии.
3.	Обратные задачи вариационного исчисления (ОЗВИ) для ОДУ	Постановки ОЗВИ для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с производными первого порядка. Уравнения Биркгофа и их универсальное значение. Постановка классической ОЗВИ для общего уравнения и систем ОДУ с производными второго порядка. Приведение систем ОДУ с производными высшего порядка к форме уравнений Эйлера-Лагранжа. Построение вариационных принципов для диссипативных задач. Примеры.
4.	ОЗВИ для ДУЧП	Основные постановки ОЗВИ для дифференциальных уравнений с частными производными (ДУЧП). Несуществование полуограниченных решений ОЗВИ для некоторых классических уравнений. Неэйлеровы классы функционалов. Конструктивное решение ОЗВИ для краевой задачи с параболическим оператором. Удовлетворение критерию обобщенной потенциальности за счет выбора билинейной формы и вариационных множителей. Схема Э.Тонти решения ОЗВИ для уравнений с нелинейным непотенциальным оператором. ОЗВИ для эволюционного операторного уравнения с производной первого порядка по времени. Гамильтоновы операторы. Пример уравнения Кортевега-де Фриза.

--	--	--

## 5.2. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекции	Семинары	СРС	Всего час.
1.	Прямая вариационная задача	1	2	12	15
2.	Потенциальные операторы и вариационные симметрии	1	2	12	15
3.	Обратные задачи вариационного исчисления (ОЗВИ) для ОДУ	2	4	15	21
4.	ОЗВИ для ДУЧП	2	4	15	21

**6. Лабораторный практикум – не предусмотрен**

## 7. Практические занятия (семинары)

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудоемкость (ауд час.)
1	1	Уравнения Эйлера – Лагранжа. Симметричные, положительные и положительно определенные операторы. Метод Ритца.	2
2	2	Условия потенциальности систем дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с частными производными. Вариационные симметрии.	2
3	3	ОЗВИ для систем ОДУ с производными первого порядка. ОЗВИ для систем ОДУ с производными второго порядка.	2
4	3	Построение вариационных принципов для диссипативных задач.	2
5	4	Неэйлеровы классы функционалов. Удовлетворение критерию потенциальности за счет выбора билинейной формы и вариационных множителей.	2
6	4	ОЗВИ для эволюционного операторного уравнения с производной первого порядка по времени и их связь с гамильтоновыми операторами. Пример уравнения Кор-	2

**8. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**

Аудитории 495а, 398, 509 в учебном корпусе РУДН, ул. Орджоникидзе, д. 3, групповые аудитории в учебном корпусе РУДН, ул. Орджоникидзе, д. 3 на 3, 4 и 5 этажах, дисплей-классы, лаборатории (ауд. 510 и 424).

**9. Информационное обеспечение дисциплины:**

Используются только лицензированное, установленное в РУДН программное обеспечение:

- пакет программ Microsoft Office;
- средства мультимедийной техники и персональные компьютеры;
- полнотекстовые базы данных и ресурсы, доступ к которым обеспечен из сети РУДН;
- электронная библиотека РФФИ <http://www.rfbr.ru/rffi/ru/library>

**10. Учебно-методическое обеспечение дисциплины:**

а) основная литература:

1. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, М.-Л., 1951, Т.1,2.
2. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике, М., 1985.
3. Гаевский Х., Гречер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения, М., 1985.
4. Филиппов В.М. Вариационные принципы для непотенциальных операторов, М., 1985.

б) дополнительная литература:

1. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы, М., 1981.
2. Михлин С.Г. Проблема минимума квадратичного функционала, М., 1952.
3. Вайнберг М.М. Функциональный анализ, М., 1979.
4. Филиппов В.М., Савчин В.М., Шорохов С.Г. Вариационные принципы для непотенциальных операторов. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, М., 1992, Т. 40. (Имеется на электронном носителе).

**в) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы**

1. ВАК РФ <http://vak.ed.gov.ru>
2. Электронная библиотека РГБ <http://www.rsl.ru/>
3. Сайт библиотеки РУДН <http://lib.rudn.ru/>
4. Science Direct <http://www.sciencedirect.com> Описание: Ресурс содержит коллекцию научной, технической полнотекстовой и библиографической информации. База данных мультидисциплинарного характера включает научные журналы по точным и техническим наукам.
5. EBSCO <http://search.ebscohost.com>, Academic Search Premier (база данных комплексной тематики, содержит информацию по гуманитарным и естественным областям знания).
6. Oxford University Press <http://www3.oup.co.uk/jnls>. Журналы по точным и техническим наукам Oxford University Press представлены в коллекции HSS
7. Sage Publications <http://online.sagepub.com>. База публикаций Sage включает в себя журналы по разным отраслям знаний: Sage\_STM – более 100 журналов в области естественных наук, техники.
8. Springer/Kluwer <http://www.springerlink.com>. Журналы и книги издательства
9. Springer/Kluwer охватывают различные области знания и разбиты на предметные категории.
10. Tailor & Francis <http://www.informaworld.com>. Коллекция журналов насчитывает более 1000 наименований по всем областям знаний.

11. American Mathematical Society <http://www.ams.org/> Ресурс американского математического общества.
12. European Mathematical Society <http://www.euro-math-soc.eu/> Ресурс европейского математического общества.
13. Portal to Mathematics Publications <http://www.emis.de/projects/EULER/>
14. Каталог математических интернет ресурсов <http://www.mathtree.ru/>
15. Zentralblatt MATH (zbMATH) <https://zbmath.org>
16. Общероссийский математический портал mathnet.ru
17. Web of Science <http://www.isiknowledge.com>
18. Ресурсы Института научной информации по общественным наукам Российской академии наук (ИНИОН РАН) <http://elibrary.ru>.
19. Университетская информационная система РОССИЯ. <http://www.cir.ru/index.jsp>.
20. Госты система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу <http://www.ifap.ru/library/gost/sibid.htm>.
21. Электронная библиотека РУДН <http://www.rsl.ru/>

#### **г) периодические издания**

Алгебра и анализ, Дискретная математика, Журнал вычислительной математики и математической физики, Известия Российской академии наук. Серия математическая, Математические заметки Математический сборник, Математическое моделирование, Теоретическая и математическая физика, Теория вероятностей и ее применения, Успехи математических наук, Функциональный анализ и его приложения, Труды Математического института им. В. А. Стеклова, Современные проблемы математики, Вычислительные методы и программирование, Труды семинара имени И. Г. Петровского, Учёные записки Московского государственного университета Фундаментальная и прикладная математика, Review of Modern Physics, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, Annual Review of Biochemistry, Chemical Reviews Nature Physics, Annual Review of Condensed Matter Physics, Annals of Mathematics, Journal of the American Mathematical Society, Acta Mathematica, Communications on Pure and Applied Mathematics Swarm and Evolutionary Computation Geometric and Functional Analysis Formal Aspects of Computing, Discrete Mathematics, Theory of Computing Systems Reports on Progress in Physics New Journal of Physics.

#### **11. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Формат семинара – презентация ключевых идей хрестоматийных источников-текстов по курсу. Конкретно презентация выглядит так: обучаемый выбирает одну из ключевых идей обсуждаемого на семинаре текста, готовит в виде тезисов (на 1–1,5 стр.) свое ее понимание и критическую оценку, затем на семинаре все это представляется и защищается. Тезисы заранее размножаются и раздаются всем участникам семинара.

Предполагается написание реферата – по теме, согласованной с преподавателем. Объем реферата – не более 15 тысяч знаков с пробелами. Как реферат принимается также перевод статьи зарубежного автора вместе с развернутой критико-аналитической ее оценкой. Согласование и автора, и текста с преподавателем обязательно.

В конце семестра – экзамен в форме эссе по одной из предложенных (на выбор) преподавателем тем. После собеседования выставляется итоговая оценка. Результаты определяются путем проведения промежуточной аттестации с выставлением оценок «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно» и в системе ECTS (A, B, C, E). Основанием для их выставления является принятая в РУДН балльно-рейтинговая система.

## 12. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю)

*Материалы для оценки уровня освоения учебного материала дисциплины «Вариационные задачи» (оценочные материалы), включающие в себя перечень компетенций с указанием этапов их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания, типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы, методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций, разработаны в полном объеме и доступны для обучающихся на странице дисциплины в ТУИС РУДН.*

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО РУДН.

### **Разработчики:**


Профессор Математического института  
им. С.М. Никольского



Савчин В.М.

### **Руководитель программы:**

Директор Математического института  
им. С.М. Никольского



Скубачевский А.Л.

### **Заведующий кафедрой:**

Директор Математического института  
им. С.М. Никольского



Скубачевский А.Л.