

*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Российский университет дружбы народов»*

*Факультет физико-математических и естественных наук*

*Рекомендовано МССН  
«Математика и механика»*

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Наименование дисциплины**

Дифференциальная геометрия и топология

**Рекомендуется для направления подготовки/специальности**

01.03.01 Математика

**Квалификация (степень выпускника) Бакалавр**

### 1. Цели и задачи дисциплины:

Сформировать представление о комплексе идей и методов классической дифференциальной геометрии, развить математическую культуру студента и подготовить его к усвоению других основных математических курсов. Реализация указанной цели включает последовательное изложение теоретического материала на лекциях, при котором все основные результаты снабжаются строгими доказательствами; отработку приемов решения задач на семинарских занятиях; промежуточный и итоговый контроль выявляют степень усвоения полученных навыков.

### 2. Место дисциплины в структуре ООП:

Блок 1, базовая часть.

Необходимо знание геометрии в объеме школьного курса и университетских курсов математического анализа и аналитической геометрии; дисциплина является предшествующей к курсам дифференциальных уравнений, аналитической механике, теории функций комплексного переменного, физике.

### 3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

В результате изучения дисциплины студент должен:

#### **Знать:**

- основные понятия и методы исследования кривых и поверхностей методами математического анализа и геометрии;
- основные понятия, конструкции и результаты общей топологии и многомерной дифференциальной геометрии.

#### **Уметь:**

- решать задачи по дифференциальной геометрии кривых и поверхностей – вычисление основных дифференциально-геометрических характеристик кривых и поверхностей; анализ кривых и поверхностей;
- решать теоретические задачи по многомерной дифференциальной геометрии и общей топологии.

#### **Владеть:**

- методикой применения дифференциальной геометрии и топологии к решению математических и прикладных задач, касающихся свойств кривых и поверхностей в трехмерном пространстве;
- владеть языком общей топологии применительно к другим областям математики.

### 4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных единиц.

№	Вид учебной работы	Всего часов	Семестры			
			5	6	7	4
1.	Аудиторные занятия (ак. часов)	54			54	
	В том числе:					
1.1.	Лекции	18			18	
1.2.	Прочие занятия	36			36	
	В том числе:					
1.2.1.	Практические занятия (ПЗ)					
1.2.2.	Семинары (С)	36			36	
1.2.3.	Лабораторные работы (ЛР)					
	<b>Из них в интерактивной форме (ИФ):</b>					



					в ИФ		
1.	Дифференциальная геометрия кривых	3	6		2	26	35
2.	Дифференциальная геометрия поверхностей	6	12		2	22	40
3.	Метрические пространства	3	6		2	26	35
4.	Топологические пространства	3	6		1	26	35
5.	Многомерная дифференциальная геометрия	3	6		1	26	35
	<b>Итого:</b>	18	36			126	180

#### 5.4. Описание интерактивных занятий

№ п/п	№ раздела	Тема интерактивного занятия	Вид занятия	Трудоемкость (час.)
1.	1	Дифференциальная геометрия кривых	беседа	2
2.	2	Дифференциальная геометрия поверхностей	беседа	2
3.	3	Метрические пространства	беседа	2
4.	4	Топологические пространства	беседа	2
5.	5	Многомерная дифференциальная геометрия	беседа	1

**6. Лабораторный практикум:** Не предусмотрен.

#### 7. Практические занятия (семинары)

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудоемкость (час.)
1.	Дифференциальная геометрия кривых	Вычисление основных дифференциально-геометрических характеристик кривых и изучение кривых с их помощью	6
2.	Дифференциальная геометрия поверхностей	Вычисление основных дифференциально-геометрических характеристик поверхностей и изучение поверхностей с их помощью	12
3.	Метрические пространства	Свойства метрических пространств, открытых и замкнутых подмножеств в них. Точки прикосновения, операция замыкания.	6
4.	Топологические пространства	Примеры топологий. Связные топологические пространства. Компактность, компактификация. Фактор-топология. Топология прямого произведения.	6
5.	Многомерная дифференциальная геометрия	Топологические и гладкие многообразия. Касательное пространство. Гладкие отображения, дифференциал. Метрика на многообразии. Деривационные формулы. Геодезические линии и их свойства.	6

**8. Примерная тематика курсовых проектов (работ):** не предусмотрены.

**9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:**

**а) основная литература**

1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия, М.1979.
2. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия, М.: МГУ, 1990.
3. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии, М.: ГИТТЛ, 1956.
4. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ, М.: Наука, 1967.
5. Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н. Введение в топологию, М.: Наука, 1995.
6. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.

**б) дополнительная литература**

1. Вернер А.Л., Кантор Б.Е., Франгулов С.А. Геометрия, часть II, СПб.: Специальная литература, 1997.
2. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия, М.: Наука, 1974.
3. Тайманов А.И. Лекции по дифференциальной геометрии, М. 2002.
4. Келли Дж. Общая топология, М.: Наука, 1968.

в) программное обеспечение: Windows, Microsoft Office, Maple, TeX, WinEdt.

г) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы: Yandex, Google, MathNet.

**10. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**

Общий аудиторный фонд: поточные аудитории Зал № 1, Зал № 2, 485, 495, 497 в учебном корпусе РУД, ул. Орджоникидзе, д. 3 (проекторы –3 шт.); групповые аудитории в учебном корпусе РУДН, ул. Орджоникидзе, д. 3 на 3, 4 и 5 этажах.

**11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:**

Рекомендуется в течение семестра несколько раз проводить короткие (на 10–15 минут) контрольные работы с целью контроля процесса усвоения студентами изучаемого материала. Также рекомендуется очень строго контролировать посещаемость студентами всех без исключения занятий.

**Балльно-рейтинговая система оценки уровня знаний**

Вид задания	Число заданий	Кол-во баллов	Сумма баллов
1. Контрольная работа	2	10	20
2. Лабораторные работы			
3. Домашнее задание			
4. Коллоквиум			
5. Реферат			
6. Посещение занятий		20	20
7. Работа на семинаре		10	10
8. Итоговая контрольная работа		60	50
ИТОГО			100

*Соответствие систем оценок (используемых ранее оценок итоговой академической успеваемости, оценок ECTS и балльно-рейтинговой системы (БРС) оценок текущей успеваемости) (В соответствии с Приказом Ректора №996 от 27.12.2006 г.):*

Баллы БРС	Традиционные оценки в РФ	Баллы для перевода оценок	Оценки	Оценки ECTS
-----------	--------------------------	---------------------------	--------	-------------

86 – 100	5	95 - 100	5+	A
		86 - 94	5	B
69 – 85	4	69 - 85	4	C
51 – 68	3	61 - 68	3+	D
		51 - 60	3	E
0 – 50	2	31 - 50	2+	FX
		0 - 30	2	F
51 – 100	Зачет		Зачет	Passed

1. Студенты обязаны сдавать все задания в сроки, установленные преподавателем.
2. Плановые контрольные работы должны проводиться не менее 2-х раз в течение семестра (для проставления оценки по рубежной аттестации и в конце семестра перед проведением итоговой контрольной за семестр).
3. Проверку выполнения домашних заданий, с проставлением баллов за эту работу, проводить не менее двух раз в семестр (см. п.2).
4. При выставлении баллов за посещение занятий должно учитываться наличие лекционного материала и активная работа студента на семинаре.
5. Отсрочка в переписывании контрольных работ и сдачи домашнего задания считается уважительной только в случае болезни студента, что подтверждается наличием у него медицинской справки. Планировать выполнение контрольных работ не позднее двух недель после выздоровления.
6. Студент допускается к итоговой контрольной работе с любым количеством баллов, набранном в семестре, но при условии, что у студента имеется теоретическая возможность получить не менее 31 балла.
7. Если в итоге за семестр студент получил менее 31 балла, то ему выставляется оценка F и студент должен повторить эту дисциплину в установленном порядке. Если же в итоге студент получил не менее 31 балла, т.е. FX, то студенту разрешить добор необходимого (до 51) количества баллов путём повторного однократного выполнения предусмотренных контрольных мероприятий, аннулировав, по усмотрению преподавателя, соответствующие предыдущие результаты. Ликвидацию задолженностей проводить в период с 07.02 по 28.02 (с 07.09 по 28.09) по согласованию с деканатом.
8. Итоговая контрольная работа содержит 3 вопроса. На подготовку к ответу отводится 1 час, после чего может производиться устный опрос студента. Оценивается работа из 50 баллов независимо от оценки, полученной в семестре.

**Разработчик**

к.ф.-м.н., ст. преподаватель



**В.А. Краснов**

**Директор Математического института,  
д.ф.-м.н., профессор**



**А.Л. Скубачевский**

УТВЕРЖДЕН

на заседании института

«\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г., протокол №\_\_

Директор института

\_\_\_\_\_ А.Л. Скубачевский

(подпись)

# **ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

## **ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

«Дифференциальная геометрия и топология»  
(наименование дисциплины)

01.03.01 «Математика»

бакалавр

\_\_\_\_\_ Квалификация (степень) выпускника

# Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине «Дифференциальная геометрия и топология»

Направление/Специальность: 01.03.01 «Математика»

Код контролируемой компетенции или ее части	Контролируемый раздел дисциплины	Контролируемая тема дисциплины	Наименование оценочного средства											Баллы темы	Баллы раздела			
			Текущий контроль									Промежуточная аттестация						
			Опрос	Домашний тест	Коллоквиум	Контрольная работа	Выполнение ЛР	Выполнение КР/КП	СРС (Выполнение ДЗ)	Реферат	Выполнение РГР	...	...	...	Зачет	...	...	
<b>1 модуль</b>																		
ОПК-1	Раздел 1: «Теория кривых»	Тема 1: «Вектор-функции и правила их дифференцирования. Натуральная параметризация»		2		5			2						10			50
		Тема 2: «Формулы Френе. Кривизна и кручение регулярных кривых и их вычисление»		2		10			2							10		
ОПК-1	Раздел 2: «Теория поверхностей. Начала топологии»	Тема 1: «Регулярные поверхности. Первые и вторые квадратичные формы поверхностей и их роль. Гауссова кривизна. Деривационные уравнения и символы Кристоффеля»		2		5			2						10			50
		Тема 2: «Ковариантное дифференцирование и геодезические»		2		5			2						10			
		Тема 3: «Основы общей топологии и топологии»		2		5			2						10			





## Приложение 3

### Примерные варианты билетов к зачету (Дисциплина *Дифференциальная геометрия и топология*)

#### БИЛЕТ № 1

1. Векторные функции скалярного аргумента. Техника дифференцирования вектор-функций.
2. Выражение гауссовой кривизны через коэффициенты первой квадратичной формы. Теорема Гаусса.

#### БИЛЕТ № 2

1. Геометрический смысл производной вектор-функции. Дифференциал вектор-функции.
2. Вычисление символов Кристоффеля через коэффициенты первой квадратичной формы.

#### БИЛЕТ № 3

1. Способы задания кривых. Параметрические уравнения кривых. Гладкие и регулярные кривые.
2. Уравнения Вейнгартена. Уравнения Гаусса-Кодацци.

#### БИЛЕТ № 4

1. Длина дуги кривой как натуральный параметр. Натуральное уравнение кривой. Теорема об однозначной определяемости кривой ее натуральным уравнением.
2. Дериационные формулы Гаусса. Символы Кристоффеля.

#### БИЛЕТ № 5

1. Плоские кривые. Репер Френе. Уравнения Френе для плоских кривых.
2. Классификация точек на поверхности. Примеры.

#### БИЛЕТ № 6

1. Соприкасающаяся окружность для кривой. Ее роль.
2. Гауссова кривизна. Средняя кривизна.

#### БИЛЕТ № 7

1. Соприкасающаяся плоскость для пространственной кривой. Ее роль.
2. Главные кривизны и главные направления, их свойства и вычисление.

#### БИЛЕТ № 8

1. Кривизна и кручение кривой, их геометрический смысл и вычисление.
2. Нормальная кривизна кривой на поверхности. Теорема Менье, ее геометрический смысл.

#### БИЛЕТ № 9

1. Пространственные кривые. Сопровождающий триэдр кривой. Уравнения Френе.
2. Вторая квадратичная форма поверхности. Формула для вычисления кривизны кривых на поверхности.

#### БИЛЕТ № 10

1. Способы задания поверхностей. Параметрическое задание поверхностей. Регулярные поверхности.
2. Применение первой квадратичной формы к вычислению углов и площадей на поверхности.

#### БИЛЕТ № 11

1. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
2. Первая квадратичная форма поверхности и вычисление длин кривых на поверхности.

**Ответ на каждый вопрос оценивается от 0 до 20 баллов в зависимости от полноты и правильности ответов.**

**Примерный вариант домашнего теста (каждый вопрос оценивается в 2 балла)**

**Задание 1.** Найти периметр криволинейного треугольника со сторонами, заданными уравнениями  $u = v^2$ ,  $u = -v^2$ ,  $v = 1$  на поверхности, первая квадратичная форма которой равна  $(du)^2 + (u^2 + 4)(dv)^2$ .

*Ответы:*

3/2

5

20/3

12/5

**Задание 2.** Вычислить кривизну кривой с уравнением  $y = \ln(x)$  при  $x_0 = 1$ .

*Ответы:*

$-1/\sqrt{8}$

$2\sqrt{2}$

$\sqrt{2}/4$

1

**Задание 3.** Геометрический смысл кручения кривой – это

*Ответы:*

Скорость вращения касательной

Скорость вращения бинормали

Скорость вращения соприкасающейся плоскости

Степень изогнутости кривой

**Задание 4.** Вычислить дифференциал длины дуги кривой, заданной уравнением  $v = 2u$  на поверхности с первой квадратичной формой  $du^2 + 6dudv - 2dv^2$ .

*Ответы:*

$5du^2$

$4du$

$\sqrt{5}du$

$2\sqrt{2}du$

**Задание 5.** Что такое нормальная кривизна поверхности?

*Ответы:*

Норма кривизны

Кривизна нормали

\*Кривизна нормального сечения

Кривизна нормированной кривой

**Задание 6.** Вычислить главные кривизны поверхности  $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6}$  в точке  $(0,0,0)$ .

*Ответы:*

2, 3

1/2, 1/3

1/4, 1/6

4, 6

**Задание 7.** Какого типа точки имеются на поверхности тора, полученного вращением окружности  $(x - 3)^2 + y^2 = 6$  вокруг оси  $OZ$ ?

*Ответы:*

Только эллиптические

Эллиптические и гиперболические

Эллиптические, гиперболические и параболические

Гиперболические и параболические

**Задание 8.** Чему равна гауссова кривизна поверхности прямого кругового цилиндра?

*Ответы:*

0

1

-1

Во всех точках гауссова кривизна различна

**Задание 9.** Чему равна средняя кривизна поверхности катеноида  $x = ch u \cos v$ ;  $y = ch u \sin v$ ;  $z = u$ ?

*Ответы:*

1

0

-1

Во всех точках средняя кривизна различна

**Задание 10.** Какие линии представляют собой геодезические на поверхности сферы?

*Ответы:*

Окружности, получающиеся в сечении плоскостями, не проходящими через центр сферы

Любые линии

Окружности, получающиеся в сечении плоскостями, проходящими через центр сферы

Таких линий нет

### **Варианты контрольных работ (каждая задача максимально оценивается в 5 баллов)**

#### Контрольная работа 1

1. Дать определение регулярной кривой. Является ли данная кривая регулярной (ответ объяснить)?

$$x(t) = t^2, y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t^2 \sin \frac{1}{t}, & t > 0 \end{cases}; -\infty < t < +\infty.$$

2. Составить натуральную параметризацию цепной линии и вычислить базис Френе данной кривой в точке  $t_0 = \frac{1}{2}$ :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = a \operatorname{ch}\left(\frac{t}{a}\right), \end{cases} 0 \leq t \leq 1, a = \operatorname{const} > 0.$$

3. Вычислить кривизну и кручение данной линии в указанной точке:

$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = t^2 + 2, t_0 = 1. \\ z(t) = t^3 \end{cases}$$

#### Контрольная работа 2

Вариант 1.

1. Найти уравнения геодезических линий на поверхности с первой квадратичной формой  $du^2 + adv^2$ ,  $a = \text{const} > 0$ .

2. Найти геодезическую кривизну линии  $u = a = \text{const}$  на поверхности конуса:

$$\begin{cases} x = u \\ y = 2u \cos v. \\ z = 2u \sin v \end{cases}$$

3. Дать определение хаусдорфова топологического пространства. Доказать, что произвольное метрическое пространство хаусдорфово. Привести пример нехаусдорфова топологического пространства.

Вариант 2.

1. Вычислить геодезическую кривизну в произвольной точке линии  $u = 3v$  на поверхности кругового цилиндра:

$$\begin{cases} x = \cos v \\ y = \sin v. \\ z = u \end{cases}$$

2. Найти уравнения геодезических линий на поверхности с первой квадратичной формой  $vdu^2 + vdv^2$ .

3. Дать определение топологического пространства. Привести пример. Доказать, что произвольное метрическое пространство является топологическим пространством.