

*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Российский университет дружбы народов»*

Экологический факультет

Рекомендовано МССН

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины

Дифференциальные уравнения

Рекомендуется для направления подготовки/специальности

01.04.02 Прикладная математика и информатика

Направленность программы: «Моделирование и прогнозирование процессов
в экологии и экономике»

1. Цели и задачи дисциплины

Выработка навыков свободного владения основными понятиями и методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений и создание базы для успешного восприятия современных специальных знаний по вопросам, так или иначе связанным с этими уравнениями.

Для реализации поставленной цели в процессе преподавания курса решаются следующие задачи:

- изучить классические понятия и теоремы теории обыкновенных дифференциальных уравнений в рамках университетской программы;
- научиться решать стандартные задачи по курсу обыкновенных дифференциальных уравнений;
- развить творческие навыки при выполнении учебной курсовой работы по указанному курсу.

2. Место дисциплины в структуре ООП

Обязательная часть (вариативная компонента).

Необходимо знание основ математического анализа, аналитической геометрии и линейной алгебры. Дисциплина является предшествующей к курсам непрерывные математические модели, вариационное исчисление и оптимальное управление, математические модели экономических процессов, прогнозирование в экономике, математические модели динамических процессов биосферы, прогнозирование в экологии.

3. Требования к результатам освоения дисциплины

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

- способность совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач (ОПК-2);
- способность разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности (ОПК-3);
- способность разрабатывать и применять математические методы, системное и прикладное программное обеспечение для решения задач научной и проектно-технологической деятельности (ПК-3).

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать:

Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений, систем обыкновенных дифференциальных уравнений, линейных и квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка, теоремы о разрешимости и об однозначной разрешимости задачи Коши для этих систем и уравнений, краевой задачи для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, теоремы о продолжении решений, о непрерывной и дифференцируемой зависимости решений от параметров, уравнения первого порядка, не разрешённые относительно производной, особые решения, теоремы сравнения, теоремы об ограниченности решений линейных уравнений второго порядка, теорию линейных уравнений и систем, элементы теории устойчивости решений по Ляпунову, особые точки систем на плоскости, связь линейных уравнений в частных производных первого порядка с первыми интегралами соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Уметь:

Решать уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним, линейные уравнения и системы как нормального, так и общего вида, уравнения Бернулли, Риккати, в полных дифференциалах, с помощью интегрирующего множителя, с помощью разложения решения в ряд, методом введения параметра, исследовать уравнения на особые решения, решать уравнения на понижение порядка, исследовать решения на устойчивость по Ляпунову, определять характер особых точек систем на плоскости, находить производные решений по параметрам, находить функцию Грина краевой задачи для линейного обыкновенного дифференциального

уравнения второго порядка, находить общее решение и решение задачи Коши для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка, составлять и решать геометрические и физические задачи.

Владеть:

Методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений, квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка, методами решения конкретных задач как теоретического, так и прикладного характера, в частности, геометрических и физических.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетные единицы.

№	Вид учебной работы	Всего часов	Семестры
			1
1.	Аудиторные занятия (ак. часов)	27	27
	В том числе:		
1.1.	Лекции	9	9
1.2.	Прочие занятия	18	18
	<i>В том числе:</i>		
1.2.1.	<i>Практические занятия (ПЗ)</i>	18	18
1.2.2.	<i>Семинары (С)</i>		
1.2.3.	<i>Лабораторные работы (ЛР)</i>		
	<i>Из них в интерактивной форме (ИФ):</i>	18	18
2.	Самостоятельная работа студентов (ак. часов)	117	117
	В том числе:		
2.1.	Курсовой проект (работа)		
2.2.	Расчетно-графические работы		
2.3.	Реферат		
2.4.	Подготовка и прохождение промежуточной аттестации	27	27
	<i>Другие виды самостоятельной работы</i>	90	90
3.	Общая трудоемкость (ак. часов)	144	144
	<i>Общая трудоемкость (зачетных единиц)</i>	4	4

5. Содержание дисциплины

5.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1.	Введение	Роль дифференциальных уравнений в изучении явлений природы. Примеры механических и физических задач, приводящих к дифференциальным уравнениям. Основные понятия и классификация дифференциальных уравнений.

2.	Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка	<p>Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной. Геометрическая интерпретация. Интегральные кривые. Метод изоклин.</p> <p>Простейшие уравнения, интегрируемые в квадратурах: уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним, однородные и приводящиеся к ним, обобщённые однородные, линейные. Уравнения Бернулли и Риккати. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель и методы его нахождения.</p> <p>Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши. Продолжение решений в окрестность границы области и вплоть до границы области. Лемма Гронуолла.</p> <p>Непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных данных и параметров. Теоремы сравнения. Сходимость ломанных Эйлера к решению задачи Коши.</p> <p>Дифференциальные уравнения первого порядка, неразрешённые относительно производной. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши. Точки единственности и неединственности, особые решения и методы их нахождения. Огибающая семейства кривых и методы её нахождения. Огибающая, как особое решение. Общий метод введения параметра. Уравнения Клеро и Лагранжа.</p>
3.	Обыкновенные дифференциальные уравнения n -го порядка	<p>Дифференциальные уравнения n-го порядка. Основные определения. Простейшие типы уравнений, допускающих интегрирование в квадратурах. Уравнения, допускающие понижение порядка. Гладкость решения уравнения n-го порядка. Интегрирование уравнений с помощью рядов.</p> <p>Линейные уравнения n-го порядка. Задача Коши для линейного уравнения n-го порядка. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши. Свойства определителя Вронского. Существование фундаментальной системы решений для линейного однородного уравнения n-го порядка. Вид общего решения линейного однородного и неоднородного уравнения n-го порядка. Построение линейного однородного уравнения n-го порядка по заданной фундаментальной системе решений. Единственность такого уравнения. Формула Остроградского–Лиувилля. Понижение порядка линейного дифференциального уравнения при наличии известных частных решений. Построение частного решения линейного неоднородного уравнения n-го порядка методом вариации постоянных. Линейные однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Теорема о сдвиге. Характеристическое уравнение. Фундаментальная система решений в случае простых и кратных корней. Вид фундаментальной системы решений линейного однородного уравнения n-го порядка с действительными постоянными коэффициентами. Построение частного решения линейного неоднородного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами для правой части специального вида. Уравнение Эйлера. Приведение линейного одно-</p>

		родного уравнения 2-го порядка к уравнению Риккати и к некоторым специальным видам. Две теоремы об ограниченности решений линейного однородного уравнения 2-го порядка.
4.	Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений	Задачи механики и управления, приводящие к краевым задачам. Постановка краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка, их геометрическая и механическая интерпретация. Теоремы существования решений краевых задач для линейных однородных уравнений 2-го порядка. Оператор Штурма–Лиувилля. Лемма о нулевом собственном значении оператора Штурма–Лиувилля. Функция Грина и её свойства. Выражение решения неоднородной краевой задачи через функцию Грина.
5.	Системы обыкновенных дифференциальных уравнений	Основные определения. Канонический и нормальный вид системы. Условия эквивалентности системы дифференциальных уравнений 1-го порядка одному дифференциальному уравнению n-го порядка. Простейшие методы интегрирования систем дифференциальных уравнений. Задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений. Лемма Арцела. Ломанные Эйлера и теорема Пеано о существовании решения задачи Коши в случае непрерывной правой части. Продолжение решений. Теорема единственности. Следствие для уравнений n-го порядка. Случай линейного уравнения и линейной системы. Непрерывная зависимость задачи Коши от начальных параметров и данных и параметров. Системы линейных однородных уравнений. Определитель Вронского и его свойства. Фундаментальная система решений. Существование фундаментальных систем и их взаимосвязь. Вид общего решения линейной однородной и неоднородной системы. Восстановление системы линейных однородных уравнений по заданной фундаментальной системе решений. Формула Остроградского–Лиувилля. Построение частного решения системы линейных неоднородных уравнений методом вариации постоянных. Формула Коши. Лемма Адамара. Дифференцируемость решения нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений по начальным данным и параметрам. Системы уравнений в вариациях. Системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Методы решения нормализуемой и ненормализуемой системы. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами и методы их решения.

6.	Теория устойчивости	<p>Теория устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений и её роль в качественной теории дифференциальных уравнений. Устойчивость и асимптотическая устойчивость по Ляпунову решений систем дифференциальных уравнений. Лемма Ляпунова об устойчивости. Лемма Ляпунова об асимптотической устойчивости и её обобщения. Функция Ляпунова.</p> <p>Исследование устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений по линейному приближению. Теорема Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости по линейному приближению. Теоремы Рауса–Гурвица, Льенара–Шипара, Михайлова об устойчивости решений систем однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (без доказательства).</p> <p>Особые точки автономных систем линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами на плоскости. Устойчивость, асимптотическая устойчивость и неустойчивость соответствующих решений. Фазовый портрет.</p>
7.	Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальные уравнения в частных производных 1-го порядка.	<p>Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Задание общего решения системы с помощью полной системы первых интегралов. Существование полной системы первых интегралов.</p> <p>Линейные уравнения в частных производных 1-го порядка. Связь с первыми интегралами системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Квазилинейные уравнения в частных производных 1-го порядка. Система уравнений характеристик. Две леммы о характеристиках. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для квазилинейного уравнения в частных производных 1-го порядка.</p>

5.2 Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми

№ п/п	Наименование обеспечиваемых (последующих) дисциплин	№ № разделов данной дисциплины, необходимых для изучения обеспечиваемых (последующих) дисциплин						
		1	2	3	4	5	6	7
1.	Непрерывные математические модели	+	+	+	+	+	+	+
2.	Вариационное исчисление и оптимальное управление		+		+			
3.	Математические модели экономических процессов	+	+	+	+	+	+	+
4.	Прогнозирование в экономике		+	+	+			
5.	Математические модели динамических процессов биосферы	+	+	+	+	+	+	+
6.	Прогнозирование в экологии		+	+	+			

5.3. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела	Лекц.	Практические занятия и лабораторные работы			СРС	Всего
			ПЗ/С	ЛР	из них в ИФ		
1.	Введение	1				10	11
2.	Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка	2	4		4	15	21
3.	Обыкновенные дифференциальные уравнения n-го порядка	1	4		4	15	20
4.	Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений	1	2		2	15	18
5.	Системы обыкновенных дифференциальных уравнений	2	4		4	15	21
6.	Теория устойчивости	1	2		2	10	13
7.	Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальные уравнения в частных производных 1-го порядка.	1	2		2	37	40
	Итого:	9	18		18	117	144

5.4. Описание интерактивных занятий

№ п/п	№ раздела	Тема интерактивного занятия	Вид занятия	Трудоемкость (час.)
1.	2	Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка	воркшоп	4
2.	3	Обыкновенные дифференциальные уравнения n-го порядка	воркшоп	4
3.	4	Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений	воркшоп	2
4.	5	Системы обыкновенных дифференциальных уравнений	воркшоп	4
5.	6	Теория устойчивости	воркшоп	2
6.	7	Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальные уравнения в частных производных 1-го порядка.	воркшоп	2

6. Лабораторный практикум не предусмотрен

7. Практические занятия (семинары)

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудоемкость (час.)
1.	2	Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка	4
2.	3	Обыкновенные дифференциальные уравнения n-го порядка	4
3.	4	Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений	2
4.	5	Системы обыкновенных дифференциальных уравнений	4
5.	6	Теория устойчивости	2
6.	7	Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальные уравнения в частных производных 1-го порядка.	2

8. Примерная тематика курсовых проектов (работ)

1. Условия устойчивости.
2. Условия устойчивости системы с периодическими коэффициентами.
3. Предельные циклы.
4. Метод малого параметра.
5. Продолжение решений.
6. Преобразование Лиувилля.
7. Показательная функция матрицы.
8. Нахождение оптимального управления и оптимальной траектории.

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

а) основная литература:

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М., все годы издания
2. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., все годы издания
3. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., все годы издания
4. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1974
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., все годы издания
6. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Ростов, 1962
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Л., все годы издания

б) дополнительная литература

1. Еругин Н.Л. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск, 1970
 2. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1978
- Вся литература есть в библиотеке РУДН или в электронном виде на кафедре.

в) программное обеспечение – Windows, Microsoft Office, Maple, TeX, WinEdt.

г) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы – Yandex, Goole, MathNet.

10. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

учебная аудитория для проведения семинарских занятий, большая аудитория (лекционный зал) для чтения лекций, ноутбук – 1 шт., проектор – 1 шт., экран – 1 шт., ксерокс – 1 шт., принтер – 1 шт., сканер – 1 шт.

11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ УРОВНЯ ЗНАНИЙ

по обязательной дисциплине «Дифференциальные уравнения», привязанной к семестрам, направлению подготовки «Математика».

1. Шкала балльно-рейтинговой системы.

Баллы за семестр	Автоматическая оценка	Баллы за итоговый контроль знаний	Общая сумма баллов	Итоговая оценка
21 – 60	Нет	0 – 40	95 – 100	5(A)
		0 – 40	86 – 94	5(B)
		0 – 40	69 – 85	4*(C)
		0 – 40	61 – 68	3*(D)
		0 – 40	51 – 60	3*(E)
		0 – 40	31 – 50	2(FX)
		0 – 40	0 – 30	2(F)
< 21	2	Нет	Нет	2

*Если на экзамене студент не ответил ни на один теоретический вопрос по билету полностью (даже при наличии решенной задачи), то ему выставляется оценка "неудовлетворительно" (т. е. подсчет баллов начинается только после полного ответа хотя бы на один теоретический вопрос по билету).

2. Порядок начисления баллов за промежуточный контроль знаний в 1-м семестре: 0 – 60 баллов

Коллоквиум № 1: либо 0 баллов, либо 10 баллов (его сдавать не обязательно, допускается несколько попыток; спрашиваются только определения и формулировки утверждений без доказательства; коллоквиум считается сданным, если при данной попытке получены ответы на все три вопроса из трех заданных; результаты прежних попыток не учитываются).

Контрольная работа № 1: 0 – 6 баллов

Каждая из трех задач – по 2 балла.

Контрольная работа № 2: 0 – 7 баллов

Каждая из пяти задач – по 1.4 балла.

Контрольная работа № 3: 0 – 7 баллов

Каждая из пяти задач – по 1.4 балла.

Зачет: либо 0 баллов, либо 30 баллов (на зачет выносятся задачи по темам из контрольных работ; при этом темы, успешно отраженные на контрольных работах, зачитываются автоматич-

чески, и на зачете остаются только темы, по которым остались долги из контрольных работ; если все задачи на всех контрольных работах успешно решены, то зачет выставляется автоматически).

3. Порядок начисления баллов за итоговый контроль знаний в 1-м семестре: 0 – 40 баллов

Экзамен: 0 – 40 баллов (включает два теоретических вопроса по билету, одну задачу и один дополнительный теоретический вопрос по выбору экзаменатора; каждый из перечисленных пунктов оценивается в 0 баллов при отсутствии полного ответа и в 10 баллов при правильном ответе); есть одно исключение: если на экзамене студент не ответил ни на один теоретический вопрос по билету полностью (даже при наличии решенной задачи), то ему выставляется оценка "неудовлетворительно" (т. е. подсчет баллов начинается только после полного ответа хотя бы на один теоретический вопрос по билету).

Шкала определения итоговой оценки в третьем семестре:

Общая сумма баллов	Итоговая оценка
95 – 100	5(A)
86 -- 94	5(B)
69 – 85	4*(C)
61 -- 68	3*(D)
51 – 60	3*(E)
31 -- 50	2(FX)
0 -- 30	2(F)