Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов» (РУДН)

Факультет физико-математических и естественных наук
Институт физических исследований и технологий

Рекомендовано МССН
«Математика и механика»

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Рекомендуется для направления подготовки/специальности
03.03.02 Физика

Квалификация (степень) выпускника
бакалавр

1. Цели и задачи дисциплины: сформировать представление о комплексе идей и методов линейной алгебры, развить математическую культуру студента, подготовить его к усвоению других основных математических курсов и использованию усвоенных знаний в других дисциплинах. Реализация указанной цели включает последовательное изложение теоретического материала на лекциях, при котором все основные результаты снабжаются строгими доказательствами и иллюстрируются конкретными примерами; отработку приемов решения задач и творческого применения теоретического материала на практических занятиях; промежуточный и итоговый контроль выявляют степень усвоения полученных навыков.

2. Место дисциплины в структуре ООП: базовая часть, модуль «Математика», Б.1.Б7. Необходимо знание алгебры в объеме школьного курса; дисциплина является предшествующей к курсам векторного и тензорного анализа, теории функций комплексного переменного, дифференциальных уравнений, интегральных уравнений и вариационного исчисления, уравнений математической физики, теоретической механики, оптики, квантовой механики.

В таблице № 1 приведены предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций дисциплины в соответствии с матрицей компетенций ОП ВО.

Таблица № 1

Предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций

№ п/п	Шифр и наименование компетенции	Предшествующие дисциплины	Последующие дисциплины (группы дисциплин)
1	ОПК-1. Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности.		Дисциплины модулей «Общая физика», «Теоретическая физика», «Общий физический практикум», физика конденсированных сред, физическая кинетика, дисциплины по выбору, научно-исследовательская работа

3. Требования к результатам освоения дисциплины:

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать: понятия поля, группы, линейного пространства, арифметического векторного пространства, матрицы, определителя матрицы, линейного подпространства, алгебраического дополнения, прямой суммы подпространств, линейно независимой системы, полной системы, базиса, размерности линейного пространства, линейного оператора, образа и ядра линейного оператора, эпиморфизма, мономорфизма, линейного изоморфизма, собственного вектора и собственного значения линейного оператора, скалярного произведения, евклидова пространства, эрмитова пространства, ортогонального дополнения, ортонормированной системы, билинейной функции, квадратичной функции, канонического базиса.

Уметь: решать системы линейных уравнений, вычислять определители матриц, исследовать системы векторов на линейную зависимость, применять метод Гаусса для выделения максимальной линейно независимой подсистемы данной системы векторов, дополнять данную линейно независимую систему векторов до базиса пространства, находить собственные значения и собственный базис диагонализируемых линейных операторов, находить значения длин векторов и углов между векторами в евклидовом и эрмитовом пространствах, применять процесс ортогонализации для выделения ортонормированного базиса в евклидовом пространстве, исследовать квадратичные функции на знакоопределённость, находить индекс и канонический базис квадратичных функций.

Владеть: комплексными числами и операциями над ними, аппаратом теории матриц и определителей, элементами абстрактной алгебры, теоретико-множественным аппаратом, методами теории конечномерных линейных пространств, теории операторов и теории билинейных и квадратичных форм.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет: 3 зачетные единицы.

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры			
		1	2	3	4
Аудиторные занятия (всего)	**32**		**32**		
В том числе:					
Лекции	16		16		
Практические занятия (ПЗ)	16		16		
Семинары (С)					
Лабораторные работы (ЛР)					
Самостоятельная работа (всего)	**76**		**76**		
В том числе:					
Курсовой проект (работа)					
Расчетно-графические работы					
Реферат					
Другие виды самостоятельной работы					
Вид промежуточной аттестации (зачет, экзамен)	**20**		**20**		
Общая трудоемкость час	**108**		**108**		
зач. ед.	**3**		**3**		

5. Содержание дисциплины

5.1. Содержание разделов дисциплины

Часть 1. Поля и линейные пространства над полем.

1. Определение коммутативной группы и поля. Основные свойства полей: единственность нейтральных элементов по сложению и умножению, отсутствие делителей нуля. Характеристика поля. Поля конечной и нулевой характеристики.
2. Примеры полей. Поле рациональных чисел. Поле действительных чисел. Поле комплексных чисел. Поле вычетов по модулю простого числа.
3. Определение линейного пространства над полем. Фундаментальные свойства линейных пространств. Критерий совпадения данного вектора с нулевым. Вектор, обратный к конечной линейной комбинации данны векторов.
4. Примеры линейных пространств. N-мерное арифметическое линейное пространство над данным полем, включая n-мерное действительное арифметическое пространство и n-мерное комплексное арифметическое пространство. Пространство матриц с элементами из данного поля. Пространство последовательностей. Пространство отображений из некоторого множества в поле. Положительная действительная ось как линейное пространство относительно неклассических линейных операций.
5. Пространство решений однородных систем линейных уравнений.

Часть 2. Подпространства линейного пространства.

1. Определение подпространства линейного пространства. Тривиальные подпространства.
2. Подпространство как линейное пространство с индуцированными линейными операциями.

3. Примеры подпространств. Цепочки подпространств пространств функций и последовательностей. Примеры подмножеств линейного пространства, не являющихся подпространствами.
4. Пересечение семейства линейных пространств как подпространство
5. Конечная линейная комбинации элементов линейного пространства. Линейная оболочка подмножества линейного пространства как подпространство.
6. Минимальное линейное пространство, порождённое данным подмножеством линейного пространства.
7. Критерий того, когда объединение двух подпространств линейного пространства является подпространством.
8. Определение суммы подпространств линейного пространства.
9. Сумма подпространств как линейная оболочка их объединения.

Часть 3. Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов линейного пространства.

1. Определение полной системы элементов линейного пространства. Конечномерное линейное пространство.
2. Бесконечномерность пространства всех многочленов и всех квадратично суммируемых последовательностей.
3. Определение линейной зависимости и линейной независимости конечных систем элементов линейного пространства.
4. Линейная зависимость и линейная независимость для произвольных систем элементов линейного пространства.
5. Фундаментальные свойства линейно зависимых и линейно независимых систем: переход к подсистемам, критерий линейной зависимости систем из двух и трёх векторов, линейная зависимость системы, содержащей нулевой элемент.
6. Основная леммы о линейной зависимости.
7. Теорема о соотношении количества произвольных линейно независимой и полной систем элементов конечномерного линейного пространства.
8. Конечномерность подпространства конечномерного линейного пространства.

Часть 4. Базисы в линейных пространствах. Конечномерные линейные пространства.

1. Пустое множество как базис нулевого пространства.
2. Общее определение базиса линейного пространства.
3. Критерий базисности системы элементов линейного пространствах в терминах единственности разложения по базису произвольного элемента линейного пространства.
4. Примеры базисов конкретных линейных пространств: конечномерно арифметическое пространства (действительный и комплексный случай), пространство всех многочленов, пространство всех многочленов степени не выше данной, пространство действительно- и комплексно-значных матриц, пространство квадратично суммируемых последовательностей.
5. Формулировка теоремы о существовании базиса у произвольного линейного пространства и равномощности любых двух его базисов.
6. Теорема о существовании базиса для конечномерных линейных пространств.
7. Определение размерности линейного пространства и его корректность.
8. Выделение в конечномерно линейном пространстве базиса из произвольной полной системы и дополнение до базиса произвольной линейно независимой системы.
9. Критерий базисности для полных и для линейно независимых систем в конечномерном пространстве.
10. Размерность подпространства.
11. Существование у конечномерного линейного пространства подпространства произвольной промежуточной размерности.
12. Размерности конкретных подпространств.

13. Теорема о размерности суммы двух подпространств линейного пространства.
14. Изменение координат вектора при переходе от базиса к базису конечномерного линейного пространства.
15. Критерий того, когда квадратная матрица является матрицей перехода от одного базиса к другому.
16. Нахождение координат элемента конечномерного линейного пространства в данном базисе.
17. Решение однородных и неоднородных систем линейных уравнений с помощью метода Гаусса. Линейное пространство решений однородной системы линейных уравнений. Структура множества решений неоднородной системы линейных уравнений.
18. Решение неоднородных систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы и с помощью формул Крамера.

Часть 5. Прямые суммы линейных подпространств.

1. Определение прямой суммы двух подпространств линейного пространства.
2. Теорема об эквивалентности разложения линейного пространства а прямую сумму двух своих подпространств.
3. Определение алгебраического дополнения для подпространства линейного пространства.
4. Теорема о существовании алгебраического дополнения для произвольного подпространства линейного пространства. Неоднозначность определённости алгебраического дополнения для нетривиального подпространства.
5. Определение прямой суммы конечного числа подпространств линейного пространства.
6. Теорема об эквивалентности условиях разложения линейного пространства в прямую сумму конечного числа своих подпространств.
7. Примеры разложения линейных пространств в прямую сумму своих подпространств: конечномерное линейное пространство как прямая сумма линейных оболочек своих базисных векторов; пространство всех многочленов как прямая сумма подпространств многочленов чётной и нечётной степеней; пространство квадратных матриц как прямая сумма подпространств симметрических и кососимметрических матриц.

Часть 6. Линейные операторы в линейных пространствах.

1. Определение линейного оператора из одного линейного пространства в другое линейное пространство.
2. Арифметические операции над линейными операторами.
3. Линейное пространство линейных операторов из одного линейного пространства в другое линейное пространство.
4. Задание линейных операторов между конечномерными линейными пространствами их значениями на элементах базиса.
5. Матрица линейного оператора при фиксированных базисах.
6. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к другим базисам.
7. Ядро и образ линейного оператора.
8. Определение линейных эпиморфизма, мономорфизма и изоморфизма.
9. Критерий мономорфности линейного оператора в терминах тривиальности его ядра.
10. Теорема о соотношении размерностей ядра линейного оператора и его образа.
11. Критерий изоморфности линейного преобразования конечномерного линейного пространства в терминах базисов.
12. Следствия о ненулевых решениях однородных систем линейных уравнений и неразрешимости неоднородной систем линейных уравнений.
13. Немономорфность линейного оператора из линейного пространства с меньшей размерностью в линейное пространство с большей размерностью. Неэпиморфность линейного оператора из линейного пространства с большей размерностью в линейное пространство с меньшей размерностью.

14. Композиция линейных операторов как линейный оператор. Ассоциативность композиции линейных операторов.
15. Обратимость линейного преобразования линейного пространства и обратное линейное преобразования. Единственность обратного линейного преобразования.
16. Критерий обратимости линейного преобразования.
17. Критерий изоморфности конечномерных линейных пространств в терминах совпадения их размерностей.
18. Теорема об эквивалентности понятий эпиморфности, мономорфности и изоморфности для линейных операторов между конечномерными линейными пространствами и контрпримеры к этой теореме для бесконечномерных линейных пространств.

Часть 7. Пространства со скалярным произведением.

1. Определение скалярного произведения в евклидовом и эрмитовом случаях.
2. Задание скалярного произведения на базисных векторах.
3. Матрица Грама при фиксированном базисе пространства со скалярным произведением, её симметричность и положительная определённость.
4. Определение нормы на линейном пространстве. Норма, порождённая скалярным произведением.
5. Неравенство Коши-Буняковского.
6. Теорема фон Ноймана-Йордана как критерий порождённости нормы скалярным произведением.
7. Ортогональность элементов пространства со скалярным произведением. Ортогональное дополнение подмножества в линейном пространстве со скалярным произведением.
8. Геометрическая трактовка скалярного произведения: длины векторов и углы между векторами.
9. Разложение пространства со скалярным произведением в прямую сумму его подпространства и ортогонального дополнения к этому подпространству.
10. Определение ортогональной и ортонормированной системы элементов в пространстве со скалярным произведением.
11. Линейная независимость ортогональной системы, состоящей из конечного количества векторов.
12. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта и теорема о существовании ортонормированного базиса для конечномерного пространства со скалярным произведением.
13. Критерий изоморфности конечномерных пространств со скалярным произведением в терминах совпадения их размерностей.
14. Определение оператора, сопряжённого к данному линейному оператору. Свойства сопряжённого оператора: сопряжённый к линейной комбинации операторов и сопряжённый к композиции операторов.
15. Определение самосопряжённого линейного оператора.
16. Действительность собственных значений самосопряжённого линейного оператора.

Часть 8. Билинейные, полуторалинейные и квадратичные функции в евклидовых и эрмитовых пространствах.

1. Определение билинейной и полуторалинейной функции в эрмитовом пространстве.
2. Определение квадратичной функции, порождённой билинейной или полуторалинейной функцией.
3. Теорема о единственности симметрической билинейной функции, порождающей данную квадратичную функцию.
4. Канонический вид квадратичной функции и канонический базис.
5. Метод Лагранжа приведения квадратичной функции к каноническому виду.
6. Определение положительно и неотрицательно определённой квадратичной формы.
7. Определение индекса и сигнатуры квадратичной функции.

8. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной функции.
9. Определение ортогонального преобразования линейного преобразования.
10. Определение ортогональной матрицы.
11. Критерий ортогональности линейного пространства в терминах перехода от ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису. Связь между ортогональными преобразованиями и ортогональными матрицами.
12. Алгоритм приведения квадратичной функции к каноническому виду ортогональным преобразованием.

5.2. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практ. зан. / семинары	Лаб. зан.	СРС	Всего час.
1.	Поля и линейные пространства над полем.	2	2		6	10
2.	Подпространства линейного пространства.	2	2		12	16
3.	Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов линейного пространства.	2	2		12	16
4.	Базисы в линейных пространствах. Конечномерные линейные пространства.	2	2		12	16
5.	Прямые суммы линейных подпространств.	2	2		6	10
6.	Линейные операторы в линейных пространствах.	2	2		4	8
7.	Пространства со скалярным произведением.	2	2		16	20
8.	Билинейные, полуторалинейные и квадратичные функции в евклидовых и эрмитовых пространствах.	2	2		8	12
9.	Итого	16	16		76	108

6. Лабораторный практикум - не предусмотрен

7. Практические занятия (семинары)

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	ПЗ
1.	Поля и линейные пространства над полем.	2
2.	Подпространства линейного пространства.	2
3.	Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов линейного пространства.	2
4.	Базисы в линейных пространствах. Конечномерные линейные пространства.	2
5.	Прямые суммы линейных подпространств.	2
6.	Линейные операторы в линейных пространствах.	2
7.	Пространства со скалярным произведением.	2
8.	Билинейные, полуторалинейные и квадратичные функции в евклидовых и эрмитовых пространствах.	2

8. Курсовые работы - не предусмотрены**.**

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

а) Основная литература:

1. Федорчук В.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Второе издание. М., НЦ ЭНАС, 2001.
2. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., Наука, 1979.

3. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры. Третье издание. М., Физико-математическая литература, 2000.
4. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра. Третье издание. М., Физико-математическая литература, 2000.
5. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. Восьмое издание. М., Юнимедиастайл, 2002.
<u>б) Дополнительная литература:</u>
6. Артамонов В.А., Бахтурин Ю.А., Винберг Э.Б. и другие (под редакцией А.И. Кострикина). Сборник задач по алгебре. Третье издание. М.: Физико-математическая литература, 2001.
7. Axler S. Linear Algebra Done Right. Third Edition. Springer Verlag, 2015.
8. Халмош П.Р. Конечномерные векторные пространства. Перевод с английского Д.А. Райкова и Д.Ф. Борисовой. М., ГИФМЛ, 1963.
(Вся литература имеется в библиотеке РУДН или в электронной библиотеке на кафедре)
Программное обеспечение: Windows, Microsoft Office, Adobe Acrobat Reader, Maple, TeX, WinEdt
Базы данных, информационно-справочные и поисковые системы: Yandex, Google, Mathematics Stack Exchange, Online Encyclopedia of Mathematics (editor M.Hazelwinkiel), MathNet.ru, Wikipedia, научный форум dxdy.ru

10. Материально-техническое обеспечение дисциплины:
учебная аудитория для проведения семинарских занятий, большая аудитория (лекционный зал) для чтения лекций, ноутбук – 1 шт., проектор – 1 шт., экран – 1 шт., ксерокс – 1 шт., принтер – 1 шт., сканер – 1 шт.

11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:
Курс изучается в форме лекций и семинарских занятий. Базовыми дисциплинами для данного курса являются курсы аналитической геометрии и математического анализа. За семестр проводятся две контрольные работы (по четыре и пять задач соответственно) и один коллоквиум. Итоговый контроль проходит в формате устного экзамена.

12. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю)
Шкала оценок
Соответствие систем оценок (согласно Приказу Ректора № 996 от 27.12.2006 г.)

Баллы БРС	Традиционные оценки в РФ	Баллы для перевода оценок	Оценки	Оценки
86-100	5	95-100	5+	A
		86-94	5	B
69-85	4	69-85	4	C
51-68	3	61-68	3+	D
		51-60	3	E
0-50	2	31-50	2+	FX
		0-30	2	F
51-60	Зачет		Зачет	Passed

Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине Линейная алгебра

Направление: 03.03.02 Физика

Код контролируемой компетенции или ее части	Контролируемый раздел дисциплины	Контролируемая тема дисциплины	Наименование оценочного средства											Баллы темы	Баллы раздела
			Текущий контроль								Промежуточная аттестация				
			Опрос	Проверочная работа	Коллоквиум	Контрольные работы	Выполнение ЛР	Выполнение КР/КП	СРС (Выполнение домашнего теста)		Экзамен	…	…		
ОПК-1	Раздел 1: Линейные пространства	Тема 1: «Поля и линейные пространства над полем»	1		3						5			9	63
		Тема 2: «Подпространства линейного пространства»	1		4	2					6			13	
		Тема 3: «Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов линейного пространства»	1		5	3					7			16	
		Тема 4: «Базисы в линейных пространствах. Конечномерные линейные пространства»	1		5	2			2		6			16	
		Тема 5: «Прямые суммы линейных подпространств»	1		3	1					4			9	
	Раздел 2: Линейные операторы и квадратичные функции	Тема 1: «Линейные операторы в линейных пространствах»	1			3			2		8			14	37
		Тема 2: «Пространства со скалярным произведением»	1			2					7			10	
		Тема 3: «Билинейные, полуторалинейные и квадратичные функции в евклидовых и эрмитовых пространствах»	1			3			2		7			13	
		ИТОГО:	8		20	16			6		50			100	100

Промежуточный контроль знаний
Коллоквиум

Темы для подготовки

1. Поля и линейные пространства над полем: определения, базовые свойства, примеры. Приложения к решению систем линейных уравнений.
2. Подпространства линейного пространства. Базовые свойства и примеры расширяющихся по вложению цепочек подпространств. Линейная оболочка множества в линейном пространстве. Применение теоретико-множественных операций к линейным пространствам. Сумма подпространств.
3. Полнота системы элементов линейного пространства. Конечномерность и бесконечномерность линейного пространства. Линейная зависимость и линейная независимость систем векторов: определения для конечных и бесконечных систем векторов и основные свойства. Основная лемма о линейной зависимости и следствия из неё.
4. Базис линейного пространства. Примеры базисов конкретных линейных пространств. Теорема о существовании базиса у линейного пространства и равномощности любых двух базисов. Дополнение линейно независимой системы до базиса и выделение базиса из полной системы. Размерность конечномерного линейного пространства. Свойства размерностей подпространств. Размерность суммы двух подпространств. Изменение координат элемента в конечномерном линейном пространстве при переходе от базиса к базису. Структура множества решений неоднородной системы линейных уравнений.
5. Прямая сумма линейных пространств: определение и примеры. Критерий эквивалентности разложения линейного пространства в прямую сумму своих подпространств. Алгебраическое дополнение подпространства линейного пространства и его неоднозначная определённость.

Примерные варианты контрольных работ

Контрольная работа № 1. Линейные пространства, матрицы и системы линейных уравнений.
Задачи:
1. Нахождение аффинного пространства решений неоднородной системы линейных уравнений.
2. Исследование данной системы векторов на базисность и нахождение координат данного вектора в заданном базисе.
3. Вычисление определителей матриц с использованием полилинейности по строкам и столбцам.
4. Проверка определения и исследование свойств подпространств линейного пространства.

Контрольная работа №2. Линейные операторы в линейных пространствах. Пространства со скалярным произведением. Билинейные и квадратичные формы.
Задачи:
1. Проверка линейности оператора и нахождение его матрицы в различных базисах.
2. Нахождение канонического базиса для линейного оператора с помощью ортогонального преобразования.
3. Выделение ортогонального базиса в линейного оболочке заданного набора векторов с помощью процесса ортогонализации Грама-Шмидта.
4. Приведение квадратичной функции к каноническому виду методом Лагранжа.
5. Исследование знакоопределённости квадратичной функции с помощью критерия Сильвестра.

Итоговый контроль знаний
Экзамен

Примерные варианты экзаменационных билетов

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

1. Теорема о выделении базиса конечномерного линейного пространства из произвольной конечной полной системы векторов.
2. Изоморфизм линейных пространств. Симметричность, рефлексивность и транзитивность отношения изоморфности в классе линейных пространств.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 2

1. Стандартные базисы пространств многочленов степени не выше данной и всех многочленов.
2. Определение скалярного произведения. Пространства со скалярным произведением. Задание скалярного произведения на базисных векторах конечномерного линейного пространства.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 3

1. Определение базиса линейного пространства. Критерий базисности конечной системы элементов линейного пространства.
2. Теорема о соотношении между размерностями ядра и образа линейного оператора, заданного на конечномерном линейном пространстве.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 4

1. Определение размерности линейного пространства. Базисность произвольной полной системы из n элементов в n-мерном линейном пространстве и произвольной линейно независимой из n элементов в n-мерном линейном пространстве.
2. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта и теорема о существовании ортонормированного базиса у конечномерного пространства со скалярным произведением.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 5

1. Понятие полной системы элементов линейного пространства. Теорема о соотношении количества элементов для полной и линейно независимой систем в конечномерном линейном пространстве.
2. Примеры линейных отображений: нулевое и тождественное линейные отображения, операторы левого и правого сдвига на пространстве последовательностей.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 6

1. Критерий линейной независимости конечной системы элементов линейного пространства в терминах единственности коэффициентов разложения вектора по данной системе.
2. Неравенство Коши-Буняковского. Определение нормированного пространства. Норма, порожденная скалярным произведением.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 7

1. Пересечение подпространств. Линейная оболочка множества в линейном пространстве как минимальное линейное подпространство, содержащее данное множество.
2. Пример нормы линейного пространства на пространстве R^2, не порождённой никаким скалярным произведением.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 8

1. Необходимое и достаточное условие того, когда объединение двух линейных подпространств снова является линейным подпространством.
2. Понятие ортогональной и ортонормированной системы векторов. Линейная независимость ортогональной систем векторов.

Ответ на каждый вопрос оценивается от 0 до 25 баллов в зависимости от полноты и правильности ответов.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО РУДН.

Руководитель направления 03.03.02

Директор института физических исследований и технологий, д.ф.-м.н., профессор

О.Т. Лоза