Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Факультет физико-математических и естественных наук
Институт физических исследований и технологий

Рекомендовано МССН

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Математические методы в физике

Рекомендуется для направления подготовки/специальности
03.04.02 «Физика»

Направленность программы (профиль)

«Фундаментальная и прикладная физика»

1. Цели и задачи дисциплины:

Дисциплина «Математические методы в физике» читается на первом курсе обучения в магистратуре по направлению 03.04.02 – Физика. Курс предназначен помочь студентам-физикам в создании математической базы теории операторов, необходимой при решении задач квантовой физики, физики плазмы, магнитной гидродинамики, ядерной физики и физики элементарных частиц.

Задачи дисциплины: сформировать у студентов прочные навыки владения математическим аппаратом теории операторов.

2. Место дисциплины в структуре ОП ВО:

Дисциплина «Математические методы в физике» относится к *вариативной* части *блока* Б1.О.02 учебного плана. В таблице № 1 приведены предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций дисциплины в соответствии с матрицей компетенций ОП ВО.

Таблица № 1

Предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций

№ п/п	Шифр и наименование компетенции	Предшествующие дисциплины	Последующие дисциплины (группы дисциплин)
1	ОПК-1: способность применять фундаментальные знания в области физики для решения научно-исследовательских задач, а также владеть основами педагогики, необходимыми для осуществления преподавательской деятельности	Современные проблемы физики, Физика нелинейных процессов	Вычислительный эксперимент в физике сложных систем, Производственная (преддипломная) практика
2	ПК-1: способность самостоятельно ставить конкретные задачи научных исследований в области физики и решать их с помощью современной аппаратуры и информационных технологий с использованием новейшего отечественного и зарубежного опыта	Современные проблемы физики, Физика нелинейных процессов	Вычислительный эксперимент в физике сложных систем, Производственная (преддипломная) практика

3. Требования к результатам освоения дисциплины:

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать: основные положения теории операторов и теории функциональных пространств.

Уметь: решать физические задачи, связанные с применением теории операторов в квантовой теории, физике плазмы, физике конденсированных сред и других разделах физики.

Владеть: методами теории операторов в применении к физическим явлениям.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетные единицы.

Вид учебной работы	Всего часов	Модули			
				3	
Аудиторные занятия (всего)	**36**			**36**	
В том числе:	-			-	
Лекции	18			18	
Практические занятия (ПЗ)	18			18	
Семинары (С)					
Лабораторные работы (ЛР)					

Самостоятельная работа (всего)	**36**			**36**	
Общая трудоемкость час	**72**			**72**	
зач. ед.	**2**			**2**	

5. Содержание дисциплины

5.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела (темы)
1	**Функциональные пространства**	Метрические и нормированные пространства. Условия на метрическую функцию. Квазиметрические пространства. Топологические векторные пространства: регулярность, нормальность, хаусдорфовость (отделимость), выпуклость. Полные нормированные (банаховы) пространства. Полнота пространства непрерывных ограниченных функций. Гильбертовы пространства. Равенство параллелограмма. Неравенство Коши–Шварца–Буняковского. Теорема о проекции. Неравенство Бесселя. Ортонормированный базис.
2	**Интеграл Лебега**	Сигма-алгебра открытых множеств. Меры Лебега и Лебега–Стилтьеса. Множества меры нуль. Измеримые функции. Теорема Лебега о мажоранте. Лемма Фату. Теорема Фубини. Пространства Лебега. Неравенства Гельдера и Минковского. Мультипликативное неравенство для пространств Лебега. Полнота пространств Лебега.
3	**Теория линейных операторов**	Линейные операторы. Инъективные, сюръективные и биективные операторы. Норма оператора. Ограниченность и непрерывность операторов. Принцип расширения операторов. Ограниченность интегральных операторов. Неравенства Юнга. Пространства линейных ограниченных операторов, их полнота. Равномерная и сильная операторные топологии.
4	**Линейные функционалы**	Сопряженные банаховы пространства. Теорема Рисса–Фреше о представлении линейных функционалов в пространствах Лебега. Рефлексивность и изометрический изоморфизм функциональных пространств. Нерефлексивность пространств суммируемых функций и ограниченных измеримых функций.
5	**Алгебра операторов**	Принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха–Штейнгауза). Обратный оператор. Теорема Банаха об обратном операторе. Ряд Неймана. Резольвента оператора. Резольвентное множество. Спектр оператора: точечный, непрерывный и остаточный. Спектральный радиус оператора (формула И.М. Гельфанда). График оператора. Замкнутые операторы. Теорема о замкнутом графике. Теорема Хана–Банаха о продложении линейных функционалов и ее следствия. Слабая сходимость. Слабая * топология в сопряженном пространстве.
6	**Прямой вариационный метод и теория операторов**	Компактные множества функций. Теорема Арцела–Асколи. Компактные операторы, их спектр. Альтернатива Фредгольма. Операторы Гильберта–Шмидта. Ядерные операторы. Компактные выпуклые множества. Теоремы Банаха–Алаоглу и Эберлейна–Шмульяна. Теорема Крейна–Мильмана о крайних точках. Теорема Мазура–Банаха–

		Сакса о превращении слабой сходимости в сильную. Приложения к вариационному исчислению. Обобщение теоремы Вейерштрасса о минимуме непрерывной функции на функционалы. Полунепрерывность снизу. Слабая операторная топология. Нелинейные операторы. Неподвижная точка оператора. Принцип сжимающих отображений. Производные Фреше и Гато. Потенциальные операторы.
7	**Спектральный анализ операторов**	Сопряженные, симметрические (эрмитовы) и самосопряженные операторы. Спектральная теорема. Теорема Гельфанда–Костюченко. Унитарные операторы. Полугруппы операторов. Полярное разложение замкнутых операторов. Индексы дефекта. Самосопряженные расширения симметрических операторов (метод Фридрихса). Нормальные операторы.
8	**Теория обобщенных функций**	Пространства Фреше. Обобщенные функции и их преобразование Фурье. Пространства Соболева и теоремы вложения. Приложения к уравнениям в частных производных. Гладкость слабых решений эллиптических задач. Метод Ритца.

5.2. Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практ. зан.	Лаб. зан.	Семин	СРС	Всего час.
1	Функциональные пространства	2			2	4	8
2	Интеграл Лебега	2			2	4	8
3	Теория линейных операторов	2			2	4	8
4	Линейные функционалы	2			2	4	8
5	Алгебра операторов	2			2	4	8
6	Прямой вариационный метод и теория операторов	4			4	8	16
7	Спектральный анализ операторов	2			2	4	8
8	Теория обобщенных функций	2			2	4	8

6. Лабораторный практикум *не предусмотрен*

7. Практические занятия (семинары)

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудо-емкость (час.)
1	1	Функциональные пространства	2
2	2	Интеграл Лебега	2
3	3	Теория линейных операторов	2
4	4	Линейные функционалы	2
5	5	Алгебра операторов	2
6	6	Прямой вариационный метод и теория операторов	4
7	7	Спектральный анализ операторов	2
8	8	Теория обобщенных функций	2

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Лекционный компьютер, компьютерный проектор, аудитория для компьютерного тестирования, кабинет лекционных демонстраций.

9. Информационное обеспечение дисциплины

(а) программное обеспечение:
МЕНТОР
б) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы:
телекоммуникационная учебно-информационная система (ТУИС)
Учебный портал РУДН
Научная электронная библиотека РУДН
http://www.edu.ru/ – федеральный образовательный портал.

10. Учебно-методическое обеспечение дисциплины:

а) основная литература:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
2. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
3. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
4. Рудин У. Функциональный анализ. М. : Мир, 1975.
5. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
6. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.
7. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

б) дополнительная литература:

1. Соболев В.И. Лекции по дополнительным главам математического анализа. М.: Наука, 1968.
2. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
3. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
4. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука, 1984.

11. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Необходимо обеспечить себя рекомендованными учебными материалами. Для более глубокого усвоения содержания каждого раздела необходимо решать задачи. Набор соответствующих задач предоставляется (кроме имеющихся в задачнике).

Самостоятельная работа нужна как для усвоения теоретического материала, так и для подготовки к семинарам и выполнения домашнего занятия. Самостоятельная работа необходима и при подготовке к контрольным мероприятиям (подготовка к контрольным работам и коллоквиумам, решение задач домашнего задания).

12. Особенности реализации дисциплины для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

Реализация дисциплины, текущий контроль и промежуточная аттестация для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов осуществляются с учетом специфики освоения и дидактических требований, исходя из индивидуальных психофизических особенностей и в соответствии с индивидуальной программой реабилитации по личному заявлению обучающегося.

В процессе обучения предусматриваются различные формы предоставления необходимой учебной и учебно-методической информации (визуально, в том числе с укрупненным шрифтом, аудиально и т. п.), допускаются использование студентом технических средств фиксации информации (аудио-, фото- или видеотехника) и присутствие на аудиторных занятиях ассистента (помощника, сопровождающего, сурдо- или тифлосурдопереводчика и т. п.), осуществляющего техническое сопровождение учебного процесса для студента.

Допускается частично дистанционное обучение с предоставлением необходимой учебной и учебно-методической информации средствами телекоммуникационной сети Интернет. Предусматриваются различные формы текущего контроля качества освоения дисциплины, достижения запланированных результатов обучения и уровня сформированности заявленных в ООП компетенций: устно, в том числе практические задания и контрольные работы с пояснением хода выполнения; письменно, в том числе конспекты ответов на вопросы практических занятий по разделам дисциплины; устно дистанционно; письменно дистанционно.

Во всех формах текущего контроля используются общие критерии оценивания. Процедура промежуточной аттестации проводится с учетом психофизических особенностей и состояния здоровья студента: допускается присутствие ассистента, осуществляющего техническое сопровождение процедуры; используются адаптированные оценочные средства; допускаются различные формы ответа (устно, письменно, с использованием необходимых технических средств и т. п.); допускается дистанционная форма проведения зачета или экзамена (например, с использованием программы Skype в предварительно согласованное время); при необходимости предоставляется дополнительное время для подготовки к ответу. Независимо от формы организации процедуры промежуточной аттестации используются общие критерии оценивания.

13. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю)

Шкала оценок

Соответствие систем оценок (согласно Приказу Ректора № 996 от 27.12.2006 г.)

Баллы БРС	Традиционные оценки в РФ	Баллы для перевода оценок	Оценки	Оценки
86-100	5	95-100	5+	A
		86-94	5	B
69-85	4	69-85	4	C
51-68	3	61-68	3+	D
		51-60	3	E
0-50	2	31-50	2+	FX
		0-30	2	F
51-60	Зачет		Зачет	Passed

Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ФИЗИКЕ
Направление/Специальность: 03.04.02 Фундаментальная и прикладная физика

Код контролируемой компетенции или ее части	Контролируемый раздел дисциплины	Контролируемая тема дисциплины	Наименование оценочного средства															Баллы темы	Баллы раздела
			Текущий контроль												Промежуточная аттестация				
			Опрос	Тест	Коллоквиум	Контрольная работа	Выполнение ЛР	Выполнение КР/КП	Выполнение ДЗ	Реферат	Выполнение РГР				Экзамен/Зачет	…	…		
ОПК-1, ПК-1	Раздел 1: Функциональные пространства и интеграл Лебега	Тема 1: Функциональные пространства		15	10	15				5					30			25	30
		Тема 2: Интеграл Лебега																5	
ОПК-1, ПК-1	Раздел 2: Теория линейных операторов	Тема 1: Линейные операторы и линейные функционалы			10	15												25	30
		Тема 2: Алгебра операторов																5	
ОПК-1, ПК-1	Раздел 3: Вариационное исчисление	Тема 1: Прямой вариационный метод																	5
		Тема 2: Спектральный анализ и обобщенные функции																5	
		Реферат																	5
		ИТОГО:		15	20	30				5					30			100	100

Вопросы к коллоквиумам.

Вопросы к коллоквиуму 1 по теме «Функциональные пространства»:

1. Метрические пространства. Нормированные пространства.
2. Плотные множества. Гильбертово пространство. Неравенство Коши–Шварца–Буняковского. Теорема о проекции.
3. Ортонормированный базис. Неравенство Бесселя. Полнота набора векторов.
4. Интеграл Лебега. Измеримые функции. Теорема Лебега о мажоранте. Лемма Фату.
5. Пространства Лебега. Неравенства Гельдера и Минковского.

Вопросы к коллоквиуму 2 по теме «Линейные операторы и линейные функционалы»:

1. Линейные операторы. Норма оператора. Принцип расширения операторов.
2. Теорема Фубини и неравенства Юнга. Полнота пространства линейных ограниченных операторов.
3. Линейные функционалы. Теорема Рисса–Фреше. Рефлексивность.
4. Принцип равномерной ограниченности. Теорема Банаха об обратном операторе. Ряд Неймана.
5. Спектр оператора. Резольвентное множество. Спектральный радиус оператора.
6. Замкнутые операторы. Теорема о замкнутом графике.
7. Теорема Хана–Банаха. Свойства слабых пределов и принцип дуальности. Сопряженный оператор.
8. Компактные выпуклые множества. Теоремы Банаха–Алаоглу и Эберлейна–Шмульяна.
9. Теорема Мазура о превращении слабой сходимости в сильную. Приложения к вариационному исчислению. Полунепрерывность снизу.
10. Сопряженные, симметрические и самосопряженные операторы.
11. Индексы дефекта симметрических операторов. Самосопряженные расширения симметрических операторов.
12. Компактные множества функций. Теорема Арцела–Асколи. Компактные операторы. Операторы Гильберта–Шмидта. Ядерные операторы.
13. Пространства Фреше. Обобщенные функции. Пространства Соболева и теоремы вложения.

Вопросы к тесту по курсу «Математические методы в физике»:

1.Зададим расстояние $\rho\,(x,y),\quad x,y\in R,$ с помощью непрерывной монотонно растущей функции $\rho\,(x,y)=\varphi(|\,x-y\,|)$. Рассмотрим четыре случая:

$$\varphi_1(s)=\frac{s}{1+s},\quad \varphi_2(s)=s^2,\quad \varphi_3(s)=s^3,\quad \varphi_4(s)=s^4.$$

Какие из построенных пространств являются метрическими?

1), 2), 3), 4).

2.В банаховом пространстве $B_k,\quad k\in N,$ с нормой $\|\,x\,\|$ выполняется условие:

$$\|\,x+y\,\|^2+\|\,x-y\,\|^2=k\left(\|\,x\,\|^2+\|\,y\,\|^2\right) \quad .$$

Какое из этих пространств является гильбертовым?

1) B_1, 2) B_2, 3) B_3, 4) B_4.

3.Уравнение Клейна – Гордона с источником в статическом случае:

$$(\Delta-m^2)\,f\,(x)=g\,(x),\quad x\in R^3,$$

можно переписать в интегральной форме:

$$f(x) = \int G(|x-y|)\, g(y)\, d^3 y$$

с некоторым ядром $\hat{G}$. Как изменяется норма $\|\hat{G}\|$ в $L_2(R^3)$ с ростом m?

1) Растет, 2) Убывает, 3) Не является монотонной функцией, 4) Постоянна.

4.Рассмотрим оператор

$$\hat{A}x(t) = \int_0^t x(s)\, ds, \quad x(t) \in C[0,1].$$

К какой области спектра относится точка $\lambda = 0$?

1) Резольвентное множество, 2) Непрерывный спектр, 3) Точечный спектр, 4) Остаточный спектр.

5. Рассмотрим оператор

$$\hat{A}x(t) = \int_0^t x(s)\, ds, \quad x(t) \in C[0,1].$$

К какой области спектра относится точка $\lambda \in C \setminus \{0\}$?

1) Резольвентное множество, 2) Непрерывный спектр, 3) Точечный спектр, 4) Остаточный спектр.

6. Рассмотрим оператор

$$\hat{A}x(t) = \int_0^t x(s)\, ds, \quad x(t) \in L_2[0,1].$$

К какой области спектра относится точка $\lambda = 0$?

1) Резольвентное множество, 2) Непрерывный спектр, 3) Точечный спектр, 4) Остаточный спектр.

7. Рассмотрим оператор

$$\hat{A}x(t) = \int_0^t x(s)\, ds, \quad x(t) \in L_2[0,1].$$

К какой области спектра относится точка $\lambda \in C \setminus \{0\}$?

1) Резольвентное множество, 2) Непрерывный спектр, 3) Точечный спектр, 4) Остаточный спектр.

8.Пусть задан оператор

$$\hat{A}x(t) = t\, x(t), \quad x(t) \in L_2[0,1].$$

К какой области спектра относится точка $\lambda \in [0,1]$?

1) Резольвентное множество, 2) Непрерывный спектр, 3) Точечный спектр, 4) Остаточный спектр.

9. Пусть задан оператор

$$\hat{A}x(t) = t\, x(t), \quad x(t) \in L_2[0,1].$$

К какой области спектра относится точка $\lambda \in C \setminus [0,1]$?

1) Резольвентное множество, 2) Непрерывный спектр, 3) Точечный спектр, 4) Остаточный спектр.

10.Пусть в пространстве последовательностей $\{x_n\} \in l_2$ задан оператор

$$\hat{A}(x_1, x_2, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots).$$

К какой области спектра относится точка $\lambda = 0$?

1) Резольвентное множество, 2) Непрерывный спектр, 3) Точечный спектр, 4) Остаточный спектр.

Примерные варианты контрольных работ

1. Восстановить свойства скалярного произведения в гильбертовом пространстве с помощью равенства параллелограмма.
2. Оценить норму оператора Грина для уравнения Клейна-Гордона в R^n, $n = 1, 2, 3.$
3. Привести примеры, показывающие нерефлексивность пространств Лебега L_1, L_∞.
4. Описать спектр линейных операторов типа

$$Ax(t) = \int_0^t f(t-s)x(s)\,ds$$

для случая ограниченного ядра, если считать, что а) $x(t) \in C[0,1]$, б) $x(t) \in L_2[0,1]$

5. Построить минимизирующую последовательность для энергии ангармонического осциллятора.
6. Найти индексы дефекта и построить самосопряженное расширение для оператора $A = -d^2/dt^2$ в пространстве $L_2(0,\infty)$.

Перечень вопросов итоговой аттестации по курсу «Математические методы в физике»

1. Метрические пространства. Нормированные пространства.
2. Плотные множества. Гильбертово пространство. Неравенство Коши–Шварца–Буняковского. Теорема о проекции.
3. Ортонормированный базис. Неравенство Бесселя. Полнота набора векторов.
4. Интеграл Лебега. Измеримые функции. Теорема Лебега о мажоранте. Лемма Фату.
5. Пространства Лебега. Неравенства Гельдера и Минковского.
6. Линейные операторы. Норма оператора. Принцип расширения операторов.
7. Теорема Фубини и неравенства Юнга. Полнота пространства линейных ограниченных операторов.
8. Линейные функционалы. Теорема Рисса–Фреше. Рефлексивность.
9. Принцип равномерной ограниченности. Теорема Банаха об обратном операторе. Ряд Неймана.
10. Спектр оператора. Резольвентное множество. Спектральный радиус оператора.
11. Замкнутые операторы. Теорема о замкнутом графике.
12. Теорема Хана–Банаха. Свойства слабых пределов и принцип дуальности. Сопряженный оператор.
13. Компактные выпуклые множества. Теоремы Банаха–Алаоглу и Эберлейна–Шмульяна.
14. Теорема Мазура о превращении слабой сходимости в сильную. Приложения к вариационному исчислению. Полунепрерывность снизу.
15. Сопряженные, симметрические и самосопряженные операторы.
16. Индексы дефекта симметрических операторов. Самосопряженные расширения симметрических операторов.
17. Компактные множества функций. Теорема Арцела–Асколи. Компактные операторы. Операторы Гильберта–Шмидта. Ядерные операторы.
18. Пространства Фреше. Обобщенные функции. Пространства Соболева и теоремы вложения.

Руководитель направления 03.04.02

Директор института физических исследований
и технологий, д.ф.-м.н., профессор О.Т. Лоза