

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Российский университет дружбы народов»

Факультет физико-математических и естественных наук

Рекомендовано МССН

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ**

Рекомендуется для направления (ий) подготовки (специальности (ей))

01.04.01 «Математика»

специализация «Функциональные методы в дифференциальных уравнениях и междисциплинарных исследованиях (англ.)»

Квалификация (степень) выпускника

**магистр**

(указывается квалификация (степень) выпускника в соответствии с ОС ВО РУДН)

**1. Цели и задачи дисциплины:** Курс предназначен для студентов, обучающихся по направлению «Математика», и исходит из концепции экономического прогнозирования на основе сценарных численных экспериментов с математическими моделями экономических систем, построенных на принципах системного анализа развивающейся экономики.

Основной целью курса является дать представление слушателям о современном состоянии теории и практики социально-экономического прогнозирования, основанного на использовании математических моделей экономических систем.

## 2. Место дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Математические модели в экономике» относится к вариативной компоненте учебного плана (модуль по выбору 1). В таблице № 1 приведены предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций дисциплины в соответствии с матрицей компетенций ОП ВО.

### Предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций

№ п/п	Шифр и наименование компетенции	Предшествующие дисциплины	Последующие дисциплины (группы дисциплин)
Универсальные компетенции			
1.	УК-5. Способен анализировать и учитывать разнообразие культур в процессе межкультурного взаимодействия	-	Государственный экзамен

## 3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций: УК-5

УК-5. Способен анализировать и учитывать разнообразие культур в процессе межкультурного взаимодействия.

В результате изучения дисциплины студент должен:

**Знать:** математическое и алгоритмическое моделирование при анализе экономических и социальных процессов

**Уметь:** решать задачи бизнеса, финансовой и актуарной математики

**Владеть:** основными понятиями экономического прогнозирования.

## 4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов	Модули			
		1	2	3	
<b>Аудиторные занятия (всего)</b>				63	
В том числе:					

Лекции				27	
Практические занятия (ПЗ)				36	
Семинары (С)					
Лабораторные работы (ЛР)					
<b>Самостоятельная работа (всего)</b>				<b>81</b>	
В том числе:					
Курсовой проект (работа)					
Расчетно-графические работы					
Реферат					
<i>Другие виды самостоятельной работы</i>				81	
Вид промежуточной аттестации (экзамен)					
Общая трудоемкость	час			144	
	зач. ед.			4	

## 5. Содержание дисциплины

### 5.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела (темы)
1.	Модель межотраслевого баланса Леонтьева	Модель межотраслевого баланса Леонтьева. Постановка задачи о продуктивности производства
2.	Продуктивные матрицы	Продуктивные матрицы. Теорема о разложении в ряд резольвенты продуктивной матрицы
3.	Теорема Фробениуса-Перрона	Теорема Фробениуса – Перрона. Свойства числа Фробениуса – Перрона и их экономическая интерпретация. Неразложимые матрицы и их свойства. Теорема об устойчивых матрицах.
4.	Теоремы о неотрицательных матрицах	Идемпотентные аналоги теорем о неотрицательных матрицах. Задача о планировании крупных научно-исследовательских проектов. Задача о поиске арбитражных цепочек на валютных рынках. Теорема Африата-Вермана
5.	Двойственность	Задачи линейного программирования со смешанными ограничениями. Двойственность.
6.	Экономическая интерпретация двойственности	Экономическая интерпретация двойственности: трудовая теория стоимости и ее критика
7.	Декомпозиция задачи распределения ресурсов	Декомпозиция задачи распределения ресурсов с помощью множителей Лагранжа и ее экономическая интерпретация. Оценка эффективности новых технологий.
8.	Экономическая интерпретация принципа максимума	Экономическая интерпретация принципа максимума в моделях оптимального экономического роста
9.	Понятие магистрали	Понятие магистрали в моделях экономического роста. Теорема Моришимы.

10.	Модель Кокса-Росса-Рубинштейна.	Модель Кокса-Росса-Рубинштейна.
11.	Игра в нормальной форме	Игра в нормальной форме. Понятия равновесия по Нэшу и оптимальности по Парето. Примеры игр: «дилемма заключенного», «семейный спор», «чет-нечет». Равновесие по Штаккельбергу. Смешанные стратегии. Теорема фон Неймана о равновесии в смешанных стратегиях в матричной игре.
12.	Теорема Нэша	Теорема Нэша. Модель олигополии Курно.
13.	Модель Эрроу-Дебре	Модель Эрроу-Дебре. Понятие конкурентного равновесия. Закон Вальраса. Первая теорема теории благосостояния.

## 5.2. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практ. зан.	Лаб. зан.	СРС	Всего час.
1.	Модель межотраслевого баланса Леонтьева	2	5		6	13
2.	Продуктивные матрицы	2	2		6	10
3.	Теорема Фробениуса-Перрона	2	2		6	10
4.	Теоремы о неотрицательных матрицах	2	2		6	10
5.	Двойственность	2	2		6	10
6.	Экономическая интерпретация двойственности	2	3		6	11
7.	Декомпозиция задачи распределения ресурсов	2	2		7	11
8.	Экономическая интерпретация принципа максимума	2	2		6	10
9.	Понятие магистрали	2	2		7	11
10.	Модель Кокса-Росса-Рубинштейна.	2	2		7	11
11.	Игра в нормальной форме	2	2		6	10
12.	Теорема Нэша	2	4		6	12
13.	Модель Эрроу-Дебре	2	4		6	12
14.	Итоговый контроль	1	2			3

## 6. Лабораторный практикум не предусмотрен

## 7. Практические занятия (семинары)

№ п/п	Темы практического занятия	Трудо-емкость (час.)
1.	Модель межотраслевого баланса Леонтьева	5

2.	Продуктивные матрицы	2
3.	Теорема Фробениуса-Перрона	2
4.	Теоремы о неотрицательных матрицах	2
5.	Двойственность	2
6.	Экономическая интерпретация двойственности	3
7.	Декомпозиция задачи распределения ресурсов	2
8.	Экономическая интерпретация принципа максимума	2
9.	Понятие магистрали	2
10.	Модель Кокса-Росса-Рубинштейна.	2
11.	Игра в нормальной форме	2
12.	Теорема Нэша	4
13.	Модель Эрроу-Дебре	4

**8. Курсовые работы** не предусмотрены.

**9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:**

*Основная литература*

1. Ашманов С. А. Введение в математическую экономику. - М., Наука, 1984.
2. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. - М., Мир, 1972.

*Дополнительная литература*

1. Обен Ж-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. - М., Мир, 1988.
2. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. - М., Мир, 1985.
3. Экланд И. Элементы математической экономики. - М., Мир, 1983.
- 4.

**10. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**

учебная аудитория для проведения семинарских занятий, большая аудитория (лекционный зал) для чтения лекций, ноутбук - 1 шт., проектор - 1 шт., экран - 1 шт., ксерокс - 1 шт., принтер - 1 шт., сканер - 1 шт.

**11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:**

Проводятся по две контрольные работы и одному коллоквиуму. Студентам, набравшим низкие баллы на коллоквиумах и контрольных работах, в обязательном порядке предписывается посещать дополнительные консультации лектора.

Для сильных студентов, желающих рассматривать геометрию как основу дальнейшей научной деятельности, функционирует кружок под руководством лектора.

### 11.1 Структура практических занятий

На практических занятиях решаются задачи и упражнения по текущим темам. В конце семестра студентам предлагается домашнее задание, состоящее из трех задач.

Результаты работы на практических (интерактивных) занятиях и домашнего задания входят в балльно-рейтинговую систему оценки знаний студентов.

Методически курс построен так, чтобы все наиболее сложные задачи рассматривались в простейших случаях, что облегчает понимание их студентами.

### 11.2 Самостоятельная работа студента

На практических занятиях у доски задачи и упражнения решаются в основном кем-то из вызванных студентов. При этом все присутствующие студенты должны контролировать и записывать решение на доске, а также устно отвечать на возникающие при решении вопросы.

В рамках курса запланировано домашнее задание (максимально за выполнение данной работы можно получить 25 баллов).

**Разработчик:**

д.ф.-м.н., проф.,  
проф. Математического института

им. С.М. Никольского



А.А. Шананин

Директор Математического института  
им. С.М. Никольского,  
д.ф.-м.н., профессор



А.Л. Скубачевский

**Математический институт им. С.М. Никольского**  
**(наименование кафедры)**

УТВЕРЖДЕН

на заседании института

«31»\_\_08\_\_2020\_\_ г., протокол №\_1\_\_

Директор института

(подпись)

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**  
**ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

**Математические модели в экономике**  
(наименование дисциплины)

*01.04.01 Математика*

(код и наименование направления подготовки)

Неклассические задачи анализа и дифференциальных уравнений, математическое моделирование  
и машинное обучение»

(специализация)

магистр

Квалификация (степень) выпускника

Код контролируемой компетенции или ее части	Контролируемый раздел дисциплины	Контролируемая тема дисциплины	Наименование оценочного средства														Баллы темы	Баллы раздела
			Текущий контроль											Промежуточная аттестация				
			Опрос	Тест	Коллоквиум	Контрольная работа	Выполнение ЛР	Выполнение КР/КП	Выполнение ДЗ	Реферат	Выполнение РГР	Работа на инт. зан.	...	...	Экзамен/Зачет	...	...	
УК-5	Математические модели в экономике	Простейшая модель экономики						5			5			10			20	100
		Схематическая модель отрасли экономики						5			5			10			20	
		Проблема идентификации внешних параметров модели						5			5			10			20	
		Методы прогнозирования спроса на инновации						5			5			10			20	
		Параллельные вычисления						5			5			10			20	
		<b>ИТОГО:</b>						<b>25</b>			<b>25</b>			<b>50</b>			<b>100</b>	100



## Приложение 3

### Математические модели в экономике

(наименование дисциплины)

### 1. ВАРИАНТЫ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ

#### *Вариант 1*

1. Чему равна цена в модели Курно с двумя производителями, имеющими

одинаковые функции издержек производства  $\mathbf{c}_1(\mathbf{X}) = \mathbf{c}_2(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^2$ ,

и потребителем с обратными функциями спроса  $\mathbf{P}(\mathbf{X}) = 1 - \mathbf{X}^2$ .

2. Найти равновесия по Нэшу и оптимальные по Парето исходы в биматричной игре двух лиц

а)  $\begin{pmatrix} (2,1) & (0,1) \\ (1,0) & (1,1) \end{pmatrix}$

б)  $\begin{pmatrix} (2,0) & (0,1) \\ (1,0) & (1,1) \end{pmatrix}$

в)  $\begin{pmatrix} (2,-1) & (0,1) \\ (4,0) & (1,-1) \end{pmatrix}$

г)  $\begin{pmatrix} (-2,0) & (2,0) \\ (3,1) & (1,1) \end{pmatrix}$

д)  $\begin{pmatrix} (5,0) & (-1,1) \\ (1,2) & (1,-1) \end{pmatrix}$

е)  $\begin{pmatrix} (2,4) & (-2,0) \\ (0,1) & (1,0) \end{pmatrix}$

3. Найти равновесие по Нэшу и оптимальные по Парето исходы в антагонистической игре двух лиц

а)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  б)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  в)  $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  г)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$д) A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad е) A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

### Вариант 2

1. Является ли неотрицательная матрица

$$\begin{pmatrix} 0, & 1.1 \\ 0.9 & 0 \end{pmatrix}$$

а) продуктивной, б) неразложимой, в) устойчивой.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A^t = 0$$

2. Пусть  $A$  неотрицательная квадратная матрица. Доказать, что если  $\lim_{t \rightarrow \infty} A^t = 0$ ,

то ряд  $\sum_{t=0}^{\infty} A^t$  сходится.

3. Пусть  $A$  неразложимая матрица,  $A \geq B \geq 0$ ,  $A \neq B$ . Доказать, что  $\lambda(A) > \lambda(B)$ . (Здесь  $\lambda(A)$  и  $\lambda(B)$  числа Фробениуса-Перрона матриц  $A$  и  $B$  соответственно).

## 2. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ (для самоконтроля)

1. Какие величины модели называют эндогенными?

- а) неизвестные, определяемы в процессе решения задачи прогнозирования;
- б) известные, рассчитываемые вне модели;
- в) параметры модели, заданные из внешних соображений;
- г) макропоказатели модели, заданные статистическими данными.

2. Какие величины модели называют экзогенными?

- а) неизвестные, определяемы в процессе решения задачи прогнозирования;

**б) известные, рассчитываемые вне модели;**

в) параметры модели, заданные из внешних соображений;

г) макропоказатели рассчитываемые по модели.

3. Производственная функция записывается в виде  $Y=F(x_1, x_2)$ :

а) где  $Y$  – объем производственного фактора,  $x_1$ - объем выпуска продукции,  $x_2$  – объем используемых трудовых ресурсов;

б) где  $Y$  – объем основных фондов,  $x_1$ - объем трудовых ресурсов,  $x_2$  – объем выпуска продукции;

**в) где  $Y$  – стоимость объема товарной продукции,  $x_1$ - стоимость объема используемых производственных фондов,  $x_2$  – объем используемых трудовых ресурсов.**

4. Производственная функция Кобба-Дугласа имеет вид:

а)  $Y = ax_1 + (1-a)x_2$

б)  $Y = (ax_1^{-b} + (1-a)x_2^{-b})^{-1/b}$

в)  $Y = x_1^a / x_2^{(1-a)}$

г)  $Y = x_1^a x_2^{(1-a)}$

5. Производственная функция с постоянной эластичностью замещения имеет вид::

а)  $Y = ax_1 + (1-a)x_2$

**б)  $Y = (ax_1^{-b} + (1-a)x_2^{-b})^{-1/b}$**

в)  $Y = x_1^a / x_2^{(1-a)}$

г)  $Y = x_1^a x_2^{(1-a)}$

6. Критерием Дарбина-Уотсона (DW) пользуются, оценивая:

**а) статистическую независимость остатков,**

б) значимость уравнения регрессии в целом;

в) значимости коэффициента регрессии.

7. Коэффициент корреляции ( $r_{yx}$ ) находится в интервале:

а)  $0 \leq r_{yx} \leq 1$ ;

**б)  $-1 \leq r_{yx} \leq 1$ ;**

в)  $-2 \leq r_{yx} \leq 1$ .

8. Индекс Тейла ( $T_{yx}$ ) находится в интервале:

**а)  $0 \leq T_{yx} \leq 1$ ;**

б)  $-1 \leq T_{yx} \leq 1$ ;

в)  $-2 \leq T_{yx} \leq 1$ .

9. Идентификация модели это:

а) привязка модели к управляющим переменным

**б) определение параметров модели**

10. Экономическое прогнозирование осуществляют с помощью:

а) гадания на кофейной гуще

б) опроса экспертов в экономике

**в) построения математической модели экономики**

г) дискуссии

11. Коэффициент детерминации  $R_2$  характеризует:

а) параметры линейной регрессии;

**б) долю дисперсии результативного показателя, объясняемую регрессией, в общей дисперсии результативного показателя;**

в) значимость модели в целом.

12. Параллельные вычисления на кластерных системах дают существенное ускорение:

а) при больших объемах передачи сообщений между узлами вычислительной системы

**б) при малых объемах передачи сообщений между узлами вычислительной системы**

в) при наличии тупиковых ситуаций в алгоритме расчета

13. Имитационные игры применяют в экономическом прогнозировании:

**а) развития взаимодействующих экономических систем**

б) объема выпуска продукции по уравнению регрессии

в) динамики демографических процессов

**г) экологических последствий крупномасштабных экономических преобразований**

14. Матрица прямых затрат А характеризует в экономике:

а) динамику финансовых процессов;

**б) динамику технологических процессов;**

в) воспроизводственные процессы.

15. Модель Хаутеккера-Йохансена:

а) определяет производственную функцию Кобба-Дугласа

б) определяет производственную функцию с постоянной эластичностью замещения

**в) определяет производственную функцию, представимую распределением производственных мощностей по технологиям**

г) определяет степенную производственную функцию, представимую распределением производственных фондов типа Кобба-Дугласа

### 3. ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО КУРСУ

#### *I. Модели межотраслевого баланса и теория неотрицательных матриц.*

1. Модель межотраслевого баланса В.В.Леонтьева. Продуктивные матрицы. Критерии продуктивности.
2. Неотрицательная обратимость матрицы  $(xE-A)$  и ее связь с продуктивностью. Теорема о разложении резольвенты.
3. Теорема Фробениуса-Перрона. Оценка темпов сбалансированного экономического роста. Свойства числа Фробениуса-Перрона.
4. Неразложимые матрицы. Свойства числа Фробениуса-Перрона неразложимой матрицы.
5. Теорема об устойчивости примитивных матриц.
6. Идемпотентные аналоги теорем о неотрицательных матрицах. Балансовая модель Конторовича-Макарова. Задача об арбитражных цепочках на валютных рынках. Теорема Аффриата-Верриана.

#### *II. Теория двойственности и ее экономическая интерпретация.*

1. Выпуклые множества и их свойства. Проекция точки на выпуклое множество. Теорема отделимости точки от замкнутого выпуклого множества. Леммы Фаркаша (однородный и аффинный варианты, о несовместности). Теорема существования решения задачи линейного программирования. Теорема двойственности для задач линейного программирования со смешанными ограничениями. Условия дополняющей нежесткости в задачах линейного программирования (необходимые и достаточные условия оптимальности).
2. Экономическая интерпретация двойственности. Трудовая теория стоимости и ее критика.
3. Декомпозиция в задаче об оптимальном распределении ресурса между регионами и ее экономическая интерпретация.
4. Экономическая интерпретация принципа максимума в линейной динамической модели оптимального экономического роста.
5. Оценка эффективности новых технологий.
6. Теорема Моришимы о магистрали. Экономическая интерпретация вектора Фробениуса - Перрона.
7. Модель Кокса-Росса-Рубинштейна. Формула Кокса-Росса-Рубинштейна для оценки стоимости опциона как следствие теоремы двойственности.

*III. Элементы теории игр.*

1. Игры в нормальной форме. Понятия оптимальности по Парето, равновесия по Нэшу и Штакельбергу. Примеры (игры «дилемма заключенного», «семейный спор», «чет-нечет»).
2. Смешанные расширения матричных игр. Теорема фон Неймана.