Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов»

Факультет физико-математических и естественных наук

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Рекомендуется для направления подготовки/специальности

01.04.01 Математика

Направленность программы (профиль)

Неклассические задачи анализа и дифференциальных уравнений, математическое моделирование и машинное обучение

(наименование образовательной программы в соответствии с направленностью (профилем))

1. Цели и задачи дисциплины: Основной целью курса является освоение студентами современной теории Фурье-анализа и теории мультипликаторов Фурье и ее приложений к некоторым задачам современного математического анализа, теории приближений и теории функциональных пространств. Обучение учащихся различным современным методам теории пространств дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Освоение соответствующего математического аппарата.

2. Место дисциплины в структуре ООП:

Блок 1, вариативная часть.

Необходимы знания по линейной алгебре, математическому анализу, функциональному анализу. Изложенные в рамках дисциплины знания используются в дисциплине «Нелинейный анализ и теория аппроксимации».

Предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций

п/п	Шифр и наименование компетенции	Предшествующие дисциплины	Последующие дисциплины (группы дисциплин)
	Универсальные компетенции		
	УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	-	Нелинейные эволюционные уравнения, Государственный экзамен
	Профессиональные компетенции		
	ПК-40.011.01 Проведение работ по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований	-	Дополнительные главы математического моделирования, Государственный экзамен
	ПК-1. Способностью проводить научные исследования и получать новые научные и прикладные результаты самостоятельно и в составе научного	-	Неевклидовы геометрии и их приложения, Введение в маломерную топологию, Государственный экзамен

	коллектива		

3. Требования к результатам освоения дисциплины:

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать: основные свойства Фурье-мультипликаторов, определения и основные свойства пространств функций с ограниченным спектром, пространств Соболева и Никольского-Бесова, эквивалентные нормы в них, а также их взаимосвязи и теоремы вложения и приложения в теории уравнений в частных производных.
Уметь: оценивать нормы Фурье-мультипликаторов, оценивать нормы производных и следов для функций с ограниченным спектром, корректно определять следы функций на многообразиях меньшей размерности, точно описывать пространства следов для функций из пространств Соболева и Никольского-Бесова.
Владеть*:* различными современными методами описания дифференциальных свойств функций, способами исследования задач об описании следов и построении продолжений, современными методами линейного и нелинейного гармонического анализа.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 7 зачетных единиц.

	Вид учебной работы	**Всего часов**	**Модули**			
			1	**2**		
.	**Аудиторные занятия (ак. часов)**	68	36	32		
	В том числе:					
.1.	Лекции	34	18	16		
.2.	Прочие занятия	34	18	16		
	В том числе:					
.2.1.	*Практические занятия (ПЗ)*					
.2.2.	*Семинары (С)*	34	18	16		
.2.3.	*Лабораторные работы (ЛР)*					
	Из них в интерактивной форме (ИФ):					
.	**Самостоятельная работа студентов (ак. часов)**	121	81	40		
	В том числе:					
.1.	Курсовой проект (работа)					
.2.	Расчетно-графические работы					
.3.	Реферат					
.4.	Подготовка и прохождение промежуточной аттестации	6	3	3		
	Домашние задания	20	10	10		

	Другие виды самостоятельной работы	95	9	6		
.	**Контроль**	63	27	36		
.	**Общая трудоемкость (ак. часов)**	252	144	108		
	Общая трудоемкость (зачетных единиц)	7	4	3		

5. Содержание дисциплины

5.1. Содержание разделов дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
.	Преобразования Фурье основных и обобщенных функций	Пространства основных и обобщенных функций Л. Шварца. Преобразование Фурье в этих пространствах, его связь со сдвигом, дифференцированием и сверткой. Обобщенное неравенство Минковского для свертки.
.	Преобразование Фурье функций из L_1	Непрерывность и ограниченность преобразования Фурье. Поведение на бесконечности. Связь сильного и слабого преобразования Фурье. Алгебра Винера преобразований Фурье интегрируемых функций.
.	Преобразование Фурье функций из L_2. Теория Планшереля.	Подход к определению сильного преобразования Фурье функций из L_2. Связь сильного и слабого преобразования Фурье. Теорема Планшереля и равенство Парсеваля.
.	Преобразование Фурье функций из L_p.	Понятие об интерполяции. Интерполяционная теорема Рисса- Торина. Теорема Хаусдорфа- Юнга.
.	Определение и основные свойства Фурье – мультипликаторов	Пространство Фурье- мультипликаторов в L_p. Достаточные условия Фурье- мультипликаторов в L_p. Формулировка и доказательство основной теоремы о мультипликаторах интеграла Фурье.
.	Теоремы Лизоркина и Михлина – Хермандера о мультипликаторах интеграла Фурье	Формулировки и сопоставление теорем Лизоркина и Михлина – Хермандера о мультипликаторах интеграла Фурье. Применение теорем о мультипликаторах интеграла Фурье для оценки норм смешанных производных через норму оператора Лапласа.
.	Некоторые применения теорем о мультипликаторах интеграла Фурье	Теорема Рисса об ограниченности сумм Дирихле. Характеристические функции полосы, прямоугольного параллелепипеда и выпуклого многогранника как о мультипликаторы интеграла Фурье. Результат Ч. Фефферманa по проблеме Фурье- мультипликаторов.
.	Подпространство функций с ограниченным спектром	Интегральное представление функции с ограниченным спектром. Неравенство Бернштейна для функции с ограниченным спектром. Неравенство разных метрик Никольского для функции с ограниченным спектром. Следы функций и неравенство разных измерений Никольского для функции с ограниченным спектром.

.	Пространство Соболева	Усреднение функций по Соболеву, его связь с обобщенным дифференцированием. Совпадение слабых и сильных обобщенных производных по Соболеву. Формула Лейбница для обобщенных производных. Замкнутость обобщенного дифференцирования. Пространство Соболева, его полнота.
0.	Теоремы вложения для пространств Соболева	Интегральное представление Соболева и следствия из него. Оценки промежуточных производных для функций из пространств Соболева. Вложение разных метрик для пространств Соболева.
1.	Свойства модулей непрерывности	Свойства конечных разностей и модулей непрерывности как нелинейных дробных характеристик гладкости функций. Свойства монотонности и оценки модулей непрерывности. Теорема Маршо о связи модулей непрерывности различных порядков.
2.	Общие свойства пространств Никольского-Бесова	Определения пространств Никольского- Бесова, их общие свойства. Эквивалентные нормы в пространствах Никольского- Бесова в терминах модулей непрерывности, в интегральной и в дискретной форме. Полнота пространств Никольского- Бесова
3.	Вложение пространств Никольского-Бесова без изменения метрики	Основная лемма об оценке дискретных сумм. Теорема вложения по показателю гладкости и по второму индексу. Расширяющаяся шкала пространств Никольского- Бесова. Оценка модуля непрерывности функции степенного типа и критерий ее принадлежности пространствам Соболева и Никольского-Бесова.
4.	Взаимосвязь обобщенных производных и разностей	Операторы усреднения, свойства их ядер. Интегральные представления разностей через производные. Теоремы о свойствах операторов усреднения. Разностные критерии принадлежности обобщенных производных по направлениям к L_p.
5.	Разностная характеризация пространств Соболева	Эквивалентные нормы и разностная характеризация пространств Соболева. Взаимные вложения пространств Соболева и Никольского- Бесова.
6.	Включение производных в нормы пространств Никольского-Бесова	Эквивалентные нормы в пространствах Никольского- Бесова с использованием обобщенных производных и модулей непрерывности.
7.	Вложение разных метрик для пространств Никольского-Бесова.	Эквивалентные нормы в пространствах Никольского- Бесова в терминах разложений в ряды по функциям с ограниченным спектром. Формулировка и доказательство теоремы вложения разных метрик. Неулучшаемость теоремы вложения.
8.	Описание следов на подпространстве меньшей размерности	Понятие следа на подпространстве меньшей размерности. Теорема о точном описании пространства следов для пространств Никольского- Бесова. Предельный случай теоремы о следах. Отсутствие линейных операторов продолжения в предельном случае.

5.2. Разделы дисциплин и виды занятий

п/п	Наименование раздела	Лекц.	Практические занятия и лабораторные работы			СРС	Всего
			ПЗ/С	контроль	из них в ИФ		
1.	Преобразования Фурье основных и обобщенных функций	1	1	2		10	14
2.	Преобразование Фурье функций из L_1	1	1	2		8	12
3.	Преобразование Фурье функций из L_2. Теория Планшереля.	2	2	4		6	14
4.	Преобразование Фурье функций из L_p.	1	1	2		8	12
5.	Определение и основные свойства Фурье-мультипликаторов	3	3	4		6	16
6.	Теоремы Лизоркина и Михлина – Хермандера о мультипликаторах интеграла Фурье	1	1	2		8	12
7.	Некоторые применения теорем о мультипликаторах интеграла Фурье	2	2	4		6	14
8.	Подпространство функций с ограниченным спектром	3	3	4		6	16
9.	Пространство Соболева	1	1	2		8	12
10.	Теоремы вложения для пространств Соболева	2	2	4		6	14
11.	Свойства модулей непрерывности	2	2	4		6	14
12.	Общие свойства пространств Никольского-Бесова	3	3	5		5	16
13.	Вложение пространств Никольского- Бесова без изменения метрики	1	1	2		8	12
14.	Взаимосвязь обобщенных производных и разностей	3	3	6		4	16
15.	Разностная характеризация пространств Соболева	1	1	2		8	12
16.	Включение производных в нормы пространств Никольского-Бесова	2	2	4		7	15
17.	Вложение разных метрик для пространств Никольского-Бесова.	3	3	6		5	17
18.	Описание следов на подпространстве меньшей размерности	2	2	4		6	14
	ИТОГО	34	34	63		121	252

6. Лабораторный практикум: Не предусмотрен.

7. Практические занятия (семинары).

№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудо-емкость (час.)
19.	Преобразования Фурье основных и обобщенных функций	1
20.	Преобразование Фурье функций из L_1	1
21.	Преобразование Фурье функций из L_2. Теория Планшереля.	2
22.	Преобразование Фурье функций из L_p.	1
23.	Определение и основные свойства Фурье-мультипликаторов	3
24.	Теоремы Лизоркина и Михлина – Хермандера о мультипликаторах интеграла Фурье	1
25.	Некоторые применения теорем о мультипликаторах интеграла Фурье	2
26.	Подпространство функций с ограниченным спектром	3
27.	Пространство Соболева	1
28.	Теоремы вложения для пространств Соболева	2
29.	Свойства модулей непрерывности	2
30.	Общие свойства пространств Никольского-Бесова	3
31.	Вложение пространств Никольского- Бесова без изменения метрики	1
32.	Взаимосвязь обобщенных производных и разностей	3
33.	Разностная характеризация пространств Соболева	1
34.	Включение производных в нормы пространств Никольского-	2

	Бесова	
35.	Вложение разных метрик для пространств Никольского-Бесова.	3
36.	Описание следов на подпространстве меньшей размерности	2
	ИТОГО	34

8. Примерная тематика курсовых проектов (работ): Не предусмотрены.

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

а) основная литература:

1. С. М. Никольский. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, все годы издания.
2. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, все годы издания.
3. Л. Хермандер. Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига. М.: ИЛ, все годы издания.
4. В. И. Буренков. Функциональные пространства. Пространства Соболева. М.: РУДН, все годы издания.

б) дополнительная литература:

1. В. Г. Мазья. Пространства Соболева. ЛГУ, все годы издания.
2. Г. Трибель. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, все годы издания.

10. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

учебная аудитория для проведения семинарских занятий, большая аудитория (лекционный зал) для чтения лекций, ноутбук - 1шт., проектор - 1шт., экран - 1шт., ксерокс - 1 шт., принтер - 1шт., сканер - 1 шт.

11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:

Соответствие систем оценок (используемых ранее оценок итоговой академической успеваемости, оценок ECTS и балльно-рейтинговой системы (БРС) оценок текущей успеваемости) (В соответствии с Приказом Ректора №996 от 27.12.2006 г.):

Баллы БРС	Традиционные оценки в РФ	Баллы для перевода оценок	Оценки	Оценки ECTS
86 – 100	5	95 - 100	5+	A
		86 - 94	5	B
69 – 85	4	69 - 85	4	C
51 – 68	3	61 - 68	3+	D
		51 - 60	3	E
0 – 50	2	31 - 50	2+	FX
		0 - 30	2	F

1. Студенты обязаны сдавать все задания в сроки, установленные преподавателем.

2. Студент допускается к итоговому контролю с любым количеством баллов, набранным в семестре, но при условии, что у него имеется теоретическая возможность получить не менее 31 балла.
3. Если в итоге за модуль студент получил менее 31 балла, то ему выставляется оценка F и он должен повторить дисциплину в установленном порядке. Если же в итоге студент получил не менее 31 балла, т.е. F_x, то ему разрешается добор необходимого (до 51) количества баллов путём повторного одноразового выполнения предусмотренных итоговых контрольных мероприятий; при этом аннулируются, по усмотрению преподавателя, соответствующие предыдущие результаты. Ликвидация задолженностей проводится по согласованию с деканатом.
4. Итоговая контрольная работа (итоговый контроль) содержит от 3 до 6 вопросов (или заданий). На подготовку к ответу отводится 1 час, после чего производится устный опрос студента. Оценивается работа из 60 баллов независимо от оценки, полученной в модуле.

Разработчик:
Профессор
Математического института
им. С.М. Никольского ______ М.Л.Гольдман

Директор
Математического института ______
им. С.М. Никольского А.Л. Скубачевский

Математический институт им. С.М. Никольского
(наименование кафедры)

УТВЕРЖДЕН
на заседании института
«___»__________20__ г., протокол №___
Директор Математического института
__________________А.Л. Скубачевский
(подпись)

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

Современные проблемы математики и прикладной математики
(наименование дисциплины)

01.04.01 «Математика»

магистр
Квалификация (степень) выпускник

Паспорт фонда оценочных средств

Раздел	Тема	Формы контроля уровня освоения ООП														
		Опрос	Тест	Коллоквиум	Реферат	Выполнение ЛР	Выполнение ДЗ	Выполнение РГР	Выполнение КР	Выполнение КП	Работа на занятии	Работа на Инт. Занятии	Экзамен	Прочие формы контроля	Баллы темы	Баллы раздела
Современные проблемы математики и прикладной математики	Преобразования Фурье основных и обобщенных функций															00
	Преобразование Фурье функций из L_1															
	Преобразование Фурье функций из L_2. Теория Планшереля.															
	Преобразование Фурье функций из L_p.															
	Определение и основные свойства Фурье-мультипликаторов															
	Теоремы Лизоркина и Михлина – Хермандера о мультипликаторах интеграла Фурье															
	Некоторые применения теорем о мультипликаторах интеграла Фурье															

	Подпространство функций с ограниченным спектром															
	Пространство Соболева															
	Теоремы вложения для пространств Соболева															
	Свойства модулей непрерывности															
	Общие свойства пространств Никольского-Бесова															
	Вложение пространств Никольского- Бесова без изменения метрики															
	Взаимосвязь обобщенных производных и разностей															
	Разностная характеризация пространств Соболева															
	Включение производных в нормы пространств Никольского-Бесова															
	Вложение разных метрик для пространств Никольского-Бесова.															
	Описание следов на подпространстве меньшей размерности															

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧОЙ АТТЕСТАЦИИ

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО КУРСУ

Раздел 1. Функции с ограниченным носителем спектра

2.1 Общие свойства пространства функций с ограниченным носителем спектра

2.2. Интегральное представление функции с ограниченным носителем спектра.

2.3. Неравенство Бернштейна для функции с ограниченным с носителем спектра.

2.4. Неравенство Юнга для сверток.

2.5. Неравенство разных метрик Никольского для функции с ограниченным спектром.

2.6. Следы функций и неравенство разных измерений Никольского для функции с ограниченным спектром.

2.7. Связь преобразований Фурье функции и ее следа на подпространстве меньшей размерности. Следствие для функций с ограниченным спектром.

Раздел 2. Приближения и модули непрерывности

2.8. Понятие наилучшего приближения с помощью функций с ограниченным спектром и его общие свойства.

2.9. Реализация наилучшего приближения с помощью оператора Дирихле при $p = 2.$

2.10. Реализация приближения порядка наилучшего с помощью оператора Дирихле при $1 < p < \infty.$

2.11. Реализация приближения порядка наилучшего с помощью оператора интегрального представления при $1 \le p \le \infty.$

2.12. Свойства конечных разностей. Области определения и основные формулы для конечных разностей.

2.13. Понятие модуля непрерывности для функции из пространства Лебега $L_p(\Omega)$. Свойства модулей непрерывности: монотонность и ограниченность, предел при $t \to +0.$.

2.14. Оценки модулей непрерывности.

2.15. Связь наилучших приближений и модулей непрерывности.

ПЕРЕЧЕНЬ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

1. Пусть X - нормированное пространство, $a \in X$, $r > 0$. Докажите, что множество $X \setminus \overline{B}(a,r)$ открыто ($\overline{B}(a,r)$ - замкнутый шар).

2. В пространстве R^n определим норму вектора $\vec{x} = \left(x_1, \ldots, x_n\right)$ формулой

$$\| \vec{x} \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | x_i |.$$

Проверить выполнение аксиом нормы. Пространство R^n с нормой $\|\vec{x}\|_1$ обозначим R_1^n.

3. В пространстве R^n определим норму вектора $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ формулой

$$\| \vec{x} \|_\infty = \max_{1 \le i \le n} | x_i |.$$

Проверить выполнение аксиом нормы. Пространство R^n с нормой $\| \vec{x} \|_\infty$ обозначим R_∞^n.

Показать, что

$$\| \vec{x} \|_\infty \le \| \vec{x} \|_1 \le n \, \| \vec{x} \|_\infty \; .$$

4. В пространстве R^n определим норму вектора $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ формулой

$$\| \vec{x} \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2 \right)^{1/2} .$$

Проверить выполнение аксиом нормы. Пространство R^n с нормой $\| \vec{x} \|_2$ обозначим R_2^n.

Показать, что

$$\| \vec{x} \|_\infty \le \| \vec{x} \|_2 \le n^{1/2} \, \| \vec{x} \|_\infty \; .$$

5*. В пространстве R^n определим норму вектора $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ формулой

$$\| \vec{x} \|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p \right)^{1/p}, \quad 1 < p < \infty .$$

Проверить выполнение аксиом нормы. Пространство R^n с нормой $\| \vec{x} \|_p$ обозначим R_p^n.

Показать, что

$$\| \vec{x} \|_\infty \le \| \vec{x} \|_p \le n^{1/p} \, \| \vec{x} \|_\infty \; .$$

Указание. При обосновании неравенства треугольника можно следовать схеме:

1. Для любых чисел $x, y \ge 0$ установить неравенство Юнга:

$$x\,y \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'} \text{ , где } 1 < p < \infty, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \text{ т.е., } p' = \frac{p}{p-1} \ .$$

2. Опираясь на неравенство Юнга установить неравенство Гельдера:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i\ y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{p'} \right)^{1/p'} .$$

3. Опираясь на неравенство Гельдера вывести неравенство треугольника для нормы

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right)^{1/p} .$$

6. Изобразить единичные круги в пространствах R_p^2, $p=1,\ p=2,\ p=\infty$.

7. Изобразить единичные шары в пространствах R_p^3, $p=1,\ p=2,\ p=\infty$.

8.* Установить неравенства между нормами в пространствах R_p^n и R_q^n, $1 \le p < q \le \infty$: для любых векторов $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$

$$\|\vec{x}\|_q \le \|\vec{x}\|_p \le n^{1/p - 1/q} \|\vec{x}\|_q \ . \qquad (1)$$

Привести примеры векторов, для которых неравенства в (1) превращаются в равенства.

Указания.

1. Для получения левого неравенства в (1), называемого неравенством Йенсена, можно
следовать схеме:

А) При условии $\|\vec{x}\|_p = 0$ показать, что $\|\vec{x}\|_q = 0$.

Б) При $0 < x \le 1,\ 1 \le p < q \le \infty$ показать, что $x^q \le x^p$. Вывести отсюда, что условие
$\|\vec{x}\|_p = 1$ влечет $\|\vec{x}\|_q \le 1$ (это частный случай неравенства Йенсена).

В) Опираясь на результат п. Б), получить неравенство Йенсена в общем случае.

2. Для получения правого неравенства в (1) применить в нужном варианте неравенство
Гельдера.

9. Показать, что в линейном нормированном пространстве для любых векторов выполнено обратное неравенство треугольника

$$\left| \| \vec{x} - \vec{y} \| - \| \vec{z} - \vec{y} \| \right| \le \| \vec{x} - \vec{z} \| \ .$$

Каков его геометрический смысл в пространстве геометрических векторов с нормой, равной длине вектора?

В качестве следствия получить неравенство

$$\left| \| \vec{x} \| - \| \vec{z} \| \right| \le \| \vec{x} - \vec{z} \|$$

(разность норм векторов не больше, чем норма разности векторов).

10. Доказать равенство $\operatorname*{ess\,sup}_E f = \inf \left\{ M \in R: \quad f(x) \le M \ , \ \textit{п.в. на} \ \ E \right\}.$

11. Доказать, что при $0 < p \le \infty \quad \| f \|_{L_p(E)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \ \textit{п.в. на} \ \ E$.

12. Показать, что п.в. на E выполнено неравенство $| f(x) | \le \| f \|_{L_\infty(E)}$.

13. Доказать утверждение: пусть $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $\varphi \in C(0, \infty)$ - строго убывает, $\int\limits_0^1 \varphi \, d x < \infty$.

Тогда, при любых $a \ge 0, \ b > 0$ справедливо неравенство

$$a b \ge \int\limits_0^a \varphi \, d x - \int\limits_b^\infty \varphi^{-1} \, d y \ ,$$

причем равенство имеет место только при $b = \varphi(a)$.

14. Показать, что при $0 < p < 1; \ a \ge 0, \ b > 0$ справедливо неравенство

$$a b \ge \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}, \quad p' = \frac{p}{p-1} \ ,$$

причем равенство имеет место только при $a^p = b^{p'}$.

15. Пусть $f \in L_p(E), \ g \in L_{p'}(E); \ 0 < p < 1, \ p' = \dfrac{p}{p-1}; \ g \ne 0$ на E. Показать, что имеет место обращение неравенства Гельдера:

$$\int\limits_E | f \, g | \, d x \ge \| f \|_{L_p(E)} \| g \|_{L_{p'}(E)} .$$

16. Показать, что в неравенстве треугольника:

$$f, g \in L_p(E), \ 1 \le p \le \infty \quad \Rightarrow \quad f + g \in L_p(E), \ \ \| f + g \|_{L_p(E)} \le \| f \|_{L_p(E)} + \| g \|_{L_p(E)}$$

постоянная 1- точная.

17. Показать, что в неравенстве треугольника:

$$f, g \in L_p(E),\ 0<p<1 \ \Rightarrow\ f+g \in L_p(E),\ \|f+g\|_{L_p(E)} \le 2^{1/p-1}\left(\|f\|_{L_p(E)} + \|g\|_{L_p(E)}\right)$$

постоянная $2^{1/p-1}$- точная.

18. Показать, что в модифицированном неравенстве треугольника:

$$f, g \in L_p(E),\ 0<p<1 \ \Rightarrow\ f+g \in L_p(E),\ \|f+g\|_{L_p(E)} \le \left(\|f\|^p_{L_p(E)} + \|g\|^p_{L_p(E)}\right)^{1/p}$$

постоянная 1 - точная.

19*. Показать, что формула вычисления нормы линейного функционала

$$A_g(f) = \int_E f\, g\, dx, \quad f \in L_p(E), \quad (1 \le p \le \infty,\ 1/p + 1/p' = 1),$$

именно,

$$\|A_g\| = \|g\|_{L_{p'}(E)},$$

сохраняет силу при $\|g\|_{L_{p'}(E)} = \infty$.

20. Показать, что для измеримой функции g

$$\|g\|_{L_{p'}(E)} = \sup\left\{ \left|\int_E \varphi\, g\, dx\right| :\ \varphi \in L_p(E);\ \|\varphi\|_{L_p(E)} \le 1 \right\},$$

причем, если $g \ge 0$, то

$$\|g\|_{L_{p'}(E)} = \sup\left\{ \int_E \varphi\, g\, dx :\ 0 \le \varphi \in L_p(E);\ \|\varphi\|_{L_p(E)} \le 1 \right\}.$$

21. В пространстве $C[a,b]$ непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ введем для функций $x \in C[a,b]$

$$\|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^2\, dt\right)^{1/2}.$$

Проверить выполнение свойств нормы. Будет ли она эквивалентна канонической норме

$$\|x\|_C = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| \ ?$$

22. Можно ли в пространстве $C[a,b]$ ввести нормы по формулам

1) $$\|x\| = \max_{t\in[a,(a+b)/2]} |x(t)|,$$

или

2) $$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| \ ?$$

23. В пространстве $C^1[a,b]$ непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$ введем для функций $x \in C^1[a,b]$ норму Соболева

$$\|x\|_{2,1} = \left(\int_a^b |x(t)|^2\, dt \right)^{1/2} + \left(\int_a^b |x'(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Проверить выполнение свойств нормы. Будет ли она эквивалентна канонической норме

$$\|x\|_{C^1} = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| \ ?$$

24. Показать, что величина $\|x\|_C = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$ является нормой в пространстве $C^1[a,b]$. Будет ли она эквивалентна канонической норме

$$\|x\|_{C^1} = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| \ ?$$

25. При $1 \le p \le \infty$ показать, что множество последовательностей

$$l_p = \left\{ \vec{x} = (x_k)_{k\in N} : \ \|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}, \quad 1 \le p < \infty;$$

$$l_\infty = \left\{ \vec{x} = (x_k)_{k\in N} : \ \|\vec{x}\|_\infty = \sup_{k\in N} |x_k| < \infty \right\}, \quad p = \infty;$$

образует линейное нормированное пространство.

26. Можно ли в пространстве l_q при $1 \le p < q \le \infty$ ввести норму $\|\vec{x}\|_p$?

27*. А) При $1 \le p < q \le \infty$ показать, что $\|\vec{x}\|_q \le \|\vec{x}\|_p$ (неравенство Йенсена для последовательностей)

Б) В пространстве l_p при $1 \le p < q \le \infty$ введем норму $\|\vec{x}\|_q$. Проверить выполнение свойств нормы. Будет ли эта норма эквивалентна исходной норме $\|\vec{x}\|_p$?

28. Привести пример последовательности функций, сходящейся по норме $L_p(E), 0 < p < \infty$, но не сходящейся почти всюду на E. Возможен ли такой пример в $L_\infty(E)$?

29. Показать, что из последовательности, сходящейся по норме $L_p(E), 0<p<\infty$, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти всюду на E.

30. Привести пример последовательности функций, сходящейся почти всюду на E но не сходящейся по норме $L_p(E), 0<p\leq\infty$.

31. Докажите, что линейный оператор удовлетворяет условию Липшица тогда и только тогда, когда этот оператор непрерывен.

32. Докажите, что линейный ограниченный оператор переводит фундаментальную последовательность в фундаментальную.

33. Докажите, что всякий линейный оператор переводит выпуклое множество в выпуклое множество. Верно ли, что образ замкнутого множества при линейном непрерывном операторе замкнут?

3.2. Контрольные работы (пример заданий):

1 модуль

1. Является ли поточечное умножение алгебраической операцией на множестве функций, имеющих интегрируемые преобразования Фурье?

Да.

2. Можно ли корректно определить преобразование Фурье функции с интегрируемым с квадратом в $L_2(R^n)$ в виде интеграла?

Нет (т.к. такое определение требует интегрируемости функции, но существуют функции из $L_2(R^n)\backslash L_1(R^n)$)

3. Всегда ли будет ли преобразование Фурье функции из L_p регулярной функцией?

Да при $1 \leq p \leq 2$; нет при $p > 2$.

4. Можно ли определить мультипликаторы интеграла Фурье с помощью последовательного применения операций преобразования Фурье, поточечного умножения и обратного преобразования Фурье?

Нет.

5. Может ли неограниченная функция быть мультипликатором интеграла Фурье?

Нет.

6. Является ли характеристическая функция выпуклого многогранника мультипликатором интеграла Фурье при $1<p<\infty$?

Да.

7. Является ли характеристическая функция выпуклого многогранника мультипликатором интеграла Фурье при $p=1$?

Нет.

8. Является ли характеристическая функция шара мультипликатором интеграла Фурье при $p=2$?

Да.

9. Является ли характеристическая функция шара мультипликатором интеграла Фурье при $p \neq 2$?

Нет.

10.Является ли пространство функций с ограниченным спектром замкнутым подпространством в L_p?

Да.

11. Какие из указанных неравенств характеризуют функции с ограниченным спектром?

а) Коши; б) Гельдера; в) Бернштейна; г) Никольского разных метрик; д) Иенсена; е) Никольского разных измерений.

в, г, е.

12. Является ли след функции с ограниченным спектром на подпространстве также функцией с ограниченным спектром?

Да.

13. Может ли функция с ограниченным спектром из Lp быть неограниченной?

Нет.

14. Может ли наилучшее приближение функции с помощью функций с ограниченным спектром оказаться нулевым?

Да (если сама функция имеет ограниченный спектр).

15. Какая связь сильной и слабой обобщенной производной по Соболеву?

а) из сильной производной следует слабая, но не наоборот;

б) из слабой производной следует сильная, но не наоборот;

в) они эквивалентны.

в

16. Связано ли дифференцирование Соболевского усреднения с обобщенным дифференцированием?

Да.

17. Является ли обобщенное дифференцирование замкнутой операцией?

Да.

18. Будет ли пространство Соболева банаховым?

Да.