

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Факультет физико-математических и естественных наук

Институт физических исследований и технологий

Рекомендовано МССН

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

**Рекомендуется для направления подготовки/специальности
03.03.02 «Физика»**

**Квалификация (степень) выпускника
бакалавр**

1. Цели и задачи дисциплины: Курс «Теория вероятностей и математическая статистика» входит в базовую часть профессионального цикла в рамках направления «Математика». Курс носит теоретический и практический характер.

Целью курса является:

- Развитие профессиональной математической культуры студента.
- Подготовка студента к практическому применению методов теории вероятностей и математической статистики к математическому моделированию технических и экономических процессов.
- Подготовка студента к продолжению образования по выбранной специальности в магистратуре.

Задачей курса «Теория вероятностей и математическая статистика» является формирование у студентов базовых знаний в области теории вероятностей и математической статистики. Задачей курса является также обучение студентов использованию методов вероятностного анализа данных и построения прикладных вероятностных моделей. Это позволит им при необходимости применять полученные знания и умения при решении прикладных задач в различных областях, связанных с анализом вероятностных и статистических моделей. В результате обучения они получают умение и навыки правильно оценить сложность научно-исследовательских заданий на разработку прикладных моделей в различных областях, связанных с теорией вероятностей и математической статистикой; научатся моделировать статистический эксперимент; аргументировано выбирать метод решения поставленной задачи, а затем экономично и эффективно выполнять компьютерную обработку и анализ статистических данных; научатся решать задачи, связанные с оценкой характеристик производительности реальных производственных систем.

2. Место дисциплины в структуре ООП: Базовая часть, модуль «Математика», Б1.О.01.06. Требования к входным данным: знание математического анализа, алгебры и геометрии, математической логики, комбинаторных алгоритмов.

В таблице № 1 приведены предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций дисциплины в соответствии с матрицей компетенций ОП ВО.

Таблица № 1

**Предшествующие и последующие дисциплины,
направленные на формирование компетенций**

№ п/п	Шифр и наименование компетенции	Предшествующие дисциплины	Последующие дисциплины (группы дисциплин)
1	ОПК-1. Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности.	Механика, Молекулярная физика, Электричество и магнетизм, Атомная физика	Специальный физический практикум (по профилю подготовки) Физика атомного ядра и элементарных частиц, Электродинамика, Квантовая теория, Термодинамика и статистическая физика

3. Требования к результатам освоения дисциплины:

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать: базовые аспекты теории вероятностей и математической статистики.

Уметь: применять в научно-исследовательской и профессиональной деятельности базовые знания в области фундаментальной и прикладной математики и естественных наук; демонстрировать общенаучные базовые знания математики; приобретать новые научные знания, используя современные образовательные и информационные технологии; применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат, решать прикладные задачи статистического анализа и обработки числовых данных, самостоятельно изучать научную литературу в соответствии с профилем обучения, осуществлять целенаправленный поиск информации в сети Интернет, применять современные комплекты

программ для решения прикладных задач в области математики и экономики, исследовать и разрабатывать математические модели по тематике проводимых научно-исследовательских проектов; анализировать и синтезировать информацию, полученную из любых источников

Владеть: фундаментальными знаниями в области фундаментальной математики и компьютерных наук; способностью решать задачи производственной и технологической деятельности на профессиональном уровне.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единицы.

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры
		9
Аудиторные занятия (всего)	36	36
В том числе:		
<i>Лекции</i>	18	18
<i>Практические занятия (ПЗ)</i>	18	18
<i>Семинары (С)</i>		
<i>Лабораторные работы (ЛР)</i>		
Самостоятельная работа (всего)	72	72
Общая трудоемкость	час	108
	зач. ед.	3

5. Содержание дисциплины

5.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1.	Вероятностное пространство.	Пространство элементарных исходов. События, действия над ними. Сигма-алгебра событий. Аксиоматическое определение вероятности. Вероятностное пространство.
2.	Классическая и геометрические вероятности	Классическое определение вероятности. Элементы комбинаторики. Гипергеометрическое распределение. Геометрическое определение вероятности. Задача о встрече. Задача Бюффона (бросание иглы).
3.	Условная вероятность. Независимость событий. Формула полной вероятности и Байеса.	Условная вероятность. Формула умножения вероятностей. Независимость событий попарно и в совокупности. Пример Бернштейна событий, независимых попарно, но зависимых в совокупности. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
4.	Схема Бернулли	Схема Бернулли, формула Бернулли. Теорема Пуассона. Локальная теорема Муавра-Лапласа. Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Теорема Бернулли (закон больших чисел в форме Бернулли). Полиномиальная схема.
5.	Случайные величины и их распределения	Случайная величина. Функция распределения и ее свойства. Дискретная случайная величина. Ряд распределения. Биномиальное, пуассоновское, геометрическое распределения. Непрерывная случайная величина. Плотность распределения и ее свойства. Равномерное, экспоненциальное, нормальное, гамма-распределения. Функция от случайной величины (вычисление распределений функции от случайной величины для различных случаев).
6.	Многомерные случайные величины и их свойства	Многомерная случайная величина (на примере 2-мерной). Совместная функция распределения и ее свойства. Дискретная двумерная случайная величина. Непрерывная двумерная случайная величина. Совместная плотность распределения и ее свойства. Многомерный нормальный

		закон. Условные распределения случайных величин. Независимые случайные величины. Функции от двумерной случайной величины (вычисление распределений). Формула свертки.
7.	Числовые характеристики случайных величин	Математическое ожидание случайной величины, его свойства. Дисперсия случайной величины, ее свойства. Ковариация и коэффициент корреляции случайных величин, их свойства. Матрица ковариаций. Моменты высших порядков. Медиана, квантиль, мода, энтропия.
8.	Сходимость случайных величин	Сходимость случайных величин. Типы сходимости. Неравенство Чебышева. (Слабый) закон больших чисел для независимых одинаково распределенных случайных величин, его обобщения. Формулировка усиленного закона больших чисел Колмогорова для независимых одинаково распределенных случайных величин.
9.	Центральная предельная теорема	Характеристическая функция, ее свойства. Слабая сходимость функций распределения. Формула обращения (без доказательства). Теорема непрерывности (без доказательства). Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин.
10	Общие сведения математической статистики	Задачи математической статистики: оценки неизвестных параметров и проверка статистических гипотез; байесовский и небайесовский подходы; параметрические и непараметрические модели. Основные понятия математической статистики: генеральная совокупность; теоретическая функция распределения; выборка; вариационный и статистический ряды; эмпирическая функция распределения. Теорема Гливенко-Кантелли. Простейшие статистические преобразования: статистики; выборочные характеристики (в том числе дисперсии σ^2 и s^2). Основные распределения математической статистики: нормальное; хи-квадрат (Пирсона); t -распределение (Стьюдента); F -распределение; распределения Колмогорова и омега-квадрат.

11.	Оценки неизвестных параметров	<p>Статистические оценки и их свойства: состоятельность; несмещенность; неравенство Рао-Крамера; эффективность.</p> <p>Метод моментов: описание метода; свойства оценки. Оценка неизвестного параметра биномиального распределения.</p> <p>Метод моментов: оценка неизвестного математического ожидания нормального распределения (2 случая).</p> <p>Метод моментов: оценка неизвестной дисперсии нормального распределения (2 случая).</p> <p>Метод моментов: оценка неизвестных параметров гамма-распределения.</p> <p>Метод максимального правдоподобия: описание метода; свойства оценки. Оценка неизвестного параметра биномиального распределения.</p> <p>Метод максимального правдоподобия: оценка неизвестного математического ожидания нормального распределения (2 случая).</p> <p>Метод максимального правдоподобия: оценка неизвестной дисперсии нормального распределения (2 случая).</p> <p>Доверительные интервалы. Построение доверительного интервала для параметра биномиального распределения.</p> <p>Построение доверительных интервалов для параметров нормального распределения.</p>
12.	Проверка статистических гипотез	<p>Статистическая гипотеза; основная и конкурирующая, простая, сложная, параметрическая и непараметрическая гипотезы. Критерий, допустимая и критическая области, статистика критерия, ошибки первого и второго рода, уровень значимости, размер, оперативная характеристика и мощность критерия.</p> <p>Простые гипотезы, критерий отношения правдоподобия (Неймана-Пирсона).</p> <p>Критерий согласия Колмогорова. Критерий согласия омега-квадрат. Критерий согласия хи-квадрат.</p>

5.2 Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практ.зан.	СРС	Всего час.
1.	Вероятностное пространство.	1	1	4	6
2.	Классическая и геометрические вероятности	1	1	4	6
3.	Условная вероятность. Независимость событий. Формула полной вероятности и Байеса.	2	2	8	12
4.	Схема Бернулли	1	1	4	6
5.	Случайные величины и их распределения	1	1	4	6
6.	Многомерные случайные величины и их свойства	1	1	4	6
7.	Числовые характеристики случайных величин	2	2	8	12
8.	Сходимость случайных величин	2	2	8	12
9.	Центральная предельная теорема	2	2	8	12
10.	Общие сведения математической статистики	1	1	4	6
11.	Оценки неизвестных параметров	2	2	8	12
12.	Проверка статистических гипотез	2	2	8	12
ИТОГО:		18	18	72	108

6. Лабораторный практикум **Не предусмотрен**

7. Практические занятия (семинары)

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудоемкость (час.)
1.	1	Вероятностное пространство.	1
2.	2	Классическая и геометрические вероятности	1
3.	2	Условная вероятность. Независимость событий. Формула полной вероятности и Байеса.	2
4.	3	Схема Бернулли	1
5.	3	Случайные величины и их распределения	1
6.	4	Многомерные случайные величины и их свойства	1
7.	4	Числовые характеристики случайных величин	2
8.	5	Сходимость случайных величин	2
9.	5	Центральная предельная теорема	2
10.	5	Общие сведения математической статистики	1
11.	6	Оценки неизвестных параметров	2
12.	6	Проверка статистических гипотез	2

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Учебная аудитория с меловой или маркерной доской. Компьютерные (дисплейные) классы с доступом к сети Интернет и электронно-образовательной среде Университета для проведения обучающимися самостоятельной работы во внеаудиторные часы.

9. Информационное обеспечение дисциплины

а) программное обеспечение

- ОС Windows, MS Office (программа корпоративного лицензирования (Microsoft Subscription) Enrollment for Education Solutions), браузер Firefox (лицензия MPL-2.0) или браузер Chrome (лицензия Google Chrome Terms of Service); Adobe Reader (Adobe Software License Agreement).
- ОС Linux, офисный пакет LibreOffice (лицензия MPL-2.0), ПО для просмотра pdf (например, evince (лицензия GPL-2+ CC-BY-SA-3.0)).

б) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы не предусмотрены

10. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

а) основная литература:

1. В.Е. Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учебное пособие для прикладного бакалавриата. - 11-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2014. - 404 с.
2. Зарядов И.С., Козырев Д.В., Милованова Т.А., Разумчик Р.В. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие.- Москва: РУДН, 2014. – 140 с.:

б) дополнительная литература:

1. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Физматлит. 2005.
2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для прикладного бакалавриата / В. Е. Гмурман. — 12-е изд. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 479 с.
3. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1,2. - М.: Либроком, 2010.

в) программное обеспечение: не требуется

г) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы: не требуются

11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:

Учебным планом на изучение дисциплины отводится один семестр. В течение семестра проводятся две контрольные работы, два теста и три домашних задания. По итогам первой контрольной работы, первого домашнего задания и первого теста проводится промежуточная аттестация. Сумма баллов, набранная по итогам промежуточной аттестации, и баллов за вторую

контрольную работу, второе и третье домашние задания и второй тест равняется общему количеству баллов, заработанных студентом в течение семестра. В конце семестра производится итоговый контроль знаний – экзамен, и с учётом набранных баллов выставляется итоговая оценка.

11.1. Самостоятельная работа студента

1. Выполнение домашних работ, обязательных для выполнения, предусматривает индивидуальную самостоятельную работу студента.

2. Выполнение домашних заданий для самостоятельной работы позволяет студенту приобрести дополнительные навыки и закрепить знания по изучаемой теме.

11.2. Примерный перечень вопросов промежуточного и итогового контроля знаний

Для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации студентов рекомендуется использовать вопросы и задания подобные перечисленным ниже:

1. Пространство элементарных исходов. Событие, действия над событиями.
2. Классическое определение вероятности.
3. Геометрическое определение вероятности.
4. Теорема сложения.
5. Условная вероятность. Теорема умножения. Независимость событий.
6. Формула полной вероятности. Формула Байеса
7. Повторные независимые испытания. Схема Бернулли. Формула Бернулли.
8. Формула Пуассона.
9. Локальная и интегральная формулы Муавра-Лапласа.
10. Одномерная случайная величина. Функция распределения.
11. Дискретная с.в. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины, их свойства.
12. Биномиальное распределение, распределение Пуассона и геометрическое распределение.
13. Непрерывная случайная величина. Плотность распределения. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной с.в., их свойства.
14. Равномерное, нормальное и экспоненциальное распределение.
15. Функция от одномерной с.в. (два случая: дискретный и непрерывный).
16. Многомерная с.в. на примере дискретной двумерной с.в. Ковариация и коэффициент корреляции, их свойства.
17. Вариационные ряды и их графическое изображение (полигон частот и гистограмма)
18. Выборочные характеристики. Эмпирическая функция распределения.
19. Точечные оценки. Метод моментов. Метод максимального правдоподобия.
20. Статистическая гипотеза и методы ее проверки. Критерий χ^2 .
21. Линейная корреляция. Уравнение регрессии. Коэффициент корреляции.

12. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине.

Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»

для направления 03.03.02. Физика

Код контролируемой компетенции или ее части	Контролируемый раздел дисциплины	Контролируемая тема дисциплины	Формы контроля уровня освоения ООП				Баллы темы	Баллы раздела
			Текущий контроль			Промежуточная аттестация		
			Выполнение ДЗ	Выполнение КР	Коллоквиум	Экзамен		
ОПК-1	Основы теории вероятностей.	Вероятностное пространство. Основные определения и понятия. Действия над событиями.	2	4	1	2,5	9,5	44
		Классическое и геометрическое определения вероятности. Комбинаторика	3	6	1	2,5	12,5	
		Условная вероятность. Теорема умножения. Независимость событий. Формула полной вероятности и Байеса.	2	4	1	2,5	9,5	
		Схема Бернулли, формула Бернулли, теорема Пуассона, теоремы Муавра-Лапласа, полиномиальная схема	3	6	1	2,5	12,5	
ОПК-1	Случайные величины и их распределения. Числовые характеристики	Дискретная случайная величина. Ряд распределения. Базовые распределения. Числовые характеристики.	3	3	1	2,5	9,5	34
		Непрерывная случайная величина. Плотность распределения и ее свойства. Базовые непрерывные	2	3,5	1	2,5	9	

		распределения. Числовые характеристики.						
		Функции дискретной случайной величины. Функция от непрерывной случайной величины	1	3,5	1	2,5	8	
		Многомерная с.в. на примере дискретной двумерной с.в. Ковариация и коэффициент корреляции.	1	3	1	2,5	7,5	
ОПК-1	Математическая статистика. Основные понятия, методы и определения.	Основные понятия и простейшие статистические преобразования математической статистики. Оценки (метод моментов и метод максимального правдоподобия) и свойства оценок неизвестных параметров	4	4	1	2,5	11,5	22
		Статистические гипотезы - основные понятия и определения. Критерий согласия хи-квадрат (критерий Пирсона). Линейная корреляция. Уравнение регрессии.	3	4	1	2,5	10,5	
ИТОГО:			24	41	10	25	100	100

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1 (образец)

1. Теоретический вопрос: пространство элементарных исходов. События, действия над ними.
2. Задача: подбрасывают две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков будет равна 7.
3. Вопрос-тест:
Расчёт вероятностей событий производится по формуле классической вероятности, если
 1. Ω конечно
 2. Ω непрерывно
 3. Ω конечно и элементарные исходы равновозможны

Критерии оценки:

Первый вопрос в экзаменационном билете теоретического плана по любой теме из первого, второго или третьего раздела. Первый вопрос и задача оцениваются по 10 баллов. Вопрос-тест оценивается из 5 баллов.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ:

Первый раздел

1. Пространство элементарных исходов. События, действия над ними. Аксиоматическое определение вероятности. Свойства вероятностей (с доказательствами).
2. Классическое определение вероятности. Элементы комбинаторики. Гипергеометрическое распределение. Геометрическое определение вероятности. Задача о встрече. Задача Бюффона (бросание иглы).
3. Условная вероятность. Теорема умножения (с доказательством). Независимость событий попарно и в совокупности. Формула объединения для независимых событий (с выводом). Формула полной вероятности (с выводом). Формула Байеса (с выводом).
4. Схема Бернулли, формула Бернулли (с выводом). Теорема Пуассона. Локальная теорема Муавра-Лапласа. Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Полиномиальная схема (с выводом).

Второй раздел

1. Случайная величина. Функция распределения и ее свойства (с доказательствами). Дискретная случайная величина. Ряд распределения. Биномиальное, пуассоновское, геометрическое распределения. Непрерывная случайная величина. Плотность распределения и ее свойства (с доказательствами). Равномерное, экспоненциальное, нормальное, гамма-распределение. Функция от случайной величины (дискретный и непрерывный случаи).
2. Двумерная случайная величина. Совместная функция распределения и ее свойства (с доказательствами).
3. Дискретная двумерная случайная величина. Совместный ряд распределения. Частные ряды распределения.
4. Непрерывная двумерная случайная величина (определение). Совместная плотность распределения и ее свойства (с доказательствами).
5. Условные распределения компонент двумерной случайной величины (дискретный и непрерывный случаи). Независимость случайных величин.
6. Функция от двумерной случайной величины (дискретный и непрерывный случаи). Формула свертки (с доказательством).
7. Математическое ожидание случайной величины и его свойства (с доказательством).
8. Дисперсия случайной величины и ее свойства (с доказательством). Среднее квадратическое отклонение.
9. Ковариация случайных величин и ее свойства (с доказательством). Коэффициент корреляции и его свойства.
10. Неравенство Чебышева (без доказательства).
11. Закон больших чисел (с доказательством).
12. Центральная предельная теорема (без доказательства).

Третий раздел

1. Исходные понятия математической статистики: генеральная совокупность, выборка, теоретическая функция распределения.
2. Простейшие статистические преобразования: вариационный ряд, статистический ряд, эмпирическая функция распределения, полигон и гистограмма частот.
3. Выборочные характеристики (выборочное среднее, выборочная дисперсия, выборочное среднее квадратическое отклонение).
4. Статистические оценки параметров распределения.
5. Метод моментов для нахождения точечной оценки параметров распределения.
6. Метод максимального правдоподобия для нахождения точечной оценки параметров распределения.
7. Доверительная вероятность. Доверительный интервал. Алгоритм нахождения доверительного интервала.
8. Статистическая гипотеза. Нулевая и конкурирующая гипотезы. Ошибки 1-го и 2-го рода. Уровень значимости, мощность критерия.
9. Критерий согласия Пирсона (критерий χ^2).
10. Парная линейная регрессия.

Примерный перечень оценочных средств

п/п	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в фонде
<i>Аудиторная работа</i>			
1	Проверочные работы	Средство контроля, организованное в конце аудиторного занятия, на котором обучающимся необходимо самостоятельно продемонстрировать усвоение учебного материала этого занятия.	Примеры заданий
2	Контрольная работа	Средство контроля, организованное как аудиторное занятие, на котором обучающимся необходимо самостоятельно продемонстрировать усвоение учебного материала темы, раздела или разделов дисциплины.	Примерные варианты работ
3	Экзамен	Оценка работы студента в течение семестра (года, всего срока обучения и др.) и призван выявить уровень, прочность и систематичность полученных им теоретических и практических знаний, приобретения навыков самостоятельной работы, развития творческого мышления, умение синтезировать полученные знания и применять их в решении практических задач.	Примеры заданий/вопросов, пример экзаменационного билета
<i>Самостоятельная работа</i>			
1	Домашняя работа	Средство проверки умений применять полученные знания по заранее определенной методике для решения задач или заданий по модулю или дисциплине в целом.	Комплект заданий для выполнения типового расчета

Оформление задания для проверочной работы

Проверочная работа (коллоквиум)

по дисциплине Теория вероятностей и математическая статистика

Образцы проверочных работ:

Проверочная работа №1

Вариант №1

Вопрос 1.

Подбрасывается игральная кость до первого выпадения 6 очков. Опишите пространство элементарных исходов данного эксперимента. Какой тип оно имеет?

Вопрос 2.

События A и B совместны

$$P(A) = 0.3 \quad P(B) = 0.7 \quad P(AB) = 0.2$$

Найти : $P(A+B)$

Вопрос 3.

Найти число сочетаний C_5^4

Вопрос 4.

Два условия для применения формулы классической вероятности

Вопрос 5.

Из колоды в 36 карт случайным образом выбирается одна. Рассматриваются события $A = \{\text{взяли туза}\}$

$B = \{\text{взяли карту пиковой масти}\}$

Что означают события

$AB, A + B, \bar{A}, \bar{B}, A\bar{B}$ - описать словами

Вопрос 6.

Четыре стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания для первого 0.3, для второго – 0.4, для третьего - 0.9, для четвертого – 0.8. тогда вероятность, что из четырех стрелков попали все

1. $0,3 \times 0,6 \times 0,1 \times 0,8$ 2. $0,3 \times 0,4 \times 0,9 \times 0,8$ 3. $0,7 \times 0,6 \times 0,1 \times 0,2$

Вариант №2

Вопрос 1.

Записать формулу полной вероятности. Каким требованиям удовлетворяют события, называемые гипотезами?

Вопрос 2.

Три стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания для первого 0,3, для второго -0,8, для третьего 0,9. Найти вероятность того, что попадёт только второй.

Вопрос 3.

В круге радиуса 10 находится круг радиуса 5. Найти вероятность того, что точка, поставленная наугад в большом круге, попадёт в маленький. По какой формуле идёт расчёт?

Вопрос 4.

В чём состоит аксиома неотрицательности?

Вопрос 5.

Дайте определения достоверного и невозможного событий. Привести пример для каждого.

Вопрос 6.

Рассматривается лотерея 5 из 30. Записать формулу для расчёта вероятности угадать все 5 номеров в этой лотереи.

Вариант №3

Вопрос 1.

Эксперимент: случайный выбор 8 человек из группы, содержащей 35 человек. Сколько вариантов различного состава может получиться при таком выборе?

1. C_{35}^8 2. $8!$ 3. A_{35}^8

Вопрос 2.

События A и B несовместны. $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,4$.

Найти : $P(A+B)$.

Вопрос 3.

Рассматривается задача о встрече. Двое человек договариваются о встрече в течение часа в определённом месте, причём каждый из них может прийти в любой момент времени в данном промежутке. Пространство элементарных исходов выглядит следующим образом:

1. квадрат 2. круг 3. треугольник

Вопрос 4.

В чём состоит аксиома сложения?

Вопрос 5.

Стреляют два стрелка. $A = \{\text{попал первый}\}$, $B = \{\text{попал второй}\}$. Событие $\{\text{попал хотя бы один}\}$ записывается следующим образом:

1. AB 2. $\bar{A} \bar{B}$ 3. $A + B$

Вопрос 6.

Испытания Бернулли:

1. независимы, одинаковы, в каждом различаем 4 исхода, вероятности исходов не меняются от опыта к опыту
2. независимы, различны, в каждом различаем 2 исхода, вероятности исходов не меняются от опыта к опыту
3. независимы, одинаковы, в каждом различаем 2 исхода, вероятности исходов не меняются от опыта к опыту
4. независимы, различны, в каждом различаем 4 исхода, вероятности исходов не меняются от опыта к опыту

Вариант №4

Вопрос 1.

При бросании правильной монеты наблюденная частота выпадения герба стремится к:

1. $1/3$ 2. $1/2$ 3. $1/4$

Вопрос 2.

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}, P(C) = \frac{1}{5}, P(AC) = \frac{1}{10}, P(A \cup B) = \frac{2}{3}.$$

Выберете правильный вариант:

1. A и B совместны, A и C зависимы.
2. A и B совместны, A и C независимы.
3. A и B несовместны, A и C зависимы.
4. A и B несовместны, A и C независимы.

Вопрос 3.

Найти число размещений A_5^4 .

Вопрос 4.

В чём состоит аксиома нормированности?

Вопрос 5.

В ящике имеется 10 белых шаров с номерами от 1 до 10 и 10 красных шаров с аналогичными номерами. Из ящика случайным образом выбирается один шар. Рассматриваются следующие события:

$A = \{\text{извлечённый шар будет иметь четный номер}\}$

$B = \{\text{извлечённый шар будет белым}\}$

Тогда $P(A|B)$ равна :

1. $1/3$ 2. $1/4$ 3. $1/2$

Вопрос 6.

Правильную монету подбрасывают 12 раз. Найти вероятность следующего события:

$A = \{\text{герб выпадет ровно 6 раз}\}$. $P(A)$ рассчитывается по формуле:

1. $C_{12}^6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^6$ 2. $A_{10}^6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^4$ 3. $C_{12}^6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^4$

Проверочная работа №2

Вариант №1

Вопрос 1.

$Y = 0,3X + 2Z$, $MX = 0,5$, $MZ = 1,5$, $DX = 0,1$, X и Z - независимы.

Найти $M(XY)$. Учтеть то, что $M\xi\eta = M\xi M\eta$ -если ξ и η -незав.

Вопрос 2.

С. в. X имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 100$, $p = 0,1$.

Найти MX , DX .

Вопрос 3.

С.в. X имеет плотность распределения $p(x)$. Найти $P\{x \leq X < x + \Delta\}$, где Δ -«мало». Поясните результат.

Вопрос 4.

$$\chi^2_{\text{набл.}} = 8,2; \chi^2_{\text{крит.}}(0,05;4) = 9,5.$$

Какой делаем вывод о справедливости гипотезы H_0 ? Какова достоверность вывода?

Вопрос 5.

X	0	1	2
P	1/4	1/2	1/4

Найти MX , DX .

Вопрос 6.

С.в. X и Z – независимы. $Y = X^2 + Z$, $MX = 0, MZ = 0, MX^3 = 0$. Найдите ковариацию $Cov(X, Y)$.

Вариант №2**Вопрос 1.**

$$MX = 3 \quad MY = 2 \quad Z = 2X + 3Y + 11$$

Найти MZ

Вопрос 2.

X имеет распределение Пуассона с $\lambda = 2$. Найти MX, DX .

Вопрос 3.

В чём заключается смысл плотности распределения – записать св-во формулой и словами.

Вопрос 4.

$\chi^2_{набл.} = 10,2 \quad \chi^2_{крит.}(0,01;3) = 12$ какой делаем вывод о справедливости гипотезы H_0

Вопрос 5.

X	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

$Y = X^2$ Построить ряд для Y

Вопрос 6.

Для дискретной с.в. X вероятность попасть в интервал через функцию распределения рассчитывается след. образом:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a). \text{ Знаки вопросов надо заменить на неравенства.}$$

Вопрос 7.

Выборочное среднее $\bar{X} = 10$ вычислено по выборке из геометрического распределения с неизвестным P . Найти P методом моментов.

Критерии оценки:

Всего проводится 2 проверочных работы в семестре. Каждая проверочная работа оценивается из 5 баллов. На написание первой работы отводится не более 5 минут, на написание второй – не более 10 минут.

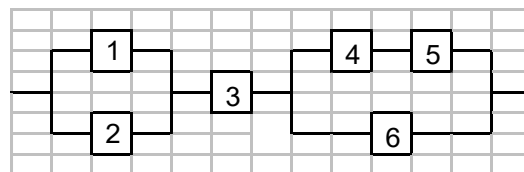
Оформление комплекта заданий для контрольной работы**Образцы вариантов для контрольной работы****Контрольная работа № 1.****Вариант 1.**

1. Из разрезной азбуки выложено слово МАТЕМАТИКА. Затем все буквы тщательно перемешиваются и снова выкладываются в случайном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово МАТЕМАТИКА?
2. Вакансия, предлагаемая безработному биржей труда, удовлетворяет его с вероятностью 0,01. Сколько нужно обслужить безработных, чтобы вероятность того, что хотя бы один из них найдет работу, была бы не ниже 0,95?
3. В круг радиуса R вписан прямоугольник, одна длина которого в два раза больше ширины. Найти вероятность того, что точка, брошенная в этот круг, попадет в данный прямоугольник.
4. Партия транзисторов, среди которых 10% дефектных, поступила на проверку. Схема проверки такова, что с вероятностью 0,95 обнаруживается дефект (если он есть), и существует ненулевая вероятность 0,03 того, что исправный транзистор будет признан дефектным. Случайно выбранный из партии транзистор был признан дефектным. Какова вероятность того, что на самом деле транзистор исправен.

5. Найти вероятность того, что за 6 подбрасываний пары монет ровно два раза выпадет сочетание «герб-герб».

Вариант 2.

1. Определить надежность прибора, заданного схемой, если надежности каждого блока прибора равны $p_1=0,8$, $p_2=0,7$, $p_3=0,6$, $p_4=0,5$, $p_5=0,4$, $p_6=0,3$, и каждый блок выходит из строя независимо от работы других блоков.



2. В ящике 10 одинаковых деталей, помеченных номерами 1, 2, ..., 10. Наудачу извлечены шесть деталей. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей окажутся детали № 1 и № 2.
3. В квадрат с вершинами $O(0;0)$, $K(0;1)$, $L(1;1)$ и $M(1;0)$ наудачу брошена точка $Q(x; y)$. Какова вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y > 2x$?
4. Однотипные приборы выпускаются тремя заводами в количественном отношении 1:2:3, причем вероятности брака для этих заводов соответственно равны 3%, 2%, 1%. Прибор, приобретенный научно-исследовательским институтом, оказался бракованным. Какова вероятность того, что этот прибор произведен первым заводом?
5. В ящике содержится 100 карточек, пронумерованных числами 1, 2, 3, ..., 99, 100. Из ящика наудачу 200 раз извлекается карточка, после каждого извлечения она кладется обратно. Найти вероятность того, что карточка с цифрой 1 появится ровно 3 раза. (Другой пример задачи: Стрелок попадает в цель при одном выстреле с вероятностью $3/4$. Найти вероятность того, что число попаданий в цель при 1200 выстрелах лежит в пределах между 885 и 930.)

Вариант 3.

1. А и В и еще 8 человек стоят в очереди. Определить вероятность того, что А и В отделены друг от друга 3 лицами.
2. Из урны, содержащей 3 голубых и 2 красных шара, по схеме случайного выбора без возвращения последовательно извлекаются шары. Найти вероятность того, что красный шар впервые появится при третьем испытании.
3. На отрезке ОА длины 6 числовой оси Ox наугад поставлены две точки В(x) и С(y). Найти вероятность того, что длина отрезка ВС меньше 4.
4. В первой урне 3 белых и 7 черных шаров, во второй 5 белых и 2 черных. Из первой урны переложили во вторую три шара, затем из второй урны извлекли один шар. Найти вероятность того, что он белый.
5. По мишени, состоящей из внутреннего круга и двух концентрических колец, производится 10 выстрелов. Вероятности попадания в указанные области при каждом выстреле равны соответственно 0,65, 0,22 и 0,13. Найти вероятность того, что при этом будет 6 попаданий в круг, 3—в первое кольцо и 1 попадание во второе кольцо.

Критерии оценки:

Каждая задача контрольной работы 1 оценивается из 4 баллов.

Контрольная работа № 2.

Вариант 1 (образец)

1. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1/3 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & -1 < x \leq 1/3 \\ 1, & x > 1/3 \end{cases}$. Найти A . Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(0; 1/3)$. Найти плотность распределения случайной величины X , построить график плотности и функции распределения.

2. Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром 2. Рассматривается случайная величина $Y=X^3$. Найти плотность распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y .

3. Дискретная двумерная случайная величина (X, Y) задана рядом распределения. Найдите:

$X \setminus Y$	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
ξ	ρ_1	ρ_2	ρ_3

- а) ряды распределения случайных величин X и Y ;
 б) ковариацию случайных величин X и Y .

4. Постройте гистограмму и полигон частот для выборки, представленной в виде интервального ряда. Найдите выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Интервал	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24
Частота	1	1	3	2	1	1

5. Число выпадений герба при 25 подбрасываниях трех монет распределились следующим образом:

С	Кол-во гербов	0	1	2	3	помощью критерия χ^2 проверить, согласуются ли эти результаты с предположением о симметричности монет. Принять $\alpha=0,05$.
	Число	5	8	7	5	

Критерии оценки:

Каждая задача контрольной работы 2, кроме задачи №5, оценивается из 4 баллов. Задача №5 оценивается из 5 баллов.

Оформление комплекта заданий для выполнения домашних работ

Комплект заданий для выполнения домашней работы

по дисциплине *Теория вероятностей и математическая статистика*

Домашнее задание 1 (Случайные события)

1. Из n сбербанков m расположены за чертой города. Для обследования случайным образом отобрано k сбербанков. Какова вероятность того, что среди отобранных окажется в черте города:

- а) k_1 сбербанков;
 б) хотя бы один сбербанк.

2. Наугад взятый номер телефона состоит из n цифр. Какова вероятность того, что в нем все цифры:

- а) одинаковы;
 б) различны;
 в) нечетные?

Известно, что номер телефона не начинается с цифры ноль.

3. В прямоугольник с вершинами в точках (a_1, b_1) , (a_2, b_2) , (a_3, b_3) и (a_4, b_4) случайным образом бросается точка A с координатами (x, y) . Найдите вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют условию $(x-c)^2 + d \leq y \leq f \cdot x + k$.

4. Брак в продукции завода вследствие дефекта А составляет $\alpha\%$, а вследствие дефекта В— $\beta\%$. Годная продукция завода составляет $\gamma\%$. Найдите вероятность того, что:

- а) среди забракованной по признаку А продукции встретится дефект В;
 б) среди продукции, не обладающей дефектом А, встретится дефект В.

5. Пакеты акций, имеющих на рынке ценных бумаг, могут дать доход владельцу с вероятностью p (для каждого пакета). Сколько пакетов акций различных фирм нужно

приобрести, чтобы с вероятностью, не меньшей q , можно было ожидать доход хотя бы по одному пакету акций?

6. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен равна p_1 ; второй— p_2 ; третий— p_3 . Найдите вероятность того, что студентом будут сданы:

- только второй экзамен;
- только один экзамен;
- три экзамена;
- по крайней мере два экзамена;
- хотя бы один экзамен.

7. Страховая компания разделяет застрахованных по классам риска: I класс—малый риск; II класс—средний; III класс—большой риск. Среди этих клиентов $\alpha\%$ первого класса риска; $\beta\%$ —второго и $\gamma\%$ —третьего. Вероятность необходимости выплачивать страховое вознаграждение для первого класса риска равна p_1 ; второго— p_2 ; третьего— p_3 . Какова вероятность того, что:

- застрахованный получит денежное вознаграждение за период страхования;
- получивший денежное вознаграждение застрахованный относится к группе малого риска.

8. В среднем $\alpha\%$ акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найдите вероятность того, что из n пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене:

- не будут проданы k пакетов;
- будет продано менее m пакетов;
- хотя бы l пакетов;
- наивероятнейшее число пакетов.

9. Строительная фирма, занимающаяся строительством коттеджей, раскладывает рекламные листки по почтовым ящикам. Прежний опыт работы компании показывает, что примерно в одном случае из k тысяч следует заказ. Найдите вероятность того, что при размещении m тысяч листов число заказов будет:

- равно l ;
- находиться в границах от l_1 до l_2 .

10. По результатам проверок налоговыми инспекциями установлено, что в среднем каждое четвертое малое предприятие региона имеет нарушение финансовой дисциплины. Найдите вероятность того, что из n зарегистрированных в регионе малых предприятий имеют нарушения финансовой дисциплины:

- k предприятий;
- не менее m предприятий;
- от k_1 до k_2 предприятий.

Домашнее задание 2 (Случайные величины)

- В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз размером K рублей. Составьте ряд распределения случайной величины—размера выигрыша при m сделанных покупках. Найдите функцию распределения этой случайной величины, а также ее математическое ожидание и дисперсию.

- Даны ряды распределения двух независимых случайных величин:

X	0	1	3
P	p_1	p_2	?

Y	2	3
P	p_3	?

- Найдите вероятности, с которыми случайные величины принимают значение 3.
- Найдите математические ожидания и дисперсии случайных величин $Z_1=aX+bY$ и $Z_2=cX+dY$.

в) Составьте ряд распределения случайной величины $Z=\varphi(X,Y)$.

- Дана функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X .

- Найдите плотность распределения $f(x)$ этой случайной величины.
- Постройте графики $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найдите вероятности $P\{X \leq a\}$ и $P\{b \leq X < c\}$.

- Дана функция $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ Cxe^{-ax}, & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$ При каком значении параметра C эта функция является плотностью распределения некоторой непрерывной случайной величины X ? Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .
- Проведенное исследование показало, что вклады населения в данном банке могут быть описаны случайной величиной X , распределенной по нормальному закону с параметрами m и σ . Найдите долю вкладчиков, размер вклада которых:
 - а) составляет не менее a ден. ед.;
 - б) составляет менее b ден. ед.;
 - в) составляет от c до d ден. ед.
- Известно, что случайная величина X имеет показательное распределение с параметром λ . Найдите плотность распределения случайной величины $Y = \varphi(X)$.
- Ряд распределения случайной величины (X, Y) представлен в таблице:

X	0	1	2	3
Y				
-1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}
0	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}
1	p_{31}	p_{32}	p_{33}	p_{34}

Найдите:

- а) ряды распределения одномерных случайных величин X и Y ;
- б) вероятность того, что $X < Y$;
- в) ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин X и Y .

Домашнее задание 3 (Элементы математической статистики)

- На фирме 50 агентов, каждый из которых в неделю готовит 10 договоров. X —число договоров, подписанных агентом в неделю. Представьте выборку в виде статистического ряда. Постройте полигон частот. Найдите эмпирическую функцию распределения и выборочные характеристики.
- X —месячный доход жителя некоторого региона в тыс. руб. Для выборки определите размах, представьте выборку в виде интервального ряда, используя 7 интервалов группировки. Постройте гистограмму и полигон частот. Найдите эмпирическую функцию распределения и выборочные характеристики.
- Предполагая, что случайная величина X из задачи 18 имеет биномиальное распределение с неизвестной вероятностью заключения договора p и числом максимально возможных заключенных договоров 10, найдите методом моментов оценку неизвестного параметра p .
- Предполагая, что случайная величина X из задачи 19 имеет экспоненциальное распределение с неизвестным λ , найдите методом моментов оценку этого параметра.
- Используя критерий Пирсона, проверьте при уровне значимости $\alpha = 0,05$ гипотезу о том, что выборка из задачи 18 имеет биномиальное распределение с параметрами p и 10. В качестве p взять оценку, полученную в задаче 20.
- Используя критерий Пирсона, проверьте при уровне значимости $\alpha = 0,05$ гипотезу о том, что выборка из задачи 19 имеет экспоненциальное распределение с параметром λ . В качестве λ взять оценку, полученную в задаче 21.
- Данные об уровне механизации работ X (%) и производительности труда Y (т/ч) для 15 однотипных предприятий. Найдите:
 - а) коэффициент корреляции;
 - б) уравнения прямых регрессий X на Y ; Y на X . Постройте уравнения этих прямых.

Критерии оценки:

Первое домашнее задание оценивается из 10 баллов. Второе и третье домашнее задание оцениваются из 7 баллов каждое. Преподаватель по желанию может задавать вопросы студенту по сданным решенным задачам.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО РУДН.

Руководитель направления 03.03.02

Директор института физических исследований и технологий, д.ф.-м.н., профессор



О.Т. Лоза