Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов» (РУДН)

Факультет физико-математических и естественных наук
Институт физических исследований и технологий

Рекомендовано МССН

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Рекомендуется для направления подготовки/специальности

03.03.02 Физика

Квалификация выпускника: бакалавр

1. **Цели и задачи дисциплины:**

Изложение единого современного подхода к исследованию широкого класса уравнений в частных производных, описывающих различные модели математической физики, современных инженерных задач и междисциплинарных исследований.

2. **Место дисциплины в структуре ООП:** вариативная часть, модуль «Математика»**,** Б1.О.01.06.

Требуются знания математического анализа, алгебры, обыкновенных дифференциальных уравнений.

Является завершающей для математических дисциплин (модулей): математический анализ, теория функций комплексного переменного, основы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В таблице № 1 приведены предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций дисциплины в соответствии с матрицей компетенций ОП ВО.

Таблица № 1

Предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций

№ п/п	Шифр и наименование компетенции	Предшествующие дисциплины	Последующие дисциплины (группы дисциплин)
1	ОПК-1: Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности	Дисциплины блока «Математика»	Дисциплины модулей «Общая физика», «Теоретическая физика»

3. Требования к результатам освоения дисциплины:

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать:

Классификацию линейных уравнений в частных производных второго порядка и постановку начальных, краевых и смешанных задач для наиболее важных уравнений математической физики**,** элементы теории обобщенных функций, классические и функциональные методы исследования задач математической физики.

Уметь:

Решать начальные, краевые и смешанные задачи математической физики методами характеристик, разделения переменных, преобразования Фурье: алгебраические, обыкновенные линейные дифференциальные уравнения и линейные уравнения математической физики интегрировать с использованием элементов теории обобщенных функций.

Владеть*:*

Основными аналитическими методами теории уравнений в частных производных и математической физики.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет **4** зачетных единиц.

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры			
		9	A		
Аудиторные занятия (всего)	**68**	**36**	**32**		
В том числе:					-

Лекции	34	18	16		
Практические занятия (ПЗ)	34	18	16		
Семинары (С)					
Лабораторные работы (ЛР)					
Самостоятельная работа (всего)	**76**	**36**	**40**		
В том числе:					-
Курсовой проект (работа)					
Расчетно-графические работы					
Реферат					
Другие виды самостоятельной работы					
Вид промежуточной аттестации (зачет, экзамен)					
Общая трудоемкость час	**144**	**72**	**72**		
зач. ед.	**4**	**2**	**2**		

5. Содержание дисциплины

5.1. Содержание разделов дисциплины

Курс состоит из четырех больших разделов.

Первый раздел.

Основные модели курса. Классификация уравнений.

Вывод основных уравнений курса математической физики. Постановка начальных и граничных условий для уравнений математической физики. Вывод уравнения теплопроводности. Поперечные колебания нагруженной струны, мембраны. Вывод уравнения Даламбера. О постановке краевых задач математической физики, роль начальных и граничных условий. Уравнение Лапласа как стационарный случай рассмотренных задач. Классификация линейных и квазилинейных уравнений второго порядка.

Классификация квазилинейных уравнений второго порядка в точке. Характеристические поверхности (характеристики) для уравнения второго порядка. Канонический вид уравнений с двумя независимыми переменными (классификация в окрестности). Гиперболический, параболический и эллиптический типы.

Второй раздел.

Задача Коши для уравнений и систем уравнений с частными производными произвольного порядка. Элементы теории обобщенных функций.

Задача Коши для систем уравнений произвольного порядка. Определение нормальной системы. Теорема Ковалевской для системы нормального типа (без доказательства). Пример к теореме Ковалевской без условия нормальности. Задача Коши с начальными данными на произвольной гиперповерхности. Возможность ее сведения к задаче Коши с начальными данными на гиперплоскости. Характеристики и характеристические направления для дифференциального уравнения произвольного порядка. Особенности постановки задачи Коши с данными на характеристиках. Примеры.

Преобразование Фурье в пространствах интегрируемых функций и пространстве Шварца. Применение преобразования Фурье для решения уравнения теплопроводности.

Ряды Фурье. Основные определения. Преобразование Фурье, прямое и обратное. Пространство Шварца. Примеры. Основные свойства пространства Шварца. Преобразование Фурье пространства Шварца. Определение преобразования Лапласа. Основная лемма для преобразования Фурье в пространстве Шварца. Преобразование Фурье на пространствах интегрируемых функций.

Элементы теории обобщенных функций.

Понятие обобщенной функции. Определение функционала Дирака. Пространство основных функций и пространство обобщенных функций. Определение пространства обобщенных функций умеренного роста. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. Свертка функций из пространства Шварца и пространства непрерывных ограниченных функций.

Третий раздел.

Решение уравнений математической физики методом Фурье. (Ряды Фурье и преобразование Фурье.)

Задача Коши для уравнения теплопроводности.

Применение теоремы о свертке к решению задачи Коши для уравнения теплопроводности. Вычисление ядра Пуассона. Свойства ядра Пуассона. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности с непрерывной ограниченной начальной функцией. Задача Коши для неоднородного уравнения теплопроводности. Принцип Дюамеля. Принцип максимума для решения уравнения теплопроводности.

Задача Коши для волнового уравнения в пространствах различной размерности.

Вывод энергетического неравенства для волнового уравнения. Теорема единственности задачи Коши и непрерывная зависимость от начальных данных. Решение задачи Коши для волнового уравнения при начальных данных из пространства Шварца. Дельта-функция Дирака, сосредоточенная на сфере. Преобразование Фурье этой функции. Теорема о свертке обобщенной с компактным носителем и функции из пространства Шварца.

Вывод формулы Кирхгофа для решения для решения задачи Коши для волнового уравнения в пространстве. Вывод формулы Пуассона для решения задачи Коши для волнового уравнения на плоскости. Метод спуска. Формула Даламбера. Решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения. Фундаментальное решение (функция Грина) задачи Коши волнового уравнения.

Метод Фурье (разделение переменных) для уравнений математической физики (формальная схема). Пример обоснования метода Фурье.

Метод Фурье для смешанной задачи для волнового однородного уравнения (формальная схема). Метод Фурье для смешанной задачи для волнового неоднородного уравнения (формальная схема). Метод Фурье для смешанной задачи для параболического уравнения (формальная схема). Метод Фурье для смешанной задачи для эллиптического уравнения (формальная схема).

Обоснование метода Фурье для смешанной задачи для однородного волнового уравнения с однородными граничными условиями.

Четвертый раздел.

Эллиптические уравнения. Теория потенциала. Основные функциональные пространства.

Функциональные пространства. Линейные операторы в бесконечномерных пространствах.

Пространство непрерывных функций на компакте. Пространство квадратично интегрируемых функций. Банаховы и гильбертовы пространства. Ортонормальные системы. Неравенство Бесселя. Полные ортонормальные системы.

Линейные операторы в пространстве квадратично интегрируемых функций. Эрмитовы операторы. Линейные уравнения. Интегральные операторы в различных функциональных пространствах.

Теорема Гильберта-Шмидта для интегральных операторов Фредгольма.

Метод последовательных приближений для интегральных уравнений Фредгольма второго рода с непрерывным и полярным ядром в областях пространства и на поверхностях. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с непрерывным и полярным ядром.

Теорема Гильберта-Шмидта для эрмитова непрерывного и полярного ядра. Метод последовательных приближений Келлога.

Собственные значения и собственные функции краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка. Задача на собственные значения эллиптического оператора. Свойства оператора, свойства собственных значений и собственных функций. Задача Штурма-

Лиувилля на ограниченном отрезке. Свойства собственных функций и собственных значений. Свойства функции Грина задачи Штурма-Лиувилля.

Свойства гармонических функций в пространствах произвольной размерности. Первая и вторая формулы Грина. Формула Грина для финитной гладкой функции. Теорема о среднем арифметическом для гармонических функций. Принцип максимума для гармонических функций. Стирание особенностей у гармонических функций. Поведение гармонической функции и её производных на бесконечности. Фундаментальные решения оператора Лапласа на плоскости и в пространстве.

Потенциалы простого слоя, двойного слоя. Объёмный потенциал.

Свертка обобщенных функций. Прямое произведение обобщенных функций. Обобщенные функции простого и двойного слоя. Ньютонов потенциал, логарифмический потенциал. Объемный потенциал и потенциал площади. Поверхностные потенциалы простого и двойного слоя. Физический смысл потенциала Ньютона. Поверхности Ляпунова. Свойства потенциалов простого и двойного слоя на поверхности. Разрыв потенциала двойного слоя и нормальной производной потенциала простого слоя.

Решение задач Дирихле и Неймана для уравнений Лапласа и Пуассона в пространстве.

Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в пространстве. Теорема единственности. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям на поверхностях. Исследование интегральных уравнений. Свойства собственных функций и собственных значений интегральных операторов. Решение задач Дирихле и Неймана для шара.

5.2. Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практ. зан.	Лаб. зан.	Семин	СРС	Всего час.
1.	Основные модели курса. Классификация уравнений.	4			2	4	10
2.	Задача Коши для уравнений и систем уравнений с частными производными произвольного порядка. Элементы теории обобщенных функций.	6			8	18	32
3.	Решение уравнений математической физики методом Фурье. (Ряды Фурье и преобразование Фурье.)	12			16	36	64
4.	Эллиптические уравнения. Теория потенциала. Основные функциональные пространства.	12			8	18	38

6. Лабораторный практикум: нет

7. Практические занятия (семинары)

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудоемкость (час.)
1.	1	Основные модели курса. Классификация уравнений.	2
2.	**2**	Задача Коши для уравнений и систем уравнений с частными производными произвольного порядка. Элементы теории обобщенных функций.	8
3.	**3**	Решение уравнений математической физики методом Фурье. (Ряды Фурье и преобразование Фурье.)	16
4.	**4**	Эллиптические уравнения. Теория потенциала. Основные функциональные пространства.	8

8. Примерная тематика курсовых проектов (работ) – нет

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

а) основная литература

1. Масленникова В.Н. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., Изд. РУДН, 1997.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
3. Владимиров В.С., Михайлов В.П., Вашарин А.А. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1982.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
5. Шварц Л. Математические методы для физических наук. М.: Мир, 1965.

б) дополнительная литература

1. Краснослободцев А.В. Примеры и задачи по уравнениям математической физики. Часть 1. М.: РУДН, 2000.
2. Краснослободцев А.В. Примеры и задачи по уравнениям математической физики. Часть 2. М.: РУДН, 2000.
3. Полянин А.Д. Справочник. Линейные уравнения математической физики. М.: Наука, 2001.

Вся литература есть в библиотеке РУДН и в электронном виде на кафедре.

в) программное обеспечение – Windows, Microsoft Office, Maple, TeX, WinEdt.

г) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы – Yandex, Goole, MathNet.

10. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Аудитории 398, 485, 495, 497 в учебном корпусе РУДН, ул. Орджоникидзе, 3.
Ноутбук Toshiba Satellite 17/300GB Intel Core2 2.4 GHz, мультимедийный проектор и экран.

11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины

Курс состоит из лекций и практических занятий. Соотношение часов между ними следующее:

– в первом семестре – 2 часа лекций и 2 часа практических занятий в неделю,

– во втором семестре – 2 часа лекций и 2 часа практических занятий в неделю.

В середине и в конце каждого семестра проводятся контрольные работы, результаты которых входят в балльно-рейтинговую систему оценки знаний.

Особенность курса

Все эволюционные задачи рассматриваются с привлечением элементов теории обобщенных функций. Причем один и тот же результат может рассматриваться несколько раз, причем каждый раз в большей общности, например, теорема о свертке и ее применение для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности и волнового уравнения.

Методически курс построен так, чтобы все наиболее сложные задачи рассматривались в простейших случаях, что облегчает понимание их студентами.

12. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю)

Текущий контроль осуществляется преподавателем дисциплины при проведении занятий в форме: контрольных работ, индивидуального задания (в рамках самостоятельной работы).

Оценочное средство 1: контрольная работа 1

Эта контрольная работа по теме «Простейшие уравнения в частных производных» состоит из одного задания. Для решения отводится 20 минут. Правильное решение с проверкой – зачтено, иначе – не зачтено.

Оценочное средство 2: контрольная работа 2

Эта контрольная работа по теме «Метод характеристик» состоит из одного задания. Для решения отводится 2 (академических) часа. Правильно сделана замена переменных и получено уравнение в новых переменных: «3», довести дома до конца и решить ещё одну задачу. Правильно получено общее решение: «4», довести дома до конца. Решено правильно до конца: «5». Иначе «2» - переписать контрольную.

Оценочное средство 3: контрольная работа 3

Эта контрольная работа по теме «Метод Фурье» состоит из одного задания. Для решения отводится 2 (академических) часа. Правильно получено общее решение: «3», довести дома до конца и решить ещё одну задачу. Правильно сделана подстановка краевых условий и выписаны о.д.у. для T_k, но они не решены (решены неправильно): «4», довести дома до конца. Решено правильно до конца: «5». Иначе «2» - переписать контрольную.

Оценочное средство 4: индивидуальное задание (в рамках самостоятельной работы):

1. Индивидуальное домашнее задание на метод Фурье для параболического уравнения и на формулу Пуассона. Должно быть решено правильно до конца.
2. Индивидуальное домашнее задание на метод Фурье для уравнения Пуассона в круговой области (кольцо, сектор, сегмент и т.п.). Должно быть решено правильно до конца.

   Пример индивидуального задания.

$$\left[\begin{array}{l} u_t = 25u_{xx} + x + 5\cos\dfrac{\pi x}{2},\ 0 < x < 1,\ t > 0; \\ u_x(0,t) = t,\ u(1,t) = t; \\ u(x,0) = \cos\dfrac{3\pi x}{2}. \end{array}\right.$$

   По итогам практических занятий выставляется оценка, которая учитывает оценки по контрольным, ответы у доски и своевременность выполнения домашних заданий.

Пример контрольной работы 3

Тема: ***Решение смешанной задачи для уравнения гиперболического типа***

В области $0 < x < 1,\quad t > 0$ решите следующую смешанную задачу:

$$u_{tt} - 4u_{xx} + 8u_x - 4u_t + e^x \sin \pi x = 4(1 + x - 2t),$$

$$u(0,t) = t, \qquad u(1,t) = 1,$$

$$u(x,0) = x, \qquad u_t(x,0) = e^x \sin 4\pi x + 1 - x.$$

Шкала оценок

Соответствие систем оценок (согласно Приказу Ректора № 996 от 27.12.2006 г.)

Баллы БРС	Традиционные оценки в РФ	Баллы для перевода оценок	Оценки	Оценки
86-100	5	95-100	5+	A
		86-94	5	B
69-85	4	69-85	4	C
51-68	3	61-68	3+	D
		51-60	3	E
0-50	2	31-50	2+	FX
		0-30	2	F
51-60	Зачет		Зачет	Passed

Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине Уравнения математической физики. Семестр 9
Направление/Специальность: 03.03.02 Физика

Код контролируемой компетенции или ее части	Контролируемый раздел дисциплины	Контролируемая тема дисциплины	Наименование оценочного средства										Баллы темы	Баллы раздела
			Текущий контроль							Промежуточная аттестация				
			Опрос	Тест	Коллоквиум	Контрольная работа	Выполнение ЛР	Выполнение КР/КП	Выполнение ДЗ	Экзамен/Зачет	…	…		
ОПК-1	Раздел 1:Классификация дифференциальных уравнений второго порядка	Тема 1: Гиперболические и параболические уравнения	+			+			+	+			10	17,5
		Тема 2: Эллиптические уравнения. Понижение порядка уравнений	+			+			+	+			7,5	
ОПК-1	Раздел 2: Метод Фурье для ограниченной области	Тема 1: Гиперболические и параболические уравнения	+		+	+			+	+			15	27,5
		Тема 2:Эллиптические задачи.	+			+			+	+			12,5	
ОПК-1	Раздел 3: Элементы теории обобщенных функций	Тема 1: Сходимость в функциональных пространствах.	+			+			+	+			15	27,5
		Тема 2: Решение уравнений в обобщенных функциях	+			+			+	+			12,5	
ОПК-1	Раздел 4. Метод Фурье для неограниченных областей	Тема 1: Задача Коши для параболических уравнений	+			+			+	+			15	27,5
		Тема 2: Задача Коши для гиперболических уравнений	+			+			+	+			12,5	
		ИТОГО:											100	100

Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине Уравнения математической физики. Семестр А

Направление/Специальность: 03.03.02 Физика

Код контролируемой компетенции или ее части	Контролируемый раздел дисциплины	Контролируемая тема дисциплины	Наименование оценочного средства											Баллы темы	Баллы раздела
			Текущий контроль								Промежуточная аттестация				
			Опрос	Тест	Коллоквиум	Контрольная работа	Выполнение ЛР	Выполнение КР/КП	Выполнение ДЗ		Экзамен/Зачет	…	…		
ОПК-1	Раздел 1: Интегральные уравнения	Тема 1: Уравнения вырожденного типа.	+			+			+		+			10	17,5
		Тема 2: Уравнения с непрерывным ядром	+			+			+		+			7,5	
ОПК-1	Раздел 2: Теория потенциала	Тема 1: Дифференцирование кусочно-гладких функций	+		+	+			+		+			15	27,5
		Тема 2: Функции Грина	+			+			+		+			12,5	
ОПК-1	Раздел 3: Разрешимость краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона	Тема 1: Решение уравнение Лапласа на плоскости	+			+			+		+			15	27,5
		Тема 2: Решение уравнения Лапласа в пространстве	+			+			+		+			12,5	
ОПК-1	Раздел 4: Обоснование метода Фурье	Тема 1: Обоснование метода Фурье для уравнения теплопроводности.	+			+			+		+			15	27,5
		Тема 2: Обоснование метода Фурье для волнового уравнения.	+			+			+		+			12,5	
		ИТОГО:												100	100

Вопросы для подготовки к опросу
по дисциплине «Уравнения математической физики»

1. Прямое и обратное преобразование Фурье в пространстве Шварца. Основная лемма для преобразования Фурье в пространстве Шварца.
2. Вывод формулы Кирхгофа для решения задачи Коши для волнового уравнения.
3. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности методом преобразования Фурье с начальными данными из пространства Шварца.
4. Вывод формулы Пуассона для решения задачи Коши для волнового уравнения на плоскости. Метод спуска.
5. Вывод уравнений, описывающих поперечные колебания нагруженной струны и мембраны. Стационарные решения. Уравнение Лапласа.
6. Определение пространства обобщенных функций умеренного роста. Преобразование Фурье обобщенных функций умеренного роста.
7. Классификация квазилинейных уравнений второго порядка в точке.
8. Применение теоремы о свертке к решению задачи Коши для уравнения теплопроводности. Вычисление ядра Пуассона.

Вопросы для подготовки к экзамену

1. Приведение линейного уравнения второго порядка с двумя переменными к каноническому виду: получение уравнения характеристик
2. Уравнение характеристик. Доказательство леммы 1.
3. Уравнение характеристик. Доказательство леммы 2
4. Получение канонических форм для уравнения гиперболического типа.
5. Получение канонической формы для уравнения параболического типа.
6. Получение канонической формы для уравнения эллиптического типа.
7. Задача Коши для уравнения 2-го порядка с n переменными. Уравнение характеристик в случае n переменных.
8. Вывод уравнения малых колебаний струны (без учёта внешних сил).
9. Вывод уравнения продольных колебаний стержня.
10. Вывод уравнения малых колебаний струны с учётом сопротивления воздуха (по материалам практик).
11. Вывод уравнения малых колебаний струны с учётом силы тяжести (по материалам практик).
12. Вывод формулы Даламбера.
13. Корректность задачи о колебаниях бесконечной струны.
14. Иллюстрация формулы Даламбера: случай начального отклонения.
15. Иллюстрация формулы Даламбера: случай начального импульса.
16. Колебания полуограниченной струны. Пример.
17. Энергия малых колебаний ограниченной струны.
18. Вывод уравнения колебаний на основе принципа Гамильтона – Остроградского.
19. Единственность решения задачи о колебаниях ограниченной струны.
20. Метод Фурье для решения уравнения малых свободных колебаний струны с закреплёнными концами.
21. Представление решения задачи о малых колебаниях струны в виде совокупности стоячих волн.
22. Обоснование метода Фурье. Доказательство леммы.
23. Вывод одномерного уравнения теплопроводности.
24. Вывод одномерного уравнения диффузии (с объяснением всех предельных переходов).
25. Принцип максимума для уравнения диффузии-теплопроводности.
26. Следствия из принципа максимума: единственность решения, непрерывная зависимость от начальных данных.
27. Единственность решения на бесконечной прямой.

28. Решение одномерного уравнения теплопроводности методом Фурье.
29. Обоснование метода Фурье для уравнения теплопроводности.
30. Функция источника для отрезка.
31. Понятие сопряжённого оператора для линейной задачи. Ортогональность собственных функций самосопряжённого оператора.
32. Представление решения линейного дифференциального уравнения в виде ряда по собственным функциям самосопряжённого оператора.
33. Биортогональность собственных функций основного и сопряжённого операторов.
34. Задача теплопроводности "с обратным временем". Объяснение её некорректности.
35. Обратная задача диффузии: определение D по известному решению (на "3"- только решение прямой задачи).
36. Функция источника для бесконечной прямой.
37. Свойства функции источника для бесконечной прямой
38. Построение функции источника для отрезка методом отражения.
39. Вывод уравнения теплопроводности в пространстве.
40. Свойства гармонических функций: первая и вторая формулы Грина.
41. Интегральная формула Грина.
42. Принцип максимума для гармонической функции.

Руководитель направления 03.03.02

Директор института физических исследований и технологий, д.ф.-м.н., профессор

О.Т. Лоза