

Отзыв официального оппонента

на диссертацию Баддура Али «**Исследование консервативных разностных схем в моделях движения многих тел**», представленную к защите в диссертационном совете ПДС 0200.006 при федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Российский университет дружбы народов» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.2.2 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Актуальность темы диссертационной работы.

Диссертация Баддура Али посвящена весьма важному аспекту в описании явлений природы на основе динамических систем — использованию законов сохранения при численном интегрировании задачи многих тел.

Простейшие динамические системы обладают достаточно большим набором алгебраических интегралов движения, что позволяет свести интегрирование этих динамических систем к квадратурам. Классическая задача трех тел обладает большим числом алгебраических интегралов, но все же не интегрируема и существующих интегралов недостаточно для сведения этой задачи к квадратурам. Поэтому приходится искать другие методы получения решений задачи трех тел. В настоящее время известны многочисленные методы решения задачи многих тел, основанные на разложениях в сходящиеся степенные ряды (ряды Зундмана), на теории возмущений, на методе конечных разностей.

Явные разностные схемы, например, схемы Рунге-Кутты, дают очень простой в реализации на компьютере метод получения приближенных решений, но они не сохраняют нелинейные алгебраические интегралы движения. Если при численном интегрировании следить за изменением полной механической энергии и момента импульса, то можно видеть, как меняются эти величины, причем, как видно из компьютерных экспериментов, они изменяются с наличием резких скачков: в некоторые моменты времени что-то происходит с численным методом и расчеты теряют адекватность.

В 1990-х годах возникла мысль о проектировании разностных схем, сохраняющих те или иные алгебраические структуры динамической системы, в т.ч. ее симплектическую структуру или ее интегралы движения. К сожалению, симплектические схемы Рунге-Кутты не сохраняют интеграл полной энергии в задаче трех тел, а разностная схема Гринспена, сохраняющая все алгебраические интегралы, не сохраняет симплектическую структуру. Поэтому на данном этапе приходится выбирать между сохранением одной или другой структуры.

Если симплектические схемы Рунге-Кутты за последние 30 лет были подробно

изучены, то среди схем, сохраняющих все алгебраические интегралы движения задачи многих тел, известна лишь одна – та, что была предложена Гринспеном и затем несколько раз переоткрывалась. Ее алгебраические свойства все еще недостаточно исследованы, а методы построения таких схем не разработаны.

Недавно был предложен метод «квадратизации» энергии (H. Zhang et al., 2020), основная идея которого состоит в том, чтобы подобрать такое преобразование переменных, после которого энергия превращается в квадратичную функцию. В новых переменных симплектические схемы Рунге-Кутты будут сохранять интеграл энергии в силу теоремы Купера. Это приводит к естественному вопросу: можно ли таким путем построить новые разностные схемы для задачи многих тел, сохраняющие все ее алгебраические интегралы? Если возможно, то наследуют ли эти схемы другие алгебраические свойства решений задачи многих тел? Исследованию этих актуальных вопросов и посвящена диссертация Баддура Али.

Характеристика содержания диссертационной работы. Диссертация Баддура Али посвящена проектированию разностных схем для моделей движения многих тел, сохраняющих все алгебраические интегралы движения, на основе метода квадратизации энергии.

Решение этой важной задачи описано в диссертации последовательно, в первой главе описана среда, в которой будут проводиться компьютерные эксперименты, во второй – инструменты для оценки точности интегрирования, в третьей – оригинальная реализация симплектического метода Рунге-Кутты, в четвертой главе описано новое семейство консервативных разностных схем для задачи многих тел, а в пятой – результаты компьютерных экспериментов с этими разностными схемами. В Заключение дан краткий отчет по решению задач, перечисленных во Введении. Такое изложение позволяет убедиться в том, что соискатель познакомился со всеми этапами реализации нового численного метода исследования модели многих тел.

Новые теоретические результаты, полученные в рамках диссертационного исследования, сосредоточены в четвертой главе. Теорема Брунса утверждает, что задача многих тел имеет ровно 10 независимых алгебраических интегралов, из которых лишь один – интеграл энергии – не является квадратичным. Теорема Купера утверждает, что всякая симплектическая схема Рунге-Кутты сохраняет линейные и квадратичные интегралы движения. Метод квадратизации энергии, в своем изначальном варианте, основан на такой замене переменных, при которой энергия становится квадратичной функцией.

В диссертации справедливо замечено, что разностная схема, сохраняющая все алгебраические интегралы, едва ли будет сохранять гамильтонов вид уравнений движения.

Поэтому предложено не искать каноническую замену переменных, а ввести в рассмотрение дополнительные переменные. Тем самым размерность системы дифференциальных уравнений была увеличена, равно как и число алгебраических интегралов, к которым добавились интегралы, связывающие координаты тел и дополнительные переменные. Важно то, что все эти интегралы теперь можно выразить как квадратичные относительно координат, скоростей и дополнительных переменных. Поэтому аппроксимация системы с дополнительными переменными симплектическим методом Рунге-Кутты ведет к сохранению не только интеграла энергии, но и дополнительных интегралов-связей. Это не менее важно, чем сохранение энергии, поскольку позволяет на приближенном решении сохранить за дополнительными переменными их обычный смысл расстояний и обратных расстояний между телами. На мой взгляд, этот прием представляет собой существенно новое обобщение метода квадратизации энергии.

Результаты компьютерных экспериментов, представленные в 5-ой главе, убедительно иллюстрируют теоремы, доказанные в 4-ой главе, и подтверждают, что разностные схемы, построенные в 4-ой главе, действительно сохраняют все алгебраические интегралы движения.

Хотелось бы особо отметить результаты, связанные с задачей двух тел (п. 5.1). Задача двух тел интегрируема и сводится к квадратурам, поэтому из общих соображений можно было бы ожидать, что точное сохранение этих интегралов должно привести к наследованию приближенным решением алгебраических свойств точного решения. Однако это не так: траектории тел являются коническими сечениями, но приближенные решения не являются кривыми 2-го порядка. Сказанное верно и для случая Эйлера задачи трех тел. Таким образом, наследование разностной схемой всех алгебраических интегралов движения не влечет наследование ею других алгебраических свойств множества точных решений.

Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, их достоверность. Диссертация содержит ряд оригинальных теорем, доказательства которых были своевременно опубликованы в рецензируемых журналах, что вполне подтверждает обоснованность результатов. При компьютерном моделировании используется хорошо известная современная система компьютерной алгебры Sage. Достоверность результатов вычислений по предложенным алгоритмам подтверждается совпадением результатов вычислений в тестовых примерах с результатами других авторов.

Практическая значимость исследований. Методы, разработанные в диссертации, применимы к исследованию динамических систем, применяемых в самых различных областях человеческой деятельности, от исследования Солнечной системы до исследования

динамики популяций, всюду, где важно выполнение набора законов сохранения.

Недостатки работы. В диссертации имеется ряд недостатков.

1. Сохранение всех алгебраических интегралов движения динамической системы на приближенном решении вовсе не означает, что приближенное решение близко к точному. Интегралы выделяют некоторое интегральное многообразие, которое не могут покинуть как точное, так и приближенное решения, но это не означает, что эти решения близки друг к другу. Следовало бы подчеркнуть, что цель радикально улучшить сходимость путем сохранения всех алгебраических интегралов движения не ставилась.
2. При обсуждении результатов компьютерных экспериментов следовало подчеркнуть, что наследование схемой всех алгебраических интегралов движения не влечет наследования алгебраических свойств точного решения.
3. Результаты компьютерных экспериментов показали, что траектории, полученные симплектическими схемами Рунге-Кутты и предложенным в диссертации методом весьма близки. При этом в первом случае точно сохраняется симплектическая структура, но не сохраняется полная механическая энергия, а во втором случае, наоборот, сохраняется энергия, но не сохраняется симплектическая структура. В тексте справедливо отмечено, что по трудоемкости оба способа близки. Желателен был бы анализ в каких случаях метод, предложенный автором предпочтителен.
4. Работа содержит ряд опечаток.

Указанные недостатки не снижают общее положительное впечатление о диссертационной работе.

Заключение. Диссертационное исследование представляет собой законченное и самостоятельное исследование, в котором решена актуальная задача построения и исследования разностных схем, аппроксимирующих дифференциальные уравнения задачи многих тел и точно сохраняющих все алгебраические интегралы движения этих уравнений.

Диссертационное исследование соответствует паспорту специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, а именно **п. 1** «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений» в части разработки новых математических методов моделирования объектов и явлений — разностных схем высокого порядка для задачи многих тел, сохраняющих все алгебраические интегралы движения; **п. 2** «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий» в части разработки, обоснования и тестирования эффективных численных методов исследования классической модели многих тел с применением современных компьютерных технологий; **п.**

3 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента» в части реализации названных численных методов и алгоритмов в системе компьютерной алгебры Sage и проведения численных экспериментов.

Полученные автором результаты достоверны, основные выводы и заключения обоснованы. Автореферат корректно отражает результаты диссертационного исследования. Основные научные результаты диссертации достаточно полно изложены в 8 печатных изданиях, 3 из которых изданы в периодических научных журналах, индексируемых МБЦ Scopus, 2 — в журналах, включенных в Перечень ВАК/РУДН, 3 — в тезисах докладов.

На основании вышеизложенного считаю, что диссертационная работа «Численно-аналитические методы в задачах математического моделирования» полностью соответствует требованиям п. 2.2 разделы II Положения о присуждении ученых степеней в ФГАУ ВО Российский университет дружбы народов, утвержденного Ученым советом РУДН, протокол № 12 от 23 сентября 2019 г., предъявляемых к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, а ее автор — Баддур Али — степени кандидата физико-математических наук.

Официальный оппонент:

кандидат физико-математических наук (специальность 01.03.01 — «Астрометрия и небесная механика»), старший научный сотрудник ФГБУ Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН

Васильев Николай Николаевич

«__30__» января 2023 г.



Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, старший научный сотрудник

191023, наб. р. Фонтанки 27, Санкт-Петербург, Россия

Тел.: +7 (812) 312-40-58

Электронная почта: vasiliev@pdmi.ras.ru

Подпись Н.Н. Васильева удостоверяю.



Ученый секретарь
ПОМИ РАН
В.С. Михайлов