На правах рукописи

Будочкина Светлана Александровна

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Специальность 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва - 2023

Работа выполнена в Математическом институте имени академика С.М. Никольского факультета физико-математических и естественных наук ФГАОУ ВО "Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы".

Научный консультант: **Савчин Владимир Михайлович,** д.ф.-м.н., профессор, профессор Математического института имени академика С.М. Никольского ФГАОУ ВО "Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы".

Официальные оппоненты: **Дружинина Ольга Валентиновна,** д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра "Информатика и управление" РАН.

Сакбаев Всеволод Жанович, д.ф.-м.н., доцент, ведущий научный сотрудник ФГУ "Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН".

Севастьянов Леонид Антонович, д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры математического моделирования и искусственного интеллекта ФГАОУ ВО "Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы".

Ягола Анатолий Григорьевич, д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры математики физического факультета ФГБОУ ВО "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова".

Защита состоится 16 ноября 2023 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета ПДС 0200.007 при Российском университете дружбы народов имени Патриса Лумумбы по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, зал заседаний Ученого Совета.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке РУДН.

Автореферат разослан "____"________________ 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета ПДС 0200.007,
доктор физико-математических наук ВИващук — Ивацук В.Д.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Известный в классической механике принцип Остроградского выделяет действительное движение системы из всех кинематически возможных движений при более широких предположениях относительно сил по сравнению с принципом Гамильтона. В случае принципа Остроградского силы, действующие на систему, предполагаются произвольными, в случае принципа Гамильтона – потенциальными. Здесь мы используем терминологию работы А.С. Галиуллина[1]. Отметим, что в литературе не существует общепринятого названия указанных вариационных принципов. Например, в монографии Э.Т. Уиттекера[2] более общий принцип, как и его частный случай, называется принципом Гамильтона.

Уравнениями движения системы, к которым приводит принцип Остроградского, являются уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{\partial \mathsf{T}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathsf{T}}{\partial \dot{q}_i}\right) + \mathcal{Q}_i = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

где $\mathsf{T} = \mathsf{T}(q, \dot{q}, t)$ – кинетическая энергия системы, $\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}_i(q, \dot{q}, t)$ – обобщенная сила, отнесенная к координате q_i $(i = \overline{1, n})$.

Если на систему одновременно действуют потенциальные и непотенциальные активные силы, то обобщенная сила $\mathcal{Q}_i$ может быть представлена в виде

$$\mathcal{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_i} + \mathcal{P}_i,$$

где $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i(q, \dot{q}, t)$ – обобщенная непотенциальная сила, отнесенная к координате q_i, $\mathcal{U}(q)$ – силовая функция. В связи с этим получаем следующие уравнения движения:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \mathcal{P}_i = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

где $L(q, \dot{q}, t) = \mathsf{T}(q, \dot{q}, t) + \mathcal{U}(q)$ – лагранжиан системы.

Следуя работе В.М. Савчина[3], аналогичные уравнения в механике систем с бесконечным числом степеней свободы, то есть уравнения вида

$$\frac{\delta L}{\delta u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta u_t}\right) + \Lambda(u) = 0,$$

где через $\delta/\delta u$ и $\delta/\delta u_t$ обозначены функциональные производные по u и u_t соответственно, будем называть уравнениями Лагранжа с непотенциальными плотностями сил, а бесконечномерные системы, движения которых описываются этими уравнениями, – бесконечномерными лагранжевыми системами с непотенциальными силами.

[1] Галиуллин А.С. Аналитическая динамика. М.: РУДН, 1998.
[2] Уиттекер Э.Т. Аналитическая динамика. М.: Едиториал УРСС, 2004.
[3] Савчин В.М. Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем. М.: УДН, 1991.

В классической механике известны теоремы Томсона-Тета-Четаева о влиянии различных сил на устойчивость движения, поэтому обратная задача о представлении уравнений движения в указанном виде является актуальной даже для систем с конечным числом степеней свободы. Она представляет теоретический интерес и также имеет практическую ценность. В случае систем с бесконечным числом степеней свободы, для которых вопрос исследования устойчивости движения по структуре действующих сил остается пока мало изученным, результаты диссертационной работы могут оказаться весьма полезными для качественной оценки различных факторов, влияющих на устойчивость движения.

Одной из прямых задач механики систем с бесконечным числом степеней свободы является задача нахождения интегралов уравнений движения. Следует отметить, что интегралы уравнений движения имеют многочисленные применения. В частности, они могут использоваться для доказательства существования и единственности классических решений дифференциальных уравнений в частных производных (см., например, работы А.Н. Тихонова, А.А. Самарского, Р. Куранта), для исследования устойчивости движения (см. работы В.Г. Вильке, Дж. Марсдена, Т. Ратью). В работах П. Лакса законы сохранения применены для доказательства существования волновых решений уравнения Кортевега-де Фриза.

Задача нахождения интегралов уравнений движения тесно связана, в частности, с задачей представления уравнений движения в форме канонических уравнений Гамильтона. Для решения последней необходимо предварительно построить функционал действия, из условия стационарности которого получались бы соответствующие уравнения движения рассматриваемой системы, или, другими словами, построить гамильтониан, позволяющий представить уравнения движения в виде канонических уравнений Гамильтона. Обобщение канонического гамильтонова формализма на случай систем с бесконечным числом степеней свободы привело к неклассическому гамильтонову формализму, в основе которого лежит понятие неканонической скобки Пуассона. Теория гамильтоновых систем располагает весьма действенными методами интегрирования и качественного исследования уравнений движения, поэтому задача представления уравнений движения непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы в форме канонических и неканонических уравнений Гамильтона также является актуальной.

К прямым задачам механики бесконечномерных систем относится также задача определения качественных показателей, характеризующих свойства их движения. Такими качественными показателями являются, например, интегральные инварианты. Теория интегральных инвариантов, разработанная А. Пуанкаре для конечномерных систем, получила дальнейшее развитие в работах Э. Картана, В.В. Козлова. Взаимосвязь интегральных инвариантов с интегралами уравнений движения систем с бесконечным числом степеней свободы была установлена в работах В.М. Савчина.

Таким образом, многочисленные практические задачи приводят к необходимости исследования движения непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы, поэтому требуются эффективные способы анализа их состояния. В связи с этим представляет значительный интерес распространение методов классической механики на системы различной физической природы, движение которых описывается различными типами уравнений (обыкновенными дифференциальными, дифференциальными уравнениями в частных производных, интегро-дифференциальными уравнениями, дифференциально-разностными уравнениями и др.), с привлечением новых классов функционалов для построения интегральных вариационных формулировок уравнений движения.

Изложенное выше определяет актуальность решения прямых и обратных задач механики непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы в рассмотренных в диссертационной работе постановках.

В настоящей диссертационной работе получил развитие операторный подход к исследованию движения непотенциальных систем, что позволило расширить область применения методов классической механики и получить новые результаты для бесконечномерных, а также и для конечномерных систем. Это связано с тем, что операторный подход дает возможность исследовать одновременно разнообразные типы уравнений и их систем. В этом заключается новизна операторного подхода и его отличие от координатных методов. Кроме того, некоторые известные в классической механике результаты могут быть получены как следствия из результатов диссертационной работы.

Отметим, что основы операторного подхода в механике систем с бесконечным числом степеней свободы заложены в работах В.М. Савчина.

Степень разработанности темы исследования. Основные методы классической механики изложены в работах В.И. Арнольда, А.С. Галиуллина, Г. Голдстейна, В.В. Козлова, А.И. Лурье, А.И. Нейштадта, Э.Т. Уиттекера и др. Многие из этих методов были распространены на исследование движения систем различной физической природы и структуры (см., например, работы Дж. Биркгофа, О.В. Дружининой, И.А. Мухаметзянова, Р.Г. Мухарлямова, Ю.Г. Павленко, В.В. Румянцева, В.М. Савчина, В.Ж. Сакбаева, Л.А. Севастьянова, М. Табора, Л.А. Тахтаджяна, М.И. Тлеубергенова, Л.Д. Фаддеева, А.А. Шестакова, Л.Э. Эльсгольца, А.Г. Яголы, P.A. Dirac, P.D. Lax, F. Mimura, T. Nôno, M.C. Nucci, K.M. Tamizhmani). Для применения методов классической механики может потребоваться, чтобы соответствующие уравнения движения были представлены в форме уравнений Лагранжа или Гамильтона. Исследованию вопросов прямой и косвенной представимости уравнений движения систем с конечным и бесконечным числом степеней свободы в указанном виде посвящены как классические, так и современные работы, авторами которых являются В.Л. Бердичевский, А.С. Галиуллин, Г. Гельмгольц, В.Г. Задорожний, В.И. Заплатный, А.М. Попов, И.М. Рапопорт, В.М. Савчин, Г.К. Суслов, В.М. Филиппов, F. Bampi, A. Morro, J. Douglas, A. Mayer, R.M. Santilli, E. Tonti и др. Отметим, что в работах V. Volterra были получены условия потенциальности операторов и формула для построения функционала. Этим самым были заложены основы теории потенциальных операторов, что, начиная с работ E. Tonti, и привело в дальнейшем к возможности получения аналога условий Гельмгольца для различных классов дифференциальных уравнений.

Вариационные методы исследования уравнений движения изложены, например, в монографиях М.М. Вайнберга, С.Г. Михлина, В.С. Новоселова, К. Ректориса. В развитии вариационных формулировок различных уравнений движения с непотенциальными операторами с целью применения вариационных методов важную роль сыграли работы В.П. Диденко, А.Д. Ляшко, А.Е. Мартынюка, В.М. Филиппова, В.М. Шалова, W.V. Petryshyn.

Вопросы представимости уравнений движения конечномерных систем в форме уравнений Лагранжа с диссипативными или гироскопическими силами исследованы в работах С.Г. Шорохова, M. Crampin, U. Jungnickel, G. Kielau, P. Maisser, T. Mestdag, A. Müller, W. Sarlet.

В настоящее время большое внимание уделяется разработке способов построения интегралов различных типов уравнений, основанных на исследовании инвариантности как действий по Гамильтону, так и самих уравнений движения, в том числе и с непотенциальными операторами (см., например, работы Н.Х Ибрагимова, В.М. Савчина, Г.Н. Яковенко, G.W. Bluman, G. Caviglia, I.L. Freire, F. Mei, M.C. Nucci, P.J. Olver). После работы Э. Нетер[4] широкий интерес к рассматриваемой проблеме во многом связан с фундаментальными монографиями Л.В. Овсянникова[5] и Н.Х. Ибрагимова[6]. Отметим, что инвариантный подход позволяет находить решения уравнений движения.

Известна также взаимосвязь алгебраических структур с уравнениями механики (см, например, работы А.В. Борисова, И.С. Мамаева, П. Олвера, В.М. Савчина, R.M. Santilli).

Несмотря на то, что к изложенным проблемам было привлечено внимание многих исследователей, некоторые задачи остались нерешенными. Это прежде всего относится к целенаправленному распространению математических методов механики на исследование движения непотенциальных систем в случаях, когда их уравнения движения не могут быть приведены напрямую или косвенно к уравнениям, получаемым из принципа Гамильтона, а также к

[4]Нетер Э. Инвариантные вариационные задачи // Вариационные принципы механики, под редакцией Полака Л.С. М.: Физматгиз, 1959, стр. 611-630.

[5]Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[6]Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.

разработке единого подхода к исследованию движения как конечномерных, так и бесконечномерных систем.

Настоящая диссертация направлена на то, чтобы в какой-то степени восполнить эти пробелы.

Интерес к изложенным в диссертационной работе проблемам вызван возможностью дальнейшего развития некоторых известных методов механики потенциальных и непотенциальных систем для исследования более широкого класса уравнений движения и функционалов действия.

В работе автор, в основном, ограничился рассмотрением уравнений движения со второй производной по времени, что связано со стремлением сосредоточиться на получении исчерпывающих результатов для этого конкретного случая. С некоторыми видоизменениями результаты диссертации могут быть распространены и на уравнения движения с производными высших порядков по времени.

Цели и задачи исследования. Диссертационная работа посвящена разработке математических методов исследования движения непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы, что, с одной стороны, является дальнейшим развитием классической механики и теории динамических систем, а с другой - позволяет как весьма специальный частный случай исследовать движение и систем с конечным числом степеней свободы. В связи с этим цель работы заключается также в построении единой теории конечномерных и бесконечномерных систем. Связующим звеном в этом направлении служит операторный подход, на основе которого разработаны общие методы исследования различных классов уравнений движения.

Достижение указанных целей осуществляется путем решения следующих основных задач:

1. построение действий по Гамильтону для уравнений движения непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы с использованием эйлеровых и неэйлеровых классов функционалов,

2. приведение уравнений движения непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы к виду классических и неклассических уравнений Гамильтона,

3. получение формул для нахождения интегралов уравнений движения непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы, в том числе на основе свойств инвариантности как самих уравнений движения, так и соответствующих действий по Гамильтону.

Следуя установившейся для механики конечномерных систем терминологии (см. работы А.С. Галиуллина), первые две задачи будем называть обратными задачами механики бесконечномерных систем, а последнюю – прямой задачей.

Научная новизна. Все представленные в диссертационной работе результаты являются новыми.

Среди полученных результатов выделим следующие:

1. получены необходимые и достаточные условия представимости уравнений движения систем с бесконечным числом степеней свободы в форме уравнений Лагранжа с не-B_u-потенциальными плотностями сил,

2. разработан конструктивный прием построения действий по Гамильтону, в общем случае не принадлежащих классу функционалов Эйлера-Лагранжа,

3. в терминах необходимых и достаточных условий определена структура уравнений движения квази-B_u-потенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы,

4. используя подходы, в том числе основанные на применении теории преобразований переменных для установления инвариантности уравнений движения, получены формулы для нахождения интегралов уравнений движения квази-B_u-потенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы,

5. получено условие инвариантности до дивергенции действий по Гамильтону и дан общий вид интегралов уравнений движения систем с бесконечным числом степеней свободы,

6. установлена связь симметрий уравнений движения и действий по Гамильтону с алгебраическими структурами,

7. исследованы вопросы представимости рассматриваемых уравнений движения в форме B_u-гамильтоновых уравнений, уравнений Гамильтона, Гамильтона-допустимых уравнений.

Теоретическая и практическая значимость работы. Диссертация носит теоретический характер и относится к области фундаментальных исследований. Полученные результаты имеют существенное значение для аналитической механики при исследовании потенциальных и непотенциальных взаимодействий различной физической природы, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, дифференциальными уравнениями с частными производными, интегро-дифференциальными уравнениями, дифференциально-разностными уравнениями и др. типами уравнений, а также их систем. Частично они получены в результате исследований автора по грантам РФФИ и выполняемым в РУДН НИР.

Часть результатов диссертационной работы была внедрена в учебный процесс на кафедре математического анализа и теории функций, а затем в Математическом институте имени академика С.М. Никольского РУДН: использовалась при чтении курсов "Теория потенциальных операторов" и "Симметрийный анализ уравнений и функционалов", предназначенных для студентов магистратуры направления 01.04.01 "Математика", специализация "Функциональные методы в дифференциальных уравнениях и междисциплинарных исследованиях". Кроме того, результаты диссертационной работы служат основой постановок задач для выпускных квалификационных работ студентов бакалавриата и магистерских диссертаций по направлениям "Математика" и "Прикладная математика и информатика", а также для кандидатских диссертаций по специальности 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин.

Результаты диссертации могут быть также использованы при создании специальных курсов, в том числе электронных, по механике систем с бесконечным числом степеней свободы для аспирантов, обучающихся по направлению 1.1 "Математика и механика".

Методология и методы исследования. В исследованиях, проведенных в диссертационной работе, применяются методы аналитической динамики, современные методы решения обратных задач вариационного исчисления и нелинейного функционального анализа.

Положения, выносимые на защиту.

1. Критерий представимости достаточно общих уравнений движения непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы со второй производной по времени в форме уравнений Лагранжа с не-B_u-потенциальными плотностями сил и следствия из него,

2. общая структура уравнений движения квази-B_u-потенциальных (квазипотенциальных, B_u-потенциальных, потенциальных) систем с бесконечным числом степеней свободы со второй производной по времени и формулы для построения соответствующих действий по Гамильтону,

3. общий вид интегралов уравнений движения квази-B_u-потенциальных (квазипотенциальных, B_u-потенциальных, потенциальных) систем с бесконечным числом степеней свободы со второй производной по времени, в том числе при наличии симметрий уравнений движения,

4. связь между симметриями уравнений движения и алгебраическими структурами,

5. условие инвариантности до дивергенции действия по Гамильтону и общий вид интегралов уравнений движения квази-B_u-потенциальных (ква-

зипотенциальных, B_u-потенциальных, потенциальных) систем с бесконечным числом степеней свободы со второй производной по времени,

6. связь между вариационными симметриями и алгебраическими структурами,
7. связь между рассматриваемыми типами симметрий,
8. теоремы о представлении уравнений движения непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы в форме B_u-гамильтоновых уравнений, уравнений Гамильтона, Гамильтона-допустимых уравнений,
9. иллюстративные примеры.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты работы опубликованы в рецензируемых научных журналах. В диссертации они сформулированы в виде теорем и строго доказаны.

Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на семинаре "Функциональные пространства" под руководством проф. Х. Трибеля и проф. Х.-Ю. Шмайссера (университет им. Ф. Шиллера, Йена, Германия, 2010); на XLVI Всероссийской конференции по проблемам математики, информатики, физики и химии (Москва, 2010); на Международной научной конференции "Современные проблемы анализа и преподавания математики", посвященной 105-летию академика С.М. Никольского (Москва, 2010); на 8-ом Международном Конгрессе ISAAC (Москва, 2011); на четвертой Международной конференции "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования", посвященной 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева (Москва, 2013); на семинаре "Математическое моделирование процессов динамики" под руководством д.ф.-м.н., профессора Р.Г. Мухарлямова (Москва, РУДН, 2014); на семинаре кафедры теоретической физики РУДН под руководством д.ф.-м.н., профессора Ю.П. Рыбакова (Москва, РУДН, 2014); на семинаре "Динамические системы и механика" под руководством д.ф.-м.н., профессора П.С. Красильникова и д.ф.-м.н., доцента Б.С. Бардина (Москва, МАИ, 2014, 2019); на семинаре "Математическое моделирование процессов динамики", посвященном 95-летию со дня рождения профессора А.С. Галиуллина, под руководством д.ф.-м.н., профессора Р.Г. Мухарлямова (Москва, РУДН, 2014); на Международной научной конференции "Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы" (Москва, 2014); на Всероссийской конференции с международным участием "Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем" (Москва, 2015); на Третьей Международной научно-практической конференции "Системы управления, технические системы: устойчивость, стабилизация, пути и методы исследования" (Елец, 2017, пленарный доклад); на семинаре "Гамильтоновы системы и статистическая механика" под руководством д.ф.-м.н., профессора, члена-корреспондента РАН С.В. Болотина, д.ф.-м.н., профессора, академика РАН В.В. Козлова, д.ф.-м.н., профессора, академика РАН Д.В. Трещева (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2017); на пятой Международной конференции "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования", посвященной 95-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева (Москва, 2018); на сорок третьем Межвузовском научном семинаре "Геометрия и расчет тонких оболочек неканонической формы" (Москва, РУДН, 2019); на Международной научной конференции "Бесконечномерный анализ и математическая физика", посвященной памяти С.В. Фомина (Москва, 2019); на научном семинаре Математического института им. С.М. Никольского РУДН по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям под руководством д.ф.-м.н., профессора А.Л. Скубачевского (Москва, РУДН, 2019, 2023); на Международной конференции "Современные проблемы математики и механики", посвященной 80-летию академика РАН В.А. Садовничего (Москва, 2019); на семинаре "Математическое моделирование процессов динамики", посвященном 100-летию со дня рождения профессора А.С. Галиуллина, под руководством д.ф.-м.н., профессора Р.Г. Мухарлямова (Москва, РУДН, 2019); на Международной конференции "Математическая физика, динамические системы и бесконечномерный анализ 2021" (Долгопрудный, МФТИ, 2021, онлайн); на онлайн-конференции "Yarmouk Mathematics Conference on Differential Equations: Analysis, Modeling and Numerical Computations DEAMN-2021" (Yarmouk University, Irbid, Jordan, 2021, online); на семинаре "Обратные задачи математической физики" под руководством д.ф.-м.н., профессора А.Б. Бакушинского, д.ф.-м.н., профессора А.В. Тихонравова, д.ф.-м.н., профессора А.Г. Яголы (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2023, онлайн); на XXXVI Международной Воронежской весенней математической школе "Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения" (Воронеж, ВГУ, 2023, онлайн); на семинаре "Непотенциальные динамические системы и нейросетевые технологии" под руководством д.ф.-м.н., профессора В.М. Савчина, к.ф.-м.н., доцента С.Г. Шорохова (Москва, РУДН, 2023, онлайн); на III Международной конференции "Математическая физика, динамические системы, бесконечномерный анализ", посвященной 100-летию В.С. Владимирова, 100-летию Л.Д. Кудрявцева и 85-летию О.Г. Смолянова (Долгопрудный, МФТИ, 2023, онлайн).

Личный вклад автора. Все результаты, включенные в диссертацию, получены автором самостоятельно. В работах с соавторами [2-11, 16] вклад диссертанта является определяющим. В работах с учениками [13-15] автору принадлежат постановки задач и разработка методов их решения.

Публикации. За последние 10 лет по теме диссертации опубликовано 15 работ в изданиях, индексируемых международными базами данных Web of Science и Scopus, и 1 работа в другом рецензируемом издании. Тезисы докладов не учитываются. Список основных публикаций приведен в конце автореферата.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 296 страниц, включая список литературы из 208 наименований.

Благодарности. Автор выражает искреннюю благодарность научному консультанту Владимиру Михайловичу Савчину за оказанное влияние на научные интересы, постоянное внимание к работе и полезные дискуссии.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы исследования, показана степень ее разработанности, сформулированы цели и задачи работы, охарактеризованы научная новизна результатов и их теоретическая и практическая значимость, описаны методы и методология исследования. Сформулированы положения, выносимые на защиту. Обоснована достоверность результатов. Дана информация о публикации результатов и их апробации. Кроме того, кратко изложено содержание диссертации.

В **первой главе** исследован вопрос о распознавании принадлежности систем с бесконечным числом степеней свободы к лагранжевым системам с не-B_u-потенциальными силами. Получены необходимые и достаточные условия представимости операторного уравнения со второй производной по времени в форме уравнения Лагранжа с не-B_u-потенциальной плотностью силы. Разработан конструктивный прием построения обобщенного лагранжиана, в общем случае не принадлежащего классу функционалов Эйлера-Лагранжа. В терминах необходимых и достаточных условий определена структура операторного уравнения движения с квази-B_u-потенциальным оператором.

Пусть уравнения движения материальной системы представлены в операторном виде

$$N(u) \equiv P_{2u,t}u_{tt} + P_{1u,t}u_t + P_{3u,t}u_t^2 + Q(t,u) = 0, \tag{1}$$
$$u \in D(N) \subseteq U \subseteq V, \quad t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R},$$
$$u_t \equiv D_t u \equiv \frac{d}{dt}u, \qquad u_{tt} \equiv \frac{d^2}{dt^2}u.$$

Здесь $\forall t \in [t_0, t_1]$, $\forall u \in U_1$ операторы $P_{iu,t} : U_1 \to V_1$ $(i = \overline{1,3})$ являются линейными; $Q : [t_0, t_1] \times U_1 \to V_1$ – произвольный оператор, вообще говоря, нелинейный; $D(N)$ – область определения оператора N, $U = C^2([t_0,t_1];U_1)$, $V = C([t_0,t_1];V_1)$, U_1, V_1 - действительные линейные нормированные пространства, $U_1 \subseteq V_1$.

Будем предполагать, что при каждых $t \in [t_0,t_1]$ и $g(t), u(t) \in U_1$ функции $P_{1u,t}g(t)$ и $P_{3u,t}g(t)$ со значениями в V_1 непрерывно дифференцируемы, а $P_{2u,t}g(t)$ - дважды непрерывно дифференцируема на $[t_0,t_1]$.

Под решением уравнения (1) понимается функция $u \in D(N)$, удовлетворяющая (1).

В дальнейшем для упрощения обозначений будем записывать (1) также в виде

$$N(u) \equiv P_{2u}u_{tt} + P_{1u}u_t + P_{3u}u_t^2 + Q(u) = 0,$$

считая, что операторы P_{iu} $(i = \overline{1,3})$ и Q могут зависеть и от t.

Операторное уравнение движения (1) может быть обыкновенным дифференциальным, дифференциальным уравнением в частных производных, интегро-дифференциальным уравнением, дифференциально-разностным уравнением и др., а при $P_{3u} \equiv 0$ – системой таких уравнений.

Приведем примеры уравнений, имеющих структуру уравнения (1).

1. Уравнение, описывающее малые поперечные колебания шарнирно закрепленного прямолинейного трубопровода, по которому течет идеальная жидкость со скоростью $v(t)$ и при отсутствии внутреннего и внешнего трения

$$N(u) \equiv u_{tt} + 2\beta v(t)u_{tx} + u_{xxxx} + v^2(t)u_{xx} + \beta v'(t)u_x = 0.$$

Здесь

$$P_2 = I, \quad P_1 = 2\beta v(t)D_x, \quad P_3 = 0, \quad Q = D_x^4 + v^2(t)D_x^2 + \beta v'(t)D_x,$$

I – тождественный оператор.

2. Уравнение Эмдена равновесия для политропного газа

$$N(u) \equiv \ddot{u} + \frac{2}{t}\dot{u} + u^5 = 0.$$

В данном случае

$$P_2 = I, \quad P_1 = \frac{2}{t}I, \quad P_3 = 0, \quad Q(u) = u^5.$$

3. Система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$N_i(u) \equiv \sum_{j=1}^{2n} \mathcal{C}_{ij}(t,u)\dot{u}^j + \mathcal{D}_i(t,u) = 0, \qquad i = \overline{1,2n}.$$

Здесь

$$P_{1u} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{11}(t,u) & \mathcal{C}_{12}(t,u) & \dots & \mathcal{C}_{1,2n}(t,u) \\ \mathcal{C}_{21}(t,u) & \mathcal{C}_{22}(t,u) & \dots & \mathcal{C}_{2,2n}(t,u) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{C}_{2n,1}(t,u) & \mathcal{C}_{2n,2}(t,u) & \dots & \mathcal{C}_{2n,2n}(t,u) \end{pmatrix},$$

$$P_2 = P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q(u) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_1(t,u) \\ \mathcal{D}_2(t,u) \\ \vdots \\ \mathcal{D}_{2n}(t,u) \end{pmatrix}.$$

Будем предполагать, что билинейная форма

$$\Phi(\cdot,\cdot) \equiv \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle\cdot,\cdot\rangle \, dt : V \times V \to \mathbb{R} \tag{2}$$

такова, что билинейное отображение $\Phi_1(\cdot,\cdot) \equiv \langle\cdot,\cdot\rangle$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} \langle v_1(t), v_2(t)\rangle &= \langle v_2(t), v_1(t)\rangle \qquad \forall\, v_1(t), v_2(t) \in V_1, \\ D_t \langle v(t), g(t)\rangle &= \langle D_t v(t), g(t)\rangle + \langle v(t), D_t g(t)\rangle \qquad \forall\, v, g \in C^1([t_0,t_1]; U_1). \end{aligned}$$

Рассмотрим линейный оператор $B_u : D(B_u) \subset V \to V$.

Определение 1. Силы с плотностью $f(u)$ называются B_u-потенциальными (не-B_u-потенциальными) на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$, если существует (не существует) функционал W_f такой, что

$$\delta W_f[u,h] = \Phi(f(u), B_u h) \;\; \forall u \in D(N), \;\; \forall h \in D(N'_u, B_u) = D(N'_u) \cap D(B_u).$$

Определение 2. Не-B_u-потенциальная сила с плотностью $\Lambda(u)$ называется существенно не-B_u-потенциальной, если

$$\Lambda(u) = \sum_{i=1}^{k} \Lambda^i(u), \tag{3}$$

и каждое слагаемое в правой части (3), а также всевозможные их суммы, состоящие из двух, трех и т.д. слагаемых, являются плотностями не-B_u-потенциальных сил.

В этом случае плотность $\Lambda(u)$ будем называть плотностью существенно не-B_u-потенциальной силы.

Определение 3. Оператор $N : D(N) \subset U \to V$ называется квази-B_u-потенциальным на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы (2), если существуют линейный оператор $B_u : D(B_u) \subset V \to V$, дифференцируемый по Гато функционал $F : D(F) = D(N) \to \mathbb{R}$ и плотность существенно не-B_u-потенциальной силы $\Lambda(u)$ такие, что

$$\delta F[u,h] + \Phi\left(\Lambda(u), B_u h\right) = \Phi(N(u), B_u h) \qquad \forall u \in D(N), \;\; \forall h \in D(N'_u, B_u).$$

Если $B_u = I$ - тождественный оператор, то оператор N называется квази-потенциальным.

Предположим, что $\Lambda(u)$ имеет вид

$$\Lambda(u) = \Lambda_{2u} u_{tt} + \Lambda_{1u} u_t + \Lambda_{3u} u_t^2 + \Lambda_4(u),$$

причем операторы Λ_{iu} $(i = \overline{1,3})$ и Λ_4 могут зависеть также и от t.

Получим условия, при которых уравнение движения (1) допускает представление в виде уравнения Лагранжа с не-B_u-потенциальной плотностью силы.

Теорема 1. *Пусть $D_t^* = -D_t$ на $D(N_u', B_u)$. Оператор N (1) является квази-B_u-потенциальным на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы (2) $\Longleftrightarrow$ $\forall u \in D(N)$, $\forall t \in [t_0, t_1]$, $\forall h \in D(N_u', B_u)$ выполняются следующие условия на $D(N_u', B_u)$:*

$$B_u^* \tilde{P}_{2u} - \tilde{P}_{2u}^* B_u = 0, \tag{4}$$

$$u_t \tilde{P}_{3u}^* B_u - \tilde{P}_{2u}^{*\prime}(B_u(\cdot); u_t) - \tilde{P}_{2u}^* B_u'(\cdot; u_t) + B_u^* \tilde{P}_{3u}(u_t(\cdot)) = 0, \tag{5}$$

$$-2\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}_{2u}^* B_u) + \tilde{P}_{1u}^* B_u + B_u^* \tilde{P}_{1u} = 0, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\tilde{P}_{2u}^* B_u)h + [B_u'(\cdot; h)]^* \tilde{Q}(u) - [B_u'(h; \cdot)]^* \tilde{Q}(u) + \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}_{1u}^* B_u)h + \\ + B_u^* \tilde{Q}_u' h - \tilde{Q}_u'^* B_u h = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{1u}^{*\prime}(B_u h; u_t) + B_u^* \tilde{P}_{1u}'(u_t; h) - [\tilde{P}_{1u}'(u_t; \cdot)]^* B_u h + 2u_t \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}_{3u}^* B_u)h + \\ + \tilde{P}_{1u}^* B_u'(h; u_t) - 2\frac{\partial}{\partial t}\tilde{P}_{2u}^{*\prime}(B_u h; u_t) + [B_u'(\cdot; h)]^* \tilde{P}_{1u} u_t - \\ - 2\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}_{2u}^* B_u'(h; u_t)) - [B_u'(h; \cdot)]^* \tilde{P}_{1u} u_t = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} B_u^* \tilde{P}_{2u}'(u_{tt}; h) - \tilde{P}_{2u}^{*\prime}(B_u h; u_{tt}) - [\tilde{P}_{2u}'(u_{tt}; \cdot)]^* B_u h + 2u_{tt} \tilde{P}_{3u}^* B_u h + \\ + [B_u'(\cdot; h)]^* \tilde{P}_{2u} u_{tt} - \tilde{P}_{2u}^* B_u'(h; u_{tt}) - [B_u'(h; \cdot)]^* \tilde{P}_{2u} u_{tt} = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} -\tilde{P}_{2u}^{*\prime\prime}(B_u h; u_t; u_t) + B_u^* \tilde{P}_{3u}'(u_t^2; h) - [\tilde{P}_{3u}'(u_t^2; \cdot)]^* B_u h + \\ + 2u_t \tilde{P}_{3u}^{*\prime}(B_u h; u_t) + [B_u'(\cdot; h)]^* \tilde{P}_{3u} u_t^2 - 2\tilde{P}_{2u}^{*\prime}(B_u'(h; u_t); u_t) - \\ - \tilde{P}_{2u}^* B_u''(h; u_t; u_t) + 2u_t \tilde{P}_{3u}^* B_u'(h; u_t) - [B_u'(h; \cdot)]^* \tilde{P}_{3u} u_t^2 = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\tilde{P}_{iu} = P_{iu} - \Lambda_{iu} \ (i = \overline{1,3}), \quad \tilde{Q}(u) = Q(u) - \Lambda_4(u).$$

Замечание 1. Может оказаться, что найденная из условий (4)-(10) плотность не-B_u-потенциальной силы $\Lambda(u)$ не будет являться плотностью существенно не-B_u-потенциальной силы. Это значит, что $\Lambda(u)$ может быть представлена в виде

$$\Lambda(u) = \Lambda_{\text{П}}(u) + \Lambda_{\text{СН}}(u), \tag{11}$$

где $\Lambda_{\text{П}}(u)$ – плотность B_u-потенциальной силы, $\Lambda_{\text{СН}}(u)$ – плотность существенно не-B_u-потенциальной силы.

Поскольку наша цель – представить уравнение движения (1) в виде

$$N(u) \equiv \frac{\delta L}{\delta u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta u_t}\right) + \Lambda(u) = 0, \tag{12}$$

где $\Lambda(u)$ – плотность существенно не-B_u-потенциальной силы, то, подставляя в (12) вместо $\Lambda(u)$ правую часть (11), получаем

$$N(u) \equiv \frac{\delta L}{\delta u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta u_t}\right) + \Lambda_{\text{П}}(u) + \Lambda_{\text{СН}}(u) = 0,$$

или

$$N(u) \equiv \frac{\delta L_1}{\delta u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L_1}{\delta u_t}\right) + \Lambda_{\text{СН}}(u) = 0,$$

то есть заданное уравнение движения однозначно представимо в виде (12).

В дальнейшем плотность существенно не-B_u-потенциальной силы также будем обозначать через $\Lambda(u)$.

Получим формулу для построения лагранжиана, в общем случае принадлежащего неэйлерову классу функционалов.

Теорема 2. *Пусть $D_t^* = -D_t$ на $D(N'_u, B_u)$ и оператор N вида (1) является квази-B_u-потенциальным на $D(N)$ относительно билинейной формы (2). Тогда функционал F имеет следующий вид:*

$$F[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big\{ \Big\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_t u), B_u u_t \Big\rangle + \Big\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{2u} u_t, B_u u_t \Big\rangle + \Big\langle \tilde{\mathfrak{R}}_1(u), B_u u_t \Big\rangle -$$

$$- \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B_u^* \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}) u, u_t \right\rangle + \tilde{\mathfrak{B}}[u] \Big\} dt + F[u_0], \tag{13}$$

где

$$\Phi(\tilde{\mathfrak{R}}_1(u), B_u u_t) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_0^1 \left\langle -\tilde{P}_{1\tilde{u}(\lambda)}(u - u_0), B_{\tilde{u}(\lambda)} \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} \right\rangle d\lambda dt,$$

$$\Phi(\tilde{\mathfrak{R}}_{2u} u_t, B_u u_t) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_0^1 \left\langle -\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)}(u_t - u_{0_t}), B_{\tilde{u}(\lambda)} \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} \right\rangle d\lambda dt,$$

$$\Phi(\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_t u), B_u u_t) =$$
$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_0^1 \left\langle -\tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)} \left(\frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}(u-u_0) \right), B_{\tilde{u}(\lambda)} \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} \right\rangle d\lambda dt,$$

$$\tilde{\mathfrak{B}}[u] = \int\limits_0^1 \Big[\Big\langle \tilde{Q}(\tilde{u}(\lambda)), B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0) \Big\rangle +$$
$$+ \lambda \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B^*_{\tilde{u}(\lambda)} \tilde{P}_{1\tilde{u}(\lambda)})(u-u_0), u-u_0 \right\rangle -$$
$$- \lambda \left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2}(B^*_{\tilde{u}(\lambda)} \tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)})(u-u_0), u-u_0 \right\rangle \Big] d\lambda,$$

$\tilde{u}(\lambda) = u_0 + \lambda(u-u_0)$, u_0 - *фиксированный элемент из* $D(N)$.

Замечание 2. Иногда функционал $F[u]$ вида (13) будем обозначать также $F^{t_1}[u]$.

Выясним структуру уравнения движения (1) в случае квази-B_u-потенциальной системы с бесконечным числом степеней свободы.

Теорема 3. *Пусть* $D_t^* = -D_t$ *на* $D(N'_u, B_u)$, $\exists\, B_u^{-1}$. *Условия (4) - (10) выполняются тогда и только тогда, когда операторы* P_{iu} $(i = \overline{1,3})$ *и* Q *имеют вид*

$$P_{2u} u_{tt} = \Lambda_{2u} u_{tt} -$$
$$-(B_u^{-1})^*(u \tilde{\mathfrak{R}}^*_{3u} B_u u_{tt}) - \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u u_{tt}) - (B_u^{-1})^* \tilde{\mathfrak{R}}^*_{2u} B_u u_{tt} - \tilde{\mathfrak{R}}_{2u} u_{tt},$$

$$P_{1u} u_t = -(B_u^{-1})^* \left(u \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\mathfrak{R}}^*_{3u} B_u) u_t \right) - (B_u^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t}(B_u^* \tilde{\mathfrak{R}}_{3u})(u u_t) -$$
$$-(B_u^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\mathfrak{R}}^*_{2u} B_u) u_t + (B_u^{-1})^* \tilde{\mathfrak{R}}'^*_{1u} B_u u_t + (B_u^{-1})^* [B'_u(u_t; \cdot)]^* \tilde{\mathfrak{R}}_1(u) -$$
$$-(B_u^{-1})^* B_u^{*\prime}(\tilde{\mathfrak{R}}_1(u); u_t) - \tilde{\mathfrak{R}}'_{1u} u_t - (B_u^{-1})^* \left(\frac{\partial}{\partial t} B_u^{*\prime}(\tilde{\mathfrak{R}}_{2u} u; \cdot) \right)^* u_t -$$
$$-(B_u^{-1})^* \left(\frac{\partial}{\partial t} B_u^* \tilde{\mathfrak{R}}'_{2u}(u; \cdot) \right)^* u_t - (B_u^{-1})^* \left(\frac{\partial}{\partial t} B_u^* \tilde{\mathfrak{R}}_{2u} \right)^* u_t +$$
$$+(B_u^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} B_u^{*\prime}(\tilde{\mathfrak{R}}_{2u} u; u_t) + (B_u^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} B_u^* \tilde{\mathfrak{R}}'_{2u}(u; u_t) + \Lambda_{1u} u_t,$$

$$
\begin{gathered}
P_{3u}u_t^2 = (B_u^{-1})^*(\tilde{\mathfrak{R}}'_{3u}(u_t u;\cdot))^* B_u u_t - (B_u^{-1})^*(u\tilde{\mathfrak{R}}^{*\prime}_{3u}(B_u u_t; u_t)) - \\
-(B_u^{-1})^*(u\tilde{\mathfrak{R}}^*_{3u}B'_u(u_t;u_t)) - (B_u^{-1})^* B_u^{*\prime}(\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_t u); u_t) - \tilde{\mathfrak{R}}'_{3u}(u_t u; u_t) - \\
-\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}u_t^2 + (B_u^{-1})^*[B'_u(u_t;\cdot)]^*\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_t u) + (B_u^{-1})^*[\tilde{\mathfrak{R}}'_{2u}(u_t;\cdot)]^* B_u u_t - \\
-(B_u^{-1})^*\tilde{\mathfrak{R}}^{*\prime}_{2u}(B_u u_t; u_t) - (B_u^{-1})^*\tilde{\mathfrak{R}}^*_{2u}B'_u(u_t;u_t) - \tilde{\mathfrak{R}}'_{2u}(u_t;u_t) - \\
-(B_u^{-1})^* B_u^{*\prime}(\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u_t; u_t) + (B_u^{-1})^*[B'_u(u_t;\cdot)]^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u_t + \Lambda_{3u}u_t^2,
\end{gathered}
$$

$$
Q(u) = \Lambda_4(u) + (B_u - grad)_{\Phi_1}\tilde{\mathfrak{B}}[u] - \\
- (B_u^{-1})^*\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_1(u) + (B_u^{-1})^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}(B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u})u.
$$

Во **второй главе** теория групп преобразований переменных применена для исследования инвариантности уравнений движения бесконечномерных систем, нахождения их интегралов и выявления взаимосвязи с алгебраическими структурами.

Рассмотрим однопараметрическую группу преобразований вида

$$
G : \begin{cases} \overline{t} = t + \varepsilon\varphi(t,u), \\ \overline{u} = u + \varepsilon\psi(t,u), \end{cases} \tag{14}
$$

где φ, ψ - некоторые операторы.

С помощью преобразования (14) заданной функции $u(t)$ можно поставить в соответствие функцию $\overline{u}(t,\varepsilon)$ по правилу

$$
\overline{u} = u + \varepsilon S(u), \tag{15}
$$

где $S(u) = \psi(t,u) - u_t\varphi(t,u)$. При этом оператор S называется генератором преобразования (15).

Определение 4. Преобразование (15) называется симметрией уравнения движения

$$
N(u) = 0, \tag{16}
$$

если для любого достаточно малого ε и любого решения u этого уравнения функция $\overline{u}$ вида (15) также является решением этого уравнения.

Отметим, что в этом случае оператор S называется также генератором симметрии уравнения движения (16).

Определение 5. Функционал $I[t,u]$ называется интегралом уравнения движения (1), если $I[t,u(t)]$ не зависит от t, когда $u(t)$ есть решение уравнения (1).

Теорема 4. *Пусть S_1, S_2 - генераторы симметрий уравнения (1), оператор N является B_u-потенциальным на $D(N)$ относительно билинейной формы (2). Тогда выражение*

$$I[t,u] = D_t \langle P_{2u} S_2(u), B_u S_1(u)\rangle -$$

$$- \langle 2P_{3u}(u_t S_2(u)) + 2P_{2u} D_t S_2(u) + P_{1u} S_2(u), B_u S_1(u)\rangle \qquad (17)$$

определяет интеграл заданного уравнения движения.

Теорема 5. *Пусть S_1 - генератор симметрии уравнения движения (1) и существуют операторы S_2 и B_u такие, что $N_u'^* B_u S_2(u) = 0$ на решениях этого уравнения. Тогда выражение*

$$I[t,u] = D_t \langle P_{2u} S_1(u), B_u S_2(u)\rangle -$$

$$- \langle 2P_{3u}(u_t S_1(u)) + 2P_{2u} D_t S_1(u) + P_{1u} S_1(u), B_u S_2(u)\rangle \qquad (18)$$

определяет интеграл заданного уравнения движения.

Определение 6. Алгеброй $\mathcal{A}$ называется линейное пространство над полем $\mathcal{K}$, наделенное билинейным произведением $*$, удовлетворяющим для произвольных $a, b, c \in \mathcal{A}$ и любом $\lambda \in \mathcal{K}$ следующим условиям:

$$a * (b + c) = a * b + a * c,$$

$$(a + b) * c = a * c + b * c,$$

$$(\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda(a * b).$$

Определение 7. Алгебра Ли - это алгебра $\mathcal{A}$ над полем $\mathcal{K}$, для которой выполняются условия

$$a * b + b * a = 0,$$

$$a * (b * c) + b * (c * a) + c * (a * b) = 0 \qquad \forall a, b, c \in \mathcal{A}.$$

Определение 8. Любая алгебра $\mathcal{A}$ над полем $\mathcal{K}$ с произведением $*$ называется Ли-допустимой алгеброй, если алгеброй Ли является алгебра $\mathcal{A}$, которая есть линейное пространство $\mathcal{A}$ над полем $\mathcal{K}$, наделенное билинейным произведением

$$[a, b] = a * b - b * a \qquad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Определение 9. Пусть $\hat{G}$ – линейное пространство генераторов симметрий уравнения движения. Линейный оператор $\mathcal{R} : \hat{G} \to \hat{G}$ называется оператором рекурсии.

Если S_1 и S_2 - генераторы преобразования (15), то их $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-произведение определяется формулой

$$(S_1, S_2)(u) = S'_{1u} \mathcal{S}_u S_2(u) - S'_{2u} \mathcal{T}_u S_1(u), \qquad (19)$$

соответствующий $\mathcal{G}$-коммутатор имеет вид

$$[S_1, S_2]_{\mathcal{G}}(u) = S'_{1u}\mathcal{G}_u S_2(u) - S'_{2u}\mathcal{G}_u S_1(u), \tag{20}$$

откуда при $\mathcal{G}_u \equiv I$, где I - тождественный оператор, получаем коммутатор

$$[S_1, S_2](u) = S'_{1u}S_2(u) - S'_{2u}S_1(u). \tag{21}$$

Теорема 6. *Если S_1, S_2 - генераторы симметрий уравнения (16), $\mathcal{S}_u, \mathcal{T}_u$ - операторы рекурсии и $\forall u \in D(N),\ \forall h, v \in D(N'_u)$ выполнено условие*

$$N''_u(h, \mathcal{S}_u v) = N''_u(v, \mathcal{T}_u h),$$

то $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-произведение (19) также является генератором симметрии этого уравнения.

Теорема 7. *Если S_1, S_2 - генераторы симметрий уравнения (16), $\mathcal{S}_u, \mathcal{T}_u$ - операторы рекурсии и $\forall u \in D(N),\ \forall h, v \in D(N'_u)$ выполнены условия*

$$N''_u(h, \mathcal{S}_u v) = N''_u(v, \mathcal{T}_u h),$$

$$\tilde{\mathcal{G}}'_u(h; \tilde{\mathcal{G}}_u v) = \tilde{\mathcal{G}}'_u(v; \tilde{\mathcal{G}}_u h),$$

где $\tilde{\mathcal{G}}_u \equiv \mathcal{S}_u + \mathcal{T}_u$, то генераторы симметрий уравнения (16) образуют Ли-допустимую алгебру относительно $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-произведения (19) .

Теорема 8. *Если S_1, S_2 - генераторы симметрий уравнения (16), $\mathcal{G}_u$ - оператор рекурсии и $\forall u \in D(N),\ \forall h, v \in D(N'_u)$ выполнено условие*

$$N''_u(h, \mathcal{G}_u v) = N''_u(v, \mathcal{G}_u h),$$

то $\mathcal{G}$-коммутатор (20) также является генератором симметрии этого уравнения.

Теорема 9. *Если S_1, S_2 - генераторы симметрий уравнения (16), $\mathcal{G}_u$ - оператор рекурсии и $\forall u \in D(N),\ \forall h, v \in D(N'_u)$ выполнены условия*

$$N''_u(h, \mathcal{G}_u v) = N''_u(v, \mathcal{G}_u h),$$

$$\mathcal{G}'_u(h; \mathcal{G}_u v) = \mathcal{G}'_u(v; \mathcal{G}_u h),$$

то генераторы симметрий уравнения (16) образуют алгебру Ли относительно $\mathcal{G}$-коммутатора (20).

Теорема 10. *Если S_1, S_2 - генераторы симметрий уравнения (16), то коммутатор (21) также является генератором симметрии этого уравнения.*

Теорема 11. *Генераторы симметрий уравнения (16) образуют алгебру Ли относительно коммутатора (21).*

В **третьей главе** исследованы симметрийные свойства построенных действий по Гамильтону, получены формулы для нахождения интегралов уравнений движения бесконечномерных лагранжевых систем с непотенциальными силами, установлена связь вариационных симметрий с симметриями уравнений и алгебраическими структурами.

Определение 10. Функционал вида (13) называется абсолютным инвариантом относительно преобразования (15), если

$$F^{T_1}[u+\varepsilon S(u)] = F^{T_1}[u] + r(u, \varepsilon S(u))$$

$$\forall u \in D(N),\ \forall T_1 : t_0 \leq T_1 \leq t_1,$$

причем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{r(u,\varepsilon S(u))}{\varepsilon} = 0$.

Определение 11. Преобразование (15) называется симметрией до дивергенции функционала (13) на $D(N)$, если

$$F^{T_1}[u+\varepsilon S(u)] = F^{T_1}[u] + \varepsilon \int\limits_{t_0}^{T_1} D_t f[u]\, dt + r(u, \varepsilon S(u))$$

$$\forall u \in D(N), \forall T_1 : t_0 \leq T_1 \leq t_1,$$

причем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{r(u,\varepsilon S(u))}{\varepsilon} = 0$.

Отметим, что оператор S называется также генератором симметрии (абсолютной, до дивергенции), а симметрии функционала F называются также вариационными симметриями.

Теорема 12. *Преобразование (15) - симметрия до дивергенции действия (13) тогда и только тогда, когда*

$$\Big\langle \tilde{N}(u), B_u S(u) \Big\rangle + D_t \Big\{ \Big\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_t u), B_u S(u) \Big\rangle + \Big\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(uS(u)), B_u u_t \Big\rangle +$$

$$+ \Big\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{2u} u_t, B_u S(u) \Big\rangle + \Big\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{2u} S(u), B_u u_t \Big\rangle + \Big\langle \tilde{\mathfrak{R}}_1(u), B_u S(u) \Big\rangle -$$

$$- \Big\langle \frac{\partial}{\partial t}(B_u^* \tilde{\mathfrak{R}}_{2u})u, S(u) \Big\rangle - f[u] \Big\} = 0$$

$$\forall u \in D(N),\ t_0 \leq t \leq t_1.$$

Теорема 13. *Если преобразование (15) - симметрия до дивергенции действия (13) на $D(N)$ и*

$$\langle \Lambda(u), B_u S(u) \rangle = D_t f_1[u],$$

то выражение

$$I[t,u] = \Big\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_t u), B_u S(u) \Big\rangle + \Big\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(uS(u)), B_u u_t \Big\rangle +$$

$$+\left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{2u}u_t, B_uS(u)\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{2u}S(u), B_uu_t\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathcal{R}}_1(u), B_uS(u)\right\rangle -$$
$$-\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_{2u}\right)u, S(u)\right\rangle - f[u] - f_1[u]$$

определяет интеграл уравнения движения (1).

Теорема 14. *Если S_1, S_2 - генераторы симметрий (абсолютной, до дивергенции) функционала (13), существуют операторы $\mathcal{S}_u, \mathcal{T}_u : D(N'_u, B_u) \to D(N'_u, B_u)$ такие, что $\forall u \in D(N)$, $\forall\, h, v \in D(N'_u, B_u)$ выполнено условие*

$$\Phi(\tilde{N}'_u\mathcal{S}_uh, B_uv) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_u(v;\mathcal{S}_uh)) =$$
$$= \Phi(\tilde{N}'_u\mathcal{T}_uv, B_uh) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_u(h;\mathcal{T}_uv)),$$

то $(\mathcal{S},\mathcal{T})$-произведение (19) также является генератором симметрии этого функционала.

Теорема 15. *Если S_1, S_2 - генераторы симметрий (абсолютной, до дивергенции) функционала (13), существуют операторы $\mathcal{S}_u, \mathcal{T}_u : D(N'_u, B_u) \to D(N'_u, B_u)$ такие, что $\forall u \in D(N)$, $\forall\, h, v \in D(N'_u, B_u)$ выполнены условия*

$$\Phi(\tilde{N}'_u\mathcal{S}_uh, B_uv) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_u(v;\mathcal{S}_uh)) =$$
$$= \Phi(\tilde{N}'_u\mathcal{T}_uv, B_uh) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_u(h;\mathcal{T}_uv)),$$
$$\tilde{\mathcal{G}}'_u(v;\tilde{\mathcal{G}}_uh) = \tilde{\mathcal{G}}'_u(h;\tilde{\mathcal{G}}_uv),$$

где $\tilde{\mathcal{G}}_u \equiv \mathcal{S}_u + \mathcal{T}_u$, то генераторы симметрий функционала (13) образуют Ли-допустимую алгебру относительно $(\mathcal{S},\mathcal{T})$-произведения (19).

Теорема 16. *Если S_1, S_2 - генераторы симметрий (абсолютной, до дивергенции) функционала (13), существует оператор $\mathcal{G}_u : D(N'_u, B_u) \to D(N'_u, B_u)$ такой, что $\forall u \in D(N)$, $\forall\, h, v \in D(N'_u, B_u)$ выполнено условие*

$$\Phi(\tilde{N}'_u\mathcal{G}_uh, B_uv) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_u(v;\mathcal{G}_uh)) =$$
$$= \Phi(\tilde{N}'_u\mathcal{G}_uv, B_uh) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_u(h;\mathcal{G}_uv)),$$

то $\mathcal{G}$-коммутатор (20) также является генератором симметрии этого функционала.

Теорема 17. *Если S_1, S_2 - генераторы симметрий (абсолютной, до дивергенции) функционала (13), существует оператор $\mathcal{G}_u : D(N'_u, B_u) \to D(N'_u, B_u)$ такой, что $\forall u \in D(N)$, $\forall\, h, v \in D(N'_u, B_u)$ выполнены условия*

$$\Phi(\tilde{N}'_u\mathcal{G}_uh, B_uv) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_u(v;\mathcal{G}_uh)) =$$
$$= \Phi(\tilde{N}'_u\mathcal{G}_uv, B_uh) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_u(h;\mathcal{G}_uv)),$$
$$\mathcal{G}'_u(v;\mathcal{G}_uh) = \mathcal{G}'_u(h;\mathcal{G}_uv),$$

то генераторы симметрий функционала (13) образуют алгебру Ли относительно $\mathcal{G}$-коммутатора (20).

Теорема 18. *Если оператор N уравнения (1) является квази-B_{iu}-потенциальным ($i=1,2$) на $D(N)$ относительно билинейной формы (2), то есть оператор $\tilde{N}=N-\Lambda$ является бипотенциальным, S_1, S_2 - генераторы симметрий (абсолютной, до дивергенции) функционала (13) при $B_u=B_{1u}$, $\exists B_{1u}^{-1}$ и $\forall\, u\in D(N)$, $\forall\, h,v\in D(N'_u, B_{1u}, B_{2u})$ выполняется условие*

$$\Phi(\tilde{N}(u), B_{1u}\mathcal{G}'_u(v;h)-B_{1u}\mathcal{G}'_u(h;v))=0,$$

где $\mathcal{G}_u=B_{1u}^{-1}B_{2u}$, то $\mathcal{G}$-коммутатор (20) также является генератором симметрии функционала (13). Если, кроме того, $\forall\, u\in D(N)$, $\forall\, h,v\in D(N'_u, B_{1u}, B_{2u})$

$$\mathcal{G}'_u(v;\mathcal{G}_u h)=\mathcal{G}'_u(h;\mathcal{G}_u v),$$

то генераторы симметрий функционала (13) образуют алгебру Ли относительно $\mathcal{G}$-коммутатора (20).

Теорема 19. *Если S_1, S_2 - генераторы симметрий (абсолютной, до дивергенции) функционала (13), то их коммутатор (21) также является генератором симметрии этого функционала.*

Теорема 20. *Генераторы симметрии (абсолютной, до дивергенции) функционала (13) образуют алгебру Ли относительно коммутатора (21).*

Теорема 21. *Если оператор N уравнения (1) является квази-B_u-потенциальным на $D(N)$ относительно билинейной формы Φ (2), $\exists\,(B_u^*)^{-1}$, S - генератор симметрии функционала (13) и выполняется условие*

$$B_u^*\Lambda'_u S(u)+\left[B'_u(\cdot;S(u))\right]^*\Lambda(u)+S'^*_u B_u^*\Lambda(u)=0,$$

то симметрия функционала (13) является также симметрией заданного уравнения движения.

В **четвертой главе** получил развитие неклассический гамильтонов формализм для уравнений движения бесконечномерных непотенциальных систем, в том числе и с использованием найденных в первой главе функционалов – вариационных принципов.

Рассматриваются нелокальная билинейная форма вида

$$\Phi_1(\cdot,\cdot)\equiv\langle\cdot,\cdot\rangle : V_1\times V_1\to\mathbb{R} \tag{22}$$

и оператор $B_u : V_1\to V_1$.

Рассмотрим уравнение

$$u_t=G_u((B_u{-}grad)_{\Phi_1}H[u]). \tag{23}$$

Определение 12. Линейный оператор $G_u : D(G_u)\subset V_1\to V_1$ называется B_u-гамильтоновым (относительно билинейной формы (22)), если $\forall h,v,g\in V_1$ выполнены условия

$$\langle g, B_u G_u h\rangle=-\langle h, B_u G_u g\rangle\,,$$

$$\langle v, B_u G'_u(g; G_u h) + B'_u(G_u h; G_u g)\rangle + \langle g, B_u G'_u(h; G_u v) +$$
$$+ B'_u(G_u v; G_u h) + \langle h, B_u G'_u(v; G_u g) + B'_u(G_u g; G_u v)\rangle = 0.$$

Определение 13. Уравнение (23), где оператор G_u является B_u-гамильтоновым, называется B_u-гамильтоновым уравнением.

Определение 14. Линейный оператор $G_u : D(G_u) \subset V_1 \to V_1$ называется гамильтоновым (относительно билинейной формы (22)), если $\forall h, v, g \in V_1$ выполнены условия

$$\langle g, G_u h\rangle = -\langle h, G_u g\rangle\,,$$
$$\langle v, G'_u(g; G_u h)\rangle + \langle g, G'_u(h; G_u v)\rangle + \langle h, G'_u(v; G_u g)\rangle = 0.$$

Определение 15. Уравнение

$$u_t = G_u(grad_{\Phi_1} H[u]),$$

где оператор G_u является гамильтоновым, называется уравнением Гамильтона.

Рассмотрим действительное линейное пространство $\mathcal{F}_{\Phi_1, B_u}$, элементами которого являются параметрически зависящие от t функционалы $F[t, \cdot] : U_1 \subseteq V_1 \to \mathbb{R}$, допускающие представление

$$\delta F[t, u, h] = \langle (B_u{-}grad)_{\Phi_1} F[t, u], B_u h\rangle$$
$$\forall u \in U_1, \quad \forall h \in D(F'_u, B_u).$$

Отметим, что в дальнейшем параметрически зависящие от t функционалы $F[t, u]$ будем обозначать также $F[u]$.

В этом пространстве определим билинейную операцию $\{\cdot, \cdot\}$, которая каждой паре функционалов F_1 и F_2 ставит в соответствие функционал $\{F_1, F_2\}$, определяемый формулой

$$\{F_1, F_2\}[u] = \langle K_1(u), B_u G_u K_2(u)\rangle \qquad \forall u \in U_1, \tag{24}$$

где $K_1(u) = (B_u{-}grad)_{\Phi_1} F_1[u]$, $K_2(u) = (B_u{-}grad)_{\Phi_1} F_2[u]$.

Теорема 22. *Если оператор G_u является B_u-гамильтоновым относительно симметрической невырожденной билинейной формы Φ_1 вида (22), B_u - обратимый оператор, то $\forall F_1, F_2, F_3 \in \mathcal{F}_{\Phi_1, B_u}$ и $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ на U_1 выполняются соотношения*

$$\{F_1, F_2\} = -\{F_2, F_1\}, \tag{25}$$
$$\{\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2, F_3\} = \lambda_1\{F_1, F_3\} + \lambda_2\{F_2, F_3\}, \tag{26}$$
$$\{F_1, \lambda_1 F_2 + \lambda_2 F_3\} = \lambda_1\{F_1, F_2\} + \lambda_2\{F_1, F_3\}, \tag{27}$$
$$\{F_1, \{F_2, F_3\}\} + \{F_2, \{F_3, F_1\}\} + \{F_3, \{F_1, F_2\}\} = 0 \tag{28}$$

(тождество Якоби).

Замечание 3. Если $B_u \equiv I$ – тождественный оператор, то пространство $\mathcal{F}_{\Phi_1,I}$ будем обозначать через $\mathcal{F}_{\Phi_1}$.

Скобкой Пуассона на многообразии $M \subseteq U_1$ будем называть произвольную билинейную операцию $\{\cdot,\cdot\}$, определенную в пространстве функционалов, заданных на M, и удовлетворяющую соотношениям (25)-(28).

Следствие 1. При выполнении условий теоремы 22 формула (24) определяет скобку Пуассона.

Следствие 2. При выполнении условий теоремы 22 линейное пространство $\mathcal{F}_{\Phi_1,B_u}$, наделенное билинейной операцией (24), образует алгебру Ли.

Теорема 23. *Если $I_1[u], I_2[u]$ – интегралы уравнения (23), операторы $B_u : V_1 \to V_1$ и $G_u : D(G_u) \subset V_1 \to V_1$ не зависят явно от t, $\exists B_u^{-1}$, то скобка Пуассона*

$$\{I_1, I_2\}[u] = \langle (B_u{-}grad)_{\Phi_1} I_1[u], B_u G_u((B_u{-}grad)_{\Phi_1} I_2[u]) \rangle$$

также является интегралом уравнения (23).

Определение 16. Уравнение

$$u_t = \tilde{G}_u((B_u{-}grad)_{\Phi_1} H[u]) \tag{29}$$

называется B_u-Гамильтона-допустимым уравнением, если оператор $G_u \equiv \tilde{G}_u - \tilde{G}_u^*$ является B_u-гамильтоновым в области $D(\tilde{G}_u)$ относительно заданной билинейной формы.

В этом случае оператор $\tilde{G}_u$ называется B_u-Гамильтона-допустимым оператором.

Отметим, что если $B_u \equiv I$ - тождественный оператор, то уравнение (29) называется Гамильтона-допустимым уравнением, а оператор $\tilde{G}_u$ - Гамильтона-допустимым оператором.

Теорема 24. *Оператор $\tilde{G}_u : D(\tilde{G}_u) \subset V_1 \to V_1$ является Гамильтона-допустимым оператором тогда и только тогда, когда он представим в виде*

$$\tilde{G}_u = \tilde{G}_{1u} + \tilde{G}_{2u},$$

где $\tilde{G}_{1u}$ – симметрический оператор, а $\tilde{G}_{2u}$ – гамильтонов.

Обозначим

$$\{I, H\}[u] = \langle (B_u{-}grad)_{\Phi_1} I[u], B_u G_u((B_u{-}grad)_{\Phi_1} H[u]) \rangle ,$$

где $G_u \equiv \tilde{G}_u - \tilde{G}_u^*$.

Теорема 25. *Функционал $I[u]$ является интегралом уравнения (29) тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\partial I[u]}{\partial t} + \{I, H\}[u] + \\ + \left\langle (B_u - grad)_{\Phi_1} I[u], B_u \tilde{G}_u^*((B_u - grad)_{\Phi_1} H[u]) \right\rangle = 0$$

на решениях уравнения (29).

Следствие 3. Если

$$\frac{\partial H[u]}{\partial t} + \left\langle (B_u - grad)_{\Phi_1} H[u], B_u \tilde{G}_u^*((B_u - grad)_{\Phi_1} H[u]) \right\rangle = 0$$

на решениях уравнения (29), то гамильтониан $H[u]$ является интегралом этого уравнения.

В пространстве $\mathcal{F}_{\Phi_1}$ определим билинейную операцию

$$(F_1, F_2)[u] = \left\langle grad_{\Phi_1} F_1[u], \tilde{G}_u(grad_{\Phi_1} F_2[u]) \right\rangle, \qquad (30)$$

где $\tilde{G}_u$ – Гамильтона-допустимый оператор.

Теорема 26. *Линейное пространство $\mathcal{F}_{\Phi_1}$, наделенное билинейной операцией (30), образует Ли-допустимую алгебру.*

Исследуем вопрос о распознавании принадлежности систем с бесконечным числом степеней свободы к гамильтоновым системам, или, другими словами, о представлении уравнений движения систем с бесконечным числом степеней свободы с первой производной по времени в форме уравнений Гамильтона.

Рассматривается уравнение

$$u_t = Au, \qquad (31)$$

где A - линейный, не зависящий от u и t оператор.

Представим уравнение (31) в виде уравнения Гамильтона

$$u_t = G(grad_{\Phi_1} H[u]). \qquad (32)$$

Теорема 27. *Пусть*
1. функционал

$$\mathcal{I}[u] = \langle \mathcal{K}u, u \rangle$$

является интегралом уравнения (31);
2. $\exists\ (\mathcal{K} + \mathcal{K}^*)^{-1}$.
Тогда (31) представимо в виде (32), где $G = A(\mathcal{K} + \mathcal{K}^*)^{-1}$ и $H \equiv \mathcal{I}$.

Исследуем вопрос о приведении операторного уравнения с первой производной по времени к виду B_u-гамильтонова уравнения.

Предположим, что в уравнении (1) $P_{2u} \equiv 0, P_{3u} \equiv 0, P_{1u} \equiv P_u$, то есть

$$N(u) \equiv P_u u_t + Q(u) = 0. \tag{33}$$

Теорема 28. *Пусть $D_t^* = -D_t$ на $D(N_u', B_u)$, P_u - линейный обратимый оператор, $B_u^* P_u$ не зависит явно от t. Уравнение (33) является B_u-гамильтоновым уравнением тогда и только тогда, когда $\forall u \in D(N), \forall h \in D(N_u', B_u), \forall t \in [t_0, t_1]$ выполняются следующие условия на $D(N_u', B_u)$:*

$$P_u^* B_u + B_u^* P_u = 0,$$

$$[B_u'(\cdot; h)]^* Q(u) - [B_u'(h; \cdot)]^* Q(u) + B_u^* Q_u' h - Q_u'^* B_u h = 0,$$

$$P_u^{*\prime}(B_u h; u_t) + B_u^* P_u'(u_t; h) - [P_u'(u_t; \cdot)]^* B_u h +$$
$$+ P_u^* B_u'(h; u_t) + [B_u'(\cdot; h)]^* P_u u_t - [B_u'(h; \cdot)]^* P_u u_t = 0.$$

В данном случае

$$G_u \equiv P_u^{-1}, \qquad H[u] = -\int_0^1 \left\langle Q(\tilde{u}(\lambda)), B_{\tilde{u}(\lambda)}(u - u_0) \right\rangle d\lambda + H[u_0],$$

где u_0 - фиксированный элемент из $D(N)$.

Представим операторное уравнение со второй производной по времени (1) в форме Гамильтона-допустимого уравнения.

Теорема 29. *Пусть оператор N уравнения (1) является квази-B_u-потенциальным на $D(N)$ относительно билинейной формы (2), причем $\Lambda_{2u} \equiv 0$, существует $\mathcal{A}_u^{-1}$ и*

$$\mathcal{A}_u^{-1}\left(p - B_u^* \tilde{\mathcal{R}}_1(u) + \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^* \mathcal{R}_{2u}\right) u\right) \neq 0,$$

где

$$\mathcal{A}_u = B_u^* \tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u(\cdot)) + u \tilde{\mathcal{R}}_{3u}^* B_u + \mathcal{R}_{2u}^* B_u + B_u^* \mathcal{R}_{2u},$$

$$p = \mathcal{A}_u u_t + B_u^* \tilde{\mathcal{R}}_1(u) - \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^* \mathcal{R}_{2u}\right) u.$$

Тогда уравнение (1) допускает косвенное представление в форме Гамильтона-допустимого уравнения.

В **пятой главе** предложен еще один способ нахождения интегралов уравнений движения бесконечномерных непотенциальных систем, а также установлена связь между интегралами эволюционных уравнений и их абсолютными интегральными инвариантами первого порядка.

Теорема 30. *Если оператор N вида (1) является квази-B_u-потенциальным на $D(N)$ относительно билинейной формы (2), оператор B_u обратим, существуют оператор $\mathcal{S}$ и параметрически зависящий от t функционал z такие, что*

$$\Big\langle u\tilde{\mathfrak{R}}^*_{3u}B_uu_t + B^*_u\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_tu) + \tilde{\mathfrak{R}}^*_{2u}B_uu_t + B^*_u\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u_t + B^*_u\tilde{\mathfrak{R}}_1(u) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}(B^*_u\tilde{\mathfrak{R}}_{2u})u, D_t\mathcal{S}(u)\Big\rangle + \Big\langle u_t\tilde{\mathfrak{R}}^*_{3u}B_uu_t + \Big[\tilde{\mathfrak{R}}'_{3u}(u_tu;\cdot)\Big]^* B_uu_t +$$

$$+[B'_u(u_t;\cdot)]^*\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_tu) + \Big[\tilde{\mathfrak{R}}'_{2u}(u_t;\cdot)\Big]^* B_uu_t + [B'_u(u_t;\cdot)]^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u_t +$$

$$+\tilde{\mathfrak{R}}'^*_{1u}B_uu_t + [B'_u(u_t;\cdot)]^*\tilde{\mathfrak{R}}_1(u) - \left(\frac{\partial}{\partial t}(B^*_u\tilde{\mathfrak{R}}_{2u})\right)^* u_t -$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}B^{*\prime}_u(\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u;\cdot)\right)^* u_t - \left(\frac{\partial}{\partial t}B^*_u\tilde{\mathfrak{R}}'_{2u}(u;\cdot)\right)^* u_t +$$

$$+grad_{\Phi_1}\tilde{\mathfrak{B}}[u], \mathcal{S}(u)\Big\rangle + \langle\Lambda(u), B_u\mathcal{S}(u)\rangle = D_tz[u],$$

то

$$I[t,u] = z[u] - \Big\langle u\tilde{\mathfrak{R}}^*_{3u}B_uu_t + B^*_u\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_tu) + \tilde{\mathfrak{R}}^*_{2u}B_uu_t + B^*_u\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u_t +$$

$$+B^*_u\tilde{\mathfrak{R}}_1(u) - \frac{\partial}{\partial t}(B^*_u\tilde{\mathfrak{R}}_{2u})u, \mathcal{S}(u)\Big\rangle$$

является интегралом уравнения движения (1).

Замечание 4. Отметим, что метод нахождения интегралов уравнения движения (1), изложенный в третьей главе, является частным случаем изложенного в настоящей главе метода.

Установим связь между первыми интегралами уравнений движения непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы и их абсолютными интегральными инвариантами первого порядка.

Рассмотрим уравнения движения материальной системы вида

$$\tilde{N}(u) \equiv u_t - N(u) = 0, \tag{34}$$

$$t \in (t_0, t_1) \subset \mathbb{R},\ u \in D(\tilde{N}) \subseteq U \subseteq V,$$

$U = C^1([t_0,t_1],U_1)$, $V = C([t_0,t_1],V_1)$, U_1, V_1 - действительные линейные нормированные пространства, $U_1 \subseteq V_1$.

Пусть $u = u(\lambda,t) \in D(\tilde{N})$ есть семейство решений уравнения (34) при $\lambda \in \Delta \subset [0,1]$, где Δ - интервал.

Пусть задан оператор $\mathcal{A} : D(\tilde{N}) \to V$ и симметрическая невырожденная билинейная форма $\langle\cdot,\cdot\rangle : V_1 \times V_1 \to \mathbb{R}$. Тогда интеграл $\int\limits_\Delta \langle\mathcal{A}(u), \partial u/\partial\lambda\rangle\, d\lambda$ может зависеть от t.

Определение 17. Интеграл $\int\limits_{\Delta} \langle \mathcal{A}(u), \partial u/\partial\lambda \rangle \, d\lambda$ называется абсолютным интегральным инвариантом первого порядка уравнения (34), если для любого интервала $\Delta \subset [0, 1]$ его значения не зависят от t.

Теорема 31. *Интеграл*

$$\int\limits_{\Delta} \left\langle \mathcal{A}(u), \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right\rangle d\lambda$$

является абсолютным интегральным инвариантом уравнения (34) тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial \mathcal{A}(u)}{\partial t} + \mathcal{A}'_u N(u) + N'^*_u \mathcal{A}(u) = 0 \qquad \forall u \in D(\tilde{N}).$$

Теорема 32. *Если функционал $I[t, u]$ является интегралом уравнения (34), то*

$$\int\limits_{\Delta} \left\langle grad I[t, u], \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right\rangle d\lambda$$

есть абсолютный интегральный инвариант этого уравнения.

В **шестой главе** теоретические результаты предыдущих глав применены для исследования движения шарнирно-опертого на обоих концах призматического стержня, причем рассматриваются уравнения движения как с потенциальным, так и с квазипотенциальным операторами. Отметим, что квазипотенциальный оператор получается из потенциального в результате дополнения исходного уравнения движения членом, учитывающим демпфирование, пропорциональное скорости u_t.

Заключение.

В диссертационной работе впервые получены следующие результаты.

1. Получены необходимые и достаточные условия представимости достаточно общих уравнений движения систем с бесконечным числом степеней свободы со второй производной по времени в форме уравнений Лагранжа с не-B_u-потенциальными плотностями сил, то есть, другими словами, необходимые и достаточные условия квази-B_u-потенциальности операторов рассматриваемых уравнений движения (в качестве следствий получены необходимые и достаточные условия квазипотенциальности, B_u-потенциальности, потенциальности операторов рассматриваемых уравнений движения).

2. Разработан конструктивный прием построения действий по Гамильтону, в общем случае не принадлежащих классу функционалов Эйлера-Лагранжа.

3. В терминах необходимых и достаточных условий определена структура уравнений движения квази-B_u-потенциальных (квазипотенциальных, B_u-потенциальных, потенциальных) систем с бесконечным числом степеней свободы со второй производной по времени.

4. Доказано, что при определенных условиях уравнения движения потенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы с первой производной по времени имеют структуру классических уравнений Биркгофа, а действия по Гамильтону являются известными функционалами Пфаффа.

5. Используя подходы, в том числе основанные на применении теории преобразований переменных для установления инвариантности уравнений движения, получены формулы для нахождения интегралов уравнений движения квази-B_u-потенциальных (квазипотенциальных, B_u-потенциальных, потенциальных) систем с бесконечным числом степеней свободы со второй производной по времени.

6. Получено условие инвариантности до дивергенции действий по Гамильтону и дан общий вид интегралов уравнений движения квази-B_u-потенциальных (квазипотенциальных, B_u-потенциальных, потенциальных) систем с бесконечным числом степеней свободы со второй производной по времени.

7. Установлена связь симметрий (уравнений, функционалов) с Ли-допустимыми алгебрами (в том числе алгебрами Ли). Установлена также взаимосвязь между симметриями уравнений движения и вариационными симметриями.

8. Исследован вопрос о распознавании B-гамильтоновости систем с бесконечным числом степеней свободы.

9. Уравнения движения B_u-потенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы с первой производной по времени представлены в форме B_u-гамильтоновых уравнений. Уравнения движения квази-B_u-потенциальных (квазипотенциальных) систем с бесконечным числом степеней свободы со второй производной по времени представлены в форме Гамильтона-допустимых уравнений. Уравнения движения B_u-потенциальных (потенциальных) систем с бесконечным числом степеней свободы со второй производной по времени представлены в форме уравнений Гамильтона.

10. Установлена взаимосвязь между интегралами уравнений движения систем с бесконечным числом степеней свободы с первой производной по

времени и их абсолютными интегральными инвариантами первого порядка.

Теоретические результаты иллюстрируются конкретными примерами: уравнением Бюргерса; системой уравнений, описывающей движение жидкости в пористой среде; уравнением малых поперечных колебаний шарнирно закрепленного прямолинейного трубопровода, по которому течет идеальная жидкость со скоростью $v(t)$ при отсутствии внутреннего и внешнего трения; уравнением Эмдена равновесия для политропного газа; уравнением переноса; уравнением Кортевега-де Фриза-Бюргерса и др., а также рядом модельных примеров.

Публикации автора по теме диссертации.

1. *Будочкина С. А.* О представлении одного операторного уравнения с первой производной по времени в форме B_u-гамильтонова уравнения // Дифференциальные уравнения, 2013, том 49, №2, стр. 175-185.

   (Eng. transl.: On a representation of an operator equation with first time derivative in the form of a B_u-Hamiltonian equation // Differential Equations, 2013, Vol. 49, No. 2, pp. 176-186).

2. *Будочкина С. А., Савчин В. М.* О бесконечномерных лагранжевых системах с непотенциальными силами // Доклады Академии наук, 2013, том 448, №5, стр. 518-519.

   (Eng. transl.: On infinite-dimensional Lagrangian systems with nonpotential forces // Doklady Mathematics, 2013, Vol. 87, No. 1, pp. 110-111).

3. *Филиппов В.М., Савчин В.М., Будочкина С.А.* О существовании вариационных принципов для эволюционных дифференциально-разностных уравнений // Труды МИАН, 2013, том 283, стр. 25-39.

   (Eng. transl.: On the existence of variational principles for differential-difference evolution equations // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2013, Vol. 283, pp. 20-34).

4. *Савчин В.М., Будочкина С.А.* О взаимосвязи симметрий функционалов и уравнений // Доклады Академии наук, 2014, том 458, №2, стр. 148-149.

   (Eng. transl.: On connection between symmetries of functionals and equations // Doklady Mathematics, 2014, Vol. 90, No. 2, pp. 626-627).

5. *Будочкина С.А., Савчин В.М.* О квазипотенциальных операторах и Гамильтона-допустимых уравнениях в механике бесконечномерных систем // Доклады Академии наук, 2015, том 464, №3, стр. 267-269.

(Eng. transl.: On quasipotential operators and Hamiltonian-admissible equations in the mechanics of infinite-dimensional systems // Doklady Mathematics, 2015, Vol. 92, No. 2, pp. 554-555).

6. *Будочкина С.А., Савчин В.М.* Операторное уравнение со второй производной по времени и Гамильтона-допустимые уравнения // Доклады Академии наук, 2016, том 470, №1, стр. 7-9.

   (Eng. transl.: An operator equation with the second time derivative and Hamiltonian-admissible equations // Doklady Mathematics, 2016, Vol. 94, No. 2, pp. 487-489).

7. *Savchin V. M., Budochkina S. A.* Nonclassical Hamilton's actions and the numerical performance of variational methods for some dissipative problems // In: Vishnevskiy V., Samouylov K., Kozyrev D. (eds) Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2016. Communications in Computer and Information Science, Springer, Cham, 2016, Vol. 678, pp. 624-634.

8. *Савчин В.М., Будочкина С.А.* Об инвариантности функционалов и соответствующих им уравнений Эйлера-Лагранжа // Известия вузов. Математика, 2017, №2, стр. 58-64.

   (Eng. transl.: Invariance of functionals and related Euler-Lagrange equations // Russian Mathematics, 2017, Vol. 61, No. 2, pp. 49-54).

9. *Savchin V.M., Budochkina S.A., Yake Gondo, Slavko A.V.* On the connection between first integrals, integral invariants and potentiality of evolutionary equations // Eurasian Mathematical Journal, 2018, Vol. 9, No. 4, pp. 82-90.

10. *Савчин В.М., Будочкина С.А.* Ли-допустимые алгебры, связанные с динамическими системами // Сибирский математический журнал, 2019, том 60, №3, стр. 655-663.

    (Eng. transl.: Lie-admissible algebras associated with dynamical systems // Siberian Mathematical Journal, 2019, Vol. 60, No. 3, pp. 508-515).

11. *Savchin V.M., Budochkina S.A.* Bi-variational evolutionary systems and approximate solutions // Journal of Mechanics of Continua and Mathematical Sciences, Special Issue-1, March (2019), pp. 474-482.

12. *Будочкина С.А.* О взаимосвязи вариационных симметрий с алгебраическими структурами // Уфимский математический журнал, 2021, том 13, №1, стр. 46-55.

    (Eng. transl.: On connection between variational symmetries and algebraic structures // Ufa Mathematical Journal, 2021, Vol. 13, No. 1, pp. 46-55).

13. *Budochkina S.A., Dekhanova E.S.* On the potentiality of a class of operators relative to local bilinear forms // Ural Mathematical Journal, 2021, Vol. 7, No. 1, pp. 26-37.

14. *Budochkina S.A., Luu T.H.* On connection between variationality of a six-order ordinary differential equation and Hamilton-Ostrogradskii equations // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol. 42, No. 15, pp. 3594-3605.

15. *Филиппов В.М., Савчин В.М., Будочкина С.А.* Бивариационность, симметрии и приближенные решения // Современная математика. Фундаментальные направления, 2021, том 67, №3, стр. 596-608.

16. *Budochkina S.A., Vu H.P.* On an indirect representation of evolutionary equations in the form of Birkhoff's equations // Eurasian Mathematical Journal, 2022, Vol. 13, No. 3, pp. 23-32.

Будочкина Светлана Александровна

Прямые и обратные задачи механики непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы

Диссертационная работа посвящена решению прямых и обратных задач механики непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы. Разработан конструктивный прием построения действий по Гамильтону для уравнений движения непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы с использованием эйлеровых и неэйлеровых классов функционалов. Разработаны конструктивные методы представимости уравнений движения непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы в форме классических и неклассических уравнений Гамильтона. Получены формулы для нахождения интегралов уравнений движения непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы, в том числе на основе свойств инвариантности как самих уравнений движения, так и соответствующих действий по Гамильтону.

Budochkina Svetlana Aleksandrovna

Direct and inverse problems of mechanics of non-potential systems with an infinite number of degrees of freedom

The dissertation research is devoted to solving direct and inverse problems of mechanics of non-potential systems with an infinite number of degrees of freedom. Hamiltonian actions for equations of motion of non-potential systems with an infinite number of degrees of freedom are constructed in the Eulerian and non-Eulerian classes of functionals. Constructive methods of representability of the equations of motion of non-potential systems with an infinite number of degrees of freedom in the form of classical and non-classical Hamiltonian equations are developed. Formulas for finding integrals of the equations of motion of non-potential systems with an infinite number of degrees of freedom are obtained by using invariance properties of the equations of motion and the corresponding Hamiltonian actions.