

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов
имени Патриса Лумумбы» (РУДН)

На правах рукописи

Ермакова Евгения Владимировна

**ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМЫ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК ПО КРИТЕРИЮ
УПРУГОЙ ЭНЕРГИИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ**

2.1.9. Строительная механика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
кандидат технических наук, доцент
Рынковская Марина Игоревна

Москва – 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СУЩЕСТВУЮЩИХ МЕТОДОВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ	14
1.1. Исследование теоретических и практических вопросов развития оптимизации формы пространственных конструкций зданий	14
1.2. Обзор оптимизационных задач на основе конструктивных переменных.....	21
1.2.1. Существующие критерии оптимальности конструкции.....	22
1.3. Вычислительный подход к решению задач оптимизации.....	28
1.4. Процесс оптимизации формы в программном комплексе.....	32
1.5. Выводы по первой главе.....	35
ГЛАВА 2. ПРОВЕДЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ ОБОЛОЧЕК ПО ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМУ КРИТЕРИЮ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПОДХОДА.....	37
2.1. Модель материала.....	37
2.2. Теория удельной энергии изменения формы	39
2.3. Критерий энергии упругой деформации	43
2.4. Оптимизация формы оболочек по энергетическому критерию.....	46
2.4.1. Оптимизация формы круговой арки по энергетическому критерию	47
2.4.2. Оптимизация формы сферической оболочки по энергетическому критерию.....	53
2.5. Уменьшение собственного веса оболочки по энергетическому критерию	55
2.6. Коэффициент безопасности при оптимизации формы	60
2.7. Методика выбора оптимальной формы оболочки параметрическим методом по минимуму энергии упругой деформации	62
2.8. Выводы по второй главе.....	73
ГЛАВА 3. ПРОВЕДЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ ОБОЛОЧЕК ПО ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМУ КРИТЕРИЮ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАДИЕНТНЫХ МЕТОДОВ.....	75
3.1. Градиентные методы	75
3.2. Метод подвижных асимптот (ММА).....	77
3.3. Разреженный метод нелинейной оптимизации (SNOPT).....	79

3.4. Метод внутренней точки (IPOPT)	81
3.5. Оптимизация формы сферического купола	82
3.6. Оптимизация формы прямого и развертывающегося геликоида	90
3.7. Выводы по третьей главе	102
ГЛАВА 4. ПОДБОР ВАРЬИРУЕМЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ ОБОЛОЧЕК ПО ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМУ КРИТЕРИЮ	104
4.1. Исследование влияния варьируемых параметров: радиуса фильтра и максимального перемещения на геометрию модели	104
4.2. Разработка методики расчёта оптимизации формы с использованием энергетического подхода и дополнительных параметров R_{\min} и d_{\max}	108
4.3. Оптимизация формы сферической поверхности с установкой R_{\min} и d_{\max}	111
4.4. Оптимизация формы геликоидных поверхностей с установкой R_{\min} и d_{\max} ..	120
4.4.1. Оптимизация прямого геликоида с установкой R_{\min} и d_{\max}	121
4.4.2. Оптимизация развертывающегося геликоида с установкой R_{\min} и d_{\max}	128
4.5. Определение оптимальных параметров максимального перемещения и радиуса фильтра для оболочек	135
4.5.1. Сферическая поверхность	135
4.5.2. Взаимосвязь стрелы подъема и максимального перемещения в сферической оболочке	137
4.5.3. Прямой и развертывающийся геликоид	139
4.6. Разработка рекомендаций по выбору диапазона значений дополнительных параметров R_{\min} и d_{\max}	140
4.6.1. Разработка алгоритма расчёта оптимизации формы тонких упругих оболочек по критерию энергии упругой деформации с установкой d_{\max} и R_{\min} ..	142
4.7. Выводы по четвертой главе	143
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	145
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	148
Приложение 1. Относительное нормальное граничное смещение сферической оболочки	168
Приложение 2. Изменение границы формы сферической поверхности с установкой варьируемых значений параметров	169
Приложение 3.1. Графики сходимости процесса оптимизации для сферической оболочки	170

Приложение 3.2. Графики сходимости процесса оптимизации для сферической оболочки.....	171
Приложение 4. Относительное нормальное граничное смещение прямого геликоида	172
Приложение 5.1. Графики сходимости процесса оптимизации для прямого геликоида	173
Приложение 5.2. Графики сходимости процесса оптимизации для прямого геликоида	174
Приложение 6. Относительное нормальное граничное смещение разворачивающегося геликоида.....	175
Приложение 7.1. Графики сходимости процесса оптимизации для разворачивающегося геликоида.....	176
Приложение 7.2. Графики сходимости процесса оптимизации для разворачивающегося геликоида.....	177
Приложение 8. Блок-схема.....	178
Приложение 9. Алгоритм расчета на ЭВМ	179
Приложение 10. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.....	185
Приложение 11. Справка о внедрении результатов работы	186

ВВЕДЕНИЕ

Оптимальное проектирование оболочек является актуальным разделом в области инженерного моделирования и численных методов. Оптимизация формы в настоящее время стала важной задачей в мировом процессе проектирования, поскольку она представляет собой поэтапный метод расчета для улучшения работы конструкций в соответствии с определенными критериями.

Создание прочной и при этом легкой конструкции является неотъемлемой частью проектирования оболочек для покрытия зданий и сооружений, поэтому весьма важным является рассмотрение критериев оптимизации, которые оказывают влияние на повышение прочности конструкции при снижении расхода материала и связаны с обеспечением конструктивной безопасности объекта проектирования. Одним из таких критериев является критерий энергии упругой деформации.

Выбор данного критерия обусловлен тем, что оптимальная форма оболочки с функционально необходимой ей прочностью и безопасностью зависит от накапливаемой оболочкой в процессе деформирования энергии. Минимизация энергии упругой деформации приводит к снижению напряжений и деформаций в оболочке, что позволяет в некоторых случаях уменьшать расход материала.

Упругая энергия оболочки постоянной толщины при фиксированных условиях опирания и нагрузки определяется формой её срединной поверхности, трансформация которой влечет изменение этой энергии. Исходя из этого в расчетах конструкций на прочность возникает задача определения формы срединной поверхности, соответствующей минимуму этой энергии. Зависимость накопленной энергии от искомой формы определяет задачу трансформации формы в соответствии с последовательным уменьшением энергии. Этот процесс называется оптимизацией формы по энергетическому критерию и реализуется с применением градиентных методов: метод внутренней точки (ПРОПТ), метод последовательного

квадратичного программирования (SNOPT), метод подвижных асимптот (ММА) вместе с его глобально сходящейся версией GСММА.

Другой путь поиска оптимальной формы оболочки по некоторому критерию (например, энергии упругой деформации, веса, напряжения) осуществляется, когда образующие или направляющие кривые трансформируемых оболочек определяются так называемым параметром формы. Этот параметр является множителем в оптимизируемой величине и его критическое значение, обеспечивающее её экстремум, отвечает оптимальной форме срединной поверхности.

Таким образом, в диссертации применяются градиентные и параметрический подходы к поиску оптимальной формы по энергетическому критерию.

Поскольку основная задача оптимизации в исследовании заключается в повышении прочности и обеспечении необходимой жёсткости оболочки путём изменения формы её геометрии, то представляет большой интерес выявление взаимосвязи между параметрами, которые могут задаваться вручную пользователем в программе, и смещением самой границы модели.

Вопросы оптимизации параметров элементов большепролетных конструкций, а также методики выбора параметров их моделирования являются актуальными задачами, что обусловлено необходимостью проектирования конструкций прочных и легких, но в то же время безопасных и экономичных.

Выявление варьируемых параметров оптимизации, которые оказывают наиболее сильное влияние на оптимальное решение, является важной частью оптимизационного исследования.

Существенно значимыми среди этих параметров, используемых в градиентном методе поиска оптимальной формы, являются специальные контрольные параметры: максимальное перемещение или смещение границы срединной поверхности и так называемый радиус фильтра для сглаживания конечно-элементной сетки в процессе оптимизации. Каждому сочетанию этих параметров отвечают определенная форма срединной поверхности и

накапливаемая в оболочке энергия. В диссертации для сферических и геликоидальных оболочек выявлены комбинации отмеченных параметров, влекущие за собой минимум энергии упругой деформации и соответствующие оптимальной по энергетическому критерию форме этих оболочек.

В настоящее время выбор значений параметров максимального перемещения и радиуса фильтра в основном основывается на эмпирических правилах или эвристических методах, в которых отсутствует подход к систематическому количественному анализу. Такой подход приводит к значительной неопределённости и субъективности при выборе значений параметров оптимизации.

Актуальность диссертационной работы заключается в разработке метода поиска оптимальных форм некоторых оболочек по определяющим их срединную поверхность параметрам, связанного с градиентным подходом к оптимизации формы оболочки по критерию энергии упругой деформации. Исследуется влияние максимального перемещения и радиуса фильтра на проблемы численной неустойчивости и определяются значения параметров для проведения оптимизационного расчёта.

Проведенное исследование обеспечивает теоретическую основу и количественные рекомендации по выбору параметров границы формы при оптимизации, что имеет большое значение для инженерного (практического) применения, способствуя повышению технологичности результатов.

Степень разработанности темы исследования. За последние 10 лет интерес к проведению оптимизации формы существенно возрос как в России, так и в странах Европы, Азии и США. Это обусловлено широким применением большепролётных покрытий зданий и, в связи с этим необходимостью получения наиболее эффективной конструкции с точки зрения напряжённо-деформированного состояния, энергии деформации, объёма расходуемых материалов и т.д. В России и за рубежом, а именно в Италии, Канаде, Англии, Японии ежегодно проходят семинары, конференции, круглые столы, посвящённые

оптимальному проектированию конструкций и вопросам оптимизации формы. Исследованию процесса оптимизации формы оболочек посвящены работы отечественных и зарубежных учёных: Рабинович И.П., Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Ступишин Л.Ю., Колесников А.Г., Тарарушкин Ю.Ф., Якубов С.Х., Хог Э., Аропа Я., Bletzinger KU., Adriaenssens S., Manuello Bertetto A., Osvaldo M.Querin, Bendsøe M.P. и др.

Целью диссертационной работы является разработка двух подходов – параметрического и градиентного для оптимизации тонких упругих оболочек по энергетическому критерию через создание специальных методик и рекомендаций, в том числе с использованием варьируемых параметров максимального перемещения и радиуса фильтра.

Задачи исследования:

1. Исследовать влияние геометрических параметров, формирующих оптимальную форму арок, поверхностей вращения, на результат оптимизации по энергетическому критерию при действии равномерно-распределенной и гидростатической нагрузки.

2. Разработать методику выбора оптимальной формы оболочки с помощью параметрического подхода по критерию минимума энергии упругой деформации.

3. Рассмотреть задачи уменьшения веса на примере сферической оболочки и повышения коэффициента безопасности конструкции при оптимизации формы с использованием критерия энергии упругой деформации.

4. Исследовать три градиентных метода IPOPT, SNOPT, MMA при решении задач оптимизации формы сферической и геликоидальных оболочек при действии равномерно-распределенной нагрузки по критерию энергии упругой деформации.

5. Разработать методику проведения оптимизации формы с использованием градиентного подхода в сочетании с параметрическим по критерию энергии упругой деформации.

6. Разработать рекомендации по выбору оптимального диапазона значений параметров максимального перемещения и радиуса фильтра при оптимизации формы оболочек с созданием формул для подбора оптимальных значений параметров.

7. Разработать алгоритм автоматизации градиентной методики по критерию энергии упругой деформации для сферической и геликоидальных оболочек с оптимальным диапазоном значений максимального перемещения и радиуса фильтра.

Объектом исследования является определение оптимальной формы оболочек по критерию энергии упругой деформации с использованием варьируемых параметров.

Предметом исследования является критерий энергии упругой деформации, варьируемые параметры максимального перемещения и радиуса фильтра, а также геометрические параметры оболочки.

Научная новизна работы заключается в получении новых данных об оптимальной форме оболочек по критерию энергии упругой деформации, а именно:

1. Показано, что при гидростатическом нагружении угол раствора по энергетическому критерию превышает угол раствора по критерию минимума веса.

2. Разработана методика выбора оптимальной формы оболочек параметрическим методом по критерию энергии упругой деформации с учетом меридиональных и круговых усилий в цилиндрических координатах.

3. Обосновано применение критерия энергии упругой деформации к задачам уменьшения веса и повышения коэффициента безопасности оболочки, а также к оптимизации формы сферической и геликоидальных оболочек с использованием трех градиентных методов.

4. Показано, что при проведении оптимизации формы сферической и геликоидальных оболочек наиболее эффективным по сходимости методом является метод внутренней точки по сравнению с методами SNOPT и MMA.

5. Разработана новая методика проведения оптимизации формы градиентными методами в сочетании с параметрическим подходом по критерию энергии упругой деформации с дополнительными параметрами максимального перемещения и радиуса фильтра.

6. Определены оптимальные границы и представлены рекомендации по выбору значений максимального перемещения и радиуса фильтра при проведении оптимизации формы сферических и геликоидальных оболочек с разработкой формул для подбора оптимальных параметров максимального перемещения и радиуса фильтра.

7. Разработан алгоритм оптимизационного расчета формы сферической оболочки и геликоидальной на ЭВМ по критерию энергии упругой деформации с оптимальными границами значений максимального перемещения и радиуса фильтра.

Теоретическая и практическая значимость работы заключается в получении научно-обоснованных результатов прочностного и оптимизационного расчёта формы оболочек по критерию энергии упругой деформации с использованием определяющих их параметров и трёх градиентных методов IPOPT, SNOPT, MMA, а также в разработке специальной методики по проведению оптимизации формы с рекомендациями по подбору значений варьируемых параметров максимального перемещения и радиуса фильтра. Предложен подход для уменьшения собственного веса и увеличения коэффициента безопасности по энергетическому критерию для сферической оболочки. Результаты диссертационной работы были использованы ООО «ИнтерСтрой Проект» при расчете и проектировании купола православного храма в честь иконы Божьей Матери «Отрада и Утешение». Справка о внедрении результатов исследования приведена в Приложении 11.

Методы исследования

Методологической основой исследования являются работы отечественных и зарубежных учёных в области оптимизации формы оболочек. Используются

общенаучные методы исследования такие, как количественный и качественный анализ, систематизация, моделирование, сравнение и пр., что обеспечивает высокую степень обоснованности и достоверности полученных в ходе исследования результатов.

Положения, выносимые на защиту:

1. Методика определения оптимальной формы оболочек параметрическим методом по критерию энергии упругой деформации с учетом меридиональных и круговых усилий в цилиндрических координатах.
2. Практическое применение энергетического критерия для нахождения оптимальных геометрических параметров оболочек, решения задач уменьшения веса конструкции, увеличения коэффициента безопасности, а также для проведения оптимизации формы оболочек градиентными методами с использованием варьируемых параметров максимального перемещения и радиуса фильтра.
3. Определение наиболее эффективного метода из трех исследуемых – IPOPT, SNOPT и MMA по скорости и качеству решения задачи оптимизации формы по критерию энергии упругой деформации.
4. Методика проведения процесса оптимизации формы градиентными методами в сочетании с параметрическим подходом по энергетическому критерию с подбором значений максимального перемещения и радиуса фильтра для сферы и двух типов геликоидов.
5. Уточненные границы выбора значений максимального перемещения и радиуса фильтра с определением процентного соотношения от ограничивающего параллелепипеда модели для сферы, прямого и развертывающегося геликоида, а также рекомендации по выбору оптимальных значений максимального перемещения и радиуса фильтра для исследуемых оболочек с разработанной формулой для поиска данных параметров.
6. Алгоритм проведения оптимизации формы по критерию энергии упругой деформации с использованием варьируемых параметров максимального перемещения и радиуса фильтра.

Апробация результатов

Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях: VII Международная конференция по инженерной графике и дизайну (Белград, 2020 г.); International Conference on Engineering Research (Москва, 2021 г.); WCCM-APCOM (Япония, 2022 г.); VIII Международный симпозиум Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений (Тамбов, 2023 г.); Italian Workshop on Shell and Spatial Structures - IWSS (Италия, 2023 г.); International Scientific and Practical Symposium «The Future of the Construction industry: Challenges and Development Prospects» (Москва, 2023 г.); V Всероссийская научно-практическая конференция «Проектирование и расчёт строительных конструкций и оснований» (Санкт-Петербург, 2023 г.); LXXVII Международная научно-практическая конференция «Архитектура. Строительство. Транспорт. Экономика» (Санкт-Петербург, 2023 г.); IX Международный симпозиум Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений (Пенза, 2025 г.); Международная научная конференция «Актуальные вопросы строительства. Надежность строительных конструкций. Энергосбережение. Экологическая безопасность. Искусственный интеллект» (Москва, 2025 г.); Всероссийская конференция с международным участием «Технологии промышленного и гражданского строительства» (Москва, 2025 г.).

Степень достоверности результатов диссертационного исследования обеспечивается корректным использованием общепринятых положений строительной механики, теории оптимизации и её методов, а также предпосылок расчета, основанных на анализе теоретических и практических исследований в области оптимизации формы.

Личный вклад автора

Вклад автора заключается в обосновании актуальности темы исследования; разработке специальных методик по проведению оптимизации формы и основанных на них алгоритмов выбора определяющих параметров, а также в получении практических рекомендаций по использованию максимального

перемещения и радиуса фильтра в процессе оптимизации формы оболочек и применении критерия энергии упругой деформации.

Соответствие диссертации научной специальности

Работа соответствует паспорту специальности 2.1.9. Строительная механика: п.5 «Теория и методы оптимизации конструкций зданий и сооружений».

Публикации

Материалы диссертации изложены в 11 научных публикациях, из них 9 за последние пять лет: 6 научных работ опубликованы в изданиях, индексируемых в БД Scopus и Web of Science; 1 статья в журнале RSCI, 1 статья в журнале из перечня ВАК и 1 работа опубликована в материалах конференции, а также в одном свидетельстве о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Структура и объем работы

Диссертация содержит введение, 4 главы основного текста, общие выводы, список библиографических ссылок и приложений. Объем диссертации включает 186 страниц, среди которых 55 рисунков, 6 таблиц, 203 наименований литературы и 11 страниц с приложениями.

Работа выполнена на кафедре технологий строительства и конструкционных материалов Инженерной академии РУДН им. Патриса Лумумбы под руководством кандидата технических наук, доцента Рынковской Марины Игоревны.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СУЩЕСТВУЮЩИХ МЕТОДОВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ

1.1. Исследование теоретических и практических вопросов развития оптимизации формы пространственных конструкций зданий

Оптимизация, также известная как математическое программирование, представляет собой совокупность математических принципов и методов, используемых для решения количественных задач во многих дисциплинах, таких как физика, биология, инженерное дело, экономика, бизнес и т.д. Предмет появился из осознания того, что количественные задачи в явно различных дисциплинах имеют важные общие математические элементы. Благодаря этой общности разнообразные задачи могут быть сформулированы и решены с помощью единого набора идей и методов, составляющих область оптимизации.

В середине 17 века французским математиком Пьером де Ферма (1601-1665) была изучена проблема минимизации функции. Учёный считал, что «природа действует средствами и путями, которые являются самыми лёгкими и быстрыми, но не всегда по кратчайшим путям» [1]. Ферма придумал критерий, позволяющий решать простые задачи оптимизации для непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции, а именно: если в точке $x_0 \in (a, b)$ функция дифференцируема и x_0 – точка локального экстремума $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

На сегодняшний момент этот подход включён во все учебники по математическому исчислению как применение дифференцирования.

Первая реальная проблема вариационного исчисления была изучена сэром Исааком Ньютоном (1643-1727) в его знаменитой работе по механике, *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1685), или сокращенно *Principia* [2]. Геометрический метод, используемый Ньютоном, был позже принят Якобом и Джоном Бернулли в решении кривой скорейшего спуска или брахистохрона, которая переносит

точечное тело из одного место в другое за наименьшее время [3]. Данный подход был позже систематизирован Леонардом Эйлером.

В 1684 г. немецкий учёный Готфрид В. Лейбниц опубликовал статью под названием «Новый метод нахождения максимумов и минимумов», которая стала первой в мире публикацией по дифференциальному исчислению и оказала значительное влияние на труды других учёных. Под влиянием этой статьи швейцарские математики братья Якоб и Иоганн Бернулли стали сторонниками нового направления и вместе с Лейбницем разработали концепцию математического анализа.

В XIX в. работу над вариационным исчислением продолжили Карл Вейерштрасс и Карл Г. Якоби. В 1850 г. немецкий механик Густав Роберт Кирхгоф сформулировал современную линейную теорию тонких упругих пластин, основанную, в частности, на работах Бернулли и Навье. Ключевое допущение теории заключается в том, что прямая линия, перпендикулярная срединной поверхности, остаётся прямой и перпендикулярной деформируемой поверхности на протяжении всей деформации (гипотеза Кирхгофа). Данная теория впервые детально была разработана А. Лявом в 1888 г.

В 1904 г. физиком Алланом К.Г. Митчеллом были сделаны первые шаги в разработке идеи структурной оптимизации или возможности разумно экономить материал [4,5]. Митчелл попытался осуществить поиск оптимальных форм каркаса в пределах заданной области пространства R и создать наиболее эффективную конструкцию фермы с минимально возможным весом при постоянной осевой деформации всех элементов, и вдоль всех элементов пространства деформация должна быть выше или равна контрольной деформации. Данная схема подразумевает следующие статико-кинематические условия оптимальности:

$$\epsilon^K = k \operatorname{sgn} N^S \text{ (при } |N| > 0); |\epsilon^K| \leq k \text{ (при } N = 0), \quad (1.1)$$

где ϵ является осевой деформацией, N – усилие в элементе конструкции, k – постоянная, а верхние индексы S и K обозначают статическую и кинематическую допустимость решения.

Работа данного учёного положила основу методики оптимального ортогонального проектирования, в результате которого получают конструкции, которые являются статически определимыми и могут потерять устойчивость при нагружении другими силами [6]. В связи с этим произошло изменение постановки задачи проектирования конструкций, которая приобрела строгую и единообразную форму: требуется найти минимум (максимум) целевой функции при заданных ограничениях на работу конструкции, которые сформулированы в виде равенств и неравенств [7].

Существенный вклад в основу теории поиска оптимальных схем и типов сооружений внёс советский учёный И.П. Рабинович, который в 1933 г. опубликовал монографию по выбору оптимальной формы фермы. Критерием оптимальности являлась равнопрочность основных стержней [8].

Уже в конце 30-х годов были выведены теоремы для конструкций, обладающих максимальной жёсткостью (минимальной потенциальной энергией), включая вариации границ. К примеру, книга польского ученого З. Васютыньского оказала большое влияние на развитие оптимального проектирования, основанного на связи между линейно-упругим деформированием и потенциальной энергией деформации [9]. Ученым был разработан принцип проектирования, основанный на минимуме потенциала упругих деформаций, включая вариации границ, при сохранении постоянного объёма материала [10]. Позже в 1961 г. данный принцип был расширен Мрозом [11].

Первый критерий оптимальности, который основан на принципе равномерного рассеивания энергии, был введён учёными Даниэлем Друкером и Робертом Шилдом в 1956 г [12]. Согласно принципу конструкции с однородной целевой функцией имеют минимальный объём, если рассеиваемая энергия равномерна:

$$\frac{\mathbf{q} \times \mathbf{Q}}{\psi} = \text{const}, \quad (1.2)$$

где \mathbf{q} и \mathbf{Q} являются векторами деформаций и напряжений, а ψ – объём материала на единицу длины или площади конструкции.

В 1963 г. Ричард Шилд предложил аналогичный критерий оптимальности, но теперь уже для многократного нагружения конструкции [13].

Значительным вкладом в разработку оптимального проектирования упругих тел стала статья Эрнеста Мазура [14], в которой описываются критерии максимальной прочности упругих конструкций. Теорема Мазура гласит, что для постоянства веса конструкции удельная потенциальная энергия деформирования «в расчетных волокнах» должна быть постоянной по всей конструкции. Под «расчетными волокнами» подразумеваются те бесконечно малые участки поперечного сечения, на которые могут повлиять сколь угодно малые конструктивные изменения.

В XX в. с развитием высокоскоростных цифровых вычислительных машин появилась возможность внедрять сложные оптимизационные процедуры в систему и тем самым стимулировать дальнейшее исследование новых методов расчёта и анализа конструкций. С помощью ЭВМ стало возможным проводить крупномасштабные вычисления по сложным моделям в удивительно кратчайшие сроки [15].

В 1950-х годах американский профессор Роберт Дорфман ввёл термин «математическое программирование», которое в настоящее время составляет большой класс методов оптимизации, объединяющий линейное программирование, целочисленное программирование, динамическое программирование, выпуклое программирование, нелинейное программирование и программирование при наличии неопределённости [7].

Большой вклад в решение общих задач оптимизации был внесен ученым Л.А. Шмитом. Его работы в 60-80-х годах [16,17] содержали идею применения конечно-элементного расчета конструкций в связке с методами нелинейного программирования.

Развитие теории математического программирования и появление электронных вычислительных машин намного расширило круг конструкций и физических моделей, доступных оптимизации. Одновременно это привело к

естественной переоценке ряда методов, которые были разработаны ранее и основывались на использовании классического анализа.

В 1983 г. была опубликована монография известных американских ученых Хога Э. и Арора, посвященная теоретическим и прикладным вопросам оптимального проектирования, в которой излагались методы линейного и нелинейного программирования, вариационные методы и различные вычислительные алгоритмы [18,19].

Необходимость решения задач с большим числом проектных переменных способствовала разработке мощных методов, основанных на градиенте, а именно методов критериев оптимальности [20-23], методов последовательного квадратичного программирования [24-27] и эволюционной структурной оптимизации [28-35].

Методы последовательного квадратичного программирования или SQP методы для общих нелинейных задач с ограничениями были впервые изучены Робертом Вильсоном в 1963 г [25].

В 1987 г. выходит статья Кристера Сванберга, в которой впервые упоминается метод подвижных асимптот или ММА, который был разработан для нелинейного программирования и структурной оптимизации [36]. В 2002 г. вышла глобально сходящаяся версия GCMMA [37]. В настоящее время данный метод является активно используемым при оптимизации топологии и формы конструкции.

Начиная с 2000-х годов появляется современная концепция оптимизации конструкции, всё больше внимания уделяется анализу чувствительности к задачам нелинейного программирования [38]. В 2005 г. выходит совместная статья, написанная Филипом Гиллом, Уолтером Мюрреем и Майклом Сондерсом, в которой описывается разреженный метод нелинейной оптимизации или SNOPT, созданный для решения крупномасштабных задач [39,40].

Растущий интерес к эффективным методам оптимизации привёл также к разработке методов внутренней точки или барьерных методов для крупномасштабного нелинейного программирования [41]. Учеными из

университета Карнеги-Меллона Андреасом Вехтером и Лоренцом Биглером был разработан алгоритм IPOPT, основанный на методе внутренней точки [42].

Обзор вычислительных методов широко отражен в работах [43-45], где приводится анализ различных решений, которые применимы к оптимизации формы и топологии.

Впервые задачу оптимизации формы в общем виде рассмотрели ученые Зенкевич и Кембелл в 1973 г. В качестве проектных переменных использовались узлы конечных элементов.

Большой вклад в развитие оптимального проектирования конструкций внёс профессор Баничук Н.В. В [46] учёным была сформулирована задача выбора оптимальной формы поперечного сечения вала с целью максимизации жесткости на кручение при заданном количестве имеющегося материала. Было получено необходимое условие для оптимального расположения границы, которое было решено аналитически. В докторской диссертации Баничука Н.В. [47] было проведено исследование оптимальных форм упругих тел и в 1980 г. была опубликована монография [48], посвящённая новым постановкам задач в области оптимизации конструкций, а именно исследованию оптимальных форм и структуры упругих тел при различных внешних воздействиях. В 1986 г. была выпущена книга [49], в которой Баничук Н.В. рассматривал современное состояние теории оптимального проектирования. Большое внимание было уделено рассмотрению оптимальных решений, полученных с использованием критериев прочности, жёсткости, устойчивости и веса для ферм, балок, криволинейных стержней, пластин, оболочек и массивных тел.

Стоит также отметить значительный вклад в оптимальное проектирование оболочек профессора Ступишина Л.Ю. В 1984 г. учёным была защищена кандидатская диссертация [50], в которой впервые решены задачи оптимизации формы геометрически нелинейных пологих оболочек вращения и оболочек на прямоугольном плане постоянной толщины, а также оболочки вращения переменной толщины. Совместно с Колесниковым А.Г. была опубликована монография [51], посвящённая актуальным вопросам определения оптимальных

форм срединных поверхностей и распределения толщин тонких пологих геометрически нелинейных оболочек на круглом или прямоугольном плане, работающих в упругой стадии деформирования. В монографии представлена оптимальная форма оболочек по заданным критериям (при различных ограничениях), которая находится решением соответствующих уравнений с привлечением метода Бубнова-Галеркина. При этом заданные формы оболочек содержат параметры, выделяющие каждую оболочку, и значения, определенные при оптимизации, отвечают оптимальной форме срединной поверхности. Колесников А.Г. продолжил разработки Ступишина Л.Ю. [52] и в своей кандидатской диссертации [53] предложил решение новых задач оптимальных форм пологих оболочек по критерию минимума объёма (веса) и значений напряжений (максимума критической нагрузки) и минимальной частоты свободных колебаний.

В 2019 г. профессором Кривошапко С.Н. были представлены 24 критерия оптимальности, применяемые для оболочек вращения, а также совместно с профессором Ивановым В.Н. был осуществлён выбор оптимальной формы оболочки вращения из нескольких известных подклассов [54,55].

Оптимальному проектированию конструкций посвящены работы Тарарушкина Ю.Ф. В 1986 г. учёным была защищена кандидатская диссертация [56], в которой рассматривались вопросы оптимизации конечноэлементных систем, в том числе оптимизация формы тонкостенного купола с помощью метода проекции градиента. Стоит также упомянуть статьи [56-59], в которых отражены современные подходы к оптимизации конструкций с использованием численных методов оптимизации в комбинации с традиционными средствами вариантного проектирования.

С появлением метода конечных элементов активно ведутся исследования по вычислительной сетке в процессе расчёта. Основная проблема конструкции, решаемой методом конечных элементов, заключается в том, что в качестве оптимальных конструкций могут быть получены волнистые формы, а эти волны напрямую связаны с сеткой. Проблема искажения сетки из-за большого изменения

геометрии затрагивается в [60-62]. Для того, чтобы предотвратить появление негладкой конструкции, вводятся специальные параметры. Одним из важных параметров является радиус фильтра (R_{\min}). Впервые методы фильтрации были затронуты в работах Sigmund O. [63-67]. Стоит также упомянуть работы Bendsoe MP. [68-71]. Также большой интерес представляют работы Bletzinger KU. [72-78], посвящённые проведению оптимизации формы оболочек с использованием специальных методов контроля формы для достижения эффективной конструкции.

Необходимо отметить тот факт, что ещё недостаточно исследовано влияние параметров на оптимизацию формы канонической оболочки. В основном в настоящее время больше внимания отводится оптимизации топологии и мало где затрагивается влияние параметров на процесс оптимизации.

1.2. Обзор оптимизационных задач на основе конструктивных переменных

Цель оптимизации заключается в создании новой оптимизированной конструкции, которая будет более эффективной по сравнению с заданной с точки зрения напряженно-деформированного состояния, энергии деформации, объёма материала и т.д. Динамика применения оптимизации никогда не была такой интенсивной, как в последние десятилетия, когда рост стоимости сырья и необходимость снижения энергопотребления сделали более решающей, чем когда-либо, оптимизацию производимых компонентов на ранних стадиях проектирования, чтобы они выполняли своё предназначение при минимальном количестве составляющего материала [79].

Задача оптимизации состоит в том, чтобы найти значение управляющих переменных, которое минимизирует или максимизирует целевую функцию $f(x)$ с учетом ряда ограничений. Целевую функцию можно представить в следующем виде [80]:

$$K = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \quad (1.3)$$

где K – критерий оптимальности; $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ – функция, представляющая собой зависимость критерия оптимальности от конструктивных параметров, влияющих на её значение. В качестве проектных параметров могут служить любые основные или производные величины, служащие для количественного описания системы [81]; $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ – параметры конструктивного решения.

Критерий оптимальности должен удовлетворять условию минимума функционала:

$$z = z(x, u) \rightarrow \min, \quad (1.4)$$

где x, u – пространства проектирования.

Данное условие минимума определяет выбранный критерий.

В задачах оптимизации обязательными элементами являются критерии оптимальности, по которым определяются приемлемые варианты из множества возможных вариантов; а также параметры оптимизации (независимые переменные) [15]. Поэтому целевая функция составляется на основании выбранного критерия оптимальности.

Термин «оптимальное проектирование» является альтернативой вариантного проектирования, при котором кроме расчёта автоматизирован анализ напряжённо-деформированного состояния, а также переход к более качественному варианту несущей конструкции при соблюдении ограничений прочности, жёсткости и др. [58,82-84].

1.2.1. Существующие критерии оптимальности конструкции

Решение любой задачи оптимизации сначала предполагает построение модели исследуемого объекта, а затем проведение вычислительного эксперимента, который позволяет эффективно исследовать свойства самой модели в определенном диапазоне настроек, продиктованном характером эксперимента.

Перед выполнением расчета необходимо определить, что можно изменить, чтобы найти оптимальное решение, поскольку процесс проектирования зданий и

сооружений является сложным и сопряжен с различными требованиями. Эти требования могут быть представлены в виде критериев качества (включая конструктивные, технологические, экономические и функциональные), состоящих из подмножества частных критериев. Например, конструктивные и технологические критерии включают прочность, устойчивость, жесткость, долговечность и т.д. [6]. При использовании экономических критериев учитываются не только эксплуатационные характеристики конструкции, но и затраты на производство [85].

Наиболее важные критерии на примере поверхности вращения оболочек, представлены в статье С. Н. Кривошапко [54]. Определение критериев приводит к формированию определенного набора проектных переменных, которые определяют основные свойства задачи оптимизации. В этой работе рассматриваются критерии минимального объёма, веса, равнопрочности, определяемые конкретной постановкой задачи оптимизации.

К примеру, показывается критерий минимального объёма внутреннего пространства оболочки при заданной площади её поверхности. Данный критерий применяется тогда, когда нужно спроектировать оболочку вращения, которая будет обладать свойством максимального внутреннего объёма при минимальной площади боковой поверхности [86]. В этой задаче необходимо найти такую плоскую кривую $r = r(z)$ (меридиан), при вращении которой вокруг оси Oz образуется необходимая срединная поверхность оболочки вращения переменной гауссовой кривизны. Данный критерий хорошо подходит для нодоидных оболочек [87].

Критерий минимального веса (минимум массы или объёма) является весьма важным критерием, поскольку для многих конструкций снижение веса ведёт к упрощению в технологии изготовления и снижению затрат, что является очень важным фактором в строительной отрасли [87-90].

Особое внимание представляет собой критерий равнопрочности, в основе которого лежит условие текучести Мизеса для создания равнопрочных или полнонапряжённых конструкций. В статье [91] используются методы нелинейного

математического программирования и концепция полнонапряжённости. Для поиска требуемой оптимальной конструкции используется формула отношения напряжений:

$$X_i^{(v+1)} = \frac{x_i^{(v)} \max_j (\delta_{ij})}{\delta_i'}, j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.5)$$

где δ_{ij} – эквивалентное напряжение в i -м элементе при j -м случае нагружения; δ_i' – допускаемое напряжение для i -го элемента; n – количество случаев нагружения, v – номер итерации.

Равнопрочность является весьма важным критерием качества в теории сооружений, поскольку позволяет избежать большие деформации, предотвращая тем самым разрушение элементов конструкции под воздействием нагрузок.

Свойство равнопрочности тесно связано с ещё одним важным критерием – энергией упругой деформации. Под действием внешних сил конструкция, изготовленная из одинакового материала, для которой в каждой точке выполняется требование постоянства удельной потенциальной энергии деформации (упругого потенциала), будет равнопрочной. Также будет достигаться минимальный потребный объём конструктивного материала при заданном уровне напряжений [92].

Использование данного энергетического критерия весьма актуально, поскольку при разработке многих конструкций предъявляются требования достаточной прочности и жёсткости при минимальном расходе материала.

При заданных нагрузках, чем ниже энергия упругой деформации, тем меньше возникающие в конструкции напряжения. Это напрямую влияет на прочность (способность конструкции противостоять разрушению) и жесткость (сопротивление деформациям).

Стоит также отметить, что энергия упругой деформации накапливается в областях с более высокими напряжениями. Минимизация энергии способствует достижению равномерного распределения напряжений, что является важной целью оптимизации.

Проектированию и исследованию конструкций с минимальной потенциальной энергией деформации посвящено значительное количество работ [92-101].

Все вышеперечисленные критерии можно использовать для создания оптимальной конструкции, которая будет удовлетворять определённым требованиям по массе, объёму, по прочностным характеристикам.

1.2.2. Методы оптимизации на основе конструктивных переменных

После того, как задача оптимизации сформирована, важно определить проблему, цель, которую необходимо достичь путем изменения указанных переменных. Эта цель является формой целевых функций. В области архитектуры и строительства существует несколько ограничений, которые необходимо учитывать. Основная идея состоит в том, чтобы варьировать форму в пределах выбранного класса областей, удовлетворяющих определенным промышленным ограничениям (таким как количество материала [102], пространственные и размерные ограничения или некоторое сходство с фиксированной формой), и искать оптимальную форму, которая минимизирует заданную целевую функцию [52], при этом сохраняя требуемые эксплуатационные характеристики. Все это формирует пространство ограничений, о котором необходимо помнить, поскольку оно ограничивает пространство поиска допустимыми решениями.

В задаче оптимизации конструкции учитывается её структурное поведение при поиске оптимального варианта. С помощью полученного расчёта на прочность можно оценить соответствующую целевую функцию или ограничение.

Затем выбирается метод оптимизации, который обеспечивает оптимизацию целевой функции путем изменения входных параметров [103]. Необходимо отметить, что методы математического моделирования и оптимизации являются важнейшими средствами решения задач исследования, проектирования, управления технологическими процессами и системами на всех стадиях

жизненного цикла объекта строительства [104]. Все необходимые компоненты оптимизации показаны на рисунке 1.1.

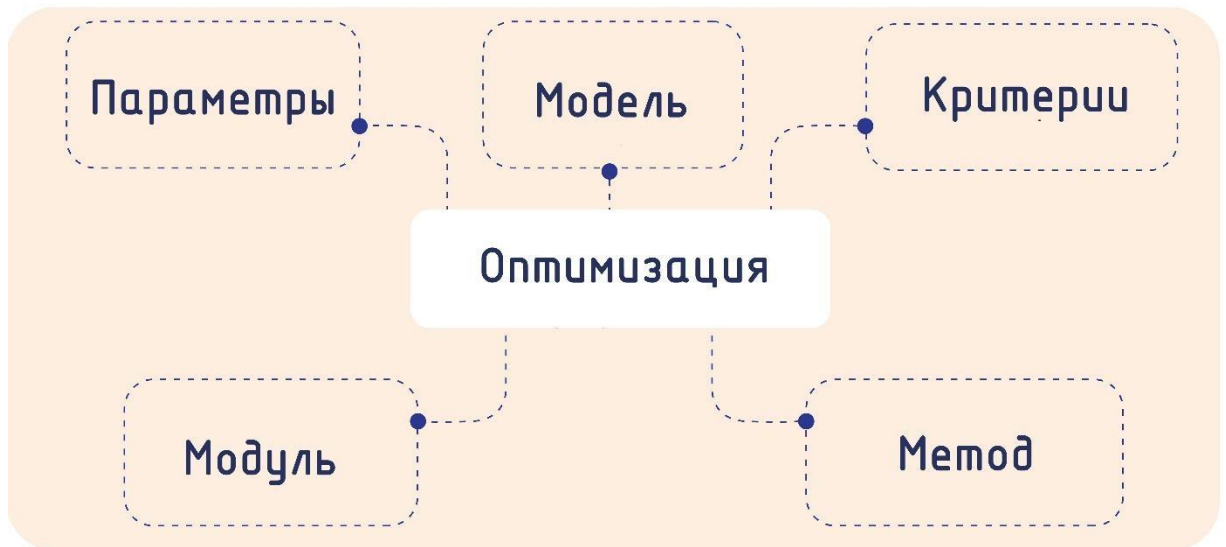


Рисунок 1.1 – Необходимые составляющие оптимизации

На основе конструктивных переменных существует три типа задач: оптимизация размеров, формы и топологии, которые являются мощными инструментами для эффективного проектирования конструкций зданий и сооружений (рисунок 1.2).

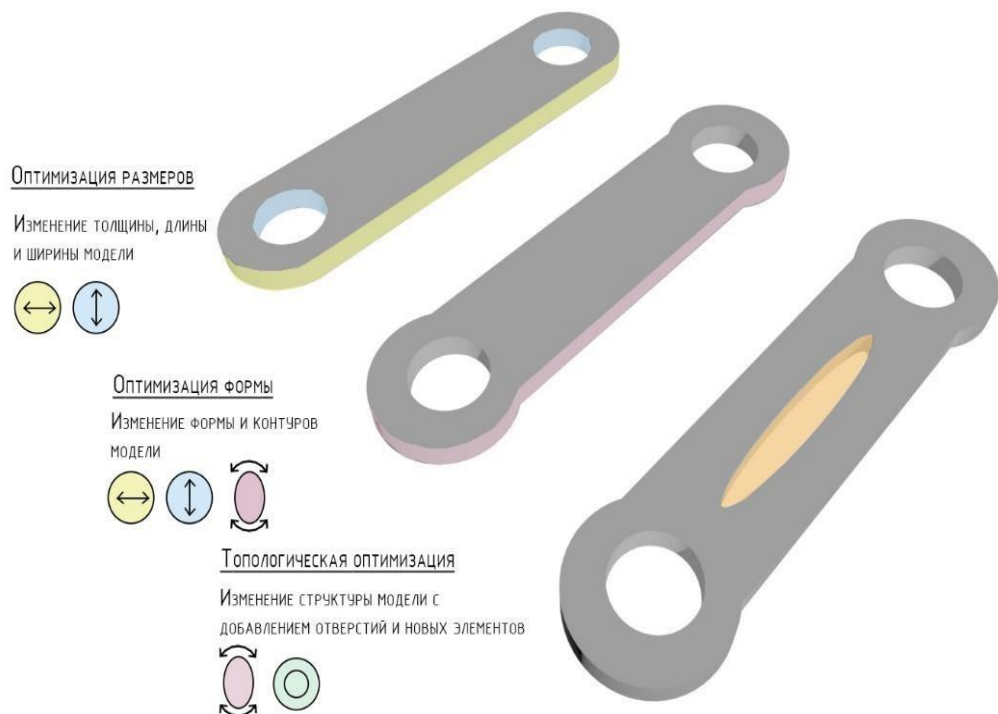


Рисунок 1.2 – Три типа задач структурной оптимизации

Задачи структурной оптимизации почти всегда нелинейны и требуют итеративного метода решения: анализируется структура, а затем оцениваются улучшенные значения проектных переменных. Нелинейное программирование при решении задач включает в себя элементы экспериментирования и подбора наиболее эффективной процедуры отыскания экстремума, учитывающей специфику решаемой задачи [7].

Оптимизация изучает разнообразные методы/алгоритмы, которые могут быть применены к математическим моделям для получения требуемого решения. Решение оптимизационной задачи строится сначала на построении модели исследуемого объекта, а затем на проведении вычислительного эксперимента, который позволяет эффективно исследовать свойства самой модели в определённом диапазоне входных данных, диктуемых характером эксперимента. Математическое моделирование позволяет изучать только те параметры оригинала, которые имеют математическое описание, адекватно отображающее поведение оригинала [105]. Перед выполнением расчёта необходимо проанализировать, что можно изменить для нахождения оптимального решения, так как процесс проектирования сложен и включает в себя различные требования.

Обзор исследований, посвящённых структурной оптимизации в гражданском строительстве, подробно приведен в работах [106-122]. Основные методы оптимального проектирования конструкций представлены в [61,123-129].

Оптимизация размеров является структурным процессом, при котором изменяются геометрические параметры исследуемой модели при сохранении первоначального внешнего вида и топологии [130]. В качестве конструктивных переменных могут выступать свойства элементов, материалов и соединений объекта исследования. Целостность самой модели остаётся неизменной. Проблема оптимизации размеров формулируется, например, как задача определения оптимального распределения толщины пластины, или сечения стержня [131].

Топологическая оптимизация находит оптимальное распределение материала и пустот в определённой области с учётом геометрического пространства конструкции, нагрузок и граничных условий [132]. Применение этого

вида оптимизации к проектированию конструкции обычно включает в себя учёт таких величин как вес, напряжение, жёсткость, перемещение, нагрузки на изгиб и резонансные частоты, причём некоторые из них определяют целевую функцию, а другие ограничивают систему [133]. Такой вид оптимизации удобен, когда в модели ожидаются значительные изменения (появление отверстий, слияние элементов, добавление новых компонентов и т.д.). В настоящее время активно ведутся исследования, посвящённые топологической оптимизации [134-138]. Среди статей, посвящённых топологической оптимизации, можно выделить [131], в которой основное внимание уделяется новым разработкам и усовершенствованиям в области топологической оптимизации и [137], где рассматриваются вопросы улучшения применимости оптимизации топологии к задачам проектирования конструкций.

В процессе оптимизации формы изменяются границы, формы и контуры исследуемого объекта при сохранении его геометрической структуры – топологии, заданных границ в соответствии с конкретными требованиями [138]. Благодаря тому, что топология является фиксированной, в процессе расчёта можно получить интересную вариацию формы исследуемой оболочки по сравнению с некоторыми структурными изменениями размеров формы. Определение максимально устойчивой (или наиболее лёгкой и т.д.) конструкции является естественной задачей при оптимизации формы [139-140]. Введение в данный вид структурной оптимизации кратко представлено в [141], а в [142-158] проводится обзор некоторых фундаментальных идей и последних разработок в области оптимизации формы.

1.3. Вычислительный подход к решению задач оптимизации

В настоящее время существует два стандартных подхода к решению задач оптимизации.

Первый подход – аналитический, содержит в себе путь вычисления оптимизационной задачи, связанный с применением средств дифференциального и вариационного исчисления для определения экстремума функции. Ввиду сложности и масштабности расчетов, обычно аналитические методы применяются при изучении оптимальных геометрических форм простых конструктивных элементов, таких как балки, колонны и плиты [159]. Поэтому при решении задач оптимизации формы оболочек широко распространён второй подход – вычислительный или алгоритмический метод решения, содержащий в себе такую процедуру, которая позволяет на основе известных исходных данных для каждого конкретного случая получить приближенное решение в виде конечной точки [160]. Как правило, современные методы, основанные на алгоритме, предполагают использование определённых вычислительных программ.

Второй подход выполняется при использовании программных систем для расчёта. При создании оптимального варианта конструкции проведение вычислений тесно связано с проектированием исследуемого объекта. В настоящее время архитектура всё больше усложняется, возникают инновационные пространственные формы конструкций. Соответственно область инструментов для создания и расчёта сложных форм быстро расширяется, постоянно обновляются новые программные средства. В большинстве случаев программы для расчёта обладают универсальностью и предполагают решение широкого спектра задач в различных технических областях. Такие программы как COMSOL Multiphysics 6.4, ANSYS Mechanical 2026 R1 [161-163], SIMULIA Abaqus 2026 [164] обладают многофункциональной системой для автоматизации процесса проектирования и позволяют решать разнообразные задачи, в том числе задачи структурной оптимизации, а также создавать первоначальный вариант геометрии перед вычислением. Однако в настоящее время не все расчётные программы снабжены возможностями для проведения процесса оптимизации. К примеру, в ПК ЛИРА-САПФИР 2025 и SCAD Office 25.1, несмотря на их интегрированную среду для соединения расчёта с задачами проектирования и возможностью моделировать оболочки по уравнениям, всё ещё нет специального модуля для проведения

оптимизации. Программа АРМ FEM 24.0, представляющая собой систему прочностного анализа для Compas 3D v24, включает в себя опцию по проведению топологической оптимизации. Остальные типы структурной оптимизации в программе пока недоступны.

Что касается программ непосредственно для 3D-моделирования, уже существуют возможности проведения оптимизации прямо в них без экспорта в специализированные программные комплексы. В качестве примера можно привести программу Rhino 8 со связкой Grasshopper [28], позволяющую проводить различные виды оптимизационных расчётов, в том числе и оптимизацию формы. Также Rhino 8-Grasshopper уже имеет связь с программами для BIM-проектирования – ArchiCAD 29.0 и Revit 2026. В Таблице 1.1 представлен обзор наиболее используемых программ для расчёта и моделирования.

Таблица 1.1 – Возможность проведения оптимизации формы в программных комплексах для расчёта и моделирования

Программа	Расчёт оболочки по параметрическим уравнениям	Проведение оптимизации формы	Метод оптимизации	Модуль оптимизации
Scad Office 25.1	+	-	-	-
ЛИРА-САПФИР 2025	+	-	-	-
АРМ FEM 24.0	-	-	-	-

ANSYS Mechanical 2026 R1	+	+	Последовательное выпуклое программирование (Sequential Convex Programming SCP). Метод критерия оптимальности (Optimality Criteria- OC)	Workbench- Structural Optimization
COMSOL Multiphysics 6.4	+	+	Метод подвижных асимптот (ММА) Метод сопряжённых уравнений (SNOPT) Метод внутренней точки (IPOPT)	Shape optimization
Rhinoceros 8 с Grasshopper	+	+	Эволюционный алгоритм (EA) в решателе Galapagos	Galapagos
SIMULIA Abaqus 2026	-	+	Алгоритм оптимизации, основанный на условиях	SIMULIA Tosca Structure Shape

1.4. Процесс оптимизации формы в программном комплексе

В исследовании проведение оптимизации формы оболочек с использованием вычислительного подхода происходит в программе COMSOL Multiphysics. В данном разделе демонстрируется процесс оптимизации формы в используемом программном комплексе. Дальнейшее проведение расчетов подробно представлено в Главе 3.

Программа COMSOL Multiphysics обладает широкими возможностями для проведения оптимизации. В программу заложен модуль Optimization, который представляет собой многоцелевое расширение пакета COMSOL, совмещенное со всеми остальными модулями программы и дополняющее базовый функционал. Модуль обеспечивает проведение параметрической, топологической, геометрической оптимизации и некоторых видов обратных задач, связанных с подбором значения переменных на основе внешних, как правило, экспериментальных данных. В системе предусматривается две группы методов решения задач оптимизации: градиентные и безградиентные.

Градиентные методы используются для решения задач с большим количеством входящих параметров, что свойственно оптимизации формы и топологии. Во время проведения исследования одновременно рассчитываются все аналитические производные. Безградиентные методы используются в основном для решения задач параметрической оптимизации, когда в качестве управляющих параметров используются геометрические размеры, а на каждой итерации требуется перестроение расчетной сетки [165].

В программе COMSOL Multiphysics за процесс оптимизации формы отвечает решатель Shape Optimization, куда входят три градиентных оптимизационных метода: метод подвижных асимптот (ММА, GCMMA), метод внутренней точки (IPOPT), разреженный метод нелинейной оптимизации (SNOPT).

Общий процесс оптимизации формы, который можно разделить на четыре основных этапа, показан на рисунке 1.3.

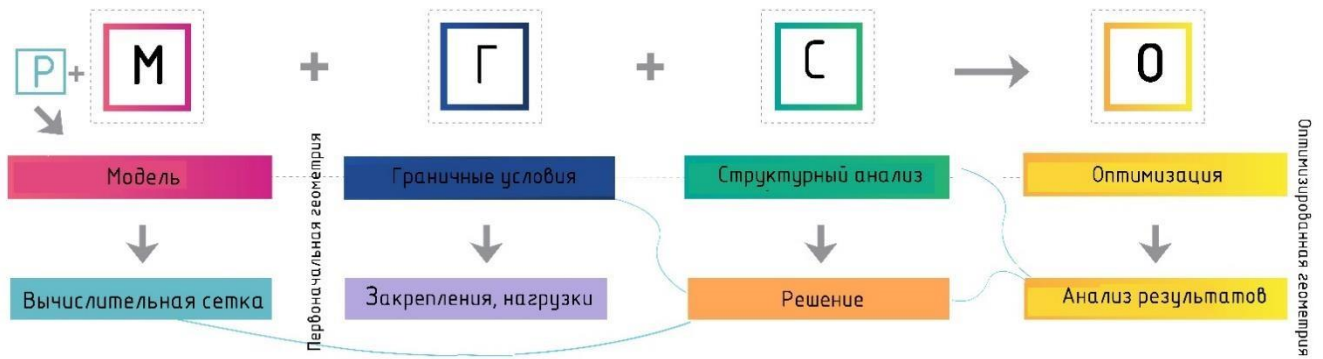


Рисунок 1.3 – Процесс оптимизации формы в COMSOL Multiphysics

Три первых шага связаны с первоначальной геометрией модели, а последний четвёртый шаг уже с оптимизированным вариантом. Необходимо отметить, что процесс перехода от одного этапа к другому в COMSOL Multiphysics осуществляется за счёт последовательного создания файлов в среде построения моделей (Model Builder).

На подготовительном этапе происходит создание либо загрузка модели формата CAD в COMSOL Multiphysics. Для того чтобы модель обладала физическими характеристиками реальной исследуемой конструкции определяются входные параметры модели, которые могут включать в себя радиус, нагрузки, массу и т.д., которые далее можно поставить в качестве критериев. Далее происходит переход уже непосредственно к самой геометрии модели. В этой части назначается материал, строится вычислительная сетка. Построение вычислительной сетки является довольно важным подготовительным процессом, поскольку именно от выбора типа сетки и размеров конечных элементов зависит точность дальнейшего расчёта.

Перед построением сетки выбирается тип конечных элементов, на которые будет разбиваться модель, и сами размеры элементов. В COMSOL Multiphysics доступны два вида 2D сеток: треугольники и четырёхугольники, а также четыре типа 3D сеток: тетраэдры, гексаэдры (параллелепипеды), треугольные призмы (призмы) и пирамиды [166]. В генератор сетки входят девять предустановленных размеров: от очень мелкого до очень крупного. Также можно выбрать два режима построения вычислительной сетки: автоматический с готовым набором размеров

элементов и пользовательский, где осуществляется самостоятельное назначение размеров.

При построении проектной модели выбирается тип, число и характер распределения переменных проектирования; обозначаются условия нагружения и ограничения, которые обязательно должны быть учтены при решении задачи.

После этого можно переходить к решению прямой задачи до проведения процесса оптимизации. После проведения расчета на прочность и анализа полученных результатов выбирается шаг исследования - Shape Optimization и все остальные настройки уже происходят внутри этой системы. Для начала с учётом типа задачи выбирается оптимизационный метод из трёх предложенных (ММА, SNOPT и IPOPT).

Для каждого метода нужно определить количество итераций, которые необходимо выполнить, чтобы получить решение с заданной точностью ε , где ε является точностью метода.

В рамках каждой итерации решается линеаризованная система уравнений. Существует два основных (фундаментальных) класса алгоритмов, доступных для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) – прямые и итеративные решатели. Прямые решатели являются более надёжными, но требующими относительно большого объёма памяти и времени, в отличие от итеративных решателей.

Прямыми решателями, доступными в COMSOL Multiphysics, являются PARDISO, MUMPS и SPOOLS, а также решатель плотных матриц. Все данные решатели основаны на алгоритме LU – разложения¹. Матрица A представляется в виде:

$$A = L \bullet U, \tag{1.6}$$

¹ Walter Frei. Solutions to Linear Systems of Equations: Direct and Iterative Solvers.

URL:<https://www.comsol.com/blogs/solutions-linear-systems-equations-direct-iterative-solvers> (дата обращения: 05.05.2024)

где L – нижнетреугольная матрица с единичной диагональю, а U – верхнетреугольная матрица. PARDISO и MUMPS являются самыми быстрыми решателями.

Для проведения оптимизации формы с помощью градиентных методов MMA, IPOPT и SNOPT используется решатель MUMPS. Пакет «MUMPS» (мультифронтальный массивно параллельный разреженный прямой решатель) применяется для решения систем линейных уравнений вида $Ax=b$, где A – квадратная разреженная матрица, которая может быть либо несимметричной, либо симметричной [167]. MUMPS реализует прямой метод, основанный на мультифронтальном подходе, который выполняет факторизацию по Гауссу.

Процесс продолжается до тех пор, пока не будут достигнуты определенные условия. Самым важным и ключевым моментом в процессе оптимизации математической модели становится определение и выбор целевой функции, которая будет являться критерием, указывающим на качество системы и применительно к которому будет оптимизироваться проект. Определение оптимального значения целевой функции является одним из механизмов контроля завершения процесса оптимизации.

Далее происходит выбор типа оптимизационной задачи: минимизация или максимизация; вводится система ограничений. После определения всех данных для расчета выполняется запуск оптимизации и последующий анализ результатов.

1.5. Выводы по первой главе

На основании материала, изложенного в текущей главе, можно сделать следующие выводы:

1. Развитие теории математического программирования в XX-в. и появление ЭВМ существенно расширило возможности проведения оптимизации конструкций и способствовало разработке методов, основанных на градиенте.

2. Несмотря на использование специальных методов контроля формы для получения оптимальной конструкции, ещё недостаточно исследовано влияние специальных параметров на оптимизацию формы оболочки.

3. Повышенный интерес к оптимизации формы связан с эффективностью её изменения в процессе расчёта в целях улучшения характеристик конструкции, что также связано с усложнением средств анализа конструкций и оптимизации и позволяет решать более трудоёмкие задачи оптимизации формы.

4. Среди наиболее распространенных критериев (веса, объёма материала и т.д.) при оптимизации формы применение энергетического критерия способствует обеспечению оптимальных нагрузок и распределения напряжений, повышает прочность и жесткость, а также позволяет создавать более легкие и экономичные конструкции.

5. Несмотря на то, что в настоящее время увеличивается интерес к структурной оптимизации и её видам, не так много программ для практических инженерных расчетов позволяют проводить оптимизацию формы. COMSOL Multiphysics 6.4, ANSYS Mechanical 2026 R1, SIMULIA Abaqus 2026 являются основными расчётными программами, основанными на методе конечных элементов, в которых реализован процесс оптимизации формы. При этом в современных отечественных расчетных программных комплексах пока отсутствует возможность проведения специализированного расчета оптимизации формы, что требует восполнения существующего пробела.

ГЛАВА 2. ПРОВЕДЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ ОБОЛОЧЕК ПО ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМУ КРИТЕРИЮ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПОДХОДА

2.1. Модель материала

В процессе оптимизационного расчёта алгоритм оптимизации принимает решения об изменении исходной формы оболочки на основе результатов прочностного расчёта.

В работе рассматривается линейно-упругая модель изотропного материала, свойства которого являются одинаковыми по всем направлениям. Для описания такого материала требуются два независимых параметра. Наиболее используемыми являются модуль упругости E (модуль Юнга) и коэффициент Пуассона ν .

Модуль упругости E является коэффициентом пропорциональности для материалов, находящихся в линейно-упруго напряжённом состоянии, связывает относительную деформацию ε и напряжение σ [168]:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (2.1)$$

Тензор напряжений σ задает напряженное состояние в материале и содержит 9 компонент:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy},$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ являются нормальными напряжениями, а $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ являются напряжениями сдвига.

Коэффициент Пуассона представляет собой модуль отношения относительной поперечной деформации ε_1 к относительной продольной ε :

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right|. \quad (2.3)$$

Выразим тензор напряжений σ через физическую матрицу упругости D , размерности 6×6 :

$$\sigma = D\varepsilon. \quad (2.4)$$

Матрица упругости для изотропного материала через упругие константы E и ν представляется в виде:

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

где D -матрица, размерностью 6×6 , а ν -скаляр.

Прочностной расчёт осуществляется следующим образом:

1. По заданной энергии упругой деформации W определяется её начальная удельная потенциальная энергия деформирования W_s^0 .

2. По линейной связи $W_s^0 = \frac{1}{2} \sigma_0 \varepsilon_0$, где σ_0 и ε_0 являются начальным напряжением и начальной относительной деформацией соответственно, определим σ_0 до оптимизации:

$$\sigma_0 = \frac{2W_s^0}{\varepsilon_0}. \quad (2.6)$$

3. По определённым в результате оптимизации плотности энергии W_s и деформации ε_0 согласно линейной связи, получим прочность σ после оптимизации:

$$\sigma = \frac{2W_s}{\varepsilon}. \quad (2.7)$$

4. Разность между прочностями σ_0 и σ равна:

$$\sigma_0 - \sigma = \frac{2(W_s^0 \varepsilon - W_s \varepsilon_0)}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (2.8)$$

Реализация расчётов тесно связана с подходом конечно-элементного анализа. Превышение у большого количества конечных элементов максимальной удельной потенциальной энергии деформирования приводит к разрушению конструкции.

Деформация упругого тела, наряду с перемещением его точек, представляет изменение длины и направления соединяющих эти точки отрезков и состоит из линейных и угловых составляющих. В теории оболочек деформациям по криволинейным координатам α и β сопоставляют линейные деформации ε_x и ε_y по прямоугольным координатам с учетом геометрических характеристик оболочек [169].

К примеру, $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_\alpha}$, $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_\beta}$ [51], где u, v, w – перемещения по координатным осям, R_α и R_β – радиусы кривизны. При малой толщине h оболочки и больших R_α и R_β приемлемо полагать $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ (по Коши).

2.2. Теория удельной энергии изменения формы

В диссертации оптимизация формы оболочки проводится по энергетическому критерию и сопряжена с удельной энергией изменения формы.

Гипотеза, что изменение формы определяется предельным значением удельной потенциальной энергии, противоречит экспериментам (при гидростатическом сжатии потенциальная энергия увеличивается без изменения формы) и уточнена – возникновение соответствующих деформаций определяется предельным значением удельной потенциальной энергии изменения формы u_ϕ .

Полная удельная потенциальная энергия равна:

$$u = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3). \quad (2.9)$$

Удельная потенциальная энергия, затраченная на изменение объема, находится по формуле:

$$u_v = \frac{3}{2} \sigma_{cp} \varepsilon_{cp} = \frac{3}{2} \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right) \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} \right) = \frac{1}{2} \sigma_0 \theta, \quad (2.10)$$

где σ_0 – гидростатическое напряжение, а θ – объёмная деформация.

Согласно $u_\phi = u - u_v$:

$$u_\phi = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) - \frac{1}{2} \sigma_0 \theta. \quad (2.11)$$

Выражая деформации через напряжения, получим удельную потенциальную энергию изменения формы при сложном напряженном состоянии:

$$u_\phi = \frac{1+\nu}{E} \times \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1+\nu}{E} I_2(D_\sigma), \quad (2.12)$$

где $I_2(D_\sigma)$ – второй инвариант девиатора напряжений.

При одноосном растяжении $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, а $\sigma_1 = \sigma_\tau$, где σ_τ – предел текучести и тогда:

$$u_\phi = \frac{(1+\nu)}{3E} \sigma_\tau^2. \quad (2.13)$$

Из формул (2.12) и (2.13) следует:

$$\sigma_\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{6I_2(D_\sigma)}, \quad (2.14)$$

$$\sigma_\tau = \sqrt{3I_2(D_\sigma)}.$$

Согласно Губеру и Мизесу, предложившим критерий пластичности (2.14), текучесть начинается, когда касательные напряжения на октаэдрических площадках достигают предельного значения $\tau_{\text{окт}}^{\text{max}}$:

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{\frac{2}{3} I_2(D_\sigma)}. \quad (2.15)$$

По критерию текучести Треска – Сен-Венана пластическое течение начинается, когда максимальные касательные напряжения $\tau_{12} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$, $\tau_{23} = (\sigma_2 - \sigma_3)$ и $\tau_{31} = (\sigma_3 - \sigma_1)$ достигают предельных значений τ_{\max} и предел текучести равен:

$$\sigma_{\tau} = 2\tau_{\max}. \quad (2.16)$$

При плоском напряженном состоянии по Треска–Сан-Венану:

$$\sigma_{\tau} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau_{\max}^2}. \quad (2.17)$$

А по Губеру-Мизесу:

$$\sigma_{\tau} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau_{\text{окт}}^2}. \quad (2.18)$$

При чистом сдвиге:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\tau}}{2}, \quad (2.19)$$

$$\tau_{\text{окт}}^{\max} = \frac{\sigma_{\tau}}{\sqrt{3}}. \quad (2.20)$$

Согласно формулам (2.19) и (2.20):

$$\tau_{\text{окт}}^{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}}\tau_{\max}. \quad (2.21)$$

Из формулы (2.20) следует:

$$\sigma_{\tau} = \sqrt{3}\tau_{\text{окт}}^{\max}. \quad (2.22)$$

А из формул (2.14) и (2.22) следует, что:

$$\sqrt{I_2(D_{\sigma})} = \tau_{\text{окт}}^{\max}. \quad (2.23)$$

Согласно (2.15):

$$I_2(D_{\sigma}) = \frac{3}{2}\tau_{\text{окт}}^2. \quad (2.24)$$

и с учетом (2.12) получим:

$$u_{\phi} = \frac{3}{2E}(1+\nu)\tau_{\text{окт}}^2. \quad (2.25)$$

Поскольку $\theta = \frac{\sigma_0}{E_v}$, где объёмный модуль упругости $E_v = \frac{E}{3(1-2\nu)}$, то удельная энергия, затрачиваемая на изменение объема равна:

$$u_v = \frac{3}{2E}(1-2\nu)\sigma_0^2. \quad (2.26)$$

Наступление предельного состояния в процессе силового деформирования материала означает его разрушение или появление пластических деформаций – начало его пластического течения. При одноосном нагружении предельное состояние устанавливается сопоставлением напряжения пределу текучести σ_τ или временному сопротивлению σ_ϵ . В известных первой и второй теориях прочности параметр σ_ϵ определяет хрупкое разрушение материала, когда одно из главных напряжений достигает предельной величины равной σ_ϵ при растяжении. Параметр σ_τ , отражает максимальное касательное напряжение τ_{\max} в третьей теории пластичности и максимальное касательное октаэдрическое напряжение $\tau_{\text{окт}}^{\max}$ в четвертой теории пластичности. Таким образом, отмеченные критерии являются однопараметрическими.

Предельное напряженное состояние реализуется при определенных соотношениях между главными напряжениями, представляющимися в виде [169]:

$$f[I_1(T_\sigma), I_2(D_\sigma), I_3(D_\sigma)] = 0, \quad (2.27)$$

где $I_1(T_\sigma)$ - первый инвариант тензора напряжений, а $I_2(D_\sigma), I_3(D_\sigma)$ - второй и третий инварианты девиатора напряжений соответственно.

Отмеченные выше критерии отражают соответственно лишь зависимость от $I_1(T_\sigma)$ и $I_2(D_\sigma)$.

Соотношение (2.27) в пространстве главных напряжений определяет предельную поверхность, описываемую наглядно переменными ξ, r и θ . Переменная ξ соответствует инварианту $I_1(T_\sigma)$ и характеризует гидростатическое напряжение, а r и θ соответствуют инвариантам $I_2(D_\sigma), I_3(D_\sigma)$ и описывают кривую пересечения поверхности с девиаторной плоскостью.

В монографии В.П. Агапова и А.С. Марковича [170], а также в докторской диссертации А.С. Марковича [171] представлена усовершенствованная форма известных критериев прочности, содержащих от двух до пяти экспериментально определяемых параметров.

2.3. Критерий энергии упругой деформации

Проектирование прочных и долговечных конструкций невозможно без овладения принципами оценивания энергии упругой деформации, которая помогает понять, как материалы ведут себя при изменении напряжения. Величина W энергии упругой деформации получается интегрированием удельной потенциальной энергии деформирования W_s во всех точках M оболочки по всему объёму конструкции V :

$$W = \iiint_V W_s(M) dv, \quad (2.28)$$

где удельная потенциальная энергия деформирования $W_s(M)$ энергии упругой деформации показывает, сколько энергии накапливается в элементах небольшого объёма по всему материалу.

Энергия упругой деформации играет фундаментальную, определяющую роль в установлении общих соотношений между напряжениями и деформациями упругих материалов [172-173].

Удельная потенциальная энергия деформирования W_s в COMSOL Multiphysics определяется равенством, выражающим удельные работы напряжений на соответствующих упругих деформациях, рассчитываемых во всех текущих точках M оболочки по всему объёму конструкции:

$$W_s = \int_0^{\varepsilon_{el}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad (2.29)$$

где ε_{el} является упругой деформацией; σ_{ij} и ε_{ij} являются компонентами тензора напряжений и тензора деформаций соответственно.

Минимизация энергии упругой деформации приводит к снижению напряжений и деформаций в оболочке [91,92]. При этом достигается максимальный остаточный ресурс энергии сопротивления разрушению, названный в [93,94] энергией целостности. Энергия целостности является интегральным параметром материала. С помощью этого критерия можно определить прочность, устойчивость и безопасность конструкции.

Работа внутренних сил (напряжений) оболочки из линейно-упругого изотропного материала равно накопленной в её объёме V упругой энергии W . Естественная согласно изотропности материала гипотеза изоэнергетичности его напряженного состояния означает независимость удельной потенциальной энергии деформирования $W_s(M)$ от текущей точки оболочки M . Это позволяет представить общую упругую энергию в виде:

$$W = W_s V. \quad (2.30)$$

Реальный материал, например бетон, является упруго-пластичным, и зависимость напряжений от деформаций нелинейна. Удельная работа внутренних сил A и максимальная удельная энергия сопротивления разрушению (целостности) W_s^* выражается равенствами:

$$A = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (2.31)$$

$$W_s^* = \int_0^{\varepsilon_u} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (2.32)$$

где ε_1 – некоторая фиксированная, ε_u – предельная деформация, σ – напряжение.

Геометрическая интерпретация этих величин и удельного остаточного ресурса энергии сопротивления разрушению представлена на рисунке 2.1а.

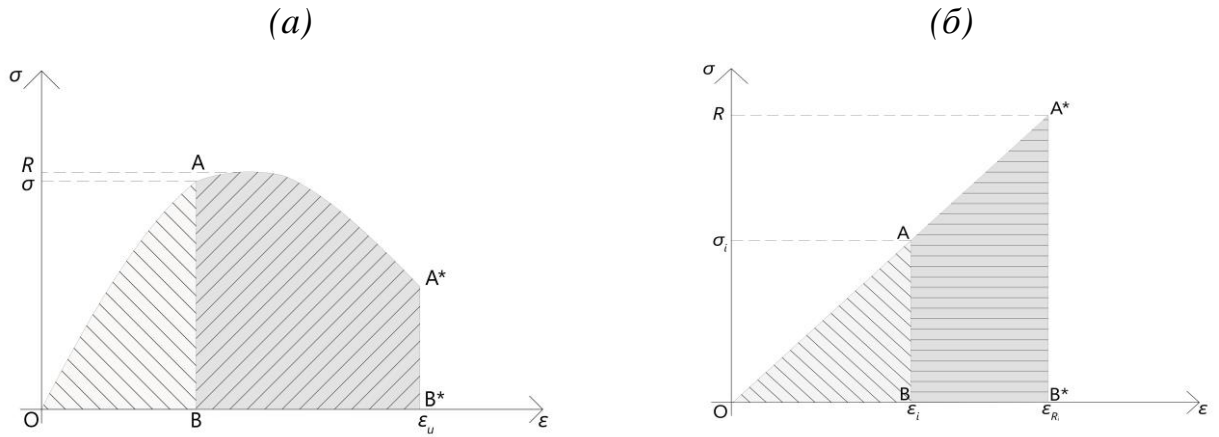


Рисунок 2.1 – Удельная работа внутренних сил: а) в общей постановке; б) частная постановка задачи для линейно-упругого материала

Площади фигур OAB и OAA^*B^* равны текущей и предельной удельной потенциальной энергии деформирования, а площадь фигуры BAA^*B^* равна удельному остаточному ресурсу энергии сопротивления.

Для рассматриваемого случая линейно-упругого тела, соответствующие величины представлены на рисунке 2.1б.

Площади треугольников OAB и OA^*B^* равны удельной потенциальной энергии деформирования, полученной после оптимизации, и заданной предельной удельной потенциальной энергии деформирования, а площадь трапеции BAA^*B^* равна удельному энергетическому ресурсу сопротивлению разрушению.

Показ динамики энергетического резерва безопасности представлен на рисунке 2.2.

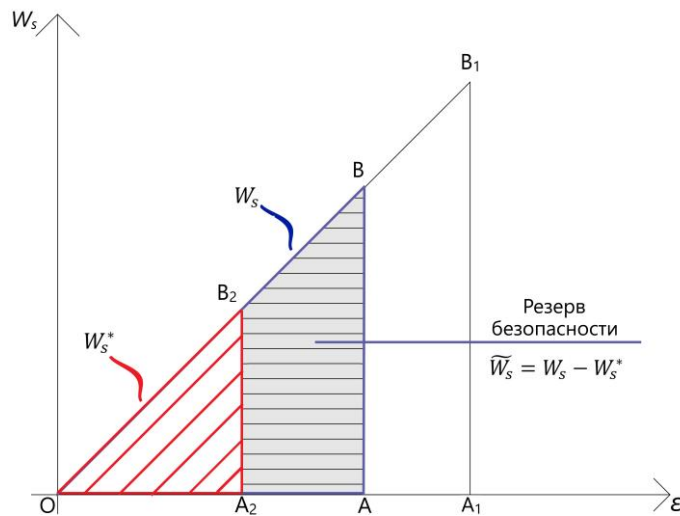


Рисунок 2.2 – Динамика энергетического резерва безопасности

Площадь треугольника OAB равна удельной потенциальной энергии деформирования до оптимизации (W_s), а площадь треугольника OA_2B_2 равна удельной потенциальной энергии деформирования после оптимизации (W_s^*). Площадь трапеции A_2B_2BA равна увеличению энергетического резерва безопасности $\tilde{W}_s = W_s - W_s^*$.

Предлагаемая схема оптимизации в механической интерпретации на допустимых значениях варьируемых параметров может быть представлена в следующем виде:

$$\min W_s \rightarrow \max \tilde{W}_s = \max(W_s - W_s^*). \quad (2.33)$$

Чем больше разность удельных потенциальных энергий деформирования, тем больше резерв целостности конструкции.

Поскольку осуществляется работа с энергетическим состоянием конструкции, то заданная удельная потенциальная энергия деформирования W_s должна удовлетворять следующему ограничению:

$$0 < W_s^* < W_s. \quad (2.34)$$

2.4. Оптимизация формы оболочек по энергетическому критерию

Для проведения оптимизации формы используются тонкие упругие оболочки, которые характеризуются следующими особенностями:

1. **Малая толщина:** толщина оболочки (h) значительно меньше других геометрических размеров (длины L и ширины B).
2. **Криволинейная форма:** оболочки имеют криволинейную поверхность.
3. **Упругий материал:** материал обладает упругими свойствами, чтобы оболочка могла деформироваться под нагрузкой и возвращаться в исходное состояние после её снятия.
4. **Распределенная нагрузка:** все оболочки находятся под действием равномерно распределенной нагрузки.

В работе рассматриваются изотропные оболочки с переменной формой срединной поверхности, зависящей от определенного параметра. Радиус a в плане, механические характеристики и условия опирания заданы. В нашем случае исследуются оболочки вращения с образующей кривой $r(z) = \frac{a}{f} z^\eta; \eta > 0$.

В оптимизационных задачах [52, 55] для оболочек $\Phi(\alpha)$, зависящих от параметра α по некоторому критерию (минимум веса, энергии, частоты свободных колебаний, затрат материала и т.д.), находятся искомые величины. В процессе оптимизации определяется содержащийся в этих величинах параметр α_0 , соответствующий оболочке $\Phi(\alpha_0)$, с оптимальной по конкретному критерию формой.

Функциональные зависимости оптимизируемых величин (вес, энергия, частота и т.д.) от параметра α , позволяют сделать выбор оптимальной формы оболочки.

2.4.1. Оптимизация формы круговой арки по энергетическому критерию

В качестве первого тестового примера для проведения оптимизации формы вырежем из цилиндрической оболочки участок длиной 1 м и рассмотрим его как двухшарнирную круговую арку, нагруженную равномерно распределенной вертикальной нагрузкой q и перекрывающую пролет $2l$. По энергетическому критерию определяется её оптимальный угол раствора $2\varphi_0$, радиус r_0 и стрела подъёма f_0 (рисунок 2.3а).

Предполагается, что арка испытывает лишь круговые усилия $N(\varphi)$ с нормальным напряжением $\sigma(\varphi)$. Радиальная толщина арки равна h , а продольная ширина равна l_1 . Модуль упругости E .

Рассмотрим элемент арки $abcd$ единичной продольной ширины ab и дугой раствора $a_1d_1 = r(\varphi)\Delta\theta$ (рисунок 2.3б).

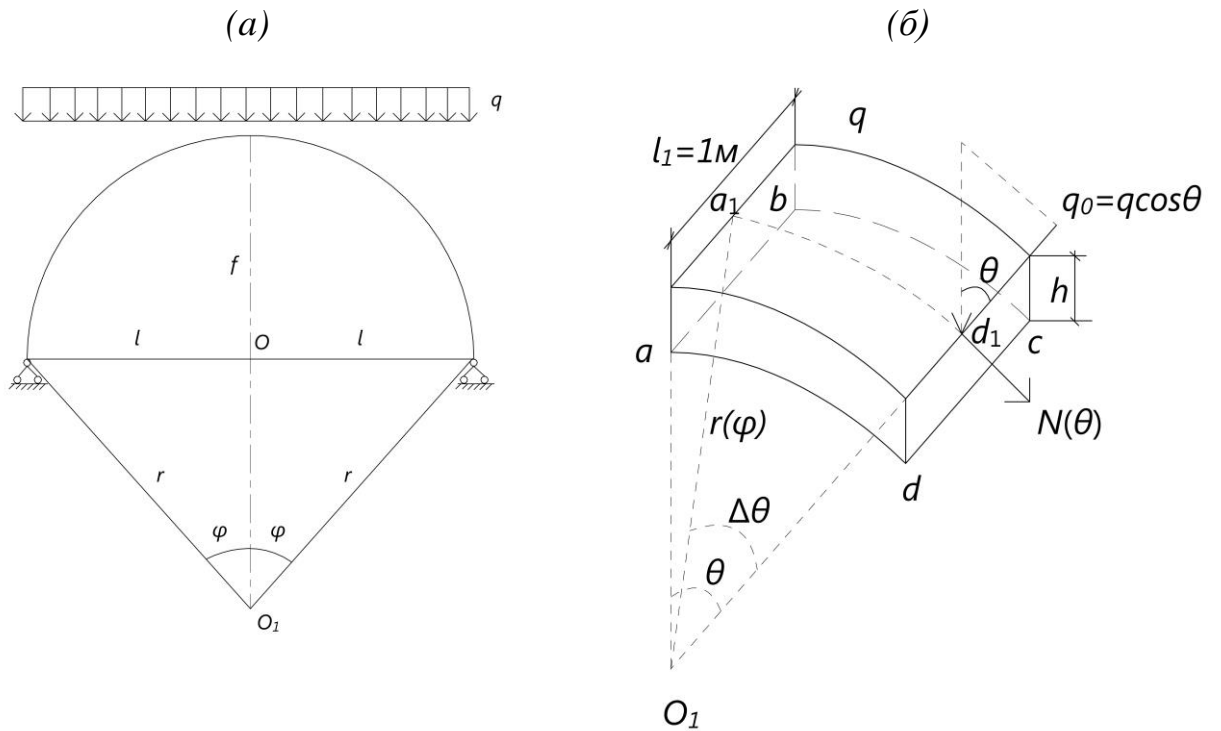


Рисунок 2.3 – Расчетная схема круговой арки: а) общая схема; б) схема сегмента арки

Нормальная составляющая нагрузки:

$$q_0 = q \cos \theta. \quad (2.35)$$

Продольные усилия равны:

$$N(\varphi) = r(\varphi)q_0 = r(\varphi)q \cos \theta. \quad (2.36)$$

и с учетом $r(\varphi) = \frac{l}{\sin \varphi}$:

$$N(\theta) = \frac{lq \cos \theta}{\sin \varphi}. \quad (2.37)$$

Поскольку $N(\theta) = \sigma(\theta)h$, то $\sigma(\theta) = \frac{N(\theta)}{h}$ и:

$$\sigma(\theta) = \frac{lq}{h} \cos \theta. \quad (2.38)$$

Удельная энергия упругой деформации равна:

$$W_s(\theta) = \frac{\sigma^2(\theta)}{2E} = \frac{l^2 q^2}{2Eh^2} \cos^2 \varphi. \quad (2.39)$$

В арке при растворе 2φ накапливается энергия:

$$W(\varphi) = \iiint_V W_s(\theta) dV, \quad (2.40)$$

где V – объём арки, а $dV = r(\varphi) dr d\theta dz$; r, θ, z – цилиндрические координаты и согласно (2.40):

$$W(\varphi) = \frac{2q^2 r^3(\varphi)}{2Eh^2} \int_0^\varphi \cos^2 \theta d\theta \int_0^h dr \int_0^{l_1} dz, \quad (2.41)$$

а с учетом $r(\varphi) = \frac{l}{\sin \varphi}$ получим:

$$W(\varphi) = \frac{q^2 l^3 h l_1}{Eh^2 \sin^3 \varphi} \int_0^\varphi \cos^2 \theta d\theta. \quad (2.42)$$

$$\int_0^\varphi \cos^2 \theta d\theta = \int_0^\varphi \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Big|_0^\varphi = \frac{1}{2} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right). \quad (2.43)$$

Тем самым:

$$W(\varphi) = \frac{K(2\varphi + \sin 2\varphi)}{\sin^3 \varphi}; \quad K = \frac{q^3 l^3 l_1}{4Eh}. \quad (2.44)$$

Покажем, что при $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$:

$$W'(\varphi) \leq 0, \quad (2.45)$$

$$W'(\varphi) = \frac{K[2(1 + \cos 2\varphi) \sin^3 \varphi - 3 \sin^2 \varphi \cos \varphi (2\varphi + \sin 2\varphi)]}{\sin^6 \varphi},$$

$$W'(\varphi) = \frac{K[4 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi - 3 \sin^2 \varphi \cos \varphi (2\varphi + \sin 2\varphi)]}{\sin^6 \varphi},$$

$$W'(\varphi) = \frac{K \cos \varphi \sin^2 \varphi (4 \cos \varphi \sin \varphi - 6\varphi - 3 \sin 2\varphi)}{\sin^6 \varphi}, \quad (2.46)$$

$$W'(\varphi) = -\frac{K \cos \varphi (6\varphi + \sin 2\varphi)}{\sin^4 \varphi},$$

$$W'(\varphi) = -\frac{K \cos \varphi (6\varphi + \sin 2\varphi)}{\sin^4 \varphi}.$$

Из равенства (2.46) следует соотношение (2.45) и означает монотонное уменьшение энергии $W(\varphi)$ при увеличении угла раствора 2φ . Минимальное значение $W(\varphi)$ достигается при угле $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и имеем $W\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi q^2 l^3 l_1}{4Eh}$.

Оптимальная форма арки получается при угле раствора равным π .

Таким образом, при равномерно распределенной вертикальной нагрузке оптимальной по энергетическому критерию является полукруглая арка, а оптимальный подъём f_0 и радиус r_0 совпадает с радиусом круга.

Далее рассмотрим частный случай гидростатического давления. Также определим оптимальный угол раствора 2φ , оптимальный радиус r_0 и стрелу подъёма f_0 круговой арки по энергетическому критерию при равномерно распределенном гидростатическом нагружении q и пролете $2l$; радиальной толщине h ; модуле упругости E и единичной поперечной ширине круговой арки. Общая схема арки и сегмента арки показаны на рисунке 2.4 (а,б).

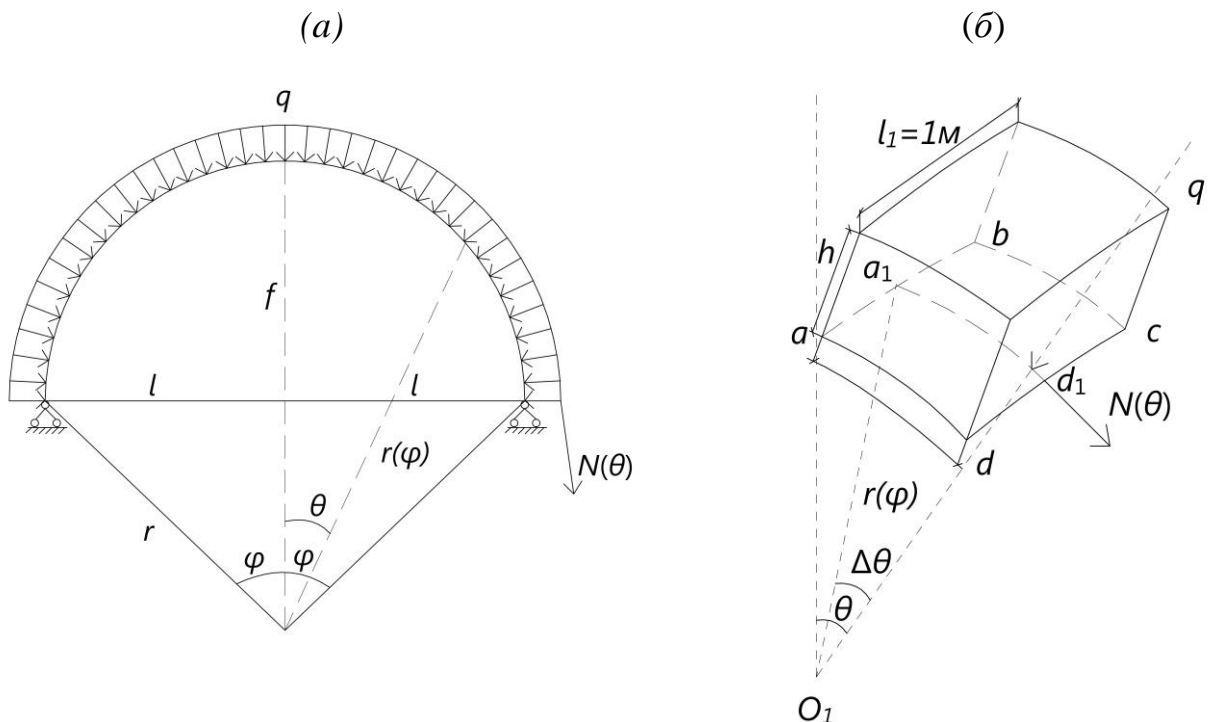


Рисунок 2.4 – Расчетная схема круговой арки: а) общая схема; б) схема сегмента арки

Круговое усилие в сегменте арки равно:

$$N = r(\varphi)q. \quad (2.47)$$

Поскольку:

$$N = \sigma(\varphi)h, \\ \sigma(\varphi) = \frac{r(\varphi)q}{h}. \quad (2.48)$$

Удельная энергия деформирования:

$$W_s(\theta) = \frac{\sigma^2(\varphi)}{2E} = \frac{r^2(\varphi)q^2}{2Eh^2}. \quad (2.49)$$

Энергия упругой деформации арки с учетом (2.48) равна:

$$W = \iiint_V W_s(\theta)dV = \iiint_V W_s(\theta)r(\varphi)dzdrd\theta, \quad (2.50)$$

где V -объем арки, а r, θ, z -цилиндрические координаты.

Поскольку $r(\varphi) = \frac{l}{\sin \varphi}$, то:

$$W(\varphi) = \frac{l^3 q^2 l_1}{Eh \sin^3 \varphi} \int_0^\varphi d\theta = \frac{l^3 q^2 l_1 \varphi}{Eh \sin^3 \varphi}. \quad (2.51)$$

Поскольку удельная энергия $W_s(\theta)$ постоянна по всему раствору 2φ , то:

$$W(\varphi) = W_s(\theta)V, \quad (2.52)$$

где $V = 2r(\varphi)\varphi h l_1$ – объем арки.

В точке экстремума $\frac{dW(\varphi)}{d\varphi} = 0$ и согласно (2.51):

$$\frac{\sin^3 \varphi - 3\varphi \sin^2 \varphi \cos \varphi}{\sin^6 \varphi} = 0; \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}; \quad (2.53)$$

$$\sin \varphi - 3\varphi \cos \varphi = 0; \quad \varphi = \frac{\text{tg} \varphi}{3}.$$

Равенством $\varphi_* = \frac{\text{tg} \varphi_*}{3}$ определяется критический угол φ_* , соответствующий

минимуму $W(\varphi)$:

$$\min W(\varphi) = W(\varphi_*). \quad (2.54)$$

При этом $\sigma(\varphi_*) = \frac{r(\varphi_*)q}{h}$. Для рассмотренной круговой арки по энергетическому критерию и по критерию минимального объема (использованному в работе [52]), получаются различные оптимальные значения радиуса r_0 и стрелы подъёма f_0 .

Как графически показано в [52], равенству $\varphi_0 = \frac{\text{tg} \varphi_0}{2}$ отвечает угол $2\varphi_0 \approx 133,5^\circ$, близкий к углу $\frac{3\pi}{4} = 135^\circ$. Поскольку $\frac{\text{tg} \varphi}{2} > \frac{\text{tg} \varphi}{3}$, то $\varphi_* > \varphi_0$, что иллюстрируется графически на рисунке 2.5.

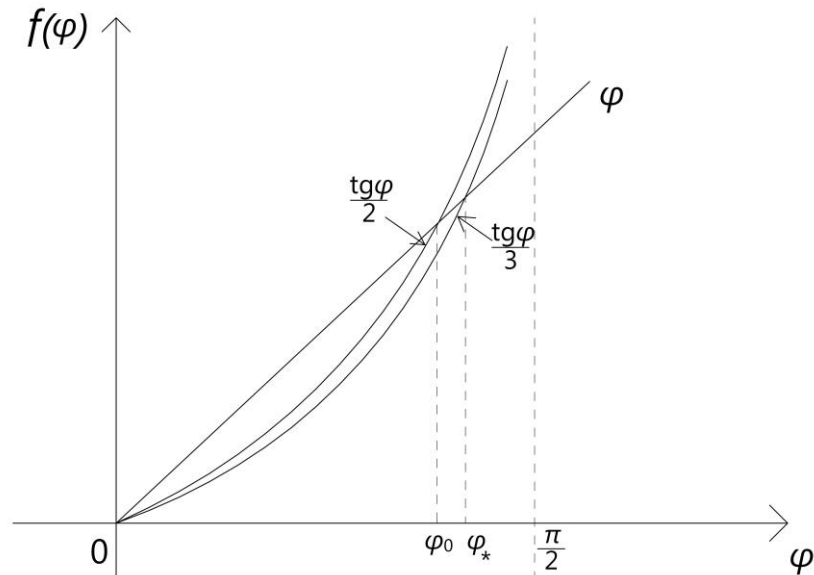


Рисунок 2.5 – Соотношение углов раствора при оптимизации по критериям минимума веса и энергии упругой деформации

Согласно рисунку 2.5 угол раствора по энергетическому критерию превышает угол раствора по критерию минимизации веса, благодаря чему оптимальная форма арки становится ближе к полукруглой.

$$\sigma(\varphi) = -\frac{qR(\alpha)}{h(1+\cos\varphi)}. \quad (2.56)$$

Поскольку $R(\alpha) = \frac{r}{\sin\alpha}$ и удельная энергия:

$$W_s(\varphi) = \frac{\sigma^2(\varphi)}{2Eh^2} = \frac{q^2 R^2(\alpha)}{2Eh^2(1+\cos\varphi)^2}. \quad (2.57)$$

Накопленная в оболочке энергия напряжением $\sigma_1(\varphi)$:

$$W_1(\alpha) = \iiint_V W_s(\varphi) dV, \quad (2.58)$$

где V -объем оболочки; R, φ, θ – сферические координаты.

$$dV = R^2(\alpha) \sin\varphi d\varphi dR d\theta. \quad (2.59)$$

Согласно (2.57), (2.58) и (2.59):

$$W_1(\alpha) = \int_0^\varphi \frac{q^2 R^4(\varphi) \sin\varphi d\varphi}{2Eh^2(1+\cos\varphi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dR, \quad (2.60)$$

$$W_1(\alpha) = \frac{\pi q^2 r^4}{Eh \sin^4 \alpha} \int_0^\alpha \frac{\sin\varphi d\varphi}{(1+\cos\varphi)^2} = K_1 \int_0^\alpha \frac{\sin\varphi d\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}. \quad (2.61)$$

Вычисление интеграла:

$$\int_0^\alpha \frac{\sin\varphi d\varphi}{(1+\cos\varphi)^2} = -\int_0^\alpha \frac{d(1+\cos\varphi)d\varphi}{(1+\cos\varphi)^2} = \frac{1}{1+\cos\varphi} \Big|_0^\alpha = \frac{1}{1+\cos\alpha} - \frac{1}{2}. \quad (2.62)$$

С учетом $R(\alpha) = \frac{r}{\sin\alpha}$ в равенстве (2.61) имеем:

$$W_1(\alpha) = K_1 \left(\frac{1}{\sin^4 \alpha (1+\cos\alpha)} - \frac{1}{2\sin^4 \alpha} \right), \quad (2.63)$$

$$W_1'(\alpha) = K_1 \left(-\frac{4\cos\alpha}{\sin^5 \alpha (1+\cos\alpha)} + \frac{\sin\alpha}{\sin^5 \alpha (1+\cos\alpha)^2} + \frac{2\cos\alpha}{\sin^5 \alpha} \right), \quad (2.64)$$

$$W_1'(\alpha) = \frac{K_1}{\sin^3 \alpha} \left(-\frac{4\cos\alpha}{\sin^2 \alpha (1+\cos\alpha)} + \frac{\sin\alpha}{\sin^2 \alpha (1+\cos\alpha)^2} + \frac{2\cos\alpha}{\sin^2 \alpha} \right), \quad (2.65)$$

$$W_1'(\alpha) = \frac{K_1 [2\cos\alpha(-1+\cos^2\alpha) + \sin\alpha]}{\sin^5 \alpha (1+\cos\alpha)^2} = \frac{K_1 \sin\alpha(1-\sin 2\alpha)}{\sin^5 \alpha (1+\cos\alpha)^2}. \quad (2.66)$$

Из равенства следует, что справедливо соотношение, означающее монотонное увеличение энергии $W_1(\alpha)$ при увеличении раствора 2φ :

$$W_1'(\alpha) > 0; 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}. \quad (2.67)$$

При $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ оболочка приближается к полусферической и получим:

$$W_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi q^2 R^4}{2Eh}. \quad (2.68)$$

Полученное равенство (2.68) означает, что оптимальной формой по энергетическому критерию является полусферическая оболочка.

2.5. Уменьшение собственного веса оболочки по энергетическому критерию

Наряду с оптимизацией (по некоторому критерию) внешней геометрии оболочки (формы) возможна вариация её геометрии, связанная с выбором толщины оболочки.

Покажем, что вариация толщины оптимизированной по энергетическому критерию оболочки приводит к снижению её собственного веса при заданной весовой нагрузке P_0 на единицу поверхности оболочки. Пусть σ_0 – предельное напряжение, порождаемое нагружением P_0 до оптимизации. Предельная удельная потенциальная энергия при линейно-упругом деформировании определяется равенством (см. 2.6 и 2.7):

$$W_s^0 = \frac{\sigma_0^2}{2E} = \frac{\sigma_0 \times \varepsilon_0}{2}, \quad (2.69)$$

где E – модуль упругости материала оболочки. Если σ – напряжение, определяющее удельную потенциальную энергию деформирования W_s после оптимизации, то:

$$W_s = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{\sigma \times \varepsilon}{2}. \quad (2.70)$$

Удельная потенциальная энергия при линейно-упругом деформировании представлена на рисунке 2.7.

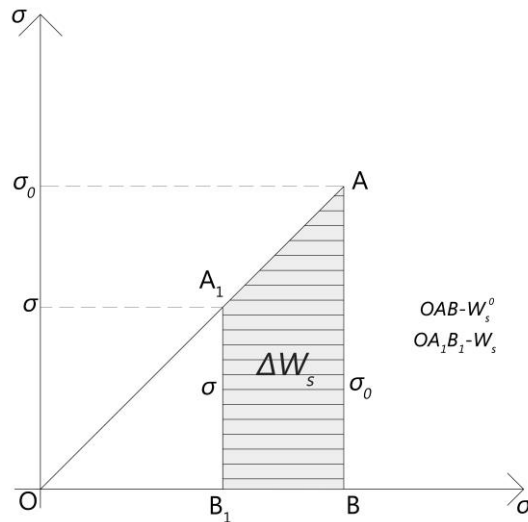


Рисунок 2.7 – Удельная потенциальная энергия при линейно-упругом деформировании

На рисунке 2.7 величина W_s^0 представляет удельную потенциальную энергию деформирования, которую способна воспринять оболочка до момента разрушения – удельная энергетическая ёмкость, называемая удельной энергией целостности. Величина $\Delta W_s = W_s^0 - W_s$ выражает удельный резерв целостности. Наличие этого резерва позволяет повысить напряжение σ до значения σ_0 уменьшением толщины h_0 оптимизированной оболочки.

При расчёте оболочек применяются внутренние усилия в нормальных сечениях $u = const$ и $v = const$ на единицу длины координатной линии u и v , определяемые при $v = const$ равенствами [174]:

$$N_v = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_v \left(1 + \frac{z}{R_u}\right) dz, \quad (2.71)$$

$$S_v = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{vu} \left(1 + \frac{z}{R_u}\right) dz, \quad (2.72)$$

$$M_v = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_v \left(1 + \frac{z}{R_u}\right) z dz, \quad (2.73)$$

$$M_{vu} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{vu} \left(1 + \frac{z}{R_u}\right) z dz. \quad (2.74)$$

Здесь σ_v – нормальное напряжение на площадке $abcd$ элемента оболочки и поэтому:

$$\sigma_v = \frac{N_v}{F}, \quad (2.75)$$

где F – площадь фигуры $abcd$ (рисунок 2.8).

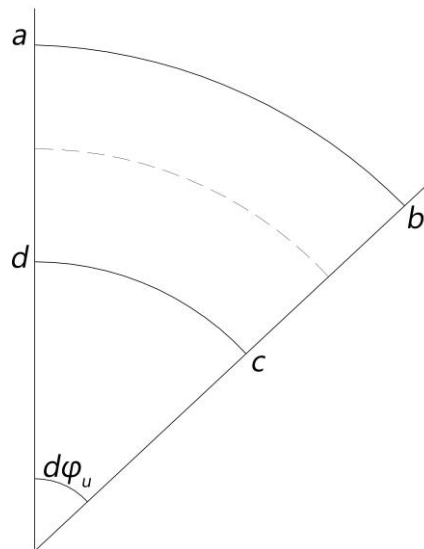


Рисунок 2.8 – Элемент оболочки

Для сферической оболочки с кольцевым радиусом (рисунок 2.9) $z = R \sin \alpha$; $ab = r \Delta \beta$; $r \Delta \beta = 1$ и при малых h и растворах $\Delta \beta = \frac{1}{r}$ (больших r) допустимо равенство $F=h$.

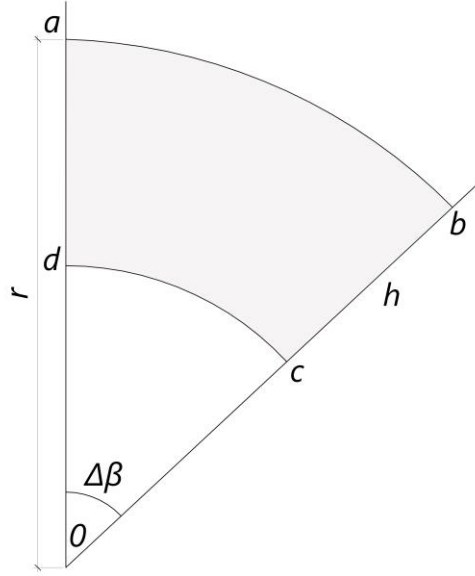


Рисунок 2.9 – Кольцевое сечение сферической оболочки

После оптимизации формы оболочки единице длины координатной линии \tilde{u} отвечает нормативное усилие $N_{\tilde{v}}$ и нормальное напряжение:

$$\sigma_{\tilde{v}} = \frac{N_{\tilde{v}}}{\tilde{F}}, \quad (2.76)$$

где \tilde{F} – площадь фигуры, полученной преобразованием фигуры $abcd$ в процессе оптимизации.

Согласно наличию резерва целостности $\Delta W_s = W_s^0 - W_s$ напряжение $\sigma_{\tilde{v}}$ допускает увеличение до предельного напряжения $\sigma_{\tilde{v}}^0$ уменьшением \tilde{F} до \tilde{F}_0 и:

$$\sigma_{\tilde{v}}^0 = \frac{N_{\tilde{v}}}{\tilde{F}_0}. \quad (2.77)$$

Равенства (2.76) и (2.77) влекут соотношения:

$$\sigma_{\tilde{v}} \tilde{F} = \sigma_{\tilde{v}}^0 \tilde{F}_0, \quad (2.78)$$

$$\frac{\sigma_{\tilde{v}}}{\sigma_{\tilde{v}}^0} = \frac{\tilde{F}_0}{\tilde{F}}. \quad (2.79)$$

Площади \tilde{F} и \tilde{F}_0 при единичной координатной линии u и \tilde{u} существенно зависят от толщины h и h_0 отвечающих их оболочек. Для пологих оболочек,

сферических и цилиндрических при малых значениях $\frac{h}{R}$ приемлемо полагать численное совпадение:

$$\tilde{F} = h; \tilde{F}_0 = h_0. \quad (2.80)$$

С учётом (2.79) равенства (2.80) приводят к соотношениям:

$$\frac{\sigma_{\tilde{v}}}{\sigma_{\tilde{v}}^0} = \frac{h_0}{h}, \quad (2.81)$$

$$h_0 = \frac{\sigma_{\tilde{v}}}{\sigma_{\tilde{v}}^0} h. \quad (2.82)$$

При линейно-упругом деформировании $\sigma_{\tilde{v}} = \sqrt{2W_s E}$; $\sigma_{\tilde{v}}^0 = \sqrt{2W_s^0 E}$, тогда:

$$h_0 = \sqrt{\frac{W_s}{W_s^0}} h. \quad (2.83)$$

Например, для сферического купола с $R=10$ м; $h=0,1$ м; $W_s^0=30$ Дж/м³; среднее значение после оптимизации составляет $W_s = 12,6$ Дж/м³. Согласно (2.83) $h_0 \approx 0,6h$; $h_0 \approx 0,06$ м.

Определим вес Q и Q_0 сферических оболочек с радиусом R при толщине h и h_0 . Вес шара радиуса R из материала с удельным весом γ : $\tilde{Q} = \frac{4}{3} \pi R^3 \gamma$ и $d\tilde{Q} = 4\pi R^2 \gamma dR$ – вес слоя оболочки толщиной dR . Вес оболочки толщиной h :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} \int_{R-h}^R d\tilde{Q} = \frac{1}{2} \int_{R-h}^R 4\pi R^2 \gamma dR = \frac{2\pi\gamma}{3} [R^3 - (R-h)^3], \\ Q &= \frac{2\pi\gamma}{3} [R^3 - (R^3 - 3R^2h + 3Rh^2 - h^3)], \\ Q &= \frac{2\pi\gamma}{3} [3R^2h - 3Rh^2 + h^3]. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Пренебрегая с учётом малости h величинами порядка h^2 и h^3 получим:

$$Q = 2\pi\gamma R^2 h; Q_0 = 2\pi\gamma R^2 h_0,$$

$$\frac{Q_0}{Q} = \frac{h_0}{h}. \quad (2.85)$$

При $h = 0,1$ м; $h_0 = 0,06$ м:

$$\frac{Q_0}{Q} = 0,6. \quad (2.86)$$

Таким образом, собственный вес уменьшается на 40%.

Расход материала уменьшается на величину:

$$\Delta Q = Q - Q_0 = 2\pi\gamma R^2(h - h_0). \quad (2.87)$$

Необходимо отметить, что уменьшение веса оболочки повышает её прочность, а уменьшение расхода материала существенно в экономическом аспекте.

2.6. Коэффициент безопасности при оптимизации формы

Коэффициент безопасности конструкции определяется равенством:

$$n = \frac{R}{\sigma_{\max}}, \quad (2.88)$$

где R – прочность материала (при сжатии, растяжении, сдвиге); σ_{\max} – максимальное напряжение при соответствующей деформации.

Напряжения $\sigma_v^0 = \sqrt{2W_s^0 E}$ и $\sigma_{\bar{v}}^0 = \sqrt{2W_s E}$ являются максимальными напряжениями и соответствующие им коэффициенты до и после оптимизации формы выражаются равенствами:

$$n_v = \frac{R_b}{\sqrt{2W_s^0 E}}, \quad (2.89)$$

$$n_{\bar{v}} = \frac{R_b}{\sqrt{2W_s E}}. \quad (2.90)$$

Согласно (2.89) и (2.90) имеют место соотношения:

$$\frac{n_{\tilde{v}}}{n_v} = \sqrt{\frac{W_s^0}{W_s}}, \quad (2.91)$$

$$n_{\tilde{v}} = n_v \sqrt{\frac{W_s^0}{W_s}}. \quad (2.92)$$

Соотношение (2.91) является следствием наличия энергетического резерва целостности $\Delta W_s = W_s^0 - W_s$. Предельная нагрузка P_0 , отвечающая энергии W_s^0 уменьшает её после оптимизации на величину W_s , а полное исчерпание этой удельной энергии целостности возможно при увеличении нагрузки P_0 до величины $\tilde{P}_0 = P_0 \frac{\sigma_v^0}{\sigma_{\tilde{v}}^0}$. Коэффициент безопасности, по предельным нагрузкам, определяемый

отношением $\frac{\tilde{P}_0}{P_0} = \frac{\sigma_v^0}{\sigma_{\tilde{v}}^0}$, согласно равенству $\frac{\sigma_v^0}{\sigma_{\tilde{v}}^0} = \sqrt{\frac{W_s^0}{W_s}}$ также выражает повышение

безопасности оболочки в результате оптимизации её формы.

Для бетона В25 $R_b=337 \text{ н/см}^2=337 \times 10^4 \text{ Па}=3,37 \text{ МПа}$; $E=30 \times 10^3 \text{ МПа}$.

Согласно формуле (2.89), коэффициент безопасности до оптимизации равен:

$$n_v = \frac{R_b}{\sqrt{2W_s^0 E}} = \frac{3,37}{\sqrt{2 \times 30 \times 10^{-6} \times 30 \times 10^3}} = \frac{3,37}{1,34} \approx 3.$$

Согласно формуле (2.92), коэффициент безопасности после оптимизации равен:

$$n_{\tilde{v}} = \frac{R_b}{\sqrt{2W_s E}} = \frac{3,37}{\sqrt{2 \times 12,6 \times 10^{-6} \times 30 \times 10^3}} = \frac{3,37}{0,869} \approx 4.$$

С учётом соотношения (2.91):

$$\frac{n_{\tilde{v}}}{n_v} = \sqrt{\frac{W_s^0}{W_s}} = \sqrt{\frac{30}{12,6}} = \sqrt{2,38} = 1,5.$$

Таким образом, коэффициент безопасности конструкции увеличивается в 1.5 раза.

2.7. Методика выбора оптимальной формы оболочки параметрическим методом по минимуму энергии упругой деформации

Теоретически обосновано существование форм оболочек, отвечающих минимуму упругой энергии деформации [139]. Изменение формы оболочки как правило зависит от определенных параметров. В [51] рассматривается параметр формы оболочки, регулирующий изменение формы срединной поверхности для оболочек на прямоугольном и круглом планах. Для оболочки с фиксированной стрелой подъема f на круглом плане a высота записывается как функция от радиуса и описывается следующим уравнением:

$$z(r) = cr^{\xi}, \quad (2.93)$$

где z меняется по стреле подъема в пределах от 0 до h ; c является параметром; $0 \leq \xi \leq \infty$ – параметр формы срединной поверхности оболочки.

При $r=a$, $z=f$ получим:

$$f = ca^{\xi}, \quad (2.94)$$

$$c = \frac{f}{a^{\xi}}. \quad (2.95)$$

Из (2.93) и (2.95) следует:

$$z(r) = f \left(\frac{r}{a} \right)^{\xi}. \quad (2.96)$$

В отличие от подхода, изложенного в [51], для нахождения оптимальных форм оболочек на круглом плане предлагается следующее решение, основанное на изменении радиуса по высоте: рассмотрим покрывающую круг радиуса a оболочку вращения толщины h со стрелой подъема f в цилиндрической системе координат (Рисунок 2.10). Если ось Oz направлена от купола $z=0$ оболочки к кругу, то оболочка описывается уравнением:

$$r(z) = bz^{\eta}, \quad (2.97)$$

где b является параметром; η – новый параметр формы срединной поверхности оболочки.

Следует отметить, что перестановка переменных аргумента и функции существенна при оптимизации по энергетическому критерию. Функция $r = f(z)$ упрощает определение упругой энергии по выражениям меридиональных и круговых усилий. Определение этих усилий в [51] осуществляется решением достаточно сложных дифференциальных уравнений.

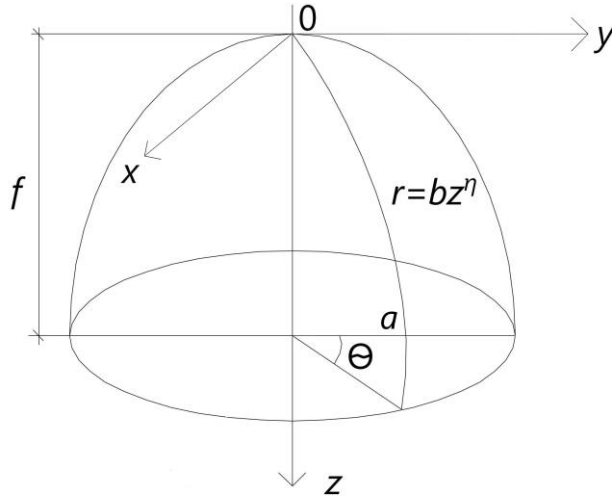


Рисунок 2.10 – Оболочка вращения в цилиндрической системе координат

Поскольку $r(z) = a$ при $z = f$, то $a = bf^\eta$ и $b = \frac{a}{f^\eta}$.

Тогда:

$$r = \frac{a}{f^\eta} z^\eta, \quad (2.98)$$

$$z = \left(r \frac{f^\eta}{a} \right)^{\frac{1}{\eta}} = f \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{1}{\eta}}. \quad (2.99)$$

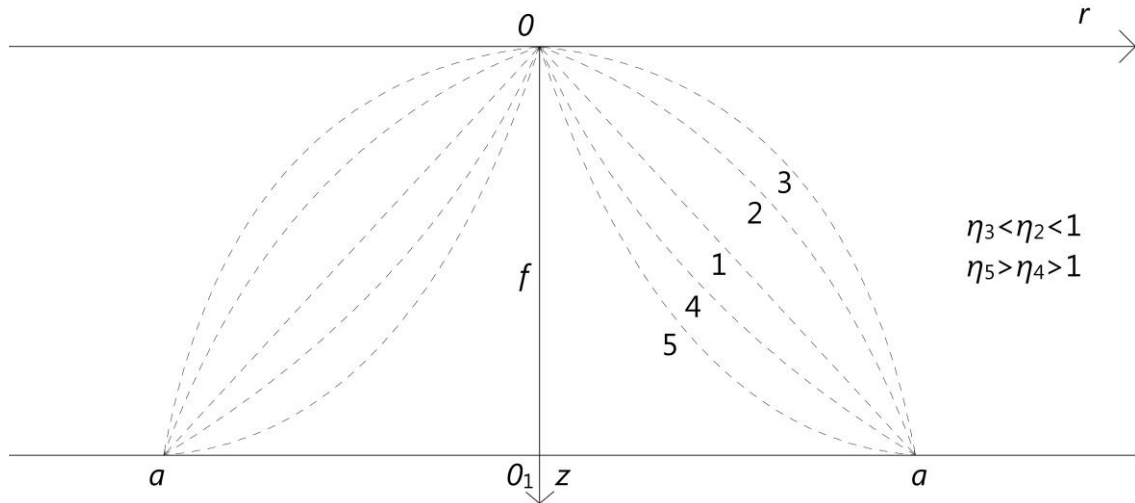
На основе двух подходов получаем следующие соотношения:

$$f \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{1}{\eta}} = f \left(\frac{r}{a} \right)^{\xi}, \quad (2.100)$$

$$\frac{1}{\eta} = \xi; \eta = \frac{1}{\xi}. \quad (2.101)$$

Параметр η порождает семейство оболочек вращения $r_\eta(z)$ и, в частности, $\eta = 1$ отвечает коническая поверхность.

На Рисунке 2.11 представлены кривые $r(z) = a \left(\frac{z}{f} \right)^\eta$ при некоторых значениях параметра η .



1. $\eta_1=1$; 2. η_2 ; 3. η_3 , $\eta_3 < \eta_2 < \eta_1$; 4. η_4 ; 5. η_5 , $\eta_5 < \eta_4 < \eta_1$.

Рисунок 2.11 – Формы срединной поверхности оболочки вращения и направляющей цилиндрической оболочки при различных значениях параметра формы

Задача заключается в том, чтобы в совокупности оболочек, задаваемых уравнением $r(z) = bz^\eta$, найти такой параметр формы η , который позволяет получить оптимальную форму по критерию энергии упругой деформации.

Предлагаемая методика состоит из следующих этапов:

1. Выбор зависимости r от z равенством $r(z) = bz^\eta$.
2. Нахождение меридиональных и круговых усилий, возникающих под действием заданной нагрузки.

3. Определение энергии упругой деформации.

4. Нахождение критической точки с помощью дифференцирования по параметру η : $\frac{dW(\eta)}{d\eta} = 0$.

5. Проверка соответствия критической точки точке минимума:
 $\eta = \eta_0 \rightarrow W(\eta_0) = \min W(\eta)$.

Согласно условиям равновесия [169]:

$$N_1 z \sin \varphi = - \int_0^\varphi r R_1 (p_1 \sin \varphi - p_3 \cos \varphi) d\varphi + C, \quad (2.102)$$

где N_1 – меридиональное усилие; постоянная C определяется из граничных условий и при отсутствии отверстия $C=0$; $r = \frac{R_2}{\sin \varphi}$; R_2 – радиус кривизны вдоль параллельного круга; R_1 – радиус кривизны меридиана оболочки; φ – угол между вертикальной осью и радиусом R_2 (Рисунок 2.12).

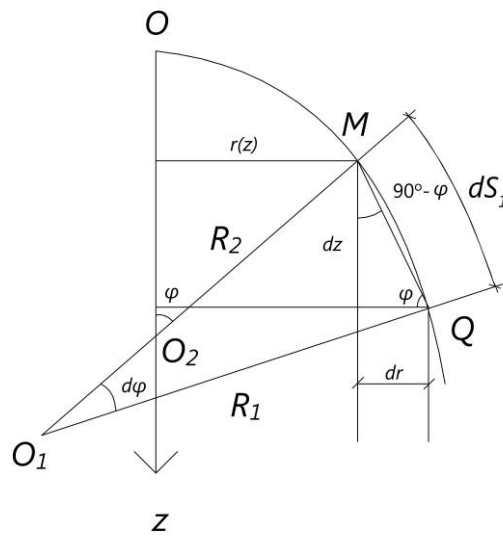


Рисунок 2.12. Графическая интерпретация связи координат φ и z

Из рисунка 2.12 следует, что $R_1 = O_1Q$, $R_2 = O_2M = \frac{r}{\sin \varphi}$, а также:

$$dS_1 = \sqrt{1 + r'^2} dz = R_1 d\varphi, \quad (2.103)$$

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{dr}{dz} = r'(z) \quad (2.104)$$

и с учетом $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi}}$; $\cos \varphi = \operatorname{ctg} \varphi \sin \varphi$ имеем:

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + r'^2}}; \cos \varphi = \frac{r'}{\sqrt{1 + r'^2}}. \quad (2.105)$$

Поскольку $dS_1 = R_1 d\varphi$ и $dS_1 = \sqrt{1 + r'^2} dz$, то:

$$R_1 d\varphi = \sqrt{1+r'^2} dz. \quad (2.106)$$

Согласно (2.105) и (2.106):

$$\int_0^\varphi r R_1 (p_1 \sin \varphi - p_3 \cos \varphi) d\varphi = \int_0^z r \left(\frac{p_1}{\sqrt{1+r'^2}} - \frac{r' p_3}{\sqrt{1+r'^2}} \right) \sqrt{1+r'^2} dz = \int_0^z r (p_1 - r' p_3) dz,$$

$$\frac{N_1 r}{\sqrt{1+r'^2}} = - \int_0^z r (p_1 - r' p_3) dz,$$

$$N_1(z) = - \frac{(1+r'^2)^{\frac{1}{2}}}{r} \int_0^z r (p_1 - r' p_3) dz. \quad (2.107)$$

Условие равновесия $\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = p_3$ влечет равенство:

$$N_2(z) = -N_1(z) \frac{R_2}{R_1} + R_2 p_3. \quad (2.108)$$

С учетом $R_2 = \frac{r}{\sin \varphi} = r\sqrt{1+r'^2}$; $R_1 = \frac{1}{K_1}$; $K_1 = \frac{r''}{(1+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$ в силу равенств (2.107) и

(2.108) получим:

$$N_2(z) = - \frac{r r''}{1+r'^2} N_1(z) + r(1+r'^2)^{\frac{1}{2}} p_3. \quad (2.109)$$

Условие равновесия $\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = p_3$ влечет равенство:

$$N_2 = - \frac{R_2}{R_1} N_1 + R_2 p_3. \quad (2.110)$$

С учетом равенств (2.108), (2.109) и (2.110):

$$\frac{1}{R_1} = \frac{r''}{(1+r'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.111)$$

$$N_2(z) = \frac{r(1+r'^2)^{\frac{1}{2}} r'' N_1}{(1+r'^2)^{\frac{3}{2}} r} + r\sqrt{1+r'^2} p_3,$$

$$N_2(z) = \frac{r''}{1+r'^2} \int_0^z r(p_1 - r' p_3) dz + \sqrt{1+r'^2} p_3. \quad (2.112)$$

Здесь $r' = \frac{dr(z)}{dz}$; $r'' = \frac{d^2r(z)}{dz^2}$; p_1 и p_3 тангенциальные и нормальные составляющие нагрузки p .

Равенства (2.107) и (2.112) более подробно раскрывают представление меридиональных и круговых усилий, выраженное в цилиндрических координатах в равенствах [169].

При $r(z) = bz^\eta$ получим $r' = \eta bz^{\eta-1}$; $r'' = \eta(\eta-1)bz^{\eta-2}$.

$$N_1(z) = -\frac{(1+\eta^2 b^2 z^{2\eta-2})^{\frac{1}{2}}}{bz^\eta} \int_0^z bz^\eta (p_1 - \eta bz^{\eta-1} p_3) dz,$$

$$N_1(z) = -\frac{(1+\eta^2 b^2 z^{2\eta-2})^{\frac{1}{2}}}{bz^\eta} \left(\frac{bp_1 z^{\eta+1}}{\eta+1} - \frac{db^2 p_3 z^{2\eta}}{2\eta} \right),$$

$$N_1(z) = -\left(1+\eta^2 b^2 z^{2\eta-2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{p_1 z}{\eta+1} - \frac{bp_3 z^\eta}{2} \right). \quad (2.113)$$

$$N_2(z) = \frac{bz^\eta \eta(\eta-1)bz^{\eta-2} (1+\eta^2 b^2 z^{2\eta-2})^{\frac{1}{2}}}{(1+\eta^2 b^2 z^{2\eta-2})^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{p_1 z}{\eta+1} - \frac{bp_3 z^\eta}{2} \right) + bz^\eta (1+\eta^2 b^2 z^{2\eta-2})^{\frac{1}{2}} p_3,$$

$$N_2(z) = (1+\eta^2 b^2 z^{2\eta-2})^{-1} \left(\frac{p_1 b^2 \eta(\eta-1)z^{2\eta-1}}{\eta+1} - \frac{p_3 b^3 \eta(\eta-1)z^{3\eta-2}}{2} \right) + bz^\eta (1+\eta^2 b^2 z^{2\eta-2})^{\frac{1}{2}} p_3. \quad (2.114)$$

Меридиональным и круговым напряжениям на уровне z :

$$\sigma_1(z) = \frac{N_1(z)}{h}; \quad \sigma_2(z) = \frac{N_2(z)}{h} \quad (2.115)$$

при модуле упругости E отвечают удельные энергии деформации на единицу объема:

$$W_{1,0}(z) = \frac{\sigma_1^2(z)}{2E} = \frac{N_1^2(z)}{2Eh^2}, \quad (2.116)$$

$$W_{2,0}(z) = \frac{\sigma_2^2(z)}{2E} = \frac{N_2^2(z)}{2Eh^2}. \quad (2.117)$$

Объем оболочки определяется равенством:

$$V = 2\pi h \int_0^f r(z) \sqrt{1+r'^2} dz. \quad (2.118)$$

Энергии деформации, порождаемые усилиями $N_1(z)$ и $N_2(z)$, равны:

$$W_1(\eta) = \frac{\pi}{Eh} \int_0^f r(z) \sqrt{1+r'^2} N_1^2(z) dz, \quad (2.119)$$

$$W_2(\eta) = \frac{\pi}{Eh} \int_0^f r(z) \sqrt{1+r'^2} N_2^2(z) dz. \quad (2.120)$$

Энергия упругой деформации, накопленная всей оболочкой, равняется:

$$W(\eta) = W_1(\eta) + W_2(\eta). \quad (2.121)$$

Критическая точка $\eta = \eta_0$ определяется из уравнения:

$$W'(\eta) = \frac{dW(\eta)}{d\eta} = 0. \quad (2.122)$$

И при $W'(\eta) < 0$ для $\eta < \eta_0$ и $W'(\eta) > 0$ для $\eta > \eta_0$ отвечает минимуму энергии деформации $W(\eta)$.

При $\eta = \eta_0$ получим оптимальную по энергетическому критерию поверхность вращения:

$$r_{\eta_0}(z) = bz^{\eta_0}. \quad (2.123)$$

Согласно (2.113) и (2.114):

$$W_1(\eta) = \frac{\pi}{Eh} \int_0^f bz^\eta (1 + \eta^2 b^2 z^{2\eta-2})^{\frac{3}{2}} \left(\frac{p_1^2 \eta^2 z^2}{(\eta+1)^2} - \frac{b\eta p_1 p_3 z^{\eta+1}}{\eta+1} + \frac{b^2 p_3^2 z^{2\eta}}{4} \right) dz. \quad (2.124)$$

Используем биномиальное разложение Ньютона:

$$(1+x)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + \dots \quad (2.125)$$

Тогда:

$$(1 + \eta^2 b^2 z^{2\eta-2})^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2} \eta^2 b^2 z^{2(\eta-1)} + \frac{3}{8} \eta^4 b^4 z^{4(\eta-1)} - \frac{1}{48} \eta^6 b^6 z^{6(\eta-1)} + \dots \quad (2.126)$$

$$W_1(\eta) \approx \frac{\pi}{Eh} \int_0^f \left(1 + \frac{3}{2} \eta^2 b^2 z^{2(\eta-1)} + \frac{3}{8} \eta^4 b^4 z^{4(\eta-1)} + \dots \right) \left(\frac{bp_1^2 z^{2+\eta}}{(\eta+1)^2} - \frac{b^2 p_1 p_3 z^{2\eta+1}}{\eta+1} + \frac{b^3 p_3^2 z^{3\eta}}{4} \right) dz. \quad (2.127)$$

Вычисляем интегралы, содержащие параметр b от b^1 до b^5 :

$$J_1 = \int_0^f \frac{p_1^2 z^{2+\eta} b}{(\eta+1)^2} dz = \frac{bp_1^2 f^{\eta+3}}{(\eta+1)^2(\eta+3)}, \quad (2.128)$$

$$J_2 = \frac{3b^3 \eta p_1^2}{2(\eta+1)^2} \int_0^f z^{3\eta} dz = \frac{3b^3 \eta p_1^2 f^{3\eta+1}}{2(\eta+1)^2(3\eta+1)}, \quad (2.129)$$

$$J_3 = -\frac{b^2 p_1 p_3}{\eta+1} \int_0^f z^{2\eta+1} dz = -\frac{b^2 p_1 p_3 f^{2\eta+2}}{2(\eta+1)^2}, \quad (2.130)$$

$$J_4 = -\frac{3\eta^2 b^4 p_1 p_3}{2(\eta+1)} \int_0^f z^{4\eta-1} dz = -\frac{3\eta^2 b^4 p_1 p_3 f^{4\eta}}{8\eta(\eta+1)}, \quad (2.131)$$

$$J_5 = \frac{b^3 p_3^2}{4} \int_0^f z^{3\eta} dz = \frac{b^3 p_3^2 f^{3\eta+1}}{4(3\eta+1)}. \quad (2.132)$$

На основе (2.111) и равенств:

$$(1 + \eta^2 b^2 z^{2\eta-2})^{-1} = 1 - \eta^2 b^2 z^{2(\eta-1)} + \eta^4 b^4 z^{4(\eta-1)} + \dots, \quad (2.133)$$

$$(1 + \eta^2 b^2 z^{2\eta-2})^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\eta^2 b^2 z^{2(\eta-1)}}{2} - \frac{1}{8} \eta^4 b^2 z^{4(\eta-1)}. \quad (2.134)$$

получим приближенное представление:

$$N_2(z) \approx (1 - \eta^2 b^2 z^{2(\eta-1)}) \left(\frac{p_1 b^2 \eta^2 (\eta-1) z^{2\eta-1}}{\eta+1} - \frac{p_3 b^3 \eta (\eta-1) z^{3\eta-2}}{2} \right) + b p_3 z^\eta \left(1 + \frac{\eta^2 b^2 z^{2(\eta-1)}}{2} \right). \quad (2.135)$$

Согласно (2.111) и (2.134) слагаемым в $W_2(\eta)$, содержащим параметр b в степени меньшей пяти, является $\frac{\pi}{Eh} J_6$, где:

$$J_6 = \int_0^f p_3^2 b^3 z^{3\eta} dz = \frac{p_3^2 b^3 z^{3\eta+1}}{3\eta+1} \Big|_0^f = \frac{p_3^2 b^3 f^{3\eta+1}}{3\eta+1}. \quad (2.136)$$

Таким образом:

$$W(\eta) \approx \frac{\pi}{Eh} (J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6), \quad (2.137)$$

$$W(\eta) \approx \frac{\pi}{Eh} \left[\frac{bp_1^2 f^{\eta+3}}{(\eta+1)^2(\eta+3)} + \frac{3}{2} \frac{b^3 \eta p_1^2 f^{3\eta+1}}{(\eta+1)^2(3\eta+1)} - \frac{b^2 p_1 p_3 f^{2\eta+2}}{2(\eta+1)^2} - \frac{3}{8} \frac{\eta^2 b^4 p_1 p_3 f^{4\eta}}{\eta(\eta+1)} + \frac{b^3 p_3^2 f^{3\eta+1}}{4(3\eta+1)} + \frac{p_3^2 b^3 f^{3\eta+1}}{(3\eta+1)} \right]. \quad (2.138)$$

Для упрощения дальнейшего решения задачи переходим к новой координате

\tilde{z} :

$$\tilde{z} = \frac{z}{f}. \quad (2.139)$$

Поскольку $r = bz^\eta = \frac{a}{f^\eta} = a \left(\frac{z}{f} \right)^\eta = a(z^\eta)$, то $\tilde{r} = \frac{r}{f} = \frac{a\tilde{z}^\eta}{f} = b_0\tilde{z}^\eta$.

Равенство $\tilde{r} = b_0\tilde{z}^\eta$ представляет зависимость в безразмерных координатах.

По переменной \tilde{z} верхний предел в интегралах равен единице, а параметр b заменяется на b_0 , тогда получим:

$$W(\eta) \approx \frac{\pi f^4}{Eh} \left[\frac{b_0 p_1^2}{(\eta+1)^2(\eta+3)} + \frac{3}{2} \frac{b_0^3 \eta^2 p_1^2}{(\eta+1)^2(3\eta+1)} - \frac{b_0^2 p_1 p_3}{2(\eta+1)^2} - \frac{3}{8} \frac{\eta b_0^4 p_1 p_3}{(\eta+1)} + \frac{5}{4} \frac{p_3^2 b_0^3}{(3\eta+1)} \right]. \quad (2.140)$$

$$W(\eta) \approx \frac{\pi b_0 p_1^2 f^4}{8Eh} \left[\frac{8(3\eta+1) + 12b_0^2(\eta+3)\eta^2 - 4(\eta+3)(3\eta+1)b_0 \frac{p_3}{p_1} - 3b_0^3\eta(\eta+1)(\eta+3)(3\eta+1) \frac{p_3}{p_1}}{(\eta+1)^2(\eta+3)(3\eta+1)} + \frac{5b_0^2 \left(\frac{p_3}{p_1} \right)^2 (\eta+1)^2(\eta+3)}{(\eta+1)^2(\eta+3)(3\eta+1)} \right]. \quad (2.141)$$

Обозначим $K = \frac{\pi f^4 b_0 p_1^2}{8Eh}$, $l = \frac{p_3}{p_1}$, числитель и знаменатель в квадратных

скобках соответственно $\varphi(\eta)$, $\theta(\eta)$ и $\psi(\eta) = \frac{\varphi(\eta)}{\theta(\eta)}$.

Оптимальный по энергетическому критерию параметр η_0 определяется решением соответствующего алгебраического уравнения $W'(\eta) = 0$, которое эквивалентно уравнению:

$$\psi'(\eta) = \frac{\varphi'(\eta)\theta(\eta) - \varphi(\eta)\theta'(\eta)}{\theta^2(\eta)} = 0. \quad (2.142)$$

Раскрыв скобки, получим следующие выражения:

$$\theta(\eta) = 3\eta^4 + 16\eta^3 + 26\eta^2 + 16\eta + 3, \quad (2.143)$$

$$\theta'(\eta) = 12\eta^3 + 48\eta^2 + 52\eta + 16, \quad (2.144)$$

$$\varphi(\eta) = 8 + 24\eta + 12b_0^2(\eta^3 + 3\eta^2) - 4b_0 l(3\eta^2 + 10\eta + 3) - 3b_0^2 l(3\eta^3 + 13\eta^2 + 13\eta + 3) + 10b_0^2 l^2(\eta^3 + 5\eta^2 + 7\eta + 3), \quad (2.145)$$

$$\varphi'(\eta) = 24 + 12b_0^2(3\eta^2 + 6\eta) - 4b_0 l(6\eta + 10) - 3b_0^2 l(9\eta^2 + 26\eta + 13) + 10b_0^2 l^2(3\eta^2 + 10\eta + 7). \quad (2.146)$$

Согласно равенствам (2.137)-(2.141) числитель равенства (2.137) приводит к алгебраическому уравнению, коэффициенты которого зависят от параметров a, f, p_1, p_3 :

$$a_1\eta^6 + a_2\eta^5 + a_3\eta^4 + a_4\eta^3 + a_5\eta^2 + a_6\eta + a_7 = 0. \quad (2.147)$$

При определенной совокупности $\{a_0, f_0, p_{10}, p_{30}\}$ этих параметров существует корень η_0 уравнения (2.142) и функция $r(z) = bz^{\eta_0}$ описывает срединную форму оболочки вращения, которой соответствует минимальная упругая энергия:

$$W(\eta_0) \approx \frac{\pi f^3 a p_1^2 \psi(\eta_0)}{8Eh}. \quad (2.148)$$

Отметим, что при $\eta_0 < 1$ срединная поверхность является выпуклой, а когда $\eta_0 > 1$ вогнутой.

Корни уравнения (2.142) определяются с использованием известных методов: половинчатого деления, метод касательных, метод Ньютона.

Для конкретной оценки параметра, соответствующего критическому значению энергии $W(\eta)$ оставим слагаемые с множителем до b_0^3 :

$$W_1(z) \approx \frac{1}{2Eh^2} \left(\frac{p_1^2 z^2}{(\eta+1)^2} + \frac{b_0^2 p_3^2 z^{2\eta}}{4} - \frac{2b_0 p_1 p_3 z^{\eta+1}}{2(\eta+1)} \right). \quad (2.149)$$

Энергия упругой деформации оболочки, соответствующая усилиям $N_1(z)$, в координатах $\tilde{z} = \frac{z}{f}$:

$$\begin{aligned} W_1(\eta) &\approx \frac{\pi f^4}{Eh} \int_0^1 \tilde{z}^\eta \left(1 + \frac{b_0^2 \eta^2 \tilde{z}^{2\eta-2}}{2} \right) \left(\frac{p_1^2 \tilde{z}^2}{(\eta+1)^2} + \frac{b_0^2 p_3^2 \tilde{z}^{2\eta}}{4} - \frac{b_0 p_1 p_3 \tilde{z}^{\eta+1}}{\eta+1} \right) d\tilde{z}, \\ W_1(\eta) &\approx \frac{\pi f^4}{Eh} \int_0^1 \left(\frac{b_0 p_1^2 \tilde{z}^{\eta+2}}{(\eta+1)^2} - \frac{b_0^2 p_1 p_3 \tilde{z}^{2\eta+1}}{\eta+1} \right) d\tilde{z}, \\ W_1(\eta) &\approx \frac{\pi f^4 p_0 p_1^2}{Eh} \left(\frac{1}{(\eta+1)^2 (\eta+3)} - \frac{b_0 l}{2(\eta+1)^2} \right); l = \frac{p_3}{p_1}. \end{aligned} \quad (2.150)$$

При учете слагаемых с множителем до b_0^3 :

$$W(\eta) \approx W_1(\eta). \quad (2.151)$$

Поскольку:

$$\begin{aligned}
W_1(\eta) &= \frac{\pi f^4 p_1^2}{Eh} \int_0^1 \left(\frac{b_0 \tilde{z}^{\eta+2}}{(\eta+1)^2} - \frac{b_0^2 l \tilde{z}^{2\eta+1}}{\eta+1} \right) d\tilde{z}, \\
W_1(\eta) &\approx \frac{\pi f^4 p_1^2 b_0}{Eh} \left(\frac{1}{(\eta+1)^2(\eta+3)} - \frac{b_0 l}{2(\eta+1)^2} \right), \\
W_1(\eta) &\approx L \left[\frac{2 - b_0 l(\eta+3)}{(\eta+1)^2(\eta+3)} \right]; L = \frac{\pi f^4 p_1^2 b_0}{2Eh}, \\
W_1(\eta) &\approx \frac{\pi f^4 b_0 p_1^2}{2Eh} \frac{[2 - b_0 l(\eta+3)]}{(\eta+1)^2(\eta+3)}.
\end{aligned} \tag{2.152}$$

Обозначив $\varphi(\eta)$ и $\theta(\eta)$ как числитель и знаменатель в квадратных скобках, оценки критических точек функции $W_1(\eta)$ определяем по соотношению:

$$\begin{aligned}
W(\eta) &= L \frac{\varphi(\eta)}{\theta(\eta)}, \\
W'(\eta) &= L \frac{\varphi'(\eta)\theta(\eta) - \varphi(\eta)\theta'(\eta)}{\theta^2(\eta)}.
\end{aligned} \tag{2.153}$$

Критические точки энергии $W(\eta)$ определяются вещественными корнями уравнения:

$$\begin{aligned}
\varphi'(\eta)\theta(\eta) - \varphi(\eta)\theta'(\eta) &= 0, \\
b_0 l \eta^2 + (2b_0 l + 6)\eta + 3b_0 l - 6 &= 0, \\
\eta_{1,2} &= \frac{-b_0 l - 3 \pm \sqrt{(b_0 l + 3)^2 - b_0 l(3b_0 l - 6)}}{b_0 l}.
\end{aligned} \tag{2.154}$$

В частности, при $b_0 l = 1$:

$$\begin{aligned}
\eta^2 + 8\eta - 3 &= 0, \\
\eta_{1,2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 + 3}}{1} = \sqrt{19} - 4.
\end{aligned} \tag{2.155}$$

Оценка критической точки $W_1(\eta)$ $\eta_0 = \sqrt{19} - 4$.

При подстановке в уравнение $r(z) = a \left(\frac{z}{f} \right)^\eta$ получаем $r(z) = \frac{a}{f} z^{\sqrt{19}-4}$.

Таким образом, для оболочек вращения определено оптимальное значение критической точки для нахождения минимума упругой энергии.

2.8. Выводы по второй главе

1. Энергетический критерий имеет чёткий физический смысл и тесно коррелирует с представлениями о сопротивлении конструкции внешним воздействиям.

2. Предельная удельная потенциальная энергия деформирования является интегральным параметром материала, связанным с его прочностью и определяющим удельный ресурс сопротивления разрушению при деформации. Этот параметр инвариантен относительно вариаций геометрии оболочки.

3. Оптимизация формы оболочки по энергетическому критерию повышает коэффициент её безопасности и уровень предельных нагрузок.

4. При известной предельной плотности энергии подбирается толщина оболочки (оптимальной формы) для уменьшения её веса при сохранении запаса прочности. Уменьшение толщины оболочки влечёт снижение расхода материала.

5. Для арки при равномерно распределенной вертикальной нагрузке минимальное значение энергии упругой деформации достигается при угле $\varphi = \frac{\pi}{2}$, а оптимальная форма арки соответствует углу раствора π .

6. Критическая точка φ_* , отвечающая минимуму упругой энергии $W(\varphi_*)$, при гидростатическом нагружении определяется решением уравнения $\frac{tg \varphi_*}{3} = \varphi_*$, реализованным графическим методом.

7. При равномерно распределенной вертикальной нагрузке оптимальной по энергетическому критерию является полукруглая арка, а при гидростатическом нагружении форма арки близка к полукруглой. Полученный в настоящей работе угол раствора по заданному критерию больше угла раствора, полученного по критерию минимума веса в работе [51], но меньше, чем в круговой арке. Таким образом, полученное автором по энергетическому критерию выражение

оптимального угла раствора арки подтверждает и уточняет результаты других исследователей.

8. При оптимизации сферической оболочки по энергетическому критерию было определено, что оптимальной формой является полусферическая оболочка с углом раствора равным π .

9. Рассмотрение задачи оптимизации в диссертации в множестве $\Phi(\eta); \eta = \frac{1}{\xi}$ инициировано работой [51] и является её модификацией. В отличие от [51], где образующая оболочки вращения задается $z(r) = cr^{\xi}; \xi = \frac{1}{\eta}$, в данной работе образующая оболочки определяется кривой $r(z) = bz^{\eta}$, что способствует упрощению определения упругой энергии без решения сложных дифференциальных уравнений.

10. Рассмотрено применение формул меридиональных и круговых усилий к методике определения оптимальных форм оболочек с помощью параметрического подхода. Предложенные формулы значительно упрощают решение, позволяя быстро найти критическую точку $W_1(\eta)$.

ГЛАВА 3. ПРОВЕДЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ ОБОЛОЧЕК ПО ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМУ КРИТЕРИЮ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАДИЕНТНЫХ МЕТОДОВ

3.1. Градиентные методы

Градиентные методы представляют собой приближённые (итерационные) методы решения задачи нелинейного программирования, позволяющие определить локальный экстремум [175]. Они применяются для решения задач с большим количеством входящих параметров, что свойственно оптимизации формы и топологии. Основным понятием, используемым во всех градиентных методах, является понятие градиента функции. Градиент является векторной величиной и позволяет определить направление наиболее быстрого роста функции. Информация о градиенте предоставляется с помощью анализа чувствительности.

Каждый шаг алгоритма, основанного на градиентных методах, содержит три итерации: поиск направления, поиск следующего приближения искомой точки и проверка условия остановки.

Первый этап заключается в выборе начальной точки поиска x^0 , принадлежащей допустимой области и направления для движения с помощью вычисления градиента. Градиент помогает решателю определить, в каком направлении двигаться для достижения оптимального результата. Это направление называется направлением поиска. Следует отметить, что разные методы используют разные траектории спуска.

Следующий этап заключается в выборе размера шага (α), чтобы найти следующее приближения, после чего проверяется условие остановки итерационного процесса (проверка невязки – ε). Если значение невязки ε_i меньше какого-то критического значения ε_{lim} , то процесс оптимизации завершается. Характерный диапазон для выбора критического параметра варьируется в пределах от 0.001 до 0.01 [176].

Критерий остановки итерационного процесса выглядит следующим образом:

$$|F(x_n)| < \varepsilon_{\text{lim}}, \quad (3.1)$$

где $F(x_n)$ является невязкой метода.

Геометрическая интерпретация градиентных методов оптимизации в пространстве поиска \mathbb{R}^2 представлена на рисунке 3.1.

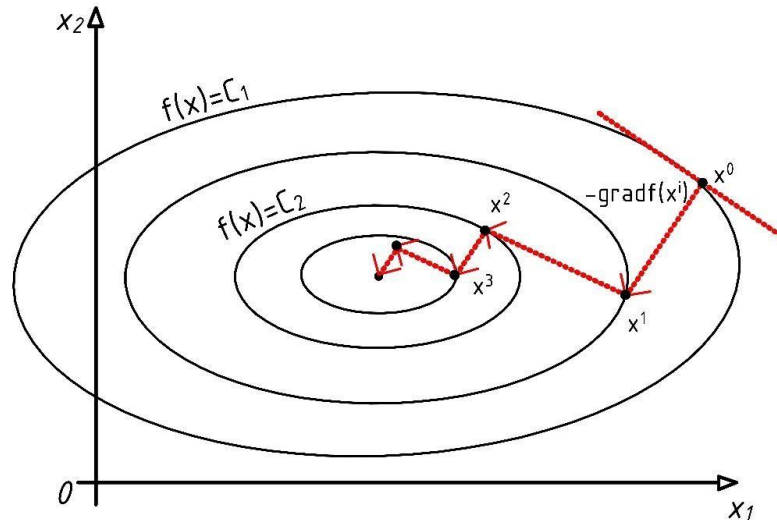


Рисунок 3.1 – Иллюстрация градиентных методов на плоскости

Общая схема метода записывается в векторном виде [177]:

$$x^{i+1} = x^i + \alpha_i h^i, \quad (3.2)$$

где вектор h^i определяет направление $(i+1)$ шага оптимизации, а коэффициент α_i – длину этого шага.

В градиентном методе при минимизации целевой функции h^i берётся равным антиградиенту функции f в точке x^i , т.е.:

$$h^i = -\text{grad}f(x^i). \quad (3.3)$$

Итерационная формула простейшего алгоритма поиска $\min f(x)$ записывается в векторной форме следующим образом:

$$x^{i+1} = x^i - \alpha_i \times \text{grad}f(x^i), \quad (3.4)$$

где x^i, x^{i+1} – последовательные точки, α_i – размер длины шага в направлении градиента $\text{grad}f(x)$.

Определяющей характеристикой решателя на основе градиента является то, что в пространстве он следует по пути управляющих переменных, где каждая новая

итерация основана на вычислении частных производных целевой функции, оценённых в ранее посещённых точках.

Базовая схема методов, основанных на градиенте, представлена на рисунке 3.2.



Рисунок 3.2 – Основные этапы градиентных методов

Градиентные методы широко используются для решения сложных задач благодаря высокой производительности, которая зависит от гладкости градиентов.

Для исследования были выбраны следующие градиентные методы: метод подвижных асимптот (ММА) вместе с его глобально сходящейся версией GСММА, метод внутренней точки (IPOPT) и метод последовательного квадратичного программирования (SQOPT). Данные методы хорошо зарекомендовали себя в решении задач оптимизации формы и топологии [44, 178].

Во всех данных методах решения берутся на основе значений целевой функции и ограничений, а также значений их производных первого порядка.

3.2. Метод подвижных асимптот (ММА)

Метод подвижных асимптот или MMA является общим и гибким методом оптимизации, который используется для решения задач с большим количеством переменных и основан на задаче аппроксимации выпуклых функций.

На каждом вычислительном этапе решается строго выпуклая аппроксимирующая подзадача для перехода к следующим точкам. Такие подзадачи управляются адаптивным механизмом, который включает в себя «движущиеся асимптоты», которые перемещаются в направлении поиска и изменяются с каждой итерацией для приближения к оптимальному решению [179].

Работа алгоритма обычно начинается с выбора начальной точки, а затем находятся ограничения и градиенты. Далее генерируется подзадача путём составления функции Лагранжа и находятся частные производные, которые приравниваются к нулю. На каждой итерации метод требует однократной оценки целевой и ограничивающей функции, а также их производных [44]. Для завершения итерации проверяется критерий остановки итерационного процесса.

ММА основан на решении проблем оптимизации вида:

$$\begin{aligned} \min f_0(x) + a_0 z + \sum_{i=1}^m (c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2) \\ \text{при } f_i(x) - a_i z - y_i \leq 0, i = 1, \dots, m, \\ x \in X, y \geq 0, z \geq 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где переменными являются: $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in R^n, y = (y_1, \dots, y_m)^T \in R^m, z \in R;$
 $X = \{x \in R^n | x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max}, j = 1, \dots, n\}$, где x_j^{min} и x_j^{max} – действительные числа, удовлетворяющие $x_j^{min} < x_j^{max}$ для всех j , f_0, f_1, \dots, f_m – действительнoзначные функции, a_0, a_i, c_i и d_i – действительные числа, которые удовлетворяют $a_0 > 0, a_i \geq 0, c_i \geq 0, d_i \geq 0$ и $c_i + d_i > 0$ для всех i , а также $a_i c_i > a_0$ для всех i с $a_i > 0$ [36].

На каждой итерации алгоритма для нахождения решения на $(k+1)$ шаге $(x^{k+1}, y^{k+1}, z^{k+1})$ решается следующая подзадача:

$$\begin{aligned} \min \tilde{f}_0^{(k)}(x) + a_0 z + \sum_{i=1}^m (c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2) \\ \text{при } \tilde{f}_i^{(k)}(x) - a_i z - y_i \leq 0, i = 1, \dots, m, \\ a_j^{(k)} \leq x_j \leq \beta_j^{(k)}, j = 1, \dots, n, \\ y_i \geq 0, i = 1, \dots, m, \\ z \geq 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Аппроксимирующие функции задаются следующим образом:

$$\tilde{f}_0^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{u_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j - l_j^{(k)}} \right) + r_i^{(k)}, i = 0, 1, \dots, m,$$

$$\text{где } p_{ij}^{(k)} = (u_j^{(k)} - x_j^{(k)})^2 (1,001 \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x^{(k)}) \right)^+ + 0,001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^{(k)}) \right)^- + \frac{10^{-5}}{x_j^{\max} - x_j^{\min}}), \quad (3.7)$$

$$q_{ij}^{(k)} = (x_j^{(k)} - l_j^{(k)})^2 (0,001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^{(k)}) \right)^+ + 1,001 \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x^{(k)}) \right)^- + \frac{10^{-5}}{x_j^{\max} - x_j^{\min}}),$$

$$r_i^{(k)} = f_i(x^{(k)}) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{u_j^{(k)} - x_j^{(k)}} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j^{(k)} - l_j^{(k)}} \right).$$

Здесь, $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^{(k)}) \right)^+$ обозначает наибольшее из двух чисел $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^{(k)})$ и 0.

Границы α_j^k и β_j^k выбираются следующим образом:

$$\alpha_j^{(k)} = \max\{x_j^{\min}, l_j^{(k)} + 0.1(x_j^{(k)} - 0.5(x_j^{\max} - x_j^{\min}))\}, \quad (3.8)$$

$$\beta_j^{(k)} = \min\{x_j^{\max}, u_j^{(k)} - 0.1(u_j^{(k)} - x_j^{(k)}), x_j^{(k)} + 0.5(x_j^{\max} - x_j^{\min})\}.$$

Ограничения $\alpha_j^{(k)} \leq x_j \leq \beta_j^{(k)}$, эквивалентны следующим трём наборам ограничений:

$$\begin{aligned} x_j^{\min} &\leq x_j \leq x_j^{\max}, \\ -0.9(x_j^{(k)} - l_j^{(k)}) &\leq x_j - x_j^{(k)} \leq 0.9(u_j^{(k)} - x_j^{(k)}), \\ -0.5(x_j^{\max} - x_j^{\min}) &\leq x_j - x_j^{(k)} \leq 0.5(x_j^{\max} - x_j^{\min}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.3. Разреженный метод нелинейной оптимизации (SNOPT)

Разреженный метод нелинейной оптимизации или SNOPT основан на решении следующей задачи:

Минимизировать или максимизировать функцию $f(x)$ при ограничениях:

$$\begin{aligned} F(x) &\sim b_1, \\ G(x) &\sim b_2, \\ l &\leq x \leq u, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $x \in R^n$, $f(x)$ –линейная или нелинейная целевая функция, l и u –постоянные, нижняя и верхняя границы, $F(x)$ – нелинейные функции ограничений, G –

разреженная матрица, \sim -вектор реляционных операторов (\leq, \geq или $=$), b_1, b_2 – вектора правых частей ограничений. $F(x) \sim b_1$ являются нелинейными ограничениями модели, а $G(x) \sim b_2$ образуют линейные ограничения, а общее количество линейных и нелинейных ограничений равно m [39].

Базовая структура алгоритма включает в себя основные и второстепенные итерации. Основные итерации генерируют последовательность итераций (x_k) , которые удовлетворяют линейным ограничениям и сходятся к точке, удовлетворяющей условиям оптимальности первого порядка. На каждой итерации (x_k) решается подзадача QP, которая используется для генерации направления поиска к следующей итерации (x_{k+1}) . Ограничения подзадачи формируются из линейных ограничений $G_x - s_L = 0$ и нелинейной линеаризации ограничений:

$$F(x_k) + F'(x_k)(x - x_k) - s_N = 0, \quad (3.11)$$

где $F(x_k)$ является якобианом: матрицей, строки которой являются первыми производными от $F(x)$, вычисляемыми при x_k . Таким образом, ограничения QP включают в себя m линейных ограничений:

$$\begin{aligned} F'(x_k)x - s_N &= -F(x_k) + F'(x_k)x_k, \\ G_x - s_L &= 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где x и s ограничены l и u . Если $m \times n$ матрицы A и m -вектор b определены как:

$$A = \begin{pmatrix} F'(x_k) \\ G \end{pmatrix} \quad u \quad b = \begin{pmatrix} -F(x_k) + F'(x_k)x_k \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Далее подзадача QP формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \min_{x,s} q(x, s) \text{ при условии} \\ Ax - s = b, l \leq \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} \leq u, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $q(x, s)$ – квадратичное приближение к модифицированной функции Лагранжа задачи (формула 3.10).

На каждой второстепенной итерации ограничения $Ax - s = b$ разделяются в виде:

$$Bx_B + Sx_s + Nx_N = b, \quad (3.15)$$

где базисная матрица B является квадратной, определитель которой не равен нулю. Элементы x_B, x_S, x_N являются основными, сверхосновными и неосновными переменными соответственно и представляют собой перестановку элементов x и s [40].

3.4. Метод внутренней точки (ПРОРТ)

Метод внутренней точки [179,180] или ПРОРТ используется для решения общих нелинейных задач [41,42]:

$$\begin{aligned} \min_{x \in R^n} f(x) & \quad (3.16) \\ \text{при } g^L \leq g(x) \leq g^U, \\ x^L \leq x \leq x^U, \end{aligned}$$

где $x \in R^n$ – является переменной оптимизации с нижней и верхней границами $x^L \in (R \cup \{-\infty\})^n$ и $x^U \in (R \cup \{+\infty\})^n$, $f: R^n \rightarrow R$ – целевая функция, $g: R^n \rightarrow R^m$ – ограничения. Ограничения $g(x)$ имеют верхние и нижние границы, $g^L \in (R \cup \{-\infty\})^m$ и $g^U \in (R \cup \{+\infty\})^m$.

Согласно методам внутренней точки (или методам барьерных функций), исходную для поиска точку можно выбирать только внутри допустимой области [181].

Алгоритм ПРОРТ вычисляет приближённое решение барьерной задачи для фиксированного μ :

$$\begin{aligned} \min_{x \in R^n} \varphi_\mu(x) \\ \text{при } c(x) = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $\varphi_\mu(x) := f(x) - \mu \sum_{i=1}^n \ln(x^{(i)})$, а $c(x)$ является модификацией ограничений задачи (3.16).

Происходит получение функции с барьером и нахождение минимума функции $\varphi_\mu(x)$ в точке x_k . Затем уменьшается параметр барьера и продолжается решение следующей барьерной задачи на основе приближённого решения

предыдущей. Для того, чтобы решить, приемлема ли пробная точка в качестве новой итерации, IPOPT использует метод «фильтрации» в целях определения прогресса в решении задачи барьера (3.4.2).

Благодаря усовершенствованиям быстрых барьерных методов на основе метода Ньютона, таких как IPOPT, информацию о чувствительности можно получить очень легко [182].

3.5. Оптимизация формы сферического купола

В качестве тестовой модели простой геометрии рассматривается сферический купол – оболочка, которая образуется в результате вращения вокруг вертикальной оси меридиональной образующей в виде дуги круга [183].

Неявная форма задания половины сферической оболочки [184]:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= R^2, \\ z &\geq 0.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Параметрическая форма задания:

$$\begin{aligned}x &= x(\alpha, \beta) = R \sin \alpha \sin \beta, \\ y &= y(\alpha, \beta) = R \sin \alpha \cos \beta, \\ z &= z(\alpha) = R \cos \alpha, \\ -\frac{\pi}{2} &< \alpha < \frac{\pi}{2}, \\ 0 &< \beta < 2\pi,\end{aligned}\tag{3.19}$$

где α – угол между нормалью к поверхности и осью Ox , а β – угол поворота плоскости меридиана от положительного направления оси Ox [184].

Купол является одним из наиболее эффективных форм тонкостенных пространственных конструкций и широко используется при проектировании крыш зданий и сооружений благодаря своим хорошим аэродинамическим, акустическим и прочностным свойствам. Одним из главных преимуществ купольных зданий является их энергоэффективность – снижение теплопотерь за счет меньшей площади поверхности [185-188]. Сферический купол широко используется в

строительстве общественных и жилых зданий, малых архитектурных форм. Структурный анализ и исследование оптимизации некоторых известных сферических поверхностей представлен в [187] (рисунок 3.3).



Рисунок 3.3 – Примеры купольных зданий

Оболочка сферического купола имеет радиус 10 м, толщину 0.1 м. Для сферы используется простейшая линейно-упругая модель со следующими свойствами: плотность (D) – 2300 кг/м³, модуль Юнга (E) – 30x10⁹ Па, коэффициент Пуассона (ν) – 0.2, без учета образования трещин при растяжении.

Вычислительная сетка для расчёта является структурированной и состоит из треугольных элементов первого порядка с линейным полем перемещений и углов поворота с 6 степенями свободы. Из предустановленных размеров выбирается сетка с размером элементов – «очень мелкая», состоящая из 2512 равносторонних треугольных элементов (рисунок 3.4). Сторона каждого треугольника равняется 0.8 м.

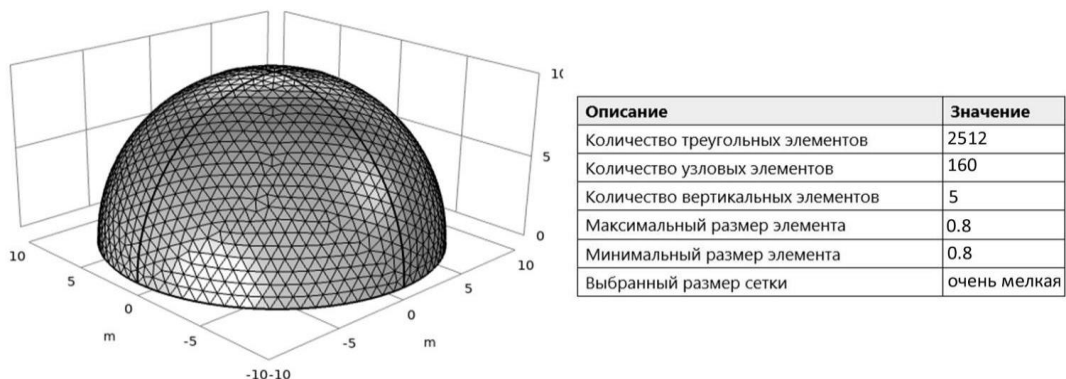


Рисунок 3.4 – Расчётная сетка и её геометрические элементы для полусферы

Купол имеет нижнее опорное кольцо, которому задается жёсткое закрепление. На поверхность оболочки действует равномерно распределённая

вертикальная нагрузка $q=10000 \text{ Н/м}^2$. В приложенной нагрузке учитываются как внешние факторы (климатические и эксплуатационные нагрузки), так и собственный вес купола.

Расчетная схема приведена на рисунке 3.5.

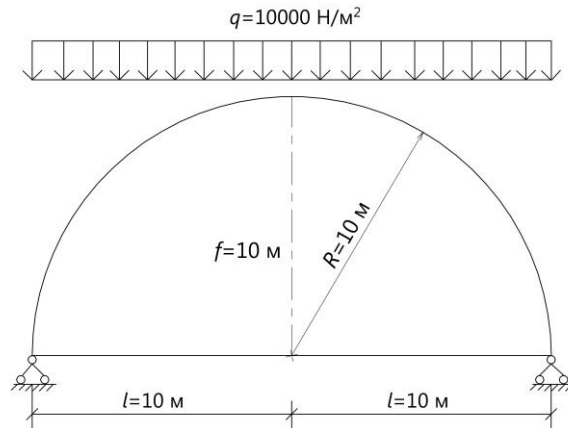


Рисунок 3.5. Расчетная схема для сферической оболочки

Максимальное значение перемещения при расчёте на прочность перед оптимизацией составляет 0,574 мм. Максимальное значение первого главного напряжения составляет 0,863 МПа. Удельная потенциальная энергия деформирования равняется 30 Дж/м³. Результаты прочностного расчета представлены на рисунке 3.6.

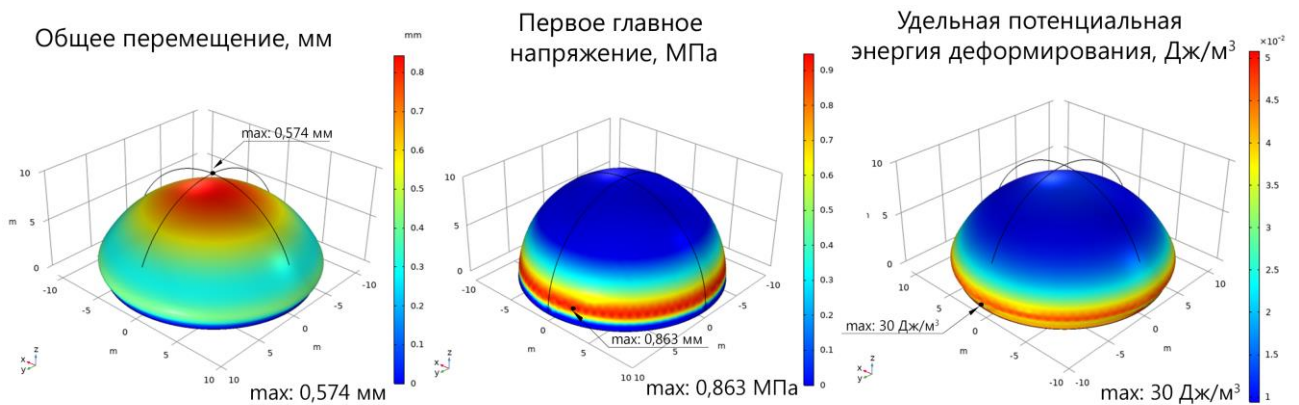


Рисунок 3.6 – Расчёт на прочность сферического купола

После проведения прочностного расчёта запускается оптимизационный модуль. В качестве целевой функции-критерия задается общая энергия упругой деформации и выбирается её минимизация. Для выполнения расчета используются

три градиентных метода оптимизации – MMA, SNOPT и IPOPT с числом итераций 100. Исходное значение целевой функции составляет 727 Дж. Значение предела сходимости (ε_{lim}) берётся из диапазона используемых чисел для проведения оптимизационного процесса и составляет 0.01 [132].

После проведения оптимизации значение общего перемещения уменьшилось на 50% при расчёте тремя методами. Наибольшее уменьшение удельной потенциальной энергии деформирования было получено методом IPOPT, что составляет 60% от исходного значения, полученного при расчёте на прочность. На рисунке 3.7 представлены результаты оптимизации сферического купола: общее перемещение, удельная потенциальная энергия деформирования, энергия упругой деформации и первое главное напряжение.

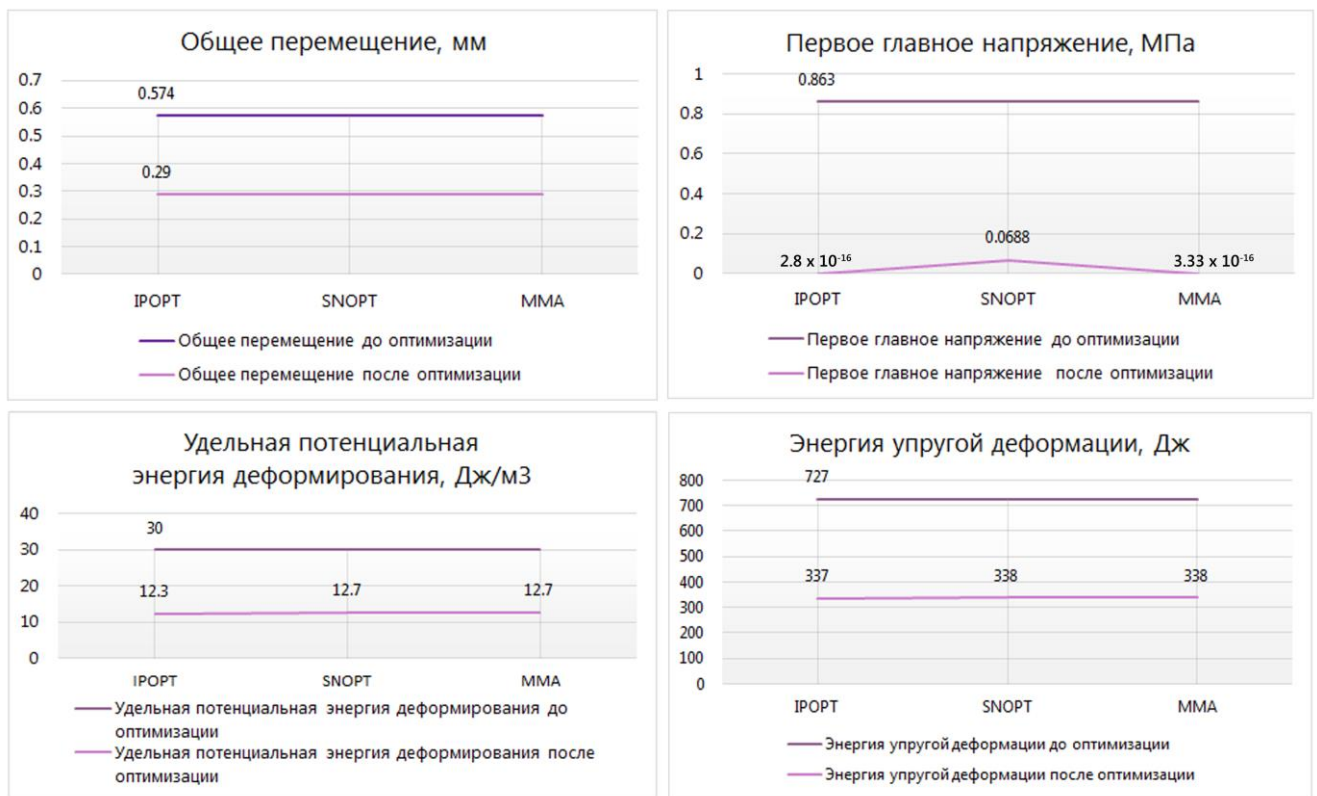


Рисунок 3.7 – Результаты оптимизации сферического купола

Определение разницы между прочностью σ_0 до оптимизации и прочностью σ после оптимизации для трёх методов по формуле 2.8, где относительная

деформация модели купола до оптимизации равна $\varepsilon_0 = \frac{\Delta l_0}{l}$ и после оптимизации $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$. В данной задаче $l = 10$ м.

Необходимо отметить, что средняя прочность сферической оболочки до и после оптимизации оценивается по предельному смещению Δf стрелы подъема f_0 и удельной потенциальной энергии деформирования W_s .

Как аналог абсолютного удлинения $\Delta l = \frac{\partial u}{\partial x} dx = \varepsilon_x dx$ отрезка длиной dx полагается $\Delta f = \Delta l$ и для отрезка длиной f_0 принимается соотношение $\Delta f = \frac{\Delta f}{f_0} f_0$ и тем самым $\varepsilon = \frac{\Delta f}{f_0}$.

Величина $\varepsilon = \frac{\Delta f}{f_0}$ представляет усредненное значение относительной деформации $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$.

$$1. \text{ ИРОРТ: } \sigma_0 - \sigma = \frac{2(W_s^0 \varepsilon - W_s \varepsilon_0)}{\varepsilon_0 \varepsilon} = 2 \left[\frac{30 \times 0,00029 - 12,3 \times 0,000574}{0,00029 \times 0,000574} \right] = 19702 \text{ Дж/м}^3 \\ = 0.02 \text{ МПа.}$$

$$2. \text{ SНОРТ: } \sigma_0 - \sigma = \frac{2(W_s^0 \varepsilon - W_s \varepsilon_0)}{\varepsilon_0 \varepsilon} = 2 \left[\frac{30 \times 0,00029 - 12,7 \times 0,000574}{0,00029 \times 0,000574} \right] = 16943 \\ \text{ Дж/м}^3 = 0.02 \text{ МПа.}$$

$$3. \text{ ММА: } \sigma_0 - \sigma = \frac{2(W_s^0 \varepsilon - W_s \varepsilon_0)}{\varepsilon_0 \varepsilon} = 2 \left[\frac{30 \times 0,00029 - 12,7 \times 0,000574}{0,00029 \times 0,000574} \right] = 16943 \\ \text{ Дж/м}^3 = 0.02 \text{ МПа.}$$

Удельный резерв энергии находится по формуле $\Delta W = W_s^0 - W_s$:

$$1. \text{ ИРОРТ: } \Delta W = 30 - 12,3 = 17,7 \text{ Дж/м}^3.$$

$$2. \text{ SНОРТ: } \Delta W = 30 - 12,7 = 17,3 \text{ Дж/м}^3.$$

$$3. \text{ ММА: } \Delta W = 30 - 12,7 = 17,3 \text{ Дж/м}^3.$$

Необходимо отметить, что при расчете сферического купола методом внутренней точки ИРОРТ был достигнут наибольший удельный резерв энергии, что повышает прочность и жесткость конструкции.

В таблице 3.1 представлены результаты минимизации функции энергии упругой деформации для сферической поверхности тремя методами. Исходное значение целевой функции – 727 Дж было уменьшено на 46 % в каждом из трёх методов. Для достижения заданной точности наибольшее количество итераций потребовалось при решении методом IPOPT и составило 58 итераций. Значение целевой функции составило 337 J (метод IPOPT). По вычислительному времени метод SNOPT и MMA показывают самую продолжительную величину расчёта. Наименьшее количество итераций потребовалось методу SNOPT. За 24 итерации было найдено оптимальное значение функции-338 J, которое в методе IPOPT было найдено только к завершению расчёта. При использовании метода MMA решение было найдено за 27 итераций и составило 338 J.

Таблица 3.1 – Результаты минимизации функции энергии упругой деформации для сферического купола

Сферический купол			
Метод	IPOPT	SNOPT	MMA
Начальное значение целевой функции, Дж	727		
Значение целевой функции после оптимизации, Дж	337	338	338
Общее число оценок целевой функции	91	35	112
Общее вычислительное время, с	1978	2978	3917
Общее число итераций, N_{tot}	58	24	27

При использовании градиентных методов высота оптимизированной сферической оболочки уменьшилась на 20% по сравнению с исходным вариантом (рисунок 3.8). Полученный процент характеризует перемещение точек срединной поверхности оболочки по нормали (вдоль оси Oz).

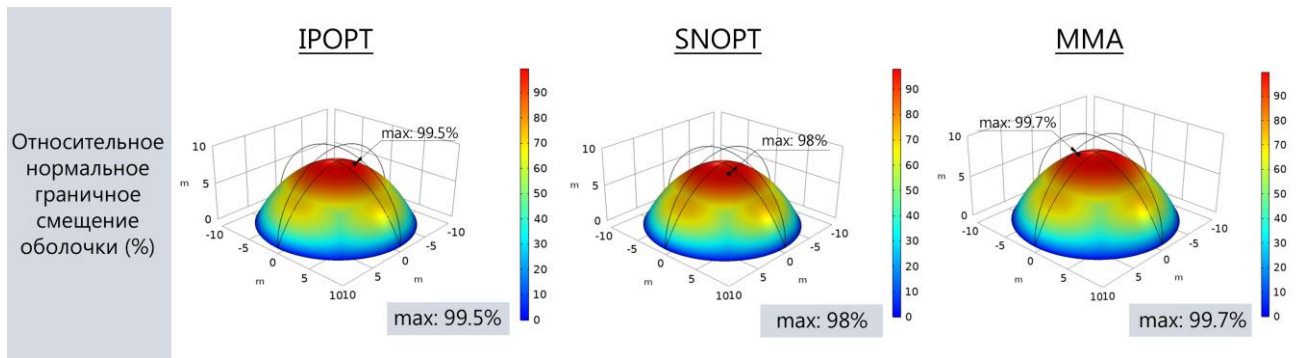


Рисунок 3.8 – Значения относительного нормального граничного смещения оболочки (прогиба)

Высота сферического купола уменьшилась с 10 до 8 м. Изменение формы образующей оболочки представлено на рисунке 3.9.

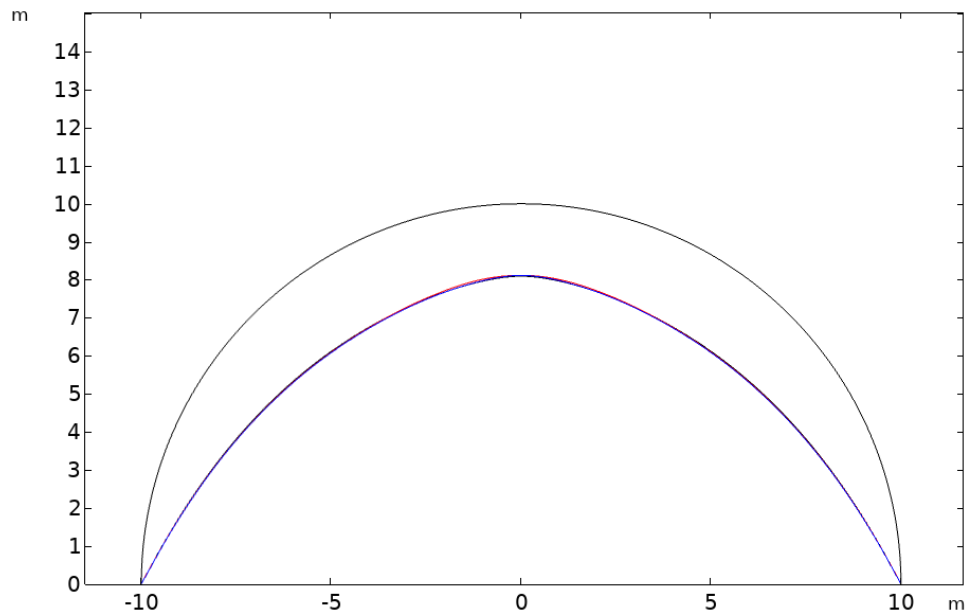


Рисунок 3.9 – Изменение формы сферического купола в процессе оптимизации

Необходимо отметить, что после оптимизации градиентными методами форма образующей оболочки стремится от сферической к параболическому очертанию. Для сравнения была построена форма образующей параболического очертания с высотой 8 м и радиусом 10 м. Уравнение параболы с вертикальной осью симметрии имеет вид:

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0, \quad (3.20)$$

где x_0, y_0 координаты вершины параболы; ветви параболы направлены вниз при $a < 0$.

На рисунке 3.10 показана полученная форма оболочки после оптимизации и при построении по уравнению. Оптимизированная форма купола имеет лишь небольшое расхождение с формой параболического очертания, построенного по уравнению. Таким образом, оптимальная форма оболочки, полученная градиентными методами, представляет собой купол параболического очертания.

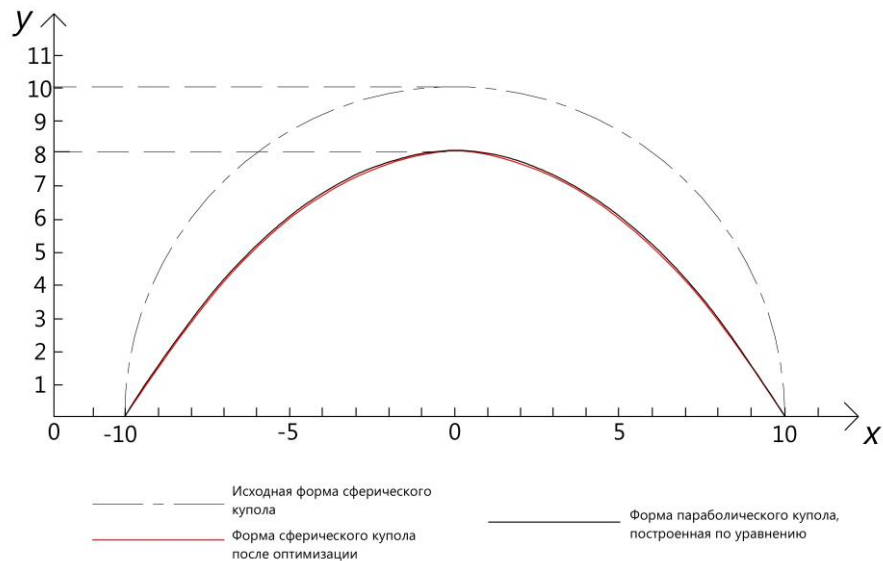


Рисунок 3.10 – Сравнение сферической формы с параболической

Полученная оптимальная форма подтверждает вывод Новожилова В.В. в работе [189], где указано, что с точки зрения величины напряжений наиболее выгоден параболический купол, который в вершине имеет наименьший радиус кривизны.

На рисунке 3.11 представлены графики изменения невязки (критерия остановки итерации) в зависимости от номера итерации. Можно наблюдать значительные перепады в поиске значения экстремума функции в методе IPOPT. Поиск решения в данном методе по сравнению с другими начинается с более широкого диапазона значений. Соответственно, подбор значений более разнообразен. В процессе поиска оптимума методами SNOPT и MMA происходит относительно плавный спуск к нахождению решения.

Графики сходимости градиентных методов (сферическая оболочка)

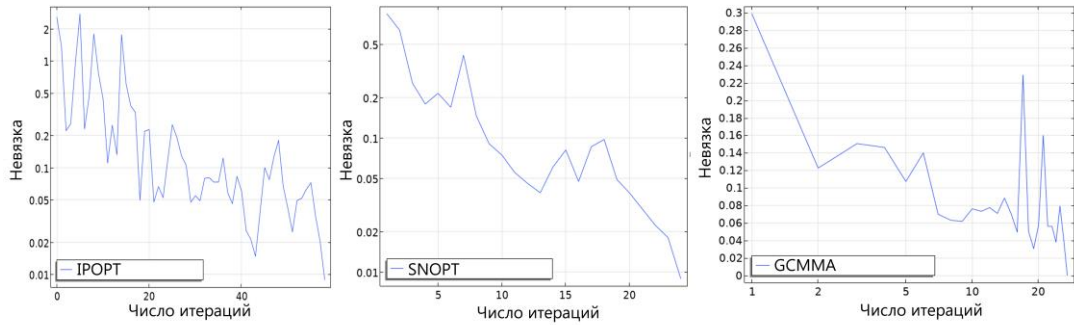


Рисунок 3.11 – Графики сходимости (сферическая оболочка)

3.6. Оптимизация формы прямого и развертывающегося геликоида

Поверхность геликоида образуется вращением прямой линии с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной неподвижной оси (винтовой поверхности), пересекающей ось под постоянным углом и одновременно перемещающейся поступательно с постоянной скоростью вдоль этой оси.

Общие параметрические уравнения для геликоида могут быть записаны в следующем виде [183]:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) = a \cos v - u \sin \gamma \sin v, \\ y &= y(u, v) = a \sin v - u \sin \gamma \cos v, \\ z &= z(u, v) = pv + u \cos \gamma, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где параметры u , v являются криволинейными координатами и определяют произвольную точку геликоида; a – наименьшее расстояние между прямой линией и винтовой осью Oz ; γ – угол образующей прямой линии с винтовой осью Oz ; p – шаг винта.

Винтовые поверхности характеризуются необычными архитектурными свойствами, поскольку данный тип оболочки может быть различной формы, образуя конечный объем у основания. Геликоиды широко используются при проектировании подвесных конструкций, малых архитектурных форм, винтовых пандусов, лестниц и так далее (рисунок 3.12).



Рисунок 3.12 – Применение геликоидов в архитектуре

В зависимости от формы образующей и положения оси вращения, могут быть получены различные типы геликоидов: прямой, развёртывающийся и т.д. В данной работе в качестве исследования взяты прямой и развёртывающийся геликоиды.

Прямой геликоид считается минимальной поверхностью, его средняя кривизна равна нулю [190]. Один виток прямого геликоида имеет следующие параметрические уравнения в виде:

$$\begin{aligned}
 x(u, v) &= u \cos(v), \\
 y(u, v) &= u \sin(v), \\
 z(u, v) &= cv, \\
 u_1 &< u < u_2, \\
 0 &< v < 2\pi,
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

где параметры u, v – криволинейные координаты произвольной точки геликоида, c – вертикальное смещение образующей, представляющее собой отрезок от u_1 до u_2 на оси при её повороте на 1 радиан и связанное с высотой одного витка геликоида H (с высотой поверхности, образующая которой повернулась на 360°) по следующему равенству: $c = H/2\pi$ [191].

Развёртывающийся геликоид (торс-геликоид) представляет собой линейчатую торсовую поверхность, образованную касательными к винтовой линии постоянного шага на круговом цилиндре радиусом a [191].

Один виток развёртывающегося геликоида имеет следующие параметрические уравнения в виде:

$$\begin{aligned}
 x(u, v) &= a \cos v - \frac{au \sin v}{m}, \\
 y(u, v) &= a \sin v + \frac{au \cos v}{m}, \\
 z(u, v) &= bv + \frac{bu}{m}, \\
 u &= \text{const}, \\
 0 < v < 2\pi.
 \end{aligned}
 \tag{3.23}$$

Здесь криволинейная координата u ($v = \text{const}$) является прямолинейной образующей, касательной к спиральному остроконечному краю, но прямые v ($u = \text{const}$) являются спиралями [191]. Поверхность развёртывающегося геликоида ограничена остроконечным краем $m = \sqrt{a^2 + b^2}$, b – шаг винтовой линии, $u = 0$ (ребро возврата), v – угол, отсчитываемый от оси Ox , a – радиус цилиндра, на котором расположен остроконечный край спирали [184] (рисунок 3.13).

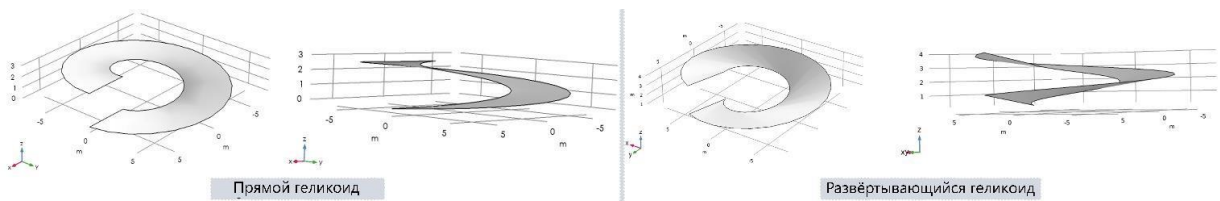


Рисунок 3.13 – Геометрия двух типов геликоидов

Все вышеупомянутые оболочки имеют следующие размеры: внутренний радиус – 3,1 м, внешний радиус – 7,1 м и высота одного витка – 3 м. Ширина одного витка составляет 4 м, а толщина оболочки – 0,2 м. Выбранным материалом для оболочек является материал со следующими свойствами: плотность (D) – 2300 кг/м³, модуль Юнга (E) – 30×10^9 Па и коэффициент Пуассона (ν) – 0,2. Используется простейшая линейно-упругая модель материала без учета образования трещин при растяжении.

Перед выполнением оптимизации необходимо провести расчёт на прочность, чтобы проанализировать напряженно-деформированное состояние конструкции. Для расчёта используется плоский треугольный элемент первого порядка с линейным полем перемещений и углов поворота [192]. Количество степеней свободы – 6. Из предустановленных размеров конечных элементов в программе

После подготовительного анализа рассчитывается напряжённо-деформированное состояние прямого и развёртывающегося геликоида с использованием сетки «очень мелкая» с размерами: 0,5 м (максимальный размер элемента) и 0,0214 м (минимальный размер элемента).

Расчёт на прочность прямого геликоида

Максимальное значение общего перемещения составляет 8,36 мм. Максимальное значение первого главного напряжения составляет 1,30 МПа. Максимальное значение второго главного напряжения составляет 0,0229 МПа. Удельная потенциальная энергия деформирования до оптимизации составляет 1137 Дж/м³.

Расчёт на прочность развёртывающегося геликоида

Максимальное значение общего перемещения составляет 3,52 мм. Для первого главного напряжения максимальное значение составляет 1,32 МПа. Второе главное максимальное значение напряжения составляет 0,0523 МПа. Значение удельной потенциальной энергии деформирования составляет 400 Дж/м³.

Общие результаты прочностного расчёта для двух геликоидов приведены на рисунке 3.16.

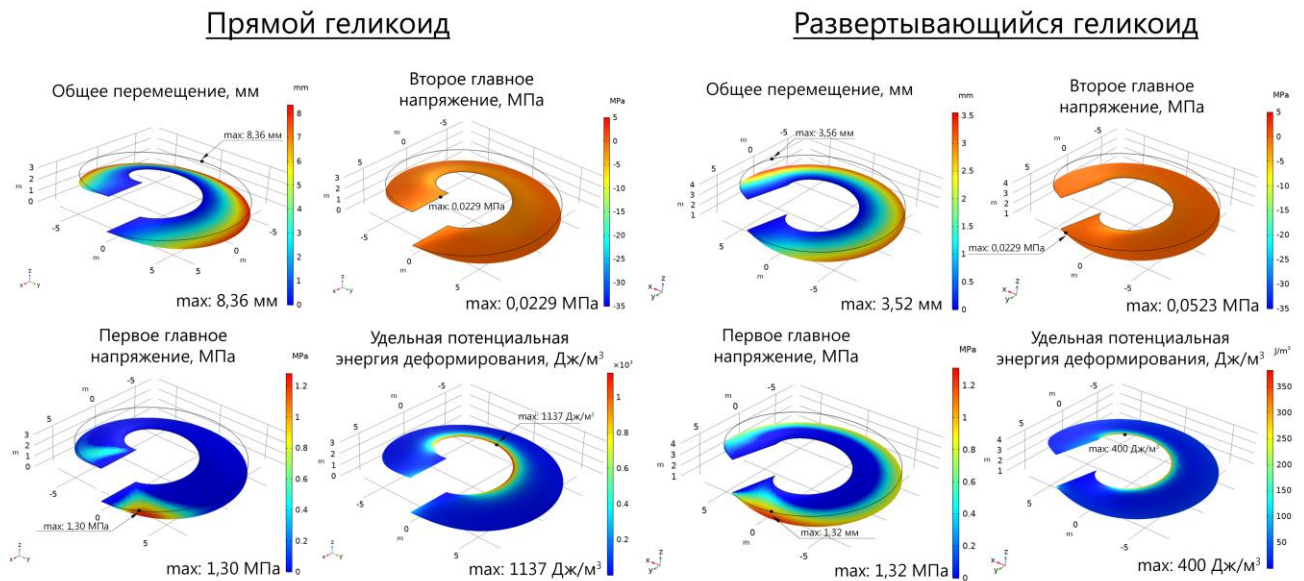


Рисунок 3.16 – Расчёт на прочность прямого и развёртывающегося геликоида

Полученные результаты показывают, что наибольшие перемещения в прямом и развёртывающемся геликоиде отмечены вдоль внешнего радиуса.

Максимальные значения первых главных напряжений здесь сосредоточены ближе к основанию геликоида. Наименьшие значения второго напряжения и суммарной энергии упругой деформации расположены вдоль внутреннего радиуса в двух оболочках. В прямом геликоиде наименьшие значения отмечены в основном по внутреннему радиусу.

Проведение оптимизации для двух типов геликоидов

После проведения анализа напряжений и деформаций запускается модуль оптимизации формы.

Оптимизация прямого геликоида

Полученные значения общего перемещения, первого главного напряжения, удельной потенциальной энергии деформирования и энергии упругой деформации представлены на рисунке 3.17.

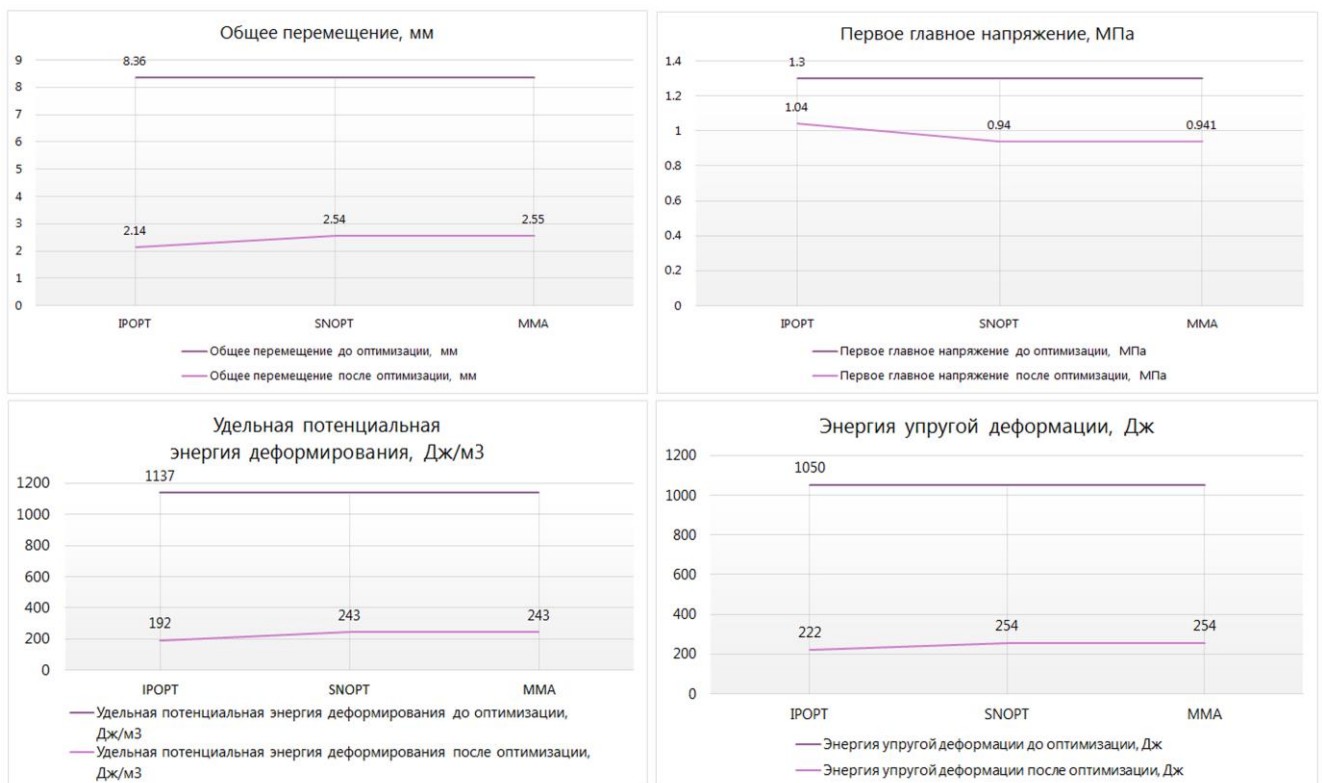


Рисунок 3.17 – Расчёт на прочность и оптимизация прямого геликоида

Общее перемещение: в процессе оптимизации с использованием сетки с размером элементов «очень мелкая» наименьшее значение перемещения получено с использованием метода IPOPT и равняется 2,14 мм. Значение общего перемещения уменьшается на 74 % по сравнению с исходным значением, полученным в ходе прочностного расчёта. При расчёте методом SNOPT и MMA разница между значениями незначительная, в пределах 0.3%.

Главные напряжения: в результате расчёта значения по первому напряжению наименьшее значение получено при использовании метода SNOPT и MMA, поскольку значения практически одинаковы, и составляет 0.94 МПа. Разница между результатом прочностного расчёта и оптимизации составляет 28% для первого главного напряжения.

Удельная потенциальная энергия деформирования: наибольшее уменьшение удельной потенциальной энергии деформирования отмечено при выборе метода SNOPT и MMA. Полученное значение после оптимизации составляет 243 Дж/м³, что на 79% меньше исходного значения удельной потенциальной энергии деформирования, полученного при расчёте на прочность.

Общая энергия упругой деформации: исходное значение целевой функции равно 1050 Дж. Наибольшее уменьшение исходной функции энергии упругой деформации было достигнуто при расчёте методом IPOPT и составило 222 Дж. Таким образом, значение функции энергии упругой деформации было уменьшено на 79 %.

Оптимизация развёртывающегося геликоида

Общее перемещение: наименьшее значение перемещения получено с использованием метода MMA и равняется 0,969 мм. Значение общего перемещение уменьшается на 72 % по сравнению с исходным значением, полученным в ходе прочностного расчёта. Разница между значениями, полученными при расчёте тремя методами, составляет 2%.

Главные напряжения: наименьшее значение первого главного напряжения получено при использовании метода IPOPT и составляет 0.686 МПа. Разница

между результатом прочностного расчёта и оптимизации составляет 48% для первого главного напряжения.

Удельная потенциальная энергия деформирования: наибольшее уменьшение плотности энергии упругой деформации найдено при расчёте методами SNOPT и MMA. Значение плотности составляет 100 Дж/м^3 , что на 75% меньше исходного значения удельной потенциальной энергии деформирования.

Общая энергия упругой деформации: исходное значение целевой функции до проведения оптимизации равно 436 Дж. При расчёте оболочки прямого геликоида тремя методами значение функции в процессе минимизации было уменьшено на 78%. Наименьшее значение получено с использованием методов SNOPT и MMA.

Результаты по прочностному расчёту и оптимизации для разворачивающегося геликоида представлены на рисунке 3.18.

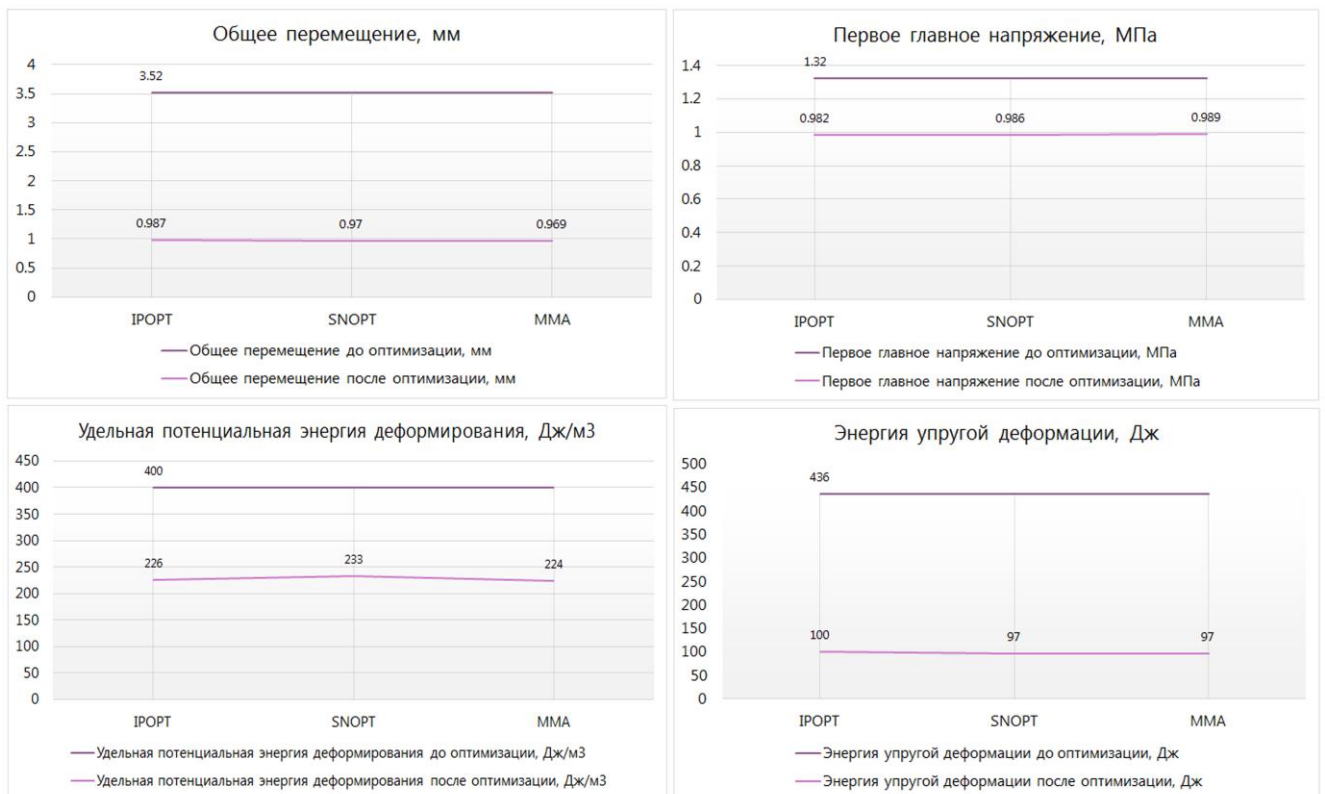


Рисунок 3.18 – Расчёт на прочность и оптимизация разворачивающегося геликоида

В таблице 3.2. представлены результаты минимизации функции энергии упругой деформации для прямого и развертывающегося геликоида.

Наименьшее значение функции энергии упругой деформации у прямого геликоида наблюдается при расчёте методом IPOPT, однако по сравнению с другими методами общее число итераций и оценок целевой функции требуется значительно больше.

У развертывающегося геликоида наименьшее значение функции энергии упругой деформации получено при установке метода SNOPT и MMA. По количеству итераций и общему вычислительному времени метод SNOPT показывает лучшие результаты. Наименьшее количество итераций для проведения оптимизационного процесса потребовалось методу внутренней точки IPOPT.

Таблица 3.2 – Результаты минимизации функции энергии упругой деформации для двух типов геликоидов

Метод	Прямой геликоид			Развертывающийся геликоид		
	IPOPT	SNOPT	MMA	IPOPT	SNOPT	MMA
Начальное значение целевой функции, Дж	1050			436		
Значение целевой функции после оптимизации, Дж	222	254	254	100	97	97
Общее число оценок целевой функции	103	26	48	24	27	82
Общее вычислительное время, с	570	808	1375	271	421	895
Общее число итераций, N_{tot}	21	41	100	19	21	74

Самое продолжительное по времени решение у прямого и развертывающегося геликоида наблюдается при установке метода MMA.

Определение разницы между прочностью σ_0 до оптимизации и прочностью σ после оптимизации для методов IPOPT, SNOPT, MMA происходит по формуле

2.8, где относительная деформация модели геликоида до оптимизации равна $\varepsilon_0 = \frac{\Delta l_0}{l}$ и после оптимизации $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$. В данной задаче $l = R_{\text{внешний}} = 7.1$ м.

Прямой геликоид:

$$1. \text{ ИРОРТ: } \sigma_0 - \sigma = \frac{2(W_s^0 \varepsilon - W_s \varepsilon_0)}{\varepsilon_0 \varepsilon} = 2 \left[\frac{1137 \times 0,00214 - 192 \times 0,00836}{0,00214 \times 0,00836} \right] = 92570,32$$

$$\text{Дж/м}^3 = 0.10 \text{ МПа.}$$

$$2. \text{ SНОРТ: } \sigma_0 - \sigma = \frac{2(W_s^0 \varepsilon - W_s \varepsilon_0)}{\varepsilon_0 \varepsilon} = 2 \left[\frac{1137 \times 0,00254 - 243 \times 0,00836}{0,00254 \times 0,00836} \right] = 80670,99$$

$$\text{Дж/м}^3 = 0.08 \text{ МПа.}$$

$$3. \text{ ММА: } \sigma_0 - \sigma = \frac{2(W_s^0 \varepsilon - W_s \varepsilon_0)}{\varepsilon_0 \varepsilon} = 2 \left[\frac{1137 \times 0,00255 - 243 \times 0,00836}{0,00255 \times 0,00836} \right] = 81421,33$$

$$\text{Дж/м}^3 = 0.08 \text{ МПа.}$$

Удельный резерв энергии находится по формуле $\Delta W = W_s^0 - W_s$:

$$1. \text{ ИРОРТ: } \Delta W = 1137 - 192 = 945 \text{ Дж/м}^3.$$

$$2. \text{ SНОРТ и ММА: } \Delta W = 1137 - 243 = 894 \text{ Дж/м}^3.$$

Развертывающийся геликоид:

$$1. \text{ ИРОРТ: } \sigma_0 - \sigma = \frac{2(W_s^0 \varepsilon - W_s \varepsilon_0)}{\varepsilon_0 \varepsilon} = 2 \left[\frac{400 \times 0,000987 - 102 \times 0,00352}{0,000987 \times 0,00352} \right] = 20585,80$$

$$\text{Дж/м}^3 = 0.02 \text{ МПа.}$$

$$2. \text{ SНОРТ: } \sigma_0 - \sigma = \frac{2(W_s^0 \varepsilon - W_s \varepsilon_0)}{\varepsilon_0 \varepsilon} = 2 \left[\frac{400 \times 0,00097 - 100 \times 0,00352}{0,00097 \times 0,00352} \right] = 21087,16$$

$$\text{Дж/м}^3 = 0.02 \text{ МПа.}$$

$$3. \text{ ММА: } \sigma_0 - \sigma = \frac{2(W_s^0 \varepsilon - W_s \varepsilon_0)}{\varepsilon_0 \varepsilon} = 2 \left[\frac{400 \times 0,000969 - 100 \times 0,00352}{0,000969 \times 0,00352} \right] = 20874,38$$

$$\text{Дж/м}^3 = 0.02 \text{ МПа.}$$

Удельный резерв энергии находится по формуле $\Delta W = W_s^0 - W_s$:

$$1. \text{ ИРОРТ: } \Delta W = 400 - 102 = 298 \text{ Дж/м}^3.$$

$$2. \text{ SНОРТ и ММА: } \Delta W = 400 - 100 = 300 \text{ Дж/м}^3.$$

На рисунке 3.19 отражены результаты удельного резерва энергии для двух геликоидов. Запас удельного резерва энергии у прямого геликоида выше на 67%, чем у развертывающегося.

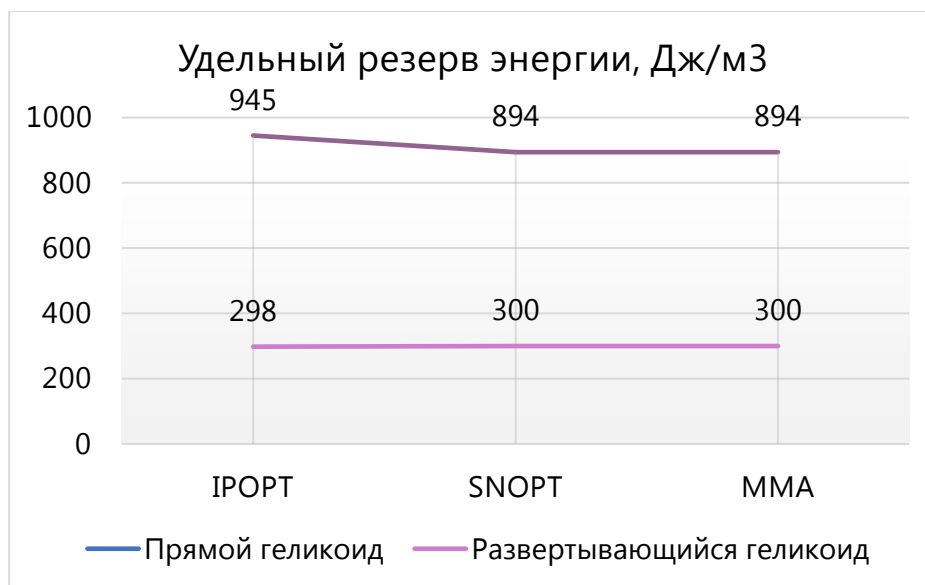


Рисунок 3.19 – Удельный резерв энергии прямого и развертывающегося геликоида

Нормальное смещение границ двух геликоидов: наибольшее смещение границы прямого геликоида наблюдается при методе IPOPT и составляет 58 %, в то время как у развёртывающегося наибольшее смещение границы происходит при использовании методов SNOPT и MMA и равняется 60% (рисунок 3.20).

Необходимо отметить распределение смещения границы у прямого геликоида, где в методе IPOPT наибольшее смещение сосредоточено в верхней части витка по наружной части, в то время как при методе SNOPT и IPOPT наибольшее значение смещения наблюдается в двух местах по внутреннему контуру геликоида. При методе IPOPT верхняя часть геликоида смещается вверх, а при использовании методов SNOPT и MMA в середине геликоида наблюдается небольшой прогиб. У развертывающегося геликоида наибольший процент смещения наблюдается по наружному контуру.

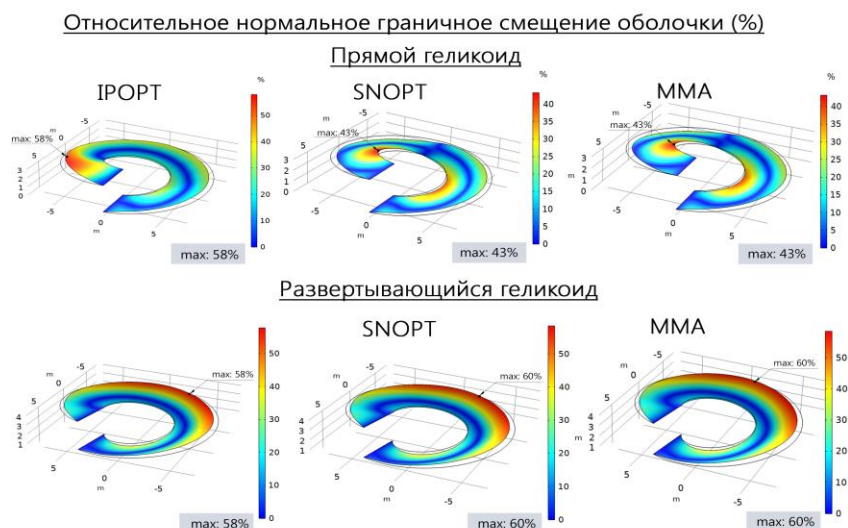


Рисунок 3.20 – Относительное нормальное граничное смещение геликоидов

Сходимость итерационного процесса: при расчете прямого геликоида метод SNOPT показывает лучшую сходимость, однако в финальных значениях наблюдается отставание от метода IPOPT на 10%. В то же время метод SNOPT значительно опережает MMA в вопросе количества итераций и общего времени итерационного процесса. Начиная с 2 итерации в методе SNOPT процесс поиска оптимума монотонно стремится вниз, в то время как в методе IPOPT и MMA заметны резкие перепады значений (рисунок 3.21).

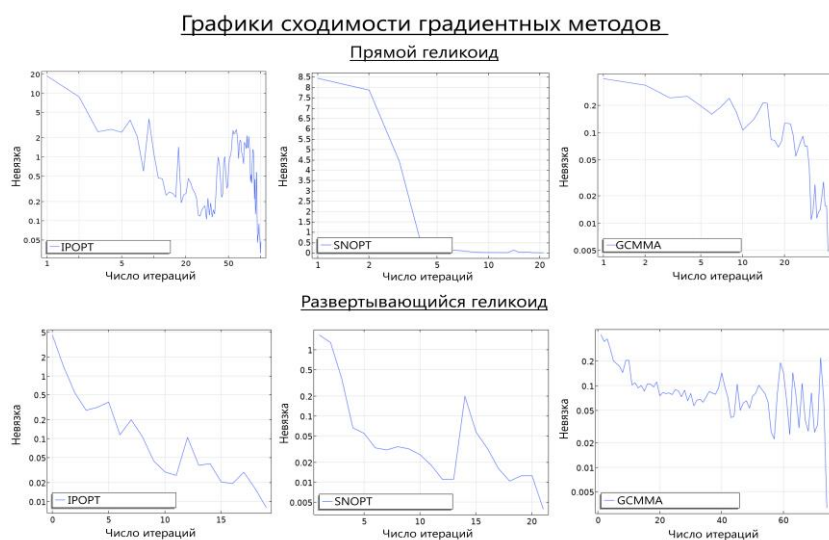


Рисунок 3.21 – Графики сходимости итерационного процесса для двух геликоидов

3.7. Выводы по третьей главе

Третья глава посвящена проведению вычислительных экспериментов в расчетном программном комплексе с использованием трёх градиентных методов: IPOPT, SNOPT и MMA.

Основная цель оптимизации в данном исследовании заключается в уменьшении потенциальной энергии, накапливаемой при упругом деформировании оболочки. На основании материала, изложенного в текущей главе, можно сделать следующие выводы:

1. Минимизация энергии упругой деформации приводит к снижению напряжений и деформаций в оболочке.

2. Оптимальная форма купола, полученная при расчете тремя градиентными методами, представляет собой форму параболического очертания, что подтверждает вывод Новожилова В.В. в работе [189] о преимуществе куполов параболического очертания среди других форм.

3. В результате проведения оптимизации форма разворачивающегося геликоида показывает более эффективное распределение напряжений по сравнению с прямым геликоидом, что делает его более выгодным с точки зрения восприятия нагрузок и может быть использовано при проектировании винтовых рамп.

4. При расчете сферического купола и разворачивающегося геликоида методом внутренней точки IPOPT был достигнут наибольший удельный резерв энергии среди других методов, что повышает прочность и жесткость конструкции. При расчете прямого геликоида наибольший удельный резерв энергии был одинаково достигнут методами SNOPT и MMA.

5. Выбор метода оптимизации играет важную роль в вычислительном процессе, поскольку от этого зависит качество и скорость выполнения поставленной задачи.

6. В процессе расчета оболочек наименьшее значение оптимизируемой функции было достигнуто методом ПРОРТ. По сходимости этот метод также можно назвать самым быстрым, поскольку в нем целевая функция выбирается из более широкого набора функций, что подтверждает вывод в статье [44] о том, что метод ПРОРТ позволяет получить более совершенные результаты, удовлетворяющие требуемым условиям оптимальности. Самая низкая скорость сходимости наблюдается у метода ММА.

ГЛАВА 4. ПОДБОР ВАРЬИРУЕМЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ ОБОЛОЧЕК ПО ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМУ КРИТЕРИЮ

4.1. Исследование влияния варьируемых параметров: радиуса фильтра и максимального перемещения на геометрию модели

Метод оптимизации формы при использовании вычислительного подхода как правило работает с помощью деформации сетки в существующей геометрии и во избежание слишком больших деформаций элементов модели, необходимо настроить специальные параметры: контрольные переменные – максимальное перемещение (d_{\max}) и фильтрацию – радиус фильтра или радиус сглаживания (R_{\min}).

Максимальное перемещение и радиус фильтра располагаются в настройках границ свободной формы, которая обязательно добавляется перед проведением оптимизационного расчёта.

Параметр максимального перемещения или максимальное нормальное смещение отвечает за управление величиной оптимизационного смещения. Значение единицы СИ для переменной в метрах. Параметр d_{\max} может быть установлен вручную пользователем либо автоматически.

По умолчанию в используемом вычислительном комплексе устанавливается значение, которое составляет 5% от ограничивающего параллелепипеда ($BBox$)² и выражает максимальные размеры объекта (рисунок 4.1).

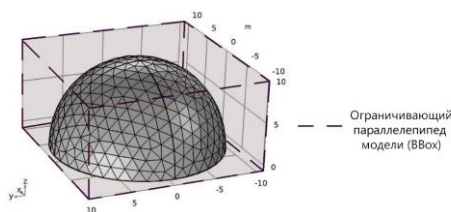


Рисунок 4.1 – Пример ограничивающего параллелепипеда для модели сферы

² Optimization Module User's Guide.

[URL:https://doc.comsol.com/5.6/doc/com.comsol.help.opt/OptimizationModuleUsers Guide.pdf](https://doc.comsol.com/5.6/doc/com.comsol.help.opt/OptimizationModuleUsers%20Guide.pdf). (дата обращения: 12.02.2024)

Процентное значение максимального перемещения по умолчанию берётся от квадратного корня суммы квадратов трёх измерений ограничивающего параллелепипеда. Таким образом, параметр максимального перемещения находится по формуле диагонали в прямоугольном параллелепипеде (рисунок 4.2):

$$d_{\max} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (4.1)$$

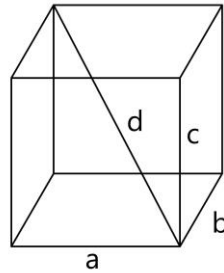


Рисунок 4.2 – Три измерения в прямоугольном параллелепипеде

Процентное соотношение находится по формуле:

$$d_{\max} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \times 0,05. \quad (4.2)$$

На это установленное значение в направлении нормали (n) элементы могут свободно перемещаться в тангенциальных направлениях- k (перпендикулярных радиусу оболочки- R). В качестве примера на рисунке 4.3. представлена сферическая поверхность с обозначением максимального нормального смещения. Сфера отклоняется на промежутке от 0 до d_{\max} , где максимальное отклонение сосредоточено в верхней точке.

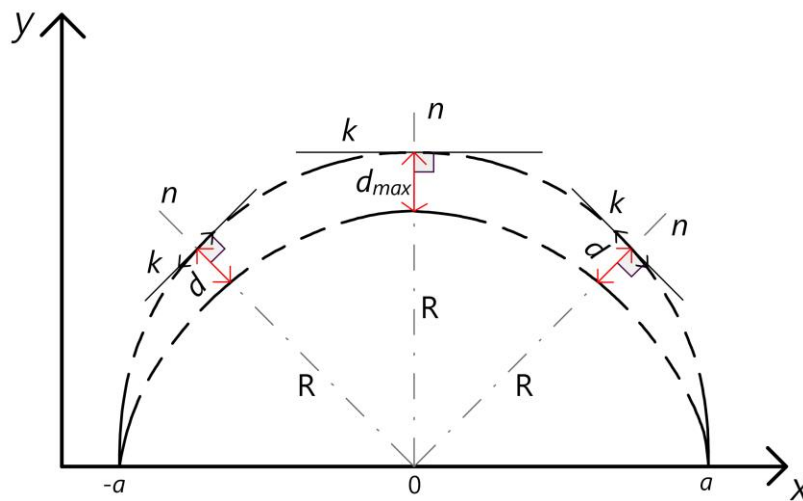


Рисунок 4.3 – Максимальное нормальное смещение d_{\max} в оболочке

Необходимо отметить, что параметр максимального перемещения зависит именно от размеров ограничивающего параллелепипеда, а не от самой формы модели.

При проведении вычислительного эксперимента значения напряжений в элементах оказывают большое влияние на процесс оптимизации. Для предотвращения образования неустойчивых конструкций из-за высоких уровней напряжения, возникающих из-за особенностей сетки, в дополнение к максимальному перемещению требуется также настроить специальный фильтр, регулирующий напряжения-радиус фильтра.

Радиус фильтра или радиус сглаживания управляет гладкостью и одновременно сохранением качества расчетной сетки в модели в ходе оптимизации сплошной формы. Основная идея фильтра заключается в использовании методов «размытия», заимствованных из обработки изображений [193]. Настройка радиуса фильтра является хорошо зарекомендовавшей себя процедурой при оптимизации топологии для уменьшения эффекта «шахматной доски» в распределении деформаций и напряжений на поверхности [194-199], а также может быть использована в процессе оптимизации формы. Методы фильтрации обсуждаются в [73, 200] а в статье [147] показано исследование влияния радиуса фильтра (варьируется в пределах от 0,0 до 6,0) на геометрию, технологичность и механические характеристики конструкции. Кроме того, в статье [195] рассматриваются стержни фермы и используется радиус фильтра (6, 3, 2.5, 2, 1.5) для различных сеток.

Радиус сглаживания измеряется от центра элемента сетки и требуется для того, чтобы разница в перемещениях соседних узлов не сильно отличалась (рисунок 4.4).

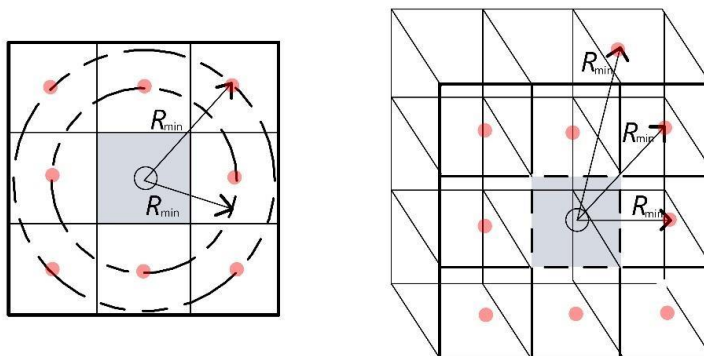


Рисунок 4.4 – Радиус фильтра для 2D и 3D-элементов

Математический принцип использования методов фильтрации основан на идее локального усреднения расчётных переменных для сглаживания распределения плотности материала в исследуемой конструкции [201].

Задание радиуса фильтра может происходить вручную пользователем либо автоматически. Значение единицы СИ для переменной задается в метрах. По умолчанию в используемой расчётной программе устанавливается значение, которое составляет 10% от ограничивающего параллелепипеда. Также можно автоматически выбрать радиус фильтра, равный 1; 1.5 или 2-кратному максимальному смещению d_{\max} . Необходимо отметить, что радиус фильтра имеет фиксированный геометрический размер, и это означает, что преобразование формы зависит от элементов, которые находятся в пределах радиуса R_{\min} рассматриваемого элемента [202].

При задании пользовательского значения радиуса фильтра нужно учитывать, что число для проведения расчёта должно быть выбрано больше размера наименьшего конечного элемента [175].

Параметр d_{\max} показывает, насколько геометрия максимально отклоняется от исходной в процессе оптимизации, а R_{\min} отвечает за значение радиуса изгиба, которое используется при расчете [203]. На рисунке 4.5 представлены результаты, которые были получены без подробных настроек двух параметров d_{\max} и R_{\min} . В иллюстрированных примерах алгоритм оптимизации решал задачу оптимизации, отличную от запланированной, и оптимизированный проект в целом отличается от

исследуемого оригинала. Более того, решение, полученное в результате процедуры оптимизации, даже не входит в группу допустимых с инженерной (практической) точки зрения решений.

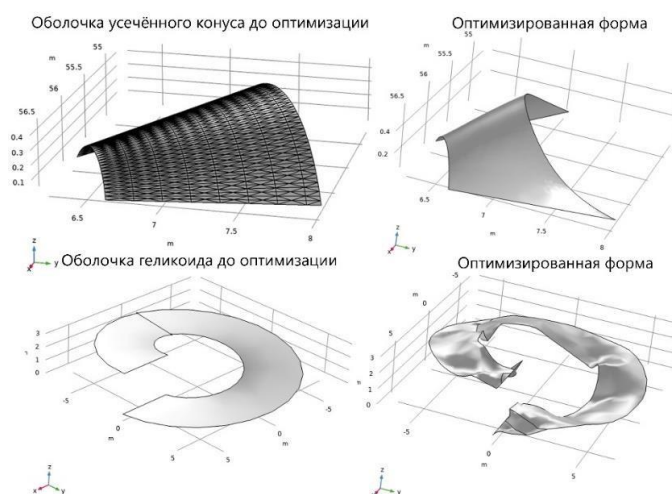


Рисунок 4.5 – Пример результатов оптимизации без настройки d_{\max} и R_{\min}

Установка значения максимального перемещения происходит совместно с радиусом фильтра. Следовательно, необходимо более подробно изучить совместное влияние максимального перемещения и радиуса фильтра на геометрию модели.

4.2. Разработка методики расчёта оптимизации формы с использованием энергетического подхода и дополнительных параметров R_{\min} и d_{\max}

Предлагаемая методика расчета основана на соединении энергетического подхода в оптимизации формы с внедрением дополнительных параметров, регулирующих изменение модели при расчёте. Такая взаимосвязь способствует увеличению ресурса сопротивления разрушению конструкции и приводит к повышению технологических характеристик (рисунок 4.6).

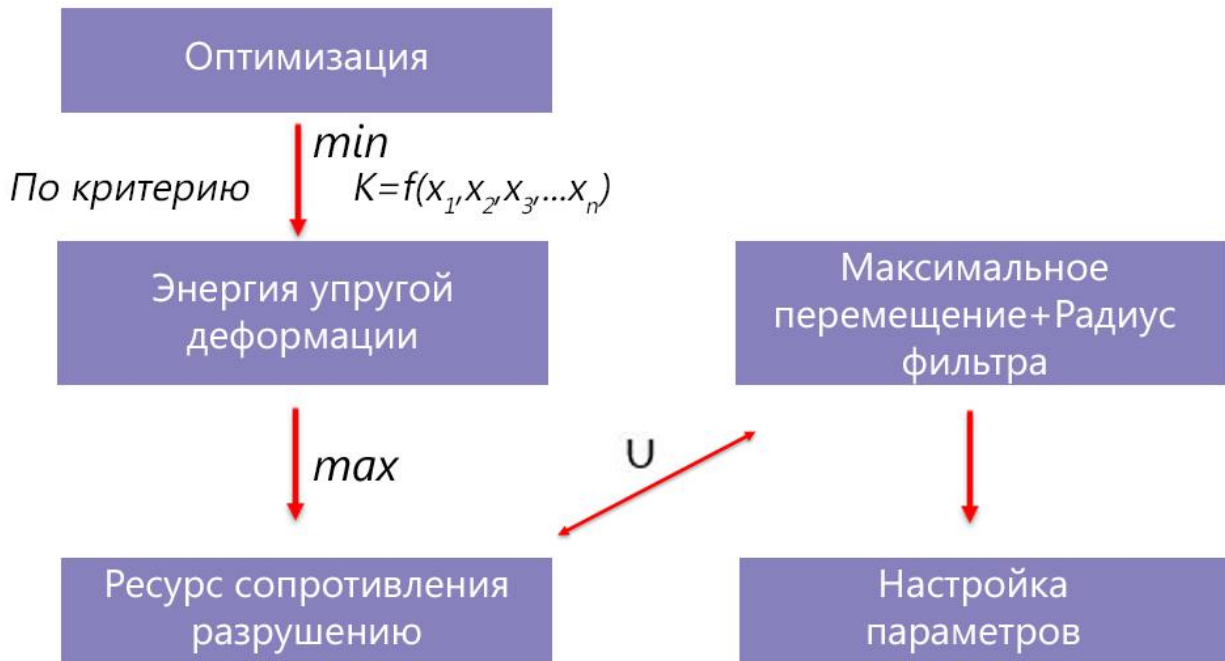


Рисунок 4.6 – Схема взаимосвязи критерия с параметрами

В общем виде взаимосвязь энергетического критерия оптимальности с варьируемыми параметрами можно представить в виде:

$$K = W \cup [d_{\max}, R_{\min}], \quad (4.3)$$

где U означает минимизацию энергии W при заданных d_{\max} и R_{\min} .

Общий предлагаемый алгоритм для оптимизации формы по критерию энергии упругой деформации градиентными методами с использованием дополнительных параметров R_{\min} и d_{\max} состоит из 11 шагов и также показан на блок-схеме в приложении 8.

Методика расчёта градиентными методами основана на следующих этапах:

1. Начало подготовительного процесса перед оптимизацией формы.
2. Выбор типа оболочки для оптимизации формы.
3. Переход в настройку границ модели. Настройка параметров d_{\max} и R_{\min} .
4. Проверка минимального размера конечного элемента. $R_{\min} > K\mathcal{E}_{\min}$.
5. Выбор метода для расчёта-IPOPT, SNOPT, MMA.

6. Определение цели оптимизации: минимизация функции $\min f(x)$.
Выбор функции: энергия упругой деформации- W .

7. Определение удельной потенциальной энергии деформирования W_s по формуле 2.29.

8. Интегрирование удельной потенциальной энергии деформирования W_s по всему объему конструкции V по формуле 2.28.

9. Установка предела невязки ε_{lim} . Запуск расчёта.

10. Если $\varepsilon_i < \varepsilon_{lim}$, то происходит остановка процесса оптимизации и оценка решения. Если $\varepsilon_i > \varepsilon_{lim}$ и решение не сходится, то происходит возврат к настройкам и повторный расчёт.

11. Постобработка результатов.

Сочетание градиентной и параметрической методик поиска оптимальной формы по энергетическому критерию приводит к следующему методу решения задачи оптимизации в множестве оболочек $\Phi(\eta)$, определяемых параметром формы η :

1. По градиентному методу вариацией сочетаний параметров d_{max} и R_{min} определяется $\min_{(d_{max}, R_{min})} W(\eta)$, отвечающий искомому параметру $\eta = \eta_0$.

2. По параметрическому подходу определяется зависимость энергии $W(\eta) = f(\eta, p, a, f, E)$ от параметра η , нагружения p и величин a, f, E .

3. Приравнявая значения энергии, выраженные соотношениями $\min_{(d_{max}, R_{min})} W(\eta)$ и $W(\eta) = f(\eta, p, a, f, E)$, составляется равенство:

$$\min_{(d_{max}, R_{min})} W(\eta) = W(\eta_0) = f(\eta, p, a, f, E). \quad (4.4)$$

4. Определяются вещественные корни уравнения:

$$f(\eta, p, a, f, E) = W(\eta_0). \quad (4.5)$$

Структура функции $W(\eta)$ влечет существование единственного вещественного корня $\eta = \eta_0$ уравнения (4.5), обеспечивающего $\min W(\eta) = W(\eta_0)$ энергии.

5. Искомая форма оптимальной оболочки вращения имеет образующую, определяемую кривой $r(z) = bz^{\eta_0}$.

4.3. Оптимизация формы сферической поверхности с установкой R_{\min} и d_{\max}

Для оценки влияния радиуса фильтра и максимального перемещения на геометрию модели рассмотрим оболочку сферического купола.

На основе прочностного расчета, проведенного в разделе 3.5. главы 3, происходит подготовительный этап оптимизации формы уже дополнительно с установкой контрольных переменных для оптимизации, куда входит настройка R_{\min} и d_{\max} . Прежде всего необходимо установить максимальное нормальное смещение d_{\max} , чтобы ограничить отклонение геометрии модели в процессе оптимизации. Далее для сглаживания вычислительной сетки в процессе расчёта устанавливается R_{\min} , который напрямую связан с размером конечного элемента. В данной задаче минимальный размер конечного элемента составляет 0,03 м. Таким образом, радиус фильтра назначается большим $R_{\min} > 0,03$ м.

С учётом принятого процентного соотношения в вычислительном комплексе и вычислительной сетки модели принимаются следующие варианты:

- значения, устанавливаемые по умолчанию вычислительной программой (5% и 10% от ВВох): $d_{\max}=2$ м; $R_{\min}=3$ м;

- 5% и 10% от высоты ВВох, равной 10 м, соответственно $d_{\max}=0.5$ м; $R_{\min}=1$ м;

- 5% и 10% от ширины и длины ВВох, равной 20 м, соответственно $d_{\max}=1$ м; $R_{\min}=2$ м.

Для полусферической оболочки радиуса R очевидно $d_{\max} < R$.

Согласно вариантам при $R=10$ м для увеличенного диапазона результатов берутся следующие промежуточные значения:

- $d_{\max}=3$ м; $R_{\min}=5$ м;
- $d_{\max}=4$ м; $R_{\min}=8$ м;
- $d_{\max}=5$ м; $R_{\min}=10$ м;
- $d_{\max}=7$ м; $R_{\min}=15$ м;
- $d_{\max}=8$ м; $R_{\min}=20$ м.

Далее проводится обновлённый оптимизационный расчёт, включающий в себя выборку из значений d_{\max} и R_{\min} . Значение предела сходимости (ε_{lim}) остаётся прежним и составляет 0.01 для всех трёх методов. Максимальное количество итераций составляет 100.

1. $d_{\max}=0.5$ м; $R_{\min}=1$ м.

Общее значение целевой функции упругой деформации было посчитано за 57 итераций (IPOPT), 48 итераций (SNOPT), 77 итераций (MMA) и оптимизированное значение составило 420 J (IPOPT); 419 J (SNOPT); 418 J (MMA). Потребовалось 96 оценок целевой функции для нахождения локального оптимума в методе IPOPT, 60 оценок в методе SNOPT и 348 при решении методом MMA. Уменьшение значения целевой функции энергии упругой деформации составляет 42% по сравнению с исходным до оптимизации.

Относительное нормальное граничное смещение оболочки составляет 126% (IPOPT); 128% (SNOPT и MMA). Высота сферического купола после оптимизации уменьшилась с 10 м до 9.5 м.

2. $d_{\max}=1$ м; $R_{\min}=2$ м.

Общее значение целевой функции упругой деформации было посчитано за 87 итераций (IPOPT), 26 итераций (SNOPT), 34 итераций (MMA) и оптимизированное значение составило 369 J (IPOPT и MMA); 370 J (SNOPT). Потребовалась 251 оценка целевой функции для нахождения локального оптимума в методе IPOPT, 39 оценок в методе SNOPT и 143 при решении методом MMA. Уменьшение значения целевой функции энергии упругой деформации составляет 50% по сравнению с исходным до оптимизации. Относительное нормальное

граничное смещение оболочки составляет 116% (IPOPT), 114% (SNOPT) и 115% (MMA). Высота сферического купола после оптимизации уменьшилась с 10 м до 9 м.

3. $d_{\max}=2$ м; $R_{\min}=3$ м.

Общее значение целевой функции упругой деформации было посчитано за 58 итераций (IPOPT), 24 итерации (SNOPT), 27 итераций (MMA). Оптимизированное значение функции составило 337 J (IPOPT); 338 J (SNOPT и MMA). Потребовалось 91 оценка целевой функции для нахождения локального оптимума в методе IPOPT, 35 оценок в методе SNOPT и 112 при решении методом MMA. Уменьшение значения целевой функции энергии упругой деформации составляет 54% по сравнению с исходным до оптимизации.

Относительное нормальное граничное смещение оболочки составляет 100% (IPOPT и MMA); 98% (SNOPT). Высота сферического купола после оптимизации уменьшилась с 10 м до 8 м.

4. $d_{\max}=3$ м; $R_{\min}=5$ м.

Общее значение целевой функции упругой деформации было посчитано за 35 итераций (IPOPT), 20 итераций (SNOPT), 15 итераций (MMA) и оптимизированное значение функции составило 328 J (IPOPT); 329 J (SNOPT и MMA). Потребовались 81 оценка целевой функции для нахождения локального оптимума в методе IPOPT, 22 оценки в методе SNOPT и 65 при решении методом MMA. Уменьшение значения целевой функции энергии упругой деформации составляет 55% по сравнению с исходным до оптимизации.

Относительное нормальное граничное смещение оболочки составляет 82% (IPOPT); 81 (SNOPT и MMA). Высота сферического купола после оптимизации уменьшилась с 10 м до 7.6 м.

4. $d_{\max}=4$ м; $R_{\min}=8$ м.

Общее значение целевой функции упругой деформации было посчитано за 15 итераций (IPOPT), 12 итераций (SNOPT), 11 итераций (MMA) и оптимизированное значение функции составило 331 J (IPOPT и MMA); 335 J (SNOPT). Потребовалось 18 оценок целевой функции для нахождения локального

оптимума в методе IPOPT, 14 оценок в методе SNOPT и 35 оценок целевой функции в методе MMA. Уменьшение значения целевой функции энергии упругой деформации составляет 54% по сравнению с исходным до оптимизации. Нормальное смещение границы оболочки вдоль нормали составляет 58% (IPOPT, SNOPT, MMA). Высота сферического купола после оптимизации уменьшилась с 10 м до 7.3 м при расчете методами IPOPT, SNOPT и MMA.

5. $d_{\max}=5$ м; $R_{\min}=10$ м.

Общее значение целевой функции упругой деформации было посчитано за 10 итераций (IPOPT), 12 итераций (SNOPT), 10 итераций (MMA) и оптимизированное значение функции составило 337 J (IPOPT); 341 J (SNOPT) и 337 J (MMA). Потребовалось 11 оценок целевой функции для нахождения локального оптимума в методе IPOPT и MMA, 20 оценок в методе SNOPT.

Уменьшение значения целевой функции энергии упругой деформации составляет 54% по сравнению с исходным до оптимизации. Относительное нормальное граничное смещение оболочки составляет 45%.

Высота сферического купола после оптимизации уменьшилась с 10 м до 7.5 м.

7. $d_{\max}=7$ м; $R_{\min}=15$ м.

Общее значение целевой функции упругой деформации было посчитано за 6 итераций (IPOPT), 12 итераций (SNOPT), 75 итераций (MMA) и оптимизированное значение функции составило 397 J (IPOPT); 398 J (SNOPT) и 393 J (MMA). Потребовалось 7 оценок целевой функции для нахождения локального оптимума в методе IPOPT, 15 оценок в методе SNOPT и 77 оценок в методе MMA. Уменьшение значения целевой функции энергии упругой деформации составляет 45% по сравнению с исходным до оптимизации.

Относительное нормальное граничное смещение оболочки составляет 25% (IPOPT, SNOPT и MMA). Высота сферического купола после оптимизации уменьшилась с 10 м до 8,3 м при расчете методами IPOPT, SNOPT и MMA.

8. $d_{\max}=8$ м; $R_{\min}=20$ м.

Общее значение целевой функции упругой деформации было посчитано за 4 итерации (IPOPT), 10 итераций (SNOPT), 45 итераций (MMA) и оптимизированное значение функции составило 491 J (IPOPT); 482 (SNOPT) и 477 J (MMA). Потребовалось 5 оценок целевой функции для нахождения локального оптимума в методе IPOPT, 12 оценок в методе SNOPT и 49 оценок в методе MMA. Уменьшение значения целевой функции энергии упругой деформации составляет 34% по сравнению с исходным до оптимизации. Относительное нормальное граничное смещение оболочки составляет 15% (IPOPT, SNOPT и MMA). Высота сферического купола после оптимизации уменьшилась с 10 м до 8.8 м при расчете методами IPOPT, SNOPT и MMA.

Общие результаты по оптимизации сферической оболочки с варьируемыми параметрами

Общее перемещение: значение общего перемещения до оптимизации составляет 0,574 мм. После оптимизации среднее значение перемещения, полученное методом IPOPT, составляет 0,334 мм; с использованием метода SNOPT значение составляет 0,342 мм; при использовании метода MMA – 0,330 мм. Значение общего перемещения уменьшено на 42%. Наименьшее значение общего перемещения получено при использовании $d_{\max} = 2$; $R_{\min} = 3$.

Главные напряжения: перед оптимизацией максимальное значение первого главного напряжения составляет 0,863 МПа. Полученные значения вторых и третьих напряжений пренебрежимо малы по сравнению с первым. Максимальное значение первого главного напряжения после оптимизации возрастает в 16 раз при $d_{\max} = 7$ м и $R_{\min} = 15$ м по сравнению с $d_{\max} = 5$ м и $R_{\min} = 10$ м. При $1 \leq d_{\max} \leq 5$ м и $2 \leq R_{\min} \leq 10$ м с установкой методов IPOPT и MMA главное напряжение уменьшается в пять раз по сравнению с первыми значениями $d_{\max} = 0,5$ м и $R_{\min} = 1$ м. При установке метода SNOPT в промежутках при $d_{\max} = 2$ м, $R_{\min} = 3$ м и $d_{\max} = 5$ м, $R_{\min} = 10$ м наблюдается повышение значения первого главного напряжения.

Удельная потенциальная энергия деформирования: значение удельной потенциальной энергии деформирования до оптимизации составляет 30 Дж/м³.

После оптимизации среднее значение удельной потенциальной энергии деформирования, полученное при расчёте методом IPOPT, составляет 14,5 Дж/м³, методом SNOPT – 14,1 Дж/м³, а методом MMA – 14,2 Дж/м³. В общем значение удельной потенциальной энергии деформирования уменьшено на 52%.

Общая энергия упругой деформации: в таблице 4.1 представлены результаты минимизации функции энергии упругой деформации для сферической оболочки с разными значениями d_{\max} и R_{\min} , полученные при расчёте тремя градиентными методами. Наибольшее уменьшение функции энергии упругой деформации было достигнуто за счёт установки $d_{\max}=3$ м; $R_{\min}=5$ м. По сравнению с исходным значением функции энергии упругой деформации, равной 727 J, оптимизированное значение составило 328 J (IPOPT); 329 J (SNOPT и MMA).

Таблица 4.1 – Результаты минимизации функции энергии упругой деформации для сферического купола

Показатели		d_{\max} и R_{\min}							
		0,5 и 1	1 и 2	2 и 3	3 и 5	4 и 8	5 и 10	7 и 15	8 и 20
W^0 (начальное), Дж		727							
IPOPT	W (после оптимизации), Дж	420	369	337	328	331	337	397	491
	Общее число оценок целевой функции	96	251	91	81	18	11	7	5
	N_{tot}	57	87	58	35	15	10	6	4
	Общее вычислительное время, с	4069	5185	3982	1927	617	1532	197	153

SNOPT	W (после оптимиза ции), Дж	419	370	338	329	335	341	398	482
	Общее число оценок целевой функции	60	39	35	22	14	14	15	12
	N_{tot}	48	26	24	20	12	12	12	10
	Общее вычислит ельное время, с	2609	3165	2708	635	571	1271	558	1706
ММА	W (после оптимиза ции), Дж	418	369	338	329	331	337	393	477
	Общее число оценок целевой функции	348	143	112	65	35	11	77	49
	N_{tot}	77	34	27	15	11	10	75	45
	Общее вычислит ельное время, с	5125	5185	3311	1610	1821	435	3510	4358

Определение разницы между прочностью σ_0 до оптимизации и прочностью σ после оптимизации для трёх методов по формуле 2.8 с учетом $l=R_{сферы}=10$ м представлено на рисунке 4.7.

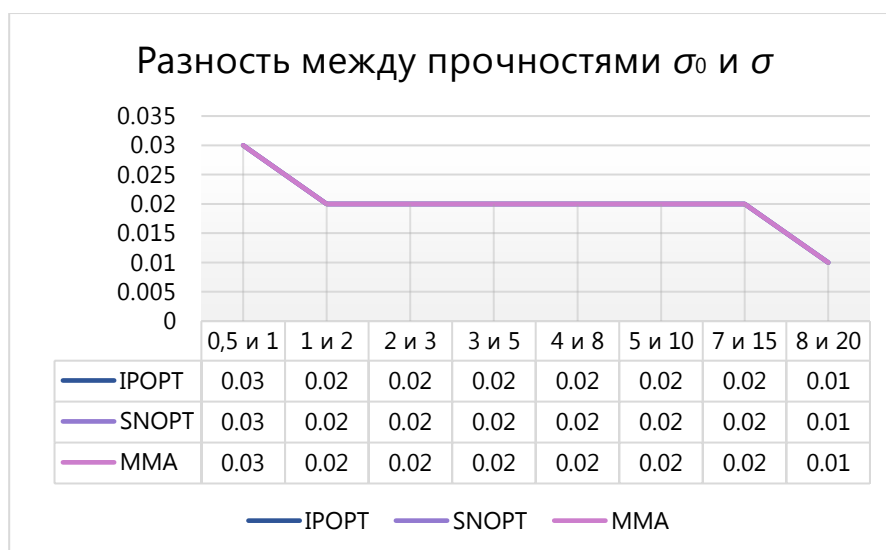


Рисунок 4.7 – Удельный резерв энергии упругой деформации при установке варьируемых параметров

Результаты по нахождению удельного резерва энергии с применением варьируемых параметров по формуле $\Delta W = W_s^0 - W_s$ представлены на рисунке 4.8.

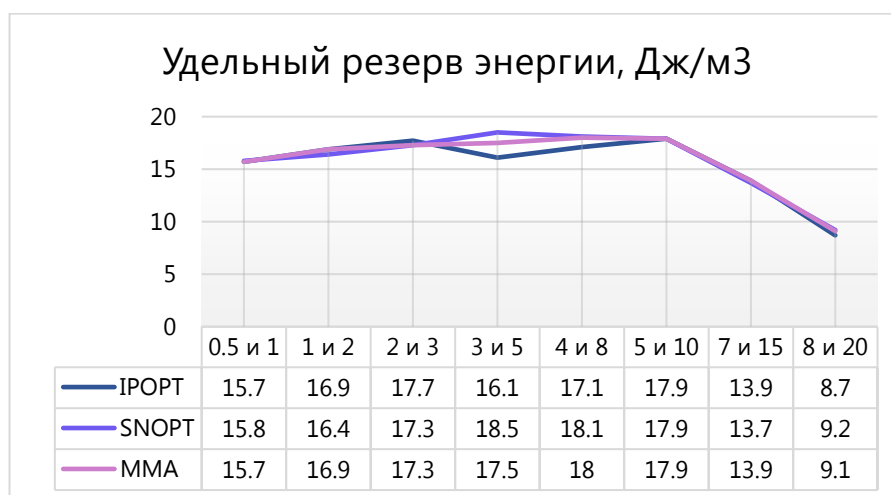


Рисунок 4.8 – Удельный резерв энергии упругой деформации при установке варьируемых параметров

Наибольший удельный резерв энергии достигается при следующих комбинациях: $d_{\max}=4$ м, $R_{\min}=8$ м и $d_{\max}=5$ м, $R_{\min}=10$ м.

Среднее значение удельного резерва энергии составляет 15,7 Дж/м³. При $d_{\max}>5$ м и $R_{\min}>10$ м удельный резерв энергии уменьшается, что ведет к уменьшению запаса прочности.

Относительное нормальное граничное смещение сферической оболочки:

В приложении 1 представлены результаты по относительному нормальному граничному смещению сферической оболочки тремя градиентными методами с установкой варьируемых параметров. Максимальное уменьшение высоты стрелы подъема купола составило 7.5 м при $d_{\max}=3$ м, $R_{\min}=5$ м. Наибольшая деформация сферической оболочки наблюдается при установке $d_{\max}=0.5$ м, $R_{\min}=1$ м; $d_{\max}=1$ м, $R_{\min}=2$ м. Начиная с $d_{\max}=5$ м, $R_{\min}=10$ м высота стрелы подъема сферического купола начинает увеличиваться.

В зависимости от выбора варьируемых параметров максимального перемещения и радиуса фильтра можно заметить следующие закономерности:

– Установка максимального перемещения d_{\max} в диапазоне от 1 до 5 м и радиуса фильтра R_{\min} в диапазоне от 2 до 10 м способствует снижению величины общего смещения на 47%. В то время как при назначении d_{\max} от 5 м и R_{\min} от 10 м наблюдается противоположный процесс: увеличение величины общего смещения, которое приближается к исходному значению, полученному в ходе прочностного расчёта (рисунок 4.9).

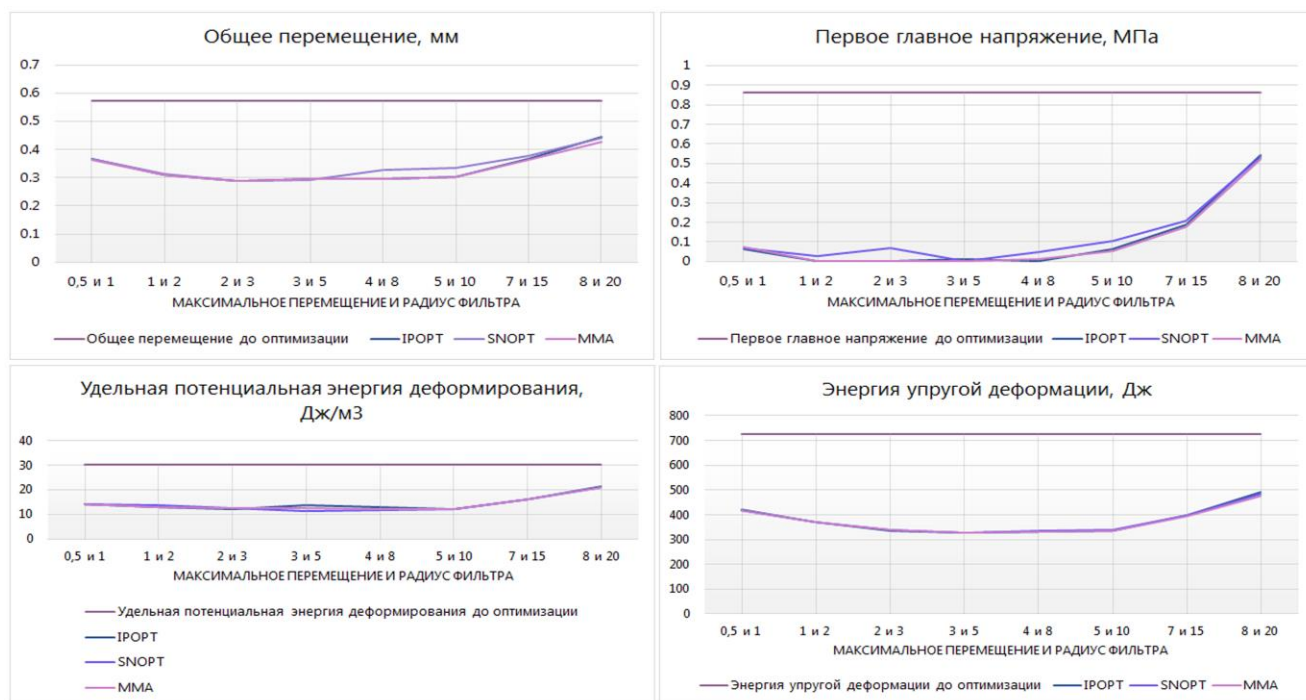


Рисунок 4.9 – Результаты оптимизации сферической оболочки с установкой варьируемых параметров d_{\max} и R_{\min}

– Максимальное значение первых напряжений возрастает в три раза при выборе значений $d_{\max} \geq 7$ м и $R_{\min} \geq 15$ м.

– С увеличением значения R_{\min} значение целевой функции также увеличивается и решателям требуется меньше итераций для получения решения с требуемой точностью, что также приводит к сокращению процессорного времени на обработку результатов. Если при установке $d_{\max} = 0,5$ м и $R_{\min} = 1$ м для нахождения оптимального решения требуется в среднем 60 итераций, то с увеличением значений варьируемых параметров количество итераций уменьшается. Самое продолжительное время расчёта можно наблюдать у метода подвижных асимптот. В приложении 3.1 и 3.2 отражен процесс сходимости для трех методов в зависимости от установки определенных значений варьируемых параметров.

4.4. Оптимизация формы геликоидных поверхностей с установкой R_{\min} и d_{\max}

В качестве ещё одного примера рассмотрим два типа геликоидов, для которых программой автоматически устанавливаются значения $d_{\max} = 1$ м и $R_{\min} = 2$ м, которые добавляются в вычислительный процесс. В данной задаче минимальный размер конечного элемента составляет 0,0214 м. Таким образом, радиус фильтра назначается большим $R_{\min} > 0,0214$ м.

С учётом принятого процентного соотношения в вычислительном комплексе и вычислительной сетки модели, принимаются следующие значения:

- 5% и 10% от высоты ВВох, равной 3 м, соответственно $d_{\max} = 0,15$ м; $R_{\min} = 0,3$ м;

- 5% и 10% от ширины и длины ВВох, которые равны 14,2 м, соответственно $d_{\max} = 0,71$ м; $R_{\min} = 1,42$ м;

- 5% и 10% от радиуса одного витка геликоида, равного 7,1 м, соответственно $d_{\max} = 0,36$ м; $R_{\min} = 0,71$ м.

Для увеличенного диапазона результатов берутся также следующие промежуточные значения:

- $d_{\max}=0,4$ м; $R_{\min}=2$ м;

- $d_{\max}=0,5$ м; $R_{\min}=4$ м;

- $d_{\max}=1$ м; $R_{\min}=8$ м;

- $d_{\max}=2$ м; $R_{\min}=10$ м.

4.4.1. Оптимизация прямого геликоида с установкой R_{\min} и d_{\max}

1. $d_{\max}=0,15$ м; $R_{\min}=0,3$ м.

Общее значение целевой функции упругой деформации было посчитано за 85 итераций (IPOPT), 27 итераций (SNOPT), 41 итерацию (MMA) и оптимизированное значение составило 297 J (IPOPT и SNOPT); 298 J (MMA). Потребовалось 237 оценок целевой функции для нахождения локального оптимума в методе IPOPT, 30 оценок в методе SNOPT и 42 при решении методом MMA. Уменьшение значения целевой функции энергии упругой деформации составляет 70% по сравнению с исходным до оптимизации. Относительное нормальное граничное смещение оболочки составляет 112% (IPOPT, SNOPT и MMA).

2. $d_{\max}=0,36$ м; $R_{\min}=0,71$ м.

Общее значение целевой функции упругой деформации было посчитано за 33 итерации (IPOPT), 24 итерации (SNOPT), 60 итераций (MMA) и оптимизированное значение функции составило 85 J (IPOPT, SNOPT и MMA). Потребовалось 36 оценок целевой функции для нахождения локального оптимума в методе IPOPT, 31 оценка в методе SNOPT и 81 при решении методом MMA. Уменьшение значения целевой функции энергии упругой деформации составляет 88% по сравнению с исходным до оптимизации.

Относительное нормальное граничное смещение оболочки составляет 100% (IPOPT); 101% (SNOPT и MMA).

3. $d_{\max}=0,71$ м; $R_{\min}=1,42$ м.

Общее значение целевой функции упругой деформации было посчитано за 23 итерации (IPOPT), 19 итераций (SNOPT), 53 итерации (MMA). Оптимизированное значение функции составило 38 J (IPOPT, SNOPT и MMA). Потребовались 24 оценки целевой функции для нахождения локального оптимума в методе IPOPT, 21 оценка в методе SNOPT и 68 при решении методом MMA. Уменьшение значения целевой функции энергии упругой деформации составляет 96% по сравнению с исходным до оптимизации.

Относительное нормальное граничное смещение оболочки составляет 78% (IPOPT, SNOPT и MMA).

4. $d_{\max}=1$ м; $R_{\min}=2$ м.

Общее значение целевой функции упругой деформации было посчитано за 37 итераций (IPOPT), 22 итерации (SNOPT), 55 итераций (MMA) и оптимизированное значение составило 38 J (IPOPT, SNOPT и MMA). Потребовалось 38 оценок целевой функции для нахождения локального оптимума в методе IPOPT, 25 оценок в методе SNOPT и 75 при решении методом MMA. Уменьшение значения целевой функции энергии упругой деформации составляет 96% по сравнению с исходным до оптимизации.

Относительное нормальное граничное смещение оболочки составляет 56% (IPOPT, SNOPT, MMA).

5. $d_{\max}=0,4$ м; $R_{\min}=2$ м.

Общее значение целевой функции упругой деформации было посчитано за 36 итераций (IPOPT), 17 итераций (SNOPT), 37 итераций (MMA) и оптимизированное значение функции составило 272 J (IPOPT, SNOPT и MMA). Потребовалась 41 оценка целевой функции для нахождения локального оптимума в методе IPOPT, 21 оценка в методе SNOPT и 44 оценки в методе MMA.

Уменьшение значения целевой функции энергии упругой деформации составляет 74% по сравнению с исходным до оптимизации. Относительное нормальное граничное смещение оболочки составляет 61%.

6. $d_{\max}=0,5$ м; $R_{\min}=4$ м.

Общее значение целевой функции упругой деформации было посчитано за 79 итераций (IPOPT), 42 итераций (SNOPT), 64 итерации (MMA) и оптимизированное значение функции составило 551 J (IPOPT, SNOPT и MMA). Потребовалось 88 оценок целевой функции для нахождения локального оптимума в методе IPOPT, 53 и 68 оценок целевой функции в методах SNOPT и MMA соответственно. Уменьшение значения целевой функции энергии упругой деформации составляет 48% по сравнению с исходным до оптимизации. Нормальное смещение границы оболочки вдоль нормали составляет 60% (IPOPT) и 63% (SNOPT, MMA).

7. $d_{\max}=1$ м; $R_{\min}=8$ м.

Общее значение целевой функции упругой деформации было посчитано за 13 итераций (IPOPT), 11 итераций (SNOPT), 19 итераций (MMA) и оптимизированное значение функции составило 675 J (IPOPT) и 676 J (SNOPT и MMA). Потребовалось 14 оценок целевой функции для нахождения локального оптимума в методе IPOPT, 13 оценок в методе SNOPT и 21 оценка целевой функции в методе MMA. Уменьшение значения целевой функции энергии упругой деформации составляет 36% по сравнению с исходным до оптимизации.

Относительное нормальное граничное смещение оболочки составляет 34% (IPOPT, SNOPT и MMA).

8. $d_{\max}=2$ м; $R_{\min}=10$ м.

Общее значение целевой функции упругой деформации было посчитано за 20 итераций (IPOPT), 12 итераций (SNOPT), 30 итераций (MMA) и оптимизированное значение функции составило 536 J (IPOPT, SNOPT и MMA). Потребовалось 21 оценок целевой функции для нахождения локального оптимума в методе IPOPT, 14 оценок в методе SNOPT и 35 оценок целевой функции в методе MMA. Уменьшение значения целевой функции энергии упругой деформации составляет 49% по сравнению с исходным до оптимизации. Относительное нормальное граничное смещение оболочки составляет 25% (IPOPT, SNOPT и MMA).

Общие результаты по оптимизации прямого геликоида с варьируемыми параметрами

Общее перемещение: общее значение перемещения до оптимизации составляет 8,36 мм. После оптимизации среднее значение перемещения, полученное методом IPOPT и SNOPT, составляет 2,85 мм и 2,98 мм соответственно; при установке метода MMA значение составляет 2,95 мм. Значение общего перемещения уменьшено на 65%. Наименьшее значение общего перемещения получено при использовании $d_{\max} = 1$; $R_{\min}=2$.

Главные напряжения: максимальное значение первого главного напряжения до оптимизации составляет 1, 3 МПа. Наименьшее значение общего перемещения получено при использовании $d_{\max} = 1$; $R_{\min}=2$, а наибольшее значение получено при установке $d_{\max} = 0,15$; $R_{\min}=0,3$.

Удельная потенциальная энергия деформирования: значение удельной потенциальной энергии деформирования до оптимизации составляет 1137 Дж/м³. После оптимизации среднее значение удельной потенциальной энергии деформирования, полученное при расчёте методом IPOPT, составляет 313 Дж/м³, а методом SNOPT и MMA – 312 Дж/м³. В общем значение удельной потенциальной энергии деформирования уменьшено на 73%.

Общая энергия упругой деформации: в таблице 4.2 представлены результаты минимизации функции энергии упругой деформации для геликоида с разными значениями d_{\max} и R_{\min} , полученные при расчёте тремя градиентными методами. Наибольшее уменьшение функции энергии упругой деформации было достигнуто за счёт установки значений по умолчанию $d_{\max}=1$ м; $R_{\min}=2$ м, однако при этом конечный результат оптимизации не входит в группу допустимых решений. По сравнению с исходным значением функции энергии упругой деформации, равной 1137 J, оптимизированное значение составило 38 J (IPOPT, SNOPT и MMA). Наиболее приемлемый результат по конструктивным параметрам удалось достичь при установке $d_{\max}=0,5$ и $R_{\min}=6$; $d_{\max}=1$ и $R_{\min}=5$. При этом

оптимизированное значение функции энергии упругой деформации составило 762 Дж и 395 Дж соответственно.

В Приложениях 5.1. и 5.2. представлены результаты по сходимости итерационного процесса для каждого из трех методов.

Таблица 4.2 – Результаты минимизации функции энергии упругой деформации для прямого геликоида

Показатели		d_{\max} и R_{\min}							
		0,15 и 0,3	0,36 и 0,71	0,71 и 1,42	1 и 2	0,4 и 2	0,5 и 4	1 и 8	2 и 10
W^0 (начальное), Дж		1137							
IPOPT	W (после оптимиза ции), Дж	297	85	39	38	273	551	676	536
	Общее число оценок целевой функции	334	36	24	38	41	88	14	21
	N_{tot}	89	33	23	37	36	79	13	20
	Общее вычислит ельное время, с	284	567	355	190	182	482	74	92
SNOPT	W (после оптимиза ции), Дж	297	84	38	38	272	551	675	536
	Общее число оценок целевой функции	42	31	21	25	21	53	13	21
	N_{tot}	41	24	19	22	17	42	11	12

	Общее вычислительное время, с	261	566	292	129	97	614	71	92
ММА	W (после оптимизации), Дж	298	84	38	38	272	551	675	536
	Общее число оценок целевой функции	42	81	68	75	44	68	21	35
	N_{tot}	41	60	53	55	37	64	19	30
	Общее вычислительное время, с	205	771	428	324	215	685	104	527

Результаты по нахождению удельного резерва энергии с применением варьируемых параметров по формуле $\Delta W = W_s^0 - W_s$ представлены на рисунке 4.10.

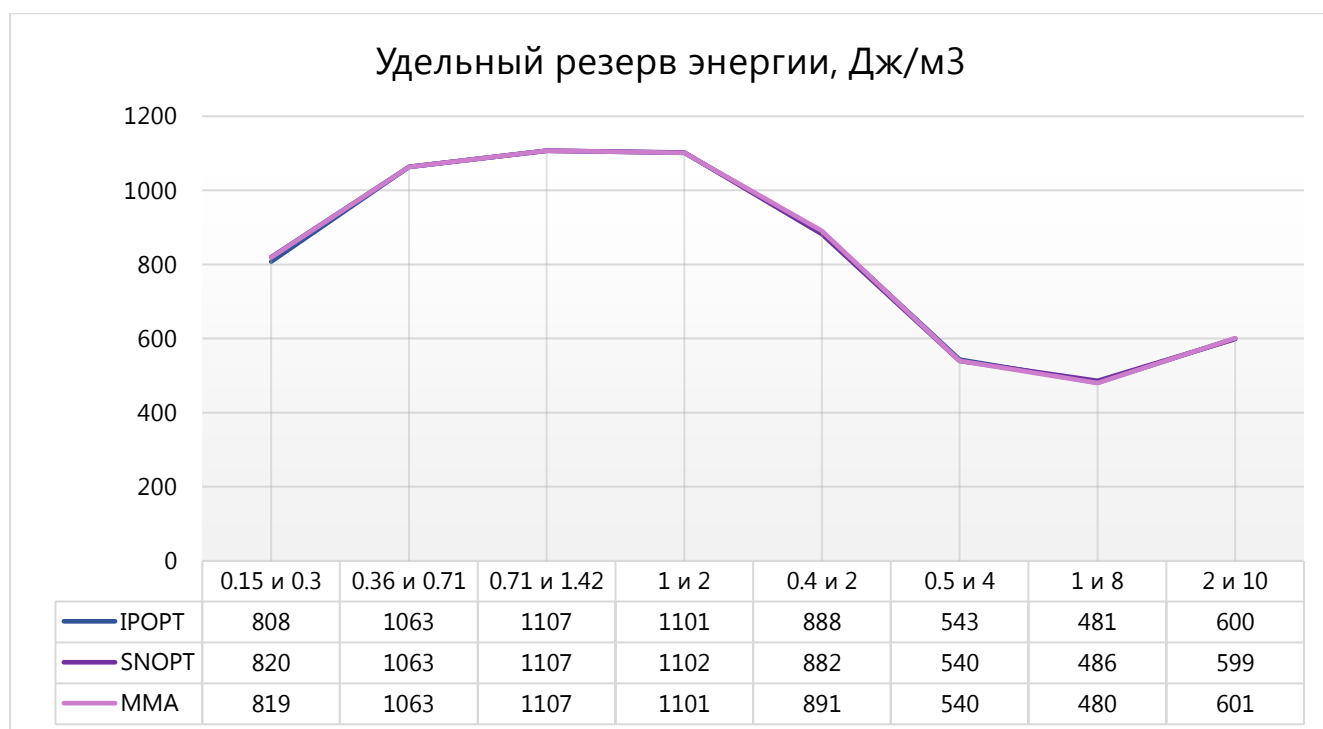


Рисунок 4.10 – Удельный резерв энергии прямого геликоида с установкой варьируемых параметров d_{max} и R_{min}

Относительное нормальное граничное смещение прямого геликоида: в приложении 4 представлены результаты по относительному нормальному граничному смещению прямого геликоида тремя градиентными методами с установкой варьируемых параметров. Наибольший процент нормального смещения границы в оболочках можно наблюдать при $d_{\max}=0,15$ м, $R_{\min}=0,3$ м и $d_{\max}=0,36$ м, $R_{\min}=0,71$ м. Форма геликоида становится бугристой. Такая же ситуация складывается при $d_{\max}=0,71$ м, $R_{\min}=1,42$ м и $d_{\max}=1$ м, $R_{\min}=2$ м, где оболочка прямого геликоида начинает сильно деформироваться. При $d_{\max}=0,5$ м, $R_{\min}=4$ м и $d_{\max}=1$ м, $R_{\min}=8$ м геликоид изменяет форму в допустимых пределах, структура не деформируется, а сетка получается более гладкой и без неровностей. При установке вышеперечисленных значений параметров верхняя часть прямого геликоида приподнимается и не прогибается вниз, как при установке $d_{\max}=2$ м, $R_{\min}=10$ м.

На рисунке 4.11 представлены общие результаты оптимизации прямого геликоида с установкой варьируемых параметров d_{\max} и R_{\min} .



Рисунок 4.11 – Результаты оптимизации прямого геликоида с установкой варьируемых параметров d_{\max} и R_{\min}

4.4.2. Оптимизация развертывающегося геликоида с установкой R_{\min} и d_{\max}

1. $d_{\max}=0,15$ м; $R_{\min}=0,3$ м.

Общее значение целевой функции упругой деформации было посчитано за 34 итерации (IPOPT), 24 итерации (SNOPT), 100 итераций (MMA) и оптимизированное значение составило 125 J (IPOPT) и 122 J (SNOPT и MMA). Потребовалось 37 оценок целевой функции для нахождения локального оптимума в методе IPOPT, 33 оценки в методе SNOPT и 120 оценок при решении методом MMA. Уменьшение значения целевой функции энергии упругой деформации составляет 71% по сравнению с исходным до оптимизации. Относительное нормальное граничное смещение оболочки составляет 117% (IPOPT) и 119 (SNOPT, MMA).

2. $d_{\max}=0,36$ м; $R_{\min}=0,71$ м.

Общее значение целевой функции упругой деформации было посчитано за 36 итераций (IPOPT), 20 итераций (SNOPT), 100 итераций (MMA) и оптимизированное значение функции составило 45 J (IPOPT), 44 J (SNOPT) и 43 J (MMA). Потребовалось 39 оценок целевой функции для нахождения локального оптимума в методе IPOPT, 22 оценки в методе SNOPT и 110 при решении методом MMA. Уменьшение значения целевой функции энергии упругой деформации составляет 90% по сравнению с исходным до оптимизации.

Относительное нормальное граничное смещение оболочки составляет 114% (IPOPT), 116% (SNOPT и MMA).

3. $d_{\max}=0,71$ м; $R_{\min}=1,42$ м.

Общее значение целевой функции упругой деформации было посчитано за 37 итераций (IPOPT), 20 итераций (SNOPT), 100 итерации (MMA). Оптимизированное значение функции составило 24 J (IPOPT), 23 J (SNOPT) и 22 J (MMA). Потребовалось 38 оценок целевой функции для нахождения локального оптимума в методе IPOPT, 22 оценки в методе SNOPT и 115 при решении методом

ММА. Уменьшение значения целевой функции энергии упругой деформации составляет 95% по сравнению с исходным до оптимизации.

Относительное нормальное граничное смещение оболочки составляет 94% (IPOPT), 97% (SNOPT) и 96% (MMA).

4. $d_{\max}=1$ м; $R_{\min}=2$ м.

Общее значение целевой функции упругой деформации было посчитано за 21 итерацию (IPOPT и SNOPT), 69 итераций (MMA) и оптимизированное значение составило 22 J (IPOPT) и 21 J (SNOPT и MMA). Потребовались 22 оценки целевой функции для нахождения локального оптимума в методе IPOPT, 23 оценки в методе SNOPT и 106 при решении методом MMA. Уменьшение значения целевой функции энергии упругой деформации составляет 95% по сравнению с исходным до оптимизации.

Относительное нормальное граничное смещение оболочки составляет 77% (IPOPT), 80% (SNOPT) и 78% (MMA).

5. $d_{\max}=0,4$ м; $R_{\min}=2$ м.

Общее значение целевой функции упругой деформации было посчитано за 18 итераций (IPOPT и SNOPT), 87 итераций (MMA) и оптимизированное значение функции составило 107 J (IPOPT) и 104 J (SNOPT и MMA). Потребовалось 19 оценок целевой функции для нахождения локального оптимума в методе IPOPT, 23 оценки в методе SNOPT и 103 оценки в методе MMA.

Уменьшение значения целевой функции энергии упругой деформации составляет 75% по сравнению с исходным до оптимизации. Относительное нормальное граничное смещение оболочки составляет 80% (IPOPT, SNOPT и MMA).

6. $d_{\max}=0,5$ м; $R_{\min}=4$ м.

Общее значение целевой функции упругой деформации было посчитано за 10 итераций (IPOPT), 8 итераций (SNOPT) и 65 итераций (MMA). Оптимизированное значение функции составило 207 J (IPOPT), 218 (SNOPT), 206 (MMA). Потребовалось 11 оценок целевой функции для нахождения локального

оптимума в методе IPOPT, 10 оценок в методе SNOPT и 72 оценки в методе MMA. Уменьшение значения целевой функции энергии упругой деформации составляет 52% по сравнению с исходным до оптимизации. Относительное нормальное граничное смещение оболочки составляет 42% (IPOPT и MMA), 39% (SNOPT).

7. $d_{\max}=1$ м; $R_{\min}=8$ м.

Общее значение целевой функции упругой деформации было посчитано за 9 итераций (IPOPT), 7 итераций (SNOPT), 26 итераций (MMA) и оптимизированное значение функции составило 269 J (IPOPT), 275 J (SNOPT) и 267 J (MMA). Потребовалось 10 оценок целевой функции для нахождения локального оптимума в методе IPOPT, 9 оценок в методе SNOPT и 41 оценка в методе MMA. Уменьшение значения целевой функции энергии упругой деформации составляет 38% по сравнению с исходным до оптимизации.

Относительное нормальное граничное смещение оболочки составляет 20% (IPOPT), 19% (SNOPT) и 20% (MMA).

8. $d_{\max}=2$ м; $R_{\min}=10$ м.

Общее значение целевой функции упругой деформации было посчитано за 12 итераций (IPOPT), 9 итераций (SNOPT), 75 итераций (MMA) и оптимизированное значение функции составило 223 J (IPOPT), 230 J (SNOPT) и 222 J (MMA). Потребовалось 13 оценок целевой функции для нахождения локального оптимума в методе IPOPT, 11 оценок в методе SNOPT и 89 оценок в методе MMA. Уменьшение значения целевой функции энергии упругой деформации составляет 48% по сравнению с исходным до оптимизации. Относительное нормальное граничное смещение оболочки составляет 28% (IPOPT) 24% (SNOPT) и 33% (MMA).

Общие результаты по оптимизации разворачивающегося геликоида с варьируемыми параметрами

Общее перемещение: общее значение перемещения до оптимизации составляет 3,52 мм. После оптимизации среднее значение перемещения, полученное методом IPOPT составляет 1,18 мм; при установке метода SNOPT 1,2 мм и при установке метода MMA значение составляет 1,17 мм. Значение общего

перемещения уменьшено на 48%. Наименьшее значение общего перемещения получено при использовании $d_{\max} = 1$; $R_{\min}=2$.

Главные напряжения: максимальное значение первого главного напряжения до оптимизации составляет 1, 32 МПа. Наименьшее значение главного напряжения получено при установке $d_{\max} = 0,71$ м; $R_{\min}=1,42$ м и $d_{\max} = 1$; $R_{\min}=2$.

Удельная потенциальная энергия деформирования: значение удельной потенциальной энергии деформирования до оптимизации составляет 400 Дж/м³. После оптимизации среднее значение удельной потенциальной энергии деформирования, полученное при расчёте методом IPOPT, составляет 150 Дж/м³, методом SNOPT – 153 Дж/м³ и MMA – 147 Дж/м³. В общем значение удельной потенциальной энергии деформирования уменьшено на 63%.

Общая энергия упругой деформации: в таблице 4.3 представлены результаты минимизации функции энергии упругой деформации для геликоида с разными значениями d_{\max} и R_{\min} , полученные при расчёте тремя градиентными методами. Наибольшее уменьшение функции энергии упругой деформации было достигнуто за счёт установки значений по умолчанию $d_{\max}=1$ м; $R_{\min}=2$ м, однако результат оптимизации выходит за пределы допустимой формы. То же самое касается результатов с установкой следующих значений: $d_{\max}=0,15$ м и $R_{\min}=0,3$ м; $d_{\max}=0,71$ м и $R_{\min}=1,42$ м; $d_{\max}=0,36$ м и $R_{\min}=0,71$ м. По сравнению с исходным значением функции энергии упругой деформации, равной 436 Дж, оптимизированное значение уменьшается до 95%. Наиболее удовлетворительный результат получается при установке $d_{\max}=1$ м; $R_{\min}=5$ м, при котором среднее значение функции энергии упругой деформации составляет 161 Дж.

Результаты сходимости итерационного процесса представлены в Приложениях 7.1. и 7.2.

Таблица 4.3 – Результаты минимизации функции энергии упругой деформации для развертывающегося геликоида

Показатели		d_{\max} и R_{\min}							
		0,15 и 0,3	0,36 и 0,71	0,71 и 1,42	1 и 2	0,4 и 2	0,5 и 4	1 и 8	2 и 10
W^0 (начальное), Дж		436							
IРОРТ	W (после оптимиза ции), Дж	125	45	24	22	107	207	269	223
	Общее число оценок целевой функции	37	39	38	22	19	11	10	13
	N_{tot}	34	36	37	21	18	10	9	12
	Общее вычислит ельное время, с	1588	1456	1352	335	205	135	269	347
SНОРТ	W (после оптимиза ции), Дж	122	44	23	21	102	218	275	230
	Общее число оценок целевой функции	33	22	22	23	23	10	9	11
	N_{tot}	24	20	20	21	18	72	7	9
	Общее вычислит ельное время, с	1363	1235	1216	422	259	130	417	243
	W	122	43	22	21	104	206	267	222

ММА	(после оптимизации), Дж								
	Общее число оценок целевой функции	120	110	115	106	103	72	41	89
	N_{tot}	100	100	100	69	87	65	26	75
	Общее вычислительное время, с	3303	2435	2776	1989	1239	830	617	816

Результаты по нахождению удельного резерва энергии с применением варьируемых параметров по формуле $\Delta W = W_s^0 - W_s$ представлены на рисунке 4.12.

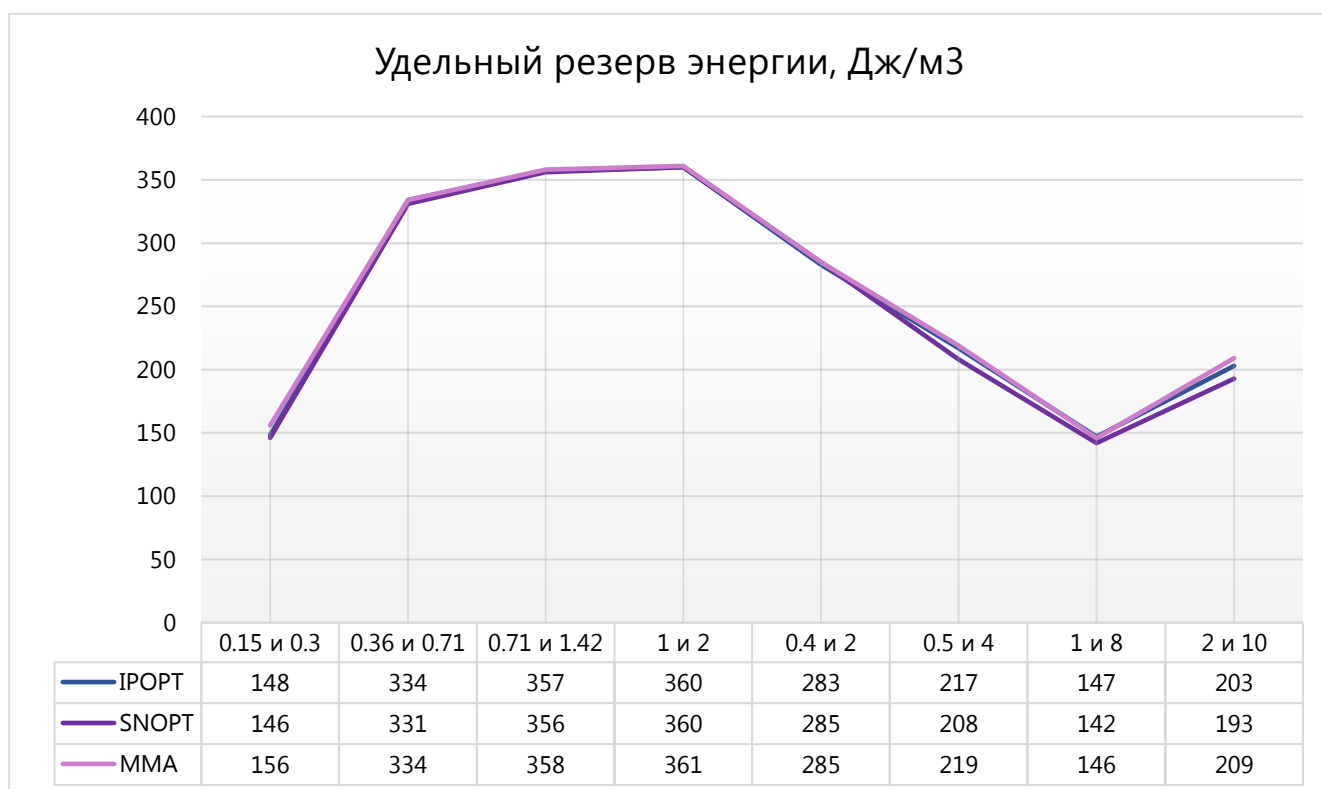


Рисунок 4.12 - Удельный резерв энергии упругой деформации при установке варьируемых параметров

Наибольший удельный резерв энергии наблюдается при $d_{max}=1$ м, $R_{min}=2$ м. Среднее значение составляет 360 Дж/м³.

Относительное нормальное граничное смещение разворачивающегося геликоида: в приложении 6 представлены результаты по относительному нормальному граничному смещению разворачивающегося геликоида тремя градиентными методами с установкой варьируемых параметров. При $d_{\max}=0,15$ м и $R_{\min}=0,3$ м; $d_{\max}=0,36$ м и $R_{\min}=0,71$ м; $d_{\max}=0,71$ м и $R_{\min}=1,42$ м, а также при значениях по умолчанию $d_{\max}=1$ м и $R_{\min}=2$ м оболочка сильно деформируется с появлением неровностей, соответственно полученный вариант конструкции менее стабилен по сравнению с исходным вариантом.

При $d_{\max}=0,4$ м и $R_{\min}=2$ м распределение деформаций в оболочке более плавное, уменьшается изгиб витка геликоида. С установкой $d_{\max}=0,5$ м и $R_{\min}=4$ м; $d_{\max}=1$ м и $R_{\min}=8$ м расчётная сетка становится сглаженной, отсутствуют неровности. Однако при установке $d_{\max}=2$ м и $R_{\min}=10$ м форма геликоида сильно отклоняется от первоначальной, в конструкции наблюдается большой прогиб.

Результаты оптимизации разворачивающегося геликоида представлены на рисунке 4.13.



Рисунок 4.13 – Результаты оптимизации разворачивающегося геликоида с установкой варьируемых параметров d_{\max} и R_{\min}

4.5. Определение оптимальных параметров максимального перемещения и радиуса фильтра для оболочек

Для двух поверхностей: поверхность постоянной гауссовой кривизны – сфера и линейчатая винтовая поверхность – геликоид предлагается уточнение значений максимального перемещения d_{\max} и радиуса фильтра R_{\min} для использования в исследовательских целях при проведении оптимизации формы. Необходимо отметить, что установка значений двух параметров должна производиться совместно друг с другом.

4.5.1. Сферическая поверхность

При следующих значениях максимального перемещения $d_{\max}=0.5$ м и $d_{\max}=1$ м в оболочке наибольшее смещение происходит по боковым граням. Высота изменяется незначительно: с 10 до 9 м (максимальное смещение при $d_{\max}=1$ м, $R_{\min}=2$). Начиная с значений, установленных по умолчанию $d_{\max}=2$ м, $R_{\min}=3$ м, происходит уменьшение смещения по бокам (на 70%) и наибольшее изменение формы наблюдается в верхней части. Высота оболочки уменьшается на 2 м и составляет 8 м. Далее максимальное значение уменьшения высоты доходит до 7.5 м при $d_{\max}=3$ м, $R_{\min}=5$ м. Начиная с $d_{\max}=5$ м, $R_{\min}=10$ м относительное смещение оболочки вдоль нормали в верхней части уменьшается и постепенно возвращается к исходному варианту до оптимизации (рисунок 4.14).

Необходимо отметить, что при $d_{\max}=1$ м, $R_{\min}=2$; $d_{\max}=2$ м, $R_{\min}=3$; $d_{\max}=3$ м, $R_{\min}=5$ форма сферической поверхности стремится к параболическому типу, что отмечено в разделе 3.5 главы 3.

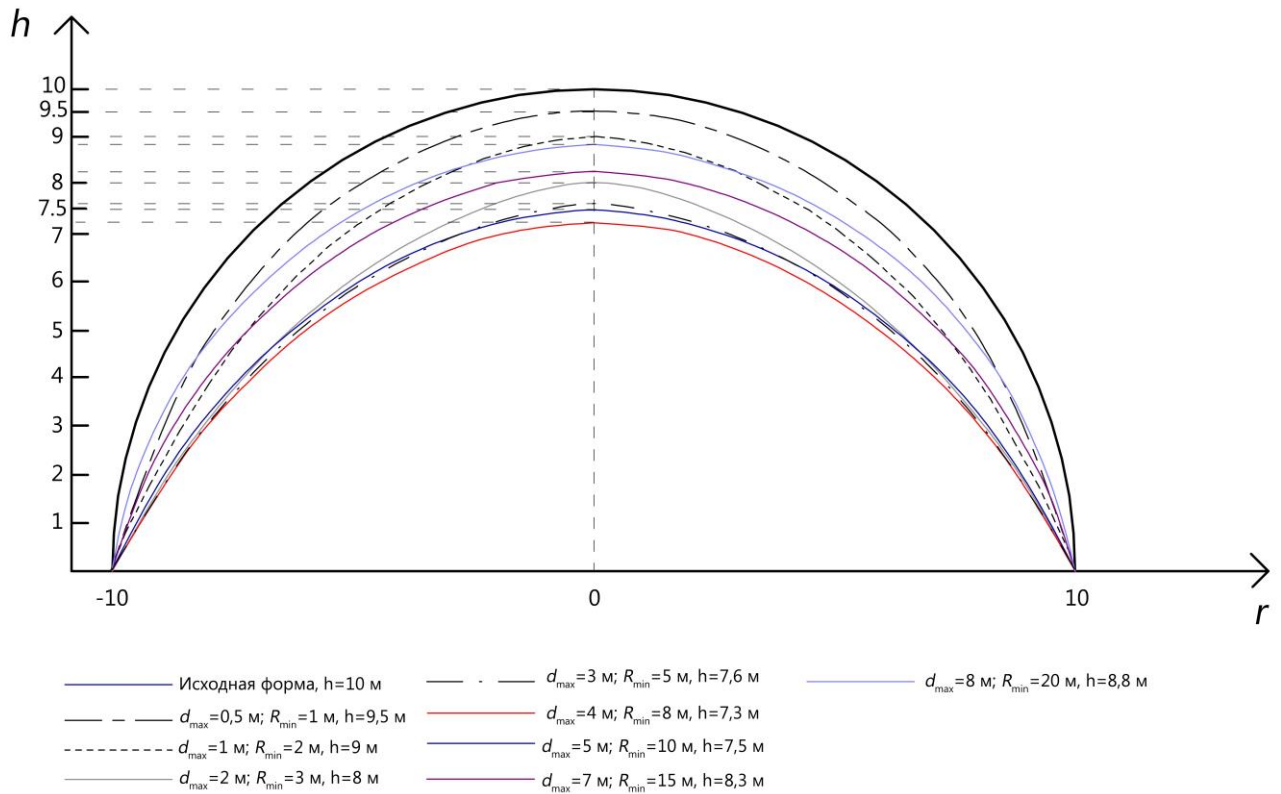


Рисунок 4.14 – Относительное нормальное граничное смещение оболочки в зависимости от выбора варьируемых параметров

При $R_{\min}=1$ м; 2 м наблюдается высокий уровень напряжений по всей конструкции, сильная деформация сетки и, в связи с этим неровности на модели. При $R_{\min}=3$ м (значение по умолчанию) ещё заметны волнообразные участки в боковых частях модели. Только начиная с $R_{\min}=5$ м наблюдается полное сглаживание сетки и более равномерное распределение напряжений по конструкции (рисунок 4.15).

Таким образом, наиболее оптимальный вариант формы оптимизируемой конструкции можно получить при задании значений:

1. Максимальное перемещение d_{\max} в пределах от 3 до 5 м, что составляет 10-15% от ограничивающего параллелепипеда ВВох.
2. Радиус фильтра R_{\min} в пределах от 5 до 10 м, что составляет 20-35% от ограничивающего параллелепипеда ВВох.

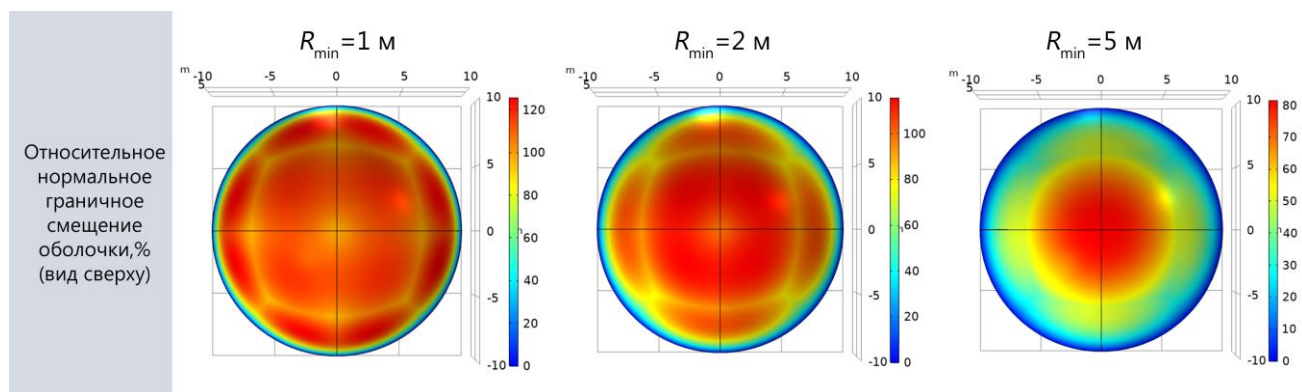


Рисунок 4.15 – Относительное нормальное граничное смещение оболочки в зависимости от выбора радиуса фильтра

4.5.2. Взаимосвязь стрелы подъема и максимального перемещения в сферической оболочке

Для проверки результатов рассчитаем радиус оболочки после оптимизации для каждого из выбранных значений и определим высоту стрелы подъема f .

Исходные данные: d_{\max} в рекомендуемых пределах от 3 до 5 м; $R_0 = l$. Необходимо определить радиус оболочки после оптимизации – R_* (рисунок 4.16).

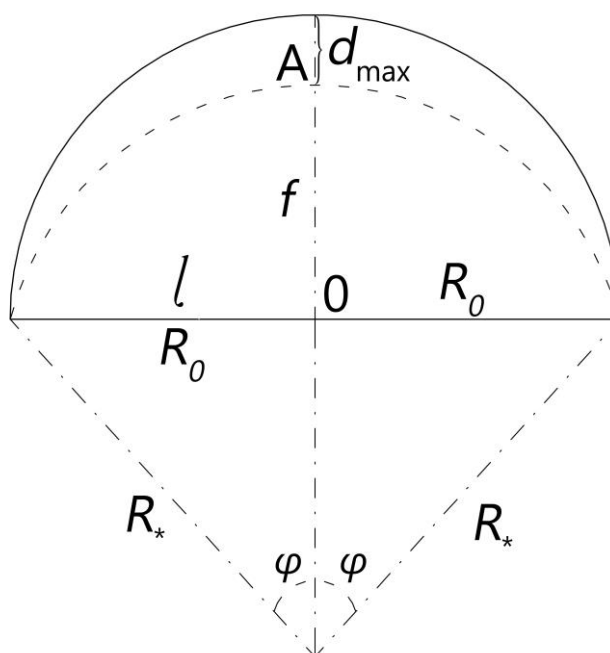


Рисунок 4.16 – Определение R_* в сферической оболочке

Определение высоты стрелы подъема после оптимизации определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} f &= R_0 - d_{\max}, \\ f &= O_1A - OO_1 = R_* - R_* \cos \varphi, \\ l &= R_* \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4.6)$$

С учетом (4.6) составляем систему:

$$\begin{cases} f = R_* - R_* \cos \varphi, \\ l = R_* \sin \varphi. \end{cases} \quad (4.7)$$

При $f=R_0 - d_{\max}$ и $l=R_0$ получим:

$$\begin{cases} R_0 - d_{\max} = R_* - R_* \cos \varphi, \\ R_0 = R_* \sin \varphi. \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\begin{cases} R_* \cos \varphi = R_* - R_0 + d_{\max}, \\ R_* \sin \varphi = R_0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} \varphi = \frac{R_* - R_0 + d_{\max}}{R_0}, \\ R_* = \frac{R_0}{\sin \varphi}. \end{cases}$$

Поскольку $\frac{1}{\sin \varphi} = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi}$, то:

$$\frac{1}{\sin \varphi} = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi} = \sqrt{1 + \frac{(R_* - R_0 + d_{\max})^2}{R_0^2}}. \quad (4.9)$$

Из выражения $R_* \sin \varphi = R_0$ выразим R_* :

$$R_* = R_0 \sqrt{1 + \frac{(R_* - R_0 + d_{\max})^2}{R_0^2}} = \sqrt{R_0^2 + (R_* - R_0 + d_{\max})^2},$$

$$R_*^2 = R_0^2 + R_*^2 + R_0^2 + d_{\max}^2 - 2R_*R_0 + 2R_*d_{\max} - 2R_0d_{\max},$$

$$2R_0^2 + d_{\max}^2 - 2R_*R_0 + 2R_*d_{\max} - 2R_0d_{\max} = 0,$$

$$2R_*(R_0 - d_{\max}) = 2R_0(R_0 + d_{\max}) + d_{\max}^2,$$

$$R_* = \frac{2R_0(R_0 - d_{\max}) + d_{\max}^2}{2(R_0 - d_{\max})} = R_0 + \frac{d_{\max}^2}{2(R_0 - d_{\max})}. \quad (4.10)$$

Находим высоту стрелы подъёма сферы после оптимизации по формуле $f = R_* - d_{\max}$:

При $d_{\max}=3$:

$$f = R_* - d_{\max} = 10,6 - 3 = 7,6.$$

При $d_{\max}=4$:

$$f = R_* - d_{\max} = 11,3 - 4 = 7,3.$$

При $d_{\max}=5$:

$$f = R_* - d_{\max} = 12,5 - 5 = 7,5.$$

Таким образом, полученные значения f совпадают с результатами, полученными в разделе 4.3.

4.5.3. Прямой и развертывающийся геликоид

Среди исследованных значений максимального перемещения при $1 \text{ м} < d_{\max} \leq 5$ м наблюдается сильное отклонение от исходной геометрии. При $d_{\max}=5$ м форма геликоидов начинает резко сдвигаться со своей начальной границы вниз. При значениях в пределах $0,36 \leq d_{\max} \leq 1$ в модели наблюдается сильный изгиб в центральной части витка.

При $R_{\min}=0,3$ м (от высоты ВВох); $0,71$ м (от радиуса одного витка); $1,42$ м (от стороны ВВох) наблюдается высокий уровень деформации сетки и, в связи с этим неровности на модели (рисунок 4.17). При автоматической установке значения по умолчанию $R_{\min}=2$ м также заметна волнистость сетки. Гладкость сетки достигается при установке значений $R_{\min}>2$ м.

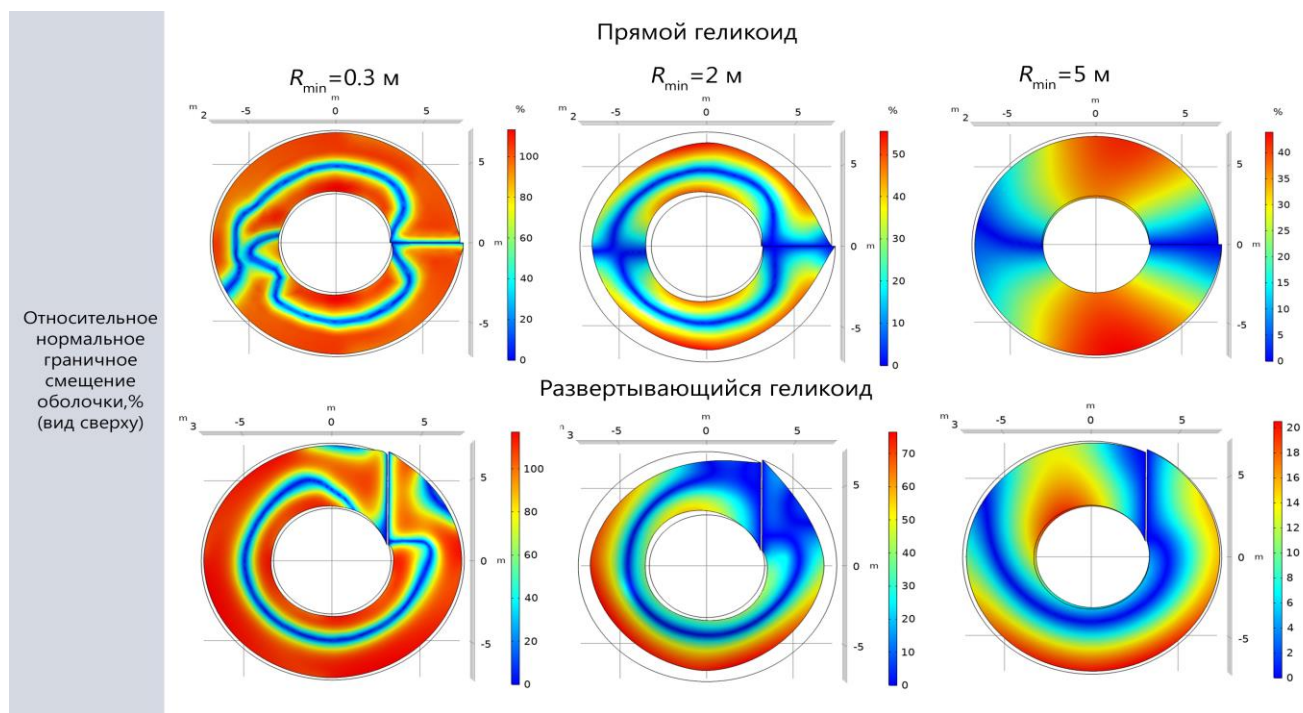


Рисунок 4.17 – Относительное нормальное граничное смещение оболочки в зависимости от выбора радиуса фильтра

Наиболее оптимальный вариант формы оптимизируемой конструкции можно получить при задании значений:

1. Максимальное перемещение d_{\max} в пределах от 0,5 м до 1 м, что составляет 3-5% от ограничивающего параллелепипеда ВВох.
2. Радиус фильтра R_{\min} в пределах от 4 до 10 м, что составляет 20-50% от ограничивающего параллелепипеда ВВох.

4.6. Разработка рекомендаций по выбору диапазона значений дополнительных параметров R_{\min} и d_{\max}

Согласно методике расчёта, изложенной в пункте 4.2., после выбора типа оболочки и перехода в настройку границ модели происходит настройка параметров d_{\max} и R_{\min} . С учетом полученных значений максимального перемещения и радиуса фильтра даётся уточнение по выбору промежутка поиска с учётом процентного соотношения от модели.

Таким образом, в исследовательских целях рекомендуются следующие соотношения значений:

1. Настройка максимального перемещения d_{\max} :

- Для сферы добавление поиска значений d_{\max} в пределах $3 \text{ м} \leq d_{\max} \leq 5 \text{ м}$, что составляет от 10% до 15% от ограничивающего параллелепипеда ВВох.

- Для геликоида добавление поиска значений d_{\max} в пределах $0,5 \text{ м} \leq d_{\max} \leq 1 \text{ м}$ (3% - 5% от ограничивающего параллелепипеда ВВох).

2. Настройка параметра R_{\min} :

- Для сферы добавление поиска значений R_{\min} в пределах $5 \text{ м} \leq R_{\min} \leq 10 \text{ м}$, что составляет от 20% до 35% от ограничивающего параллелепипеда ВВох.

- Для геликоида добавление поиска значений R_{\min} в пределах $4 \text{ м} \leq R_{\min} \leq 10 \text{ м}$. Значение берётся в промежутке от 20% до 50% общего размера ВВох.

С учетом полученных соотношений для каждого из параметров можно вывести формулу для поиска оптимальных значений d_{\max} и R_{\min} исходя из геометрического типа оболочки.

1. Определение максимального перемещения (d_{\max}).

Для сферической поверхности $R \leq 10 \text{ м}$:

$$d_{\max} = \sqrt{2d^2 + R^2} \times \frac{P}{100}, \quad (4.11)$$

где d – диаметр оболочки, P – рекомендуемое процентное соотношение, назначаемое в пределах от 10% до 15%.

Однако:

$$\sqrt{2d^2 + R^2} = \sqrt{2 \times (2R)^2 + R^2} = \sqrt{9R^2} = 3R.$$

Тогда:

$$d_{\max} = 3R \times \frac{P}{100}. \quad (4.12)$$

Для расчета одного витка геликоида при $R_{\text{внешний}} \leq 7,1 \text{ м}$ и $H \leq 3 \text{ м}$:

$$d_{\max} = \sqrt{2d^2 + H^2} \times \frac{P}{100}, \quad (4.13)$$

где d – диаметр оболочки, P – рекомендуемое процентное соотношение, назначаемое в пределах от 3% до 5%.

2. Определение радиуса фильтра (R_{\min}).

Поскольку радиус фильтра и максимальное перемещение связаны друг с другом, а также с учетом, что $R_{\min} > K\varepsilon_{\min}$, то радиус фильтра можно получить через удвоенное значение максимального перемещения:

$$R_{\min} = 2d_{\max} \times \frac{P}{100}, \quad (4.14)$$

где P - рекомендуемое процентное соотношение, назначаемое для сферы в пределах от 20% до 35%, а для геликоида от 20% до 50%.

4.6.1. Разработка алгоритма расчёта оптимизации формы тонких упругих оболочек по критерию энергии упругой деформации с установкой d_{\max} и R_{\min}

На основе предложенной методики оптимизации формы оболочек и рекомендаций по подбору значений d_{\max} и R_{\min} , разработан алгоритм расчёта оптимизации формы оболочек по критерию энергии упругой деформации (Приложения 9,10).

Код написан с помощью языка Python 3 и использует библиотеку `nlopt`³. Разработанный код включает в себя подготовку МКЭ данных (узлы, элементы, матрица жесткости), решение МКЭ с использованием разреженных матриц и процесс оптимизации формы сферической поверхности и геликоидальной по критерию упругой деформации. Для регуляризации задачи вводятся уточненные значения варьируемых параметров d_{\max} и R_{\min} , полученные в разделе 4.6.

³ NLOPT. Overview. URL: <https://nlopt.readthedocs.io/en/latest/> (дата обращения: 14.10.2025)

4.7. Выводы по четвертой главе

На основании материала, изложенного в текущей главе, можно сделать следующие выводы:

1. Выбор параметров радиуса фильтра и максимального перемещения оказывает значительное влияние на конечный результат оптимизации формы оболочки.

2. Увеличение пользовательского значения радиуса фильтра ведет к получению более простой и сглаженной формы оболочки после оптимизации. При этом уменьшение пользовательского значения радиуса фильтра может привести к значительным изменениям в структуре модели, которые не всегда соответствуют задачам поиска формы и часто не имеют смысла с практической инженерной точки зрения.

3. С увеличением радиуса фильтра количество итераций при расчёте оболочек постепенно уменьшается. Это указывает на то, что большее значение радиуса фильтра может способствовать ускорению сходимости процесса оптимизации, позволяя находить решения с меньшим количеством итераций.

4. В связке с параметрическим подходом предложена методика по поиску оптимальной формы по энергетическому критерию градиентными методами с использованием варьируемых параметров максимального перемещения и радиуса фильтра. Разработанная методика в частном случае дает результат, сопоставимый с выводами Новожилова В.В. о поверхностях вращения.

5. Уточнен промежуток для выбора обоснованных с практической точки зрения значений максимального перемещения и радиуса фильтра для трех поверхностей: поверхности вращения и двух линейчатых винтовых поверхностей.

6. Для сферической поверхности в исследовательских целях рекомендуется значение максимального перемещения принимать в пределах 10% до 15% от ограничивающего параллелепипеда. Для геликоида стоит выбирать значение в пределах 3% до 5% от ограничивающего параллелепипеда.

7. Среди рассмотренных значений радиуса фильтра для сферы оптимальным вариантом является установка в пределах 20-35% от общего размера ограничивающего параллелепипеда. Оптимальный промежуток значений радиуса фильтра для геликоидов находится в пределах 20-50% от ограничивающего параллелепипеда.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрен процесс оптимизации формы оболочек, применяемых для покрытия, а также для связи разных уровней жилых, общественных, промышленных зданий и сооружений. В качестве исследуемых форм были выбраны оболочки, срединные поверхности которых определяются параметром формы и оболочки вращения – сфера, а также линейчатые винтовые поверхности – прямой и развертывающийся геликоид.

При проведении исследований были выявлены закономерности изменения напряженно-деформированного состояния и формы оболочки при различных значениях варьируемых параметров. При больших и малых значениях этих параметров появляются резкие изменения формы срединной поверхности оболочек, которые приводят к потере точности результатов. В связи с этим были разработаны рекомендации по выбору оптимальных настроек задачи оптимизации формы по энергетическому критерию, которые включают в себя установку параметров границы свободной формы, выбор метода оптимизации. Применен энергетический подход к решению задачи оптимизации формы, связанный с понятием энергетического запаса прочности элемента сооружения. Показано, что при проведении оптимизации формы по энергетическому критерию возможно значительно увеличить коэффициент безопасности конструкции и уменьшить её вес, что приводит к экономии материальных ресурсов.

Дальнейшее развитие исследования может быть направлено на расширение разработанных методик для изучения связи энергетического подхода с варьируемыми параметрами для других типов оболочек.

На основании проведенного в диссертации исследования можно сформулировать следующие результаты и выводы:

1. В результате проведения оптимизации формы арок и оболочек вращения показано влияние угла раствора на величину энергии упругой деформации. Установлено, что при гидростатическом нагружении угол раствора по

энергетическому критерию превышает угол раствора по критерию минимума веса.

2. Предложенная методика на основе параметрического подхода с использованием меридиональных и круговых усилий в цилиндрических координатах упрощает нахождение упругой энергии и позволяет эффективно определить значение критической точки для нахождения оптимальной формы оболочки по критерию энергии упругой деформации.

3. Рассмотрены задачи уменьшения веса сферической оболочки и повышения коэффициента безопасности конструкции при оптимизации формы с использованием критерия энергии упругой деформации. В результате проведенного расчета собственный вес сферической оболочки уменьшен на 40%, а коэффициент безопасности увеличен в 1.5 раза, что способствует повышению прочности оболочки и уменьшению расхода материала.

4. Исследованы три градиентных метода IPOPT, SNOPT и MMA при решении задач оптимизации формы сферической оболочки и двух типов геликоидальной оболочки при действии равномерно-распределенной нагрузки по критерию энергии упругой деформации. Показано, что метод внутренней точки (IPOPT) является наиболее эффективным методом при проведении оптимизации формы сферических и геликоидальных оболочек.

5. Разработана методика решения задачи оптимизации формы с помощью градиентных методов в сочетании с параметрическим подходом по энергетическому критерию с подбором варьируемых параметров, которая включает в себя описание расчётного процесса, блок-схему реализации математической модели в программе. Предложенная методика была использована ООО «ИнтерСтрой Проект» при расчете и проектировании купола православного храма в честь иконы Божьей Матери «Отрада и Утешение».

6. В результате исследования взаимосвязи геометрических размеров оболочки и процентного соотношения от общих размеров модели получена формула для определения значений максимального перемещения и радиуса фильтра. Разработаны рекомендации по выбору оптимальных значений максимального перемещения и радиуса фильтра, которые могут быть

использованы в справочном руководстве программы COMSOL Multiphysics в части 3 «Интерфейс оптимизации» для уточнения и расширения выбора значений параметров для проведения оптимизационного расчёта.

7. На основе предложенной методики разработан алгоритм оптимизационного расчета формы сферической оболочки и геликоидальной на ЭВМ по критерию энергии упругой деформации с оптимальными границами значений максимального перемещения и радиуса фильтра, который в дальнейшем может быть внедрен в оптимизационный модуль расчетного программного комплекса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yourgrau, W. Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory / W. Yourgrau, S. Mandelstam. – London: Pitman & Sons, 1968. – P. 201.
2. Goldstine, H. A. History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century / H.A. Goldstine. – New York: Springer-Verlag, 1980. – P. 410.
3. Theodossiou, N. The history of optimization. Applications in water resources management / N. Theodossiou, I. Kougias, D. Karakatsanis // IWA Regional Symposium on Water, Wastewater and Environment: Traditions and Culture. Patras, Greece. – 2014. – Pp. 346-355.
4. Michell, A.G.M. The limits of economy of material in frame-structures / A.G.M.Michell // Philosophical Magazine. – 1904. – Vol. 8 (47). – Pp. 589-597.
5. Chan, A.S.L. The design of Michell optimum structures // British Aeronautical Research Council R&M. – 1962. – No. 3303. – P. 42.
6. Андерсон, М.С. Новые направления оптимизации в строительном проектировании / М. С. Андерсон, Ж.-Л. Арман, Дж. С. Арора и др.; под ред. Э. Атрека и др. ; Пер. с англ. К. Г. Бомштейна. – Москва: Стройиздат, 1989. – 585 с.
7. Данилин, А. И. Основы теории оптимизации (постановки задач) [Электронный ресурс]: электрон. учеб. пособие / А. И. Данилин; – Электрон. текстовые и граф. дан.(1,2 МБайт). – Самара: Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С.П. Королева (нац. исслед. ун-т), 2011. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).
8. Рабинович, И.М. К теории статически неопределимых ферм. Законы распределения усилий; метод заданных напряжений; начальные усилия в статически неопределимых фермах / И.М. Рабинович. – М. : Трансжелдориздат, 1933. – 136 с.
9. Wasiutynski, Z. O kształtowaniu wytrzymałościowym / Z. Wasiutynski. – Warszawa: Academia Nauk Technicznych, 1939. – P. 107.

10. Wasiutynski, Z. On the congruency of the forming according to the minimum potential energy with that according to the equal strength / Z. Wasiutynski // Bull. Acad. Pol. Sci. Techn. – 1960. – Vol. 8 (6). – Pp. 259-268.
11. Mroz, Z. Optimal Design of Structures of Composite Materials / Z. Mroz // International Journal of Solids and Structures. – 1970. – Vol.6 (7). – Pp. 859-870.
12. Drucker, D. C. Design for Minimum Weight / D.C. Drucker, R.T. Shield. // Proc. 9th Intern. Congr. Appl. Mech. Brussels. – 1956. – Pp. 212-222.
13. Shield, R. T. On the Optimum Design of Shells / R.T. Shield // J. Appl. Mech. – 1960. – Vol. 27. – Pp. 316-322.
14. Masur, E.F. Optimum Stiffness and Strength of Elastic Structures / E.F. Masur // Proceedings of the ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division. – 1970. – Vol.96. – Pp. 145-155.
15. Ахмадиев, Ф.Г. Математическое моделирование и методы оптимизации / Ф.Г. Ахмадиев, Р.М. Гильфанов. – К.: Изд-во Казанск. гос. архитектур.-строит. ун-та, 2017. – 178 с.
16. Schmit, L.A. Structural design by systematic synthesis / L.A. Schmit // Proceedings of the 2nd National Conference on Electronic Computation (American Society of Civil Engineers), New York. – 1960. – P. 105-132.
17. Schmit, L.A. Structural synthesis by combining approximation concepts and dual methods / L.A. Schmit, C. Fleury // AIAA Journal. – 1980. – V. 18. – P. 1252-1260.
18. Хог, Э. Прикладное оптимальное проектирование: Механические системы и конструкции / Э. Хог, Я.С.Аропа. – М.: Мир, 1983. – 478 с.
19. Rao, S.S. Engineering optimization. Theory and practice / S.S. Rao. – John Wiley & Sons, 2009. – P. 813.
20. Klusalaas, J. Minimum weight design of structures via optimality criteria. / J. Klusalaas. – NASA Technical Notes, 1972. – 63 с.
21. Save, M. Structural Optimization, Optimality Criteria / M. Save, W. Prager. – New York: Plenum Press, 1985. –P. 331.

22. Berke, L. Structural Optimization using Optimality Criteria / L.Berke, N.S. Knot. –Berlin: Springer–Verlag, 1987. – Pp. 271-311.
23. Rozvany, G. I. N. Structural Design via Optimality Criteria / G. I. N. Rozvany. – Kluwer Academic Publishers, 1989. –P. 490.
24. Bendsøe, M.P. Generating Optimal Topologies in Structural Design using a Homogenization Method / M.P. Bendsøe, N. Kikuchi // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 1988. – Vol. 71. – Pp. 197-224.
25. Wilson, R.B. A Simplicial Method for Concave Programming: Ph.D. dissertation, Graduate School of Business Administration, Harvard University. – Cambridge, MA., 1963.
26. Fleury, C. Structural Optimization: A New Dual Method using Mixed Variables. / C. Fleury, V. Braibant // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1986. – Vol. 23. – Pp. 409-428.
27. Boggs, P. T. Sequential quadratic programming / P. T. Boggs, J. W. Tolle // Acta numerica. – 1995. – Vol. 4. – Pp. 1-52.
28. Goldberg, D.E. Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning. – Reading: Addison Wesley, 1989. – P. 412.
29. Xie, Y.M. A Simple Evolutionary Procedure for Structural Optimization / Y.M.Xie, G.P.Steven // Comput. Struct. – 1993. – Vol. 49. – Pp. 885-896.
30. Xie, Y. M. Evolutionary Structural Optimization / Y.M. Xie, G. P. Steven. – London: Springer, 1997. – P.185.
31. Tanskanen, P. A Multiobjective and Fixed Elements Based Modification of the Evolutionary Structural Optimization Method / P.A. Tanskanen // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 2006. – Vol. 196. – Pp. 76-90.
32. Еремеев, А.В. Генетический алгоритм для задачи о покрытии / А.В. Еремеев // Дискретный анализ и исследование операций. – 2000. – № 1. – С.47-60.
33. Steven, Q. A simple checker-board suppression algorithm for evolutionary structural optimization / Q. Steven, G.P., Y.M. Xie // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2001. – Vol. 22(3). – Pp. 230-239.

34. Sassone, M. Evolutionary Structural Optimization in Shells Design / M. Sassone, A. Pugnale // *Advanced Numerical Analysis of Shell-like Structures*. – 2007. – № 4. – Pp. 247–257.
35. Fraternali, F. On the Structural Shape Optimization through Variational Methods and Evolutionary Algorithms / F. Fraternali, A. Marino, T.E. Sayed, A.D. Cioppa // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. – 2011. – № 18. – Pp. 225–243.
36. Svanberg, K. The Method of Moving Asymptotes: A New Method for Structural Optimization / K. Svanberg // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* – 1987. – Vol. 24. – Pp. 359–373.
37. Svanberg, K. A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations /K. Svanberg// *SIAM Journal of Optimization*. – 2002. – Vol.12. – Pp. 555-573.
38. Arora, J.S. Structural design sensitivity analysis: Continuum and discrete approaches / J.S. Arora In *Advances in Structural Optimization*.–Netherlands: Springer,1995. – Pp. 47-70.
39. Gill, P.E. SNOPT: An SQP Algorithm for Large-scale Constrained Optimization / P.E.Gill, W. Murray, M.A. Saunders // *SIAM J. Optim.* – 2002. – Vol 12. – Pp. 979-1006.
40. Gill, P.E. GAMS/SNOPT: An SQP algorithm for large-scale constrained optimization / P.E.Gill, W.Murray, M.A. Saunders, A. Drud, E. Kalvelagen // *SIAM Review*. – 2001. – Vol 47(1). – Pp. 317-330.
41. Wächter, A. On the Implementation of a Primal-Dual Interior Point Filter Line Search Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming / A. Wächter, L.T. Biegler // *Mathematical Programming*. – 2006. – Vol 106(1). – Pp. 25-57.
42. Wächter, A. Short Tutorial: Getting Started with Ipopt in 90 Minutes / A. Wächter // *In Proceedings of the Dagstuhl Seminar*. – 2009. –Dagstuhl: Germany. – Pp. 1-17.
43. Pope, G. Structural design applications of mathematical programming techniques / L.A. Schmit, G. Pope. – France: North Atlantic Treaty Organization, 1971.

44. Marco, O. Structural shape optimization using Cartesian grids and automatic *h*-adaptive mesh projection / O. Marco, O. Rodenas, J.J. Albelda, M.Tur // *Struct Multidisc Optim.* – 2018. – Vol.58. – Pp.61-81.

45. Rojas-Labanda, S. Benchmarking optimization solvers for structural topology optimization / S. Rojas-Labanda, M. Stolpe // *Structural and Multidisciplinary Optimization.* – 2015. – № 52. – С. 527-547.

46. Баничук, Н.В. Об одной вариационной задаче с неизвестной границей и определении оптимальных форм упругих тел / Н.В. Баничук // *Прикладная математика и механика.* – 1975. – № 6 (39). – С.1082-1092.

47. Баничук, Н. В. Исследование оптимальных форм упругих тел: диссертация доктора физико-математических наук: 01.02.04. – Москва, 1977. – 316 с.

48. Баничук, Н.В. Оптимизация форм упругих тел / Н.В. Баничук. – М.: Наука, 1980. – 256 с.

49. Баничук, Н.В. Введение в оптимизацию конструкций / Н.В. Баничук. – М.: Наука, 1986. – 304 с.

50. Ступишин, Л.Ю. Определение оптимальных форм пологих геометрически нелинейных оболочек: дис. ... канд. тех. наук: 01.02.03. – Москва, 1984. – 131 с.

51. Ступишин, А.Г. Оптимизация формы тонких упругих оболочек: монография / Л.Ю. Ступишин, А.Г. Колесников. – М.: Издательство МИСИ – МГСУ, 2023 (Библиотека научных разработок и проектов НИУ МГСУ). – 240 с.

52. Ступишин, Л.Ю. Приближенный способ определения оптимальной формы пологих геометрически нелинейных оболочек вращения при условии устойчивости / Л.Ю. Ступишин // *Известие высших учебных заведений. Строительство и архитектура.* – 1989. – №9. – С. 28-32.

53. Колесников, А.Г. Определение оптимальных форм пологих геометрически нелинейных оболочек на прямоугольном плане: дис. ... канд. тех. наук: 05.23.17. – Москва, 2010. – 150 с.

54. Krivoshapko, S.N. Optimal shells of revolution and main optimizations / S.N. Krivoshapko // *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. – 2019. – Vol. 15(3). – Pp. 201-209.
55. Krivoshapko, S.N. Simplified selection of optimal shell of revolution / S.N. Krivoshapko, V.N, Ivanov // *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. – 2019. – Vol. 15(6). – Pp. 438-448.
56. Тарарушкин, Ю.Ф. Оптимизация некоторых конечно-элементных систем модифицированным методом проекции градиента: дис. ... канд. тех. наук: 01.02.03. – Москва, 1986. – 160 с.
57. Тарарушкин, Ю.Ф. Оптимизация в САПР: учеб. пособие / Ю.Ф. Тарарушкин. – М.: МИИТ, 1994. – 40 с.
58. Тарарушкин, Ю.Ф. Типы сечений и оптимизационный ресурс несущих конструкций / Ю.Ф. Тарарушкин // *Сборник научных трудов МАДИ (ГТУ) «Вопросы строительной механики и надёжности машин и конструкций»*. – 2013.
59. Тарарушкин, Ю.Ф. Обзор исследований по оптимизации несущих конструкций на кафедре «САП» Российского университета транспорта (МИИТ) / Ю.Ф. Тарарушкин // *Сборник трудов 79 Международной научно-методической и научно-исследовательской конференции МАДИ: Секция надёжности и проблем качества в автотранспортном комплексе*. – 2021. – С. 84-94.
60. Jang, G. Configuration Optimization for Thin Structures Using Level Set Method / G. Jang, S. Kambampati, H. Chung, H.A. Kim // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. – 2019. – № 59(1). – С. 1-34.
61. Денисова, А.П. Методы оптимального проектирования строительных конструкций / А.П. Денисова, С.А. Расщепкина // М.: АСВ, 2012. – 216 с.
62. Bennett, J. A. Structural shape optimization with geometric description and adaptive mesh refinement / J.A. Bennett, M. E. Botkin // *AIAA journal*. – 1985. – Vol. 23. – Pp.458-464.
63. Sigmund, O. Design of material structures using topology optimization. – Ph.D. Thesis, Department of Solid Mechanics, Technical University of Denmark, 1994.

64. Sigmund, O. On the design of compliant mechanisms using topology optimization / O. Sigmund // *Mech. Struct. Mach.* –1997. – 25. – Pp.495-526.
65. Sigmund, O. 99 line topology optimization code written in Matlab / O. Sigmund // *Structural and Multidisciplinary Optimization.* –2001. – 21(2). – Pp.120-127.
66. Sigmund, O. Sensitivity filtering from a continuum mechanics perspective/ O. Sigmund, K. Maute // *Structural and Multidisciplinary Optimization.* – 2012. – 46(4). – Pp.471-475.
67. Sigmund, O. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima / O. Sigmund, J. Petersson // *Struct. Optim.* – 1998. – Vol. 16. – Pp. 68-75.
68. Bendsøe, M.P. Topology and Boundary Shape Optimization as an Integrated Tool for Computer Aided Design / M.P. Bendsøe, J. Rasmussen, H.C. Rodriguez // *In Lecture Notes in Engineering.* – 1990. – Vol. 63. – Pp. 27-34.
69. Bendsøe, M.P. Optimal Shape as a Material Distribution Problem / M.P. Bendsøe // *Struct. Optimization.* – 1989. – Vol. 1. – Pp.193–202.
70. Bendsøe, M.P. Optimization of Structural Topology, Shape, and Material / M.P. Bendsøe. – Berlin: Springer, 1995. – P.273.
71. Bendsøe, M.P. Topology Optimization / M.P. Bendsøe, O. Sigmund. – Berlin: Springer, 2004. – P.370.
72. Najian, Asl R. Implicit bulk-surface filtering method for node-based shape optimization and comparison of explicit and implicit filtering techniques / Asl R. Najian, K. Bletzinger // *Structural and Multidisciplinary Optimization.* – 2023. – Vol. 111 (66). – Pp. 1–16.
73. Daoud, F. Filtering and Regularization Shape Optimization Techniques for Preliminary Design / F. Daoud, KU.Bletzinger, F.Jurecka // *46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference.* – 2005. – Pp. 1–8.
74. Bletzinger, K-U. Shape Optimization / KU. Bletzinger. – John Wiley & Sons, Ltd., 2017.
75. Antonau, I. Latest developments in node-based shape optimization using Vertex Morphing parameterization / I. Antonau, S. Warnakulasuriya, K.-U. Bletzinger,

F.M. Bluhm, M. Hojjat, R. Wüchner. Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2022. – Vol.65. – P.19.

76. Hojjat, M. The vertex morphing method for node-based shape optimization / M. Hojjat, E. Stavropoulou, K.-U. Bletzinger // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2014. – Vol. 268. – Pp. 494–513.

77. Bletzinger, K.-U. Form finding of shells by structural optimization / K. U. Bletzinger, E. Ramm // Engineering with Computers. – 1993. – Vol. 9 (1). – Pp. 27–35.

78. Bletzinger, K.-U. Optimal shapes of mechanically motivated surfaces / K. U. Bletzinger, M. Firl, J. Linhard, R. Wüchner // Computer methods in applied mechanics and engineering. – 2010. – Vol. 199 (5). – Pp. 324–333.

79. Allaire, G. Shape and topology optimization / G. Allaire, C. Dapogny, F. Jouve // Geometric partial differential equations, part II, 22, Handbook of Numerical Analysis. – 2021. – Vol. 22. – P. 93.

80. Марчук И. Н. Метод оптимизации сложных конструктивных решений на примере проектирования технологической площадки промздания / И. Н. Марчук, В. П. Уласевич // Теория и практика исследований и проектирования в строительстве с применением систем автоматизированного проектирования (САПР) : сборник статей Международной научнотехнической конференции, Брест, 30–31 марта 2017 года– Брест : БрГТУ, 2017. – С. 115–121.

81. Шуп, Т. Решение инженерных задач на ЭВМ: Практическое руководство / Т. Шуп. – М.: Мир, 1982. – 238 с.

82. Firl, M. Optimal shape design of shell structures. Ph.D. thesis, Universität München, 2010.

83. Уайлд, Д. Оптимальное проектирование / Д. Уайлд–М.: Мир, 1981. – 272 с.

84. Hemp, W.S. Optimum structures / W.S. Hemp. Clarendon: – Oxford University Press, 1973. – 123 с.

85. Halit, E. Mathematical Methods of Optimisation. Measuring system design /E. Halit. London: John Wiley & Sons, 2005. – Pp. 453-455.

86. Голушко, С.К. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения: дис. ... д-р физ.-мат. наук: 01.02.04. – Новосибирск, 2005. – 160 с.

87. Крейчман, М.М. Исследование напряжённо-деформированных состояний нодоидных и ундулоидных оболочек: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. – Казань, 1982. – 196 с.

88. Дедов, Н.И. Оптимальное проектирование цилиндрических оболочек при неравномерном нагружении / Н.И.Дедов, В.Н.Исуткина // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2016. – №4(2). – С.262-266.

89. Комаров, В. А. О рациональном распределении материала в конструкциях / В. А. Комаров // Известия АН СССР, Механика. – 1965. – №5. – С. 85-88.

90. Комаров, В.А. Безразмерный критерий силового совершенства конструкции / В. А. Комаров // Механика твердого тела. – 2018. – № 4. – С. 34-47.

91. Болдырев, А.В. Оптимизация распределения материала в силовых конструкциях при нескольких случаях нагружения/ А.В. Болдырев // Вестник СамГУ. – 2009. – № 2. – С. 42-50.

92. Данилин, А.И. Об энергетических критериях оптимальности/А.И. Данилин // Вестник Самарского университета. – 2010. – № 4 (24). – С. 74-79.

93. Ларионов, Е.А. Длительное силовое сопротивление и безопасность сооружений: дис. доктора технических наук: 05.23.01 / МИКХиС. Москва, 2005. 211 с.

94. Ларионов, Е.А. К вопросу длительной прочности бетона / Е.А. Ларионов // Известия высших учебных заведений. – 2005. – № 8. – С. 28-33.

95. Комаров, В.А. Проектирование силовых аддитивных конструкций: теоретические основы / В.А. Комаров // Онтология проектирования. – 2017. – № 2 (24). – С. 191-206.

96. Дудяк, А. И. Энергетический критерий прочности / А. И. Дудяк, Т. А. Сахнович // *Машиностроение: сборник научных трудов.* – Минск, 2010. – С. 168-170.
97. Юрьев, А.Г. Основы проектирования рациональных несущих конструкций / А.Г. Юрьев. – Белгород: БТИСМ, 1988. – 94 с.
98. Ключев С.В. Оптимальное проектирование конструкций башенного типа: дис. ... канд. тех. наук: 05.23.01. — Белгород, 2006. — 163 с.
99. Шеин, А.И. Оптимизация форм упругих тел из условия устойчивости на основе энергетического подхода / А.И. Шеин // *Известия вузов. Строительство.* – 1995. – №10. – С. 105–112.
100. Ermakova, E. Shape Optimization of a Shell in Comsol Multiphysics / E. Ermakova, T. Elberdov, M. Rynkovskaya // *Computation.* – 2022. – Vol. 10(4). – Pp. 1-12.
101. Тарасов, Р.В. Методы оптимизации в технологических и технических задачах: учебно-методическое пособие для практических занятий по направлению подготовки 27.03.01 «Стандартизация и метрология»/ Р.В. Тарасов, Д.В. Тарасов. – Пенза: ПГУАС, 2016. – 156 с.
102. Комаров, В. А. О рациональном распределении материала в конструкциях/ В. А. Комаров // *Известия АН СССР, Механика.* – 1965. – №5. – С. 85-88.
103. Bradner, E. Parameters tell the design story: ideation and abstraction in design optimization / E. Bradner, F. Iorio, M. Davis. – In: *Proceedings of the Symposium on Simulation for Architecture & Urban Design*, 26. – Society for Computer Simulation International, 2014. – P. 26.
104. Якубов С.Х. Алгоритмизация САПР оптимизации тонкостенных элементов инженерных конструкций / Якубов С.Х. Хамраев А.А. Хушбоков И.У. Нурматов З.О. // *Universum: технические науки : электрон. научн. журн.* – 2022. – 11(104). – С. 54-58.
105. Mei, L. Structural Optimization in Civil Engineering: A Literature Review / L. Mei, Q.Wang // *Buildings.* – 2021. – Vol.11. – 66 p.

106. Addis, W. Structural Engineering – the Nature of Theory and Design / W. Addis. – Chichester, UK: Ellis Horwood, 1990. – 384 с.
107. Heyman, J. Structural Analysis: A Historical Approach / J. Heyman. – Cambridge: Cambridge University Press, 2007. – 450 с.
108. Christensen, P.W. An Introduction to Structural Optimization / P.W. Christensen, A. Klarbring // Springer Science + Business Media B.V. – 2009. – 211 p.
109. Лазарев, И. Б. Основы оптимального проектирования конструкций / И. Б. Лазарев. – Новосибирск: Сибирская государственная академия путей сообщения, 1994. – 150 с.
110. Мажид, К.И. Оптимальное проектирование конструкций / К.И. Мажид. – М.: Высшая школа, 1979. – 240 с.
111. Félix D. Kradonou. Shape and anisotropy optimization by an isogeometric-polar method. Optimization and Control [math.OC]. Ph.D. thesis. Université Paris Saclay (COmUE), 2017.
112. Rao, S. S. Engineering Optimization. Theory and Practice / S. S. Rao. – 4th ed. – John Wiley & Sons, 2009. – 813 p.
113. Arora, J. S. Review of formulations for structural and mechanical system optimization / J. S. Arora, Q. Wang // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2005. – Vol. 30(4). – Pp. 251-272.
114. Allaire, G. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method / G. Allaire, F. Jouve, A.-M. Toader // Journal of Computational Physics. – 2004. – Vol. 194(1). – Pp. 363-393.
115. Palmer, A. Optimal structural design by dynamic programming / A. Palmer // Journal of Structural Division. Proceeding ASCE. – 1968. – No.8. – Pp. 1234-1245.
116. Prager, W. Optimization of the structural geometry / W. Prager, G. I. N. Rozvany // Dynamical Systems. Proc. Int. Conf. Gainesville, Florida. – New York: Academic Press, 1977. – Pp. 265-293.
117. Pearson, C. E. Structural design by high-speed computing machines / C. E. Pearson // Conf. Electronic Computation of ASCE, Kansas-City. – 1958.

118. Kohn, R. V. Optimal design and relaxation of variational problems / R. V. Kohn, G. Strang // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1986. – Vol. 39. – Pp. 113-137
119. Chan, H. S. Optimum structural design and linear programming / H. S. Chan // The College of Aeronautics. – 1964. – No. 175. – Pp. 349-375.
120. Venkayya, V. B. Design of optimum structures / V. B. Venkayya // Computers & Structures. – 1971. – Vol. 1. – Pp. 265-309.
121. Haftka, R. T. Recent developments in structural sensitivity analysis / R. T. Haftka, H. M. Adelman // Structural Optimization. – 1989. – Vol. 1. – Pp. 137-151.
122. Allen, E. Form and Forces: Designing Efficient, Expressive Structures / E. Allen, W. Zalewski. – New York: Wiley, 2009. – 640 p.
123. Аоки, М. Введение в методы оптимизации / М. Аоки. – М.: Мир, 1977. – 345 с.
124. Немировский А. С., Юдин Д. Б. Сложность задач и эффективность методов оптимизации. — М.: Наука, 1979. – 383 с.
125. Геминтерн, В. И. Методы оптимального проектирования / В. И. Геминтерн, Б. М. Каган. – М.: Энергия, 1980. – 159 с.
126. Мину, М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы: Пер. с фр. / М. Мину – М.: Наука, 1990. – 485 с.
127. Якубов С.Х. Методы и алгоритмы синтеза и анализа конструкторских и технологических решений в системе автоматизированного проектирования инженерных конструкций и сооружений / С.Х. Якубов – М.: ИНФРА-М, 2019. – 164 с.
128. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию / Б.Т. Поляк – М.: Наука, 1983. – 384 с.
129. Якубов С.Х. Системный анализ оптимизации проектирования инженерных конструкций и сооружений // Проблемы оптимизации сложных систем: Докл. Седьмой междунар. Азиатской школы-семинара / С.Х. Якубов – Ташкент, 2011. – с. 154-163.

130. Ермакова Е.В. Современные возможности программного обеспечения для оптимизации формы оболочек / Е.В. Ермакова, М.И. Рынковская // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2023. –Т. 19. – №2. – С. 220-232.
131. Оганесян П.А., Шевцов С.Н. Оптимизация топологии конструкций в пакете ABAQUS /П.А. Оганесян, С.Н. Шевцов // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2014. – № 6(2). –16 с.
132. Srivastava, Kumar P. Structural Optimization Methods: A General Review / P.Kumar Srivastava, S.S.Shukla // IJRSET. – 2017. – Vol. 6 (9). – P.6.
133. Zhou, M. An integrated approach to topology, sizing, and shape optimization / M. Zhou, N. Pagaldipti, H. L. Thomas, Y. K. Shyy // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2004. – Vol. 26(5). – Pp. 308-317.
134. Bendsøe, M. P. Topology optimization: theory, methods, and applications / M. P. Bendsøe, O. Sigmund. – New York: Springer, 2013. – 370 с.
135. Wang, F. On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization / F. Wang, B. S. Lazarov, O. Sigmund // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2011. – Vol. 43(6). – Pp. 767-784.
136. Bruggi, M. Topology optimization for minimum weight with compliance and stress constraints / M. Bruggi, P. Duysinx // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2012. – Vol. 46(3). – Pp. 369–384.
137. Deaton, D. J. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000 / J. D. Deaton, Ramana V Grandhi // Struct Multidisc Optim . – 2014. – Vol 49. – Pp. 1-38.
138. Guest, J.K. Structural topology optimization - moving beyond linear elastic design objectives / R. Lotfi, A. Gaynor, M. Jalalpour // Structures Congress. – 2012. – Chicago: Illinois. – Pp. 245-256.
139. Hinz, M. On the existence of optimal shapes in architecture / M. Hinz, F. Magoulès, A. Rozanova-Pierrat, M. Rynkovskaya, A. Teplyaev // Applied Mathematics and Modelling. – 2020. – Vol. 94. – Pp. 676-687.

140. Hinz, M. Boundary value problems on non-Lipschitz uniform domains: stability, compactness and the existence of optimal shapes / M. Hinz, A. Rozanova-Pierrat, A. Teplyaev // *Asymptotic Analysis*. – 2023. – Vol. 1. – Pp. 1-37.

141. Haslinger, J. Introduction to Shape Optimization: Theory, Approximation, and Computation / J. Haslinger, R. A. E. Mäkinen. – Philadelphia: SIAM, 2003. – 291 p.

142. Allaire, G. On some recent advances in shape optimization / G. Allaire, A. Henrot // *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics*. – 2001. – Vol. 329. – Pp. 383–396.

143. Dapogny, C. Geometric constraints for shape and topology optimization in architectural design / C. Dapogny, A. Faure, G. Michailidis, G. Allaire, A. Couvelas, R. Estevez // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2017. – Vol. 59(6). – Pp. 933–965.

144. Nagy, A. P. Isogeometric sizing and shape optimisation of beam structures / A. P. Nagy, M. M. Abdalla, Z. Gürdal // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2010. – Vol. 199. – Pp. 1216-1230.

145. Samareh, J. A. Survey of shape parameterization techniques for high-fidelity multidisciplinary shape optimization / J. A. Samareh // *AIAA Journal*. – 2001. – Vol. 39. – Pp. 877–884.

146. Allaire, G. Shape and topology optimization / G. Allaire, C. Dapogny, F. Jouve // *Handbook of Numerical Analysis. Geometric partial differential equations, part II* / A. Bonito, R. H. Nochetto (eds.). – 2021. – Vol. 22. – Pp. 93.

147. Haftka, R. T. Elements of structural optimization / R. T. Haftka, Z. Gürdal. – 4th rev. and expanded ed. – Dordrecht: Springer, 2012. – 494 p.

148. Henrot, A. Shape variation and optimization / A. Henrot, M. Pierre. – Zürich: European Mathematical Society (EMS), 2018. – 357 p.

149. Ermakova, E. V. The use of shells in the architecture of the concert halls / E. V. Ermakova, M. I. Rynkovskaya // *Curved and Layered Structures*. – 2021. – Vol. 8(1). – Pp. 61-69.

150. Rynkovskaya, M. Modern software capabilities for shape optimization of shells / M. Rynkovskaya, E. Ermakova // Vietnam Journal of Science and Technology. – 2024. – Vol. 62 (1). – Pp. 184-194.
151. Ermakova, E. Shape optimization of the cylindrical shell with three types of directrix curves / E. Ermakova, M. Rynkovskaya // Structures. – 2024. – Vol. 64. –10 p.
152. Ermakova, E. Using Shape Optimization Settings in Comsol Multiphysics for Efficient Structural Design of Shells / E. Ermakova, M. Rynkovskaya // Shell and Spatial Structures. IWSS 2023. Lecture Notes in Civil Engineering. – 2023. – Pp. 427–435.
153. Ермакова, Е. В. Оптимизация формы оболочек в Comsol Multiphysics / Е. В. Ермакова, М. И. Рынковская // Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений: Тезисы докладов VIII-го международного симпозиума. – Тамбов: Изд-во ИП Чеснокова А. В., 2023. – С. 436.
154. Ермакова, Е. В. Влияние радиуса фильтра на оптимизацию формы оболочки / Е. В. Ермакова, М. И. Рынковская // Вестник гражданских инженеров. – 2024. – № 4 (105). – С. 23–34.
155. Ramm, E. Shape finding of concrete shell roofs / E. Ramm // Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures. – 2004. – Vol. 45(144). – Pp. 29–39.
156. Kirsch, U. Optimization: fundamentals and applications / U. Kirsch. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1993. – 302 p.
157. Meek, J. L. Computer shape finding of form structures / J. L. Meek, X. Xia // International Journal of Space Structures. – 1999. – Vol. 14(1). – Pp. 35–55.
158. Haug, E. J. Design Sensitivity Analysis of Structural Systems / E. J. Haug, K. K. Choi, V. Komkov. – Orlando: Academic Press, 1986. – 381 p.
159. Calladine, C. R. Theory of Shell Structures / C. R. Calladine. – Cambridge: Cambridge University Press, 1983. – 764 p.
160. Олейникова, С.А. Численные методы решения оптимизационных задач [Текст]: учеб. пособие / С.А. Олейникова; Воронеж гос. техн. ун-т» – Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2021. – 108 с.

161. Прошин, М.В. Использование ANSYS/CivilFEM для решения задач строительного проектирования. Обзор возможностей программного комплекса / Т.В. Исайкова, Ю.Ю. Кабанов // Рациональное управление предприятием. – 2008. – № 2. – С. 32-34.

162. Tomas, A. Shape and size optimization of concrete shells /A. Tomas, P. Martí-Montrull // Engineering Structures. – 2010. – Vol.32(6). – Pp. 1650-1658.

163. Жидков, А. В. Применение системы ANSYS к решению задач геометрического и конечно-элементного моделирования / А. В. Жидков // Учебно-методический материал по программе повышения квалификации «Информационные системы в математике и механике». – Нижний Новгород, 2006. – 80 с.

164. Кузнецова, Т. А. Расчёт балок с помощью программного комплекса “Abaqus” / Т. А. Кузнецова // Вестник ВГАВТ. – 2016. – № 47. – С. 209-220.

165. Буркова, Е.Н. Система автоматизированных расчётов Comsol / Е.Н. Буркова, А.Н. Кондрашов, К.А. Рыбкин. – П: Перм.гос.нац.исслед.ун-т., 2019. – С. 133.

166. Баранова, Е.Г. Исследование особенностей решателей, применяемых в COMSOL Multiphysics / Е.Г. Баранова, А.С. Елпатов, С.В. Харлашина // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. – 2020. – № 2. – С.13-15.

167. Лебедев, С.А. Оптимизация и применение пакета MUMPS для решения трёхмерных стационарных задач прочности на кластерных системах / С.А. Лебедев, И.Б. Мееров, А. В. Сысоев, Ю. Г. Бартенев, С. И. Бастраков, Е.А. Козин, И.Г.Лебедев, А.Ю. Пирова, А.Н. Стаканов // Вестник УГАТУ. – 2014. –№. 3(64). – С. 276-282.

168. Стружанов, В.В. Теория упругости: основные положения: учеб. пособие /В. В. Стружанов, Н. В. Бурмашева ; М-во науки и высш. образования Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. — Екатеринбург:Изд-во Урал. ун-та, 2019. – 204 с.

169. Колкунов, Н.В. Основы расчёта упругих оболочек / Н.В. Колкунов. – М.: Высшая школа, 1972. – 296 с.

170. Агапов, В.П. Нелинейные модели бетонных и железобетонных конструкций. Теория и реализация в ВК ПРИНС : монография / В.П. Агапов, А.С. Маркович. - Москва : РУДН, 2023. – 264 с.

171. Маркович, А. С. Развитие нелинейных моделей бетонных и железобетонных конструкций на основе метода конечных элементов: диссертация доктора технических наук: 2.1.9. – Москва, 2024. – 408 с.

172. Sadd, M. H. Elasticity Theory, Applications, and Numerics / M. H. Sadd. – Amsterdam: Elsevier Inc., 2005. – 504 p.

173. Flügge, W. Stresses in Shells / W. Flügge. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1960. – 499 p.

174. Иванов, В. Н. Аналитические методы расчета оболочек неканонической формы: Монография / В. Н. Иванов, С. Н. Кривошапко. – М.: РУДН, 2010. – 542 с.

175. Прокопенко, Н. Ю. Методы оптимизации: учеб. пособие / Н. Ю. Прокопенко; Нижегор. гос. архитектур.-строит. ун-т. – Н. Новгород: ННГАСУ, 2018. – 118 с.

176. Querin, O. M. Topology Design Methods for Structural Optimization / O. M. Querin, M. Victoria, C. Alonso, R. Ansola, P. Marti. – Butterworth-Heinemann, 2017. – 232 p.

177. Leyffer, S. Nonlinear Constrained Optimization: Methods and Software / S. Leyffer, A. Mahajan // Argonne National Laboratory: Lemont. – 2010. – Pp. 1-24.

178. Wang, H. A new method of moving asymptotes for large-scale linearly equality-constrained minimization / H. Wang, Q. Ni, H. Liu // Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series. – 2011. – Vol. 27(2). – Pp. 317-328.

179. Forsgren, A. Interior Point Methods for Nonlinear Optimization / A. Forsgren, P. E. Gill, M. H. Wright // SIAM Review. – 2002. – Vol. 44(4). – Pp. 525-597.

180. Vanderbei, J. R. An Interior Point method for Nonconvex Nonlinear Programming / J. R. Vanderbei, D. Shannon // Computational Optimization and Applications. – 1999. – Vol. 13. – Pp. 231-252.

181. Сивакова, Т. В. Исследование методов решения задач смешанного целочисленного линейного программирования / Т. В. Сивакова, В. А. Судаков, В. С. Шимко // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2024. – № 24. – 18 с.
182. Pirnay, H. Optimal sensitivity based on IPOPT / H. Pirnay, R. López-Negrete, L. T. Biegler // *Mathematical Programming Computation*. – 2012. – Vol. 4. – Pp. 307-331.
183. Тур, В. И. Купольные конструкции: формообразование, расчёт, конструирование, повышение эффективности: учебное пособие / В. И. Тур. – М.: Издательство АСВ, 2004. – 464 с.
184. Krivoshapko, S.N. *Encyclopedia of Analytical Surfaces*// S.N. Krivoshapko, V.N Ivanov. – Springer International Publishing: Cham, Switzerland. – 2015.
185. Попова Е.И. Поверхность купола как элемент энергоэффективности ограждающих конструкций / Е.И.Попова, Н.Н. Башенко, А.И. Сорвачёв, О.Д.Чуприна // *Вестник Сибирского государственного индустриального университета*. – 2017. – №2. – С.30-35.
186. Попов, Н. Н. Проектирование и расчёт железобетонных и каменных конструкций / Н. Н. Попов, А. В. Забегаев. – М.: Высшая школа, 1989. – 400 с.
187. Mekjavić, I. Structural analysis and optimization of concrete spherical and groined shells / I. Mekjavić, S. Pičulin // *Technical Gazette*. – 2010. – Vol. 17(4). – Pp. 537-544.
188. Somarriba Sokolova, L. N. Gridshell Structures in Moscow: A Review of Design, Construction, and Applications / L. N. Somarriba Sokolova, E. V. Ermakova // *E3S Web of Conferences*. – 2023. – Vol. 457. – 11 p.
189. Новожилов, В. В. Линейная теория тонких оболочек / В. В. Новожилов, К. Ф. Черных, Е. И. Михайловский. – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.
190. Rynkovskaya, M.I. Analytical method to analyze right helicoid stress-strain / M.I. Rynkovskaya, V.N. Ivanov // *Adv Struct Mater*. – 2019. – Springer International Publishing. – №92. – С.157-171.

191. Krivoshapko, S. N. Five types of Ruled Helical Surfaces for Helical Conveyers, Support Anchors and Screws / S. N. Krivoshapko, M. I. Rynkovskaya // MATEC Web of Conferences. – 2017. – Vol. 95. – Art. 07011. – Pp. 1-5.

192. Лукинских, С. В. Компьютерное моделирование и инженерный анализ в конструкторско-технологической подготовке производства: учебное пособие / С. В. Лукинских; М-во науки и высш. обр. РФ. — Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2020. – 168 с.

193. Pratt, W. K. Digital Image Processing / W. K. Pratt. – New York: John Wiley and Sons, 1991. – 698 p.

194. Montoya-Zapata, D. Sensitivity Analysis in Shape Optimization using Voxel Density Penalization / D. Montoya-Zapata, D. A. Acosta, A. Moreno, J. Posada, O. Ruiz-Salguero // CEIG – Spanish Computer Graphics Conference. – 2019. – Pp. 1-19.

195. Bischoff, M. Shape optimization of shells and locking / M. Bischoff, N. Camprubi, K.-U. Bletzinger // Computers & Structures. – 2004. – Vol. 82. – Pp. 23-26.

196. Bourdin, B. Filters in topology optimization / B. Bourdin // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2001. – Vol. 50(9). – Pp. 2143–2158.

197. Taylor, J. E. A Formulation for Optimal Structural Design with Optimal Materials / J. E. Taylor // Topology Optimization of Structures and Composite Continua / ed. by G. I. N. Rozvany, N. Olhoff. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. – Pp. 49-55.

198. Lazarov, B. S. Filters in topology optimization based on Helmholtz-type differential equations / B. S. Lazarov, O. Sigmund // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2011. – Vol. 86(6). – Pp. 765-781.

199. Arnout, S. Parameter free shape and thickness optimisation considering stress response / S. Arnout, M. Firl, K.-U. Bletzinger // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2012. – Vol. 45(6). – Pp. 801-814.

200. Keshavarzzadeh, V. Parametric topology optimization with multiresolution finite element models / V. Keshavarzzadeh, R. M. Kirby, A. Narayan // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2019. – Vol. 119(7). – Pp. 567-589.

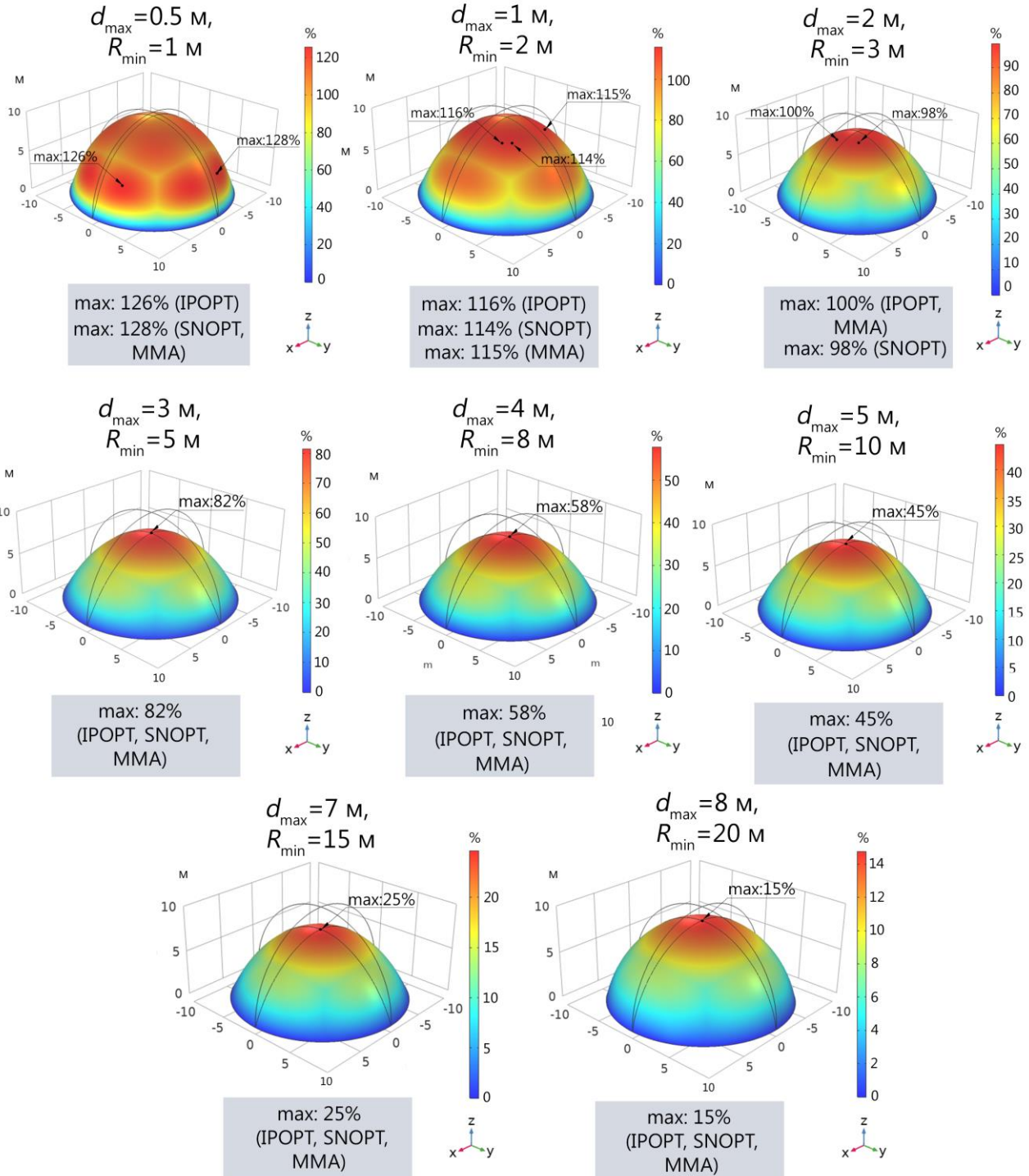
201. Qu, M. Application of Grayscale Analysis in Heat Transfer Topology Optimization: A Study on the Impact of Filter Radius on Numerical Stability and Thermodynamic Performance / M. Qu, L. Pan, L. Lu, J. Wang, Y. Tang, X. Chen // SSRN Electronic Journal. – 2024. – 47 p.

202. Nadir, W. Structural Shape Optimization Considering Both Performance and Manufacturing Cost / W. Nadir, I. Y. Kim, O. L. de Weck // 10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference (30 August - 1 September 2004, Albany, New York). – 2004. – 12 p.

203. Jingyao, B. Shape optimization of free-form shell structures combining static and dynamic behaviors / B. Jingyao, Z. Jingyao, O. Makoto // Structures. – 2021. – Vol. 29. – Pp. 1791-1807.

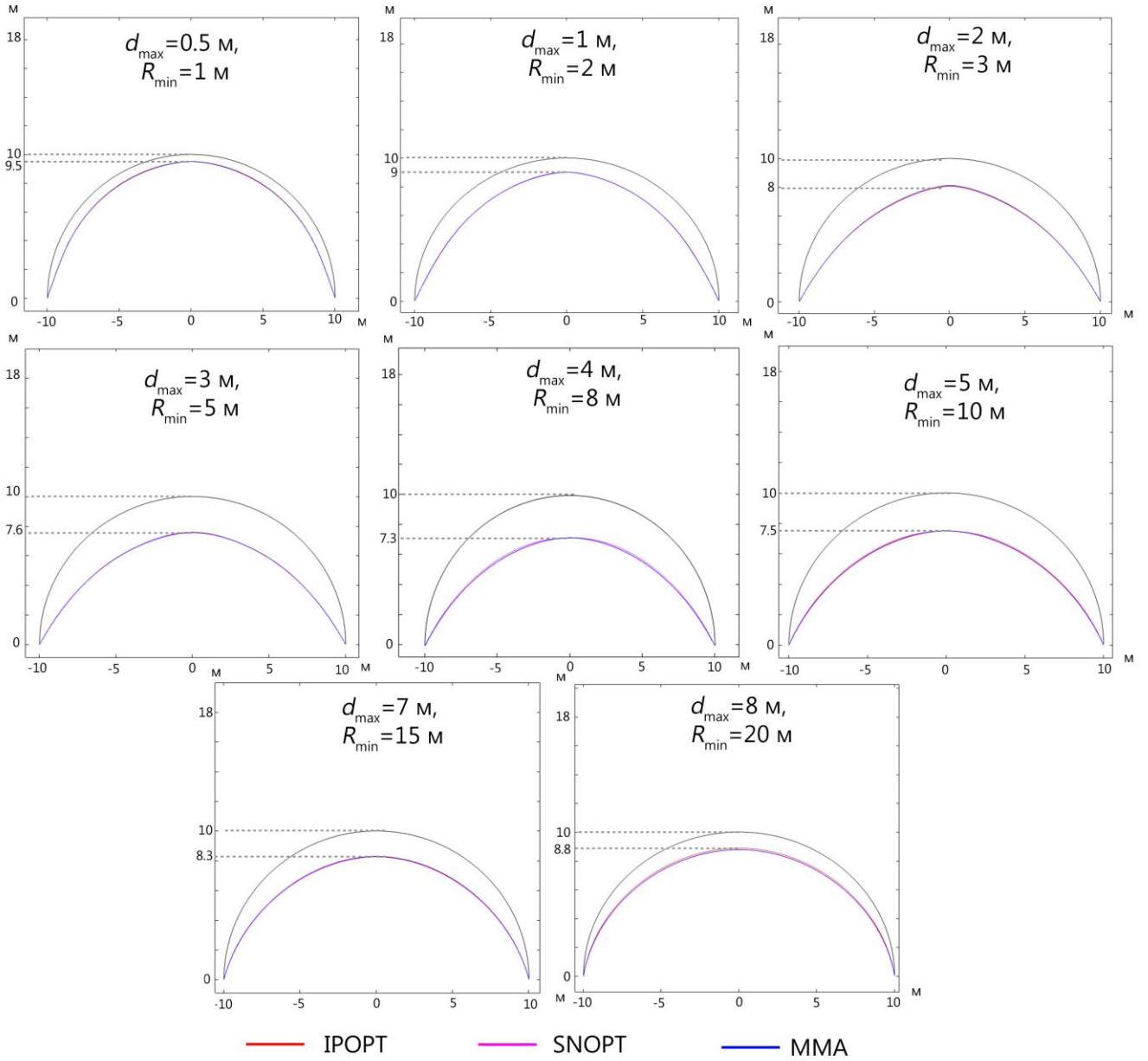
Приложение 1. Относительное нормальное граничное смещение сферической оболочки

Относительное нормальное граничное смещение оболочки (%)

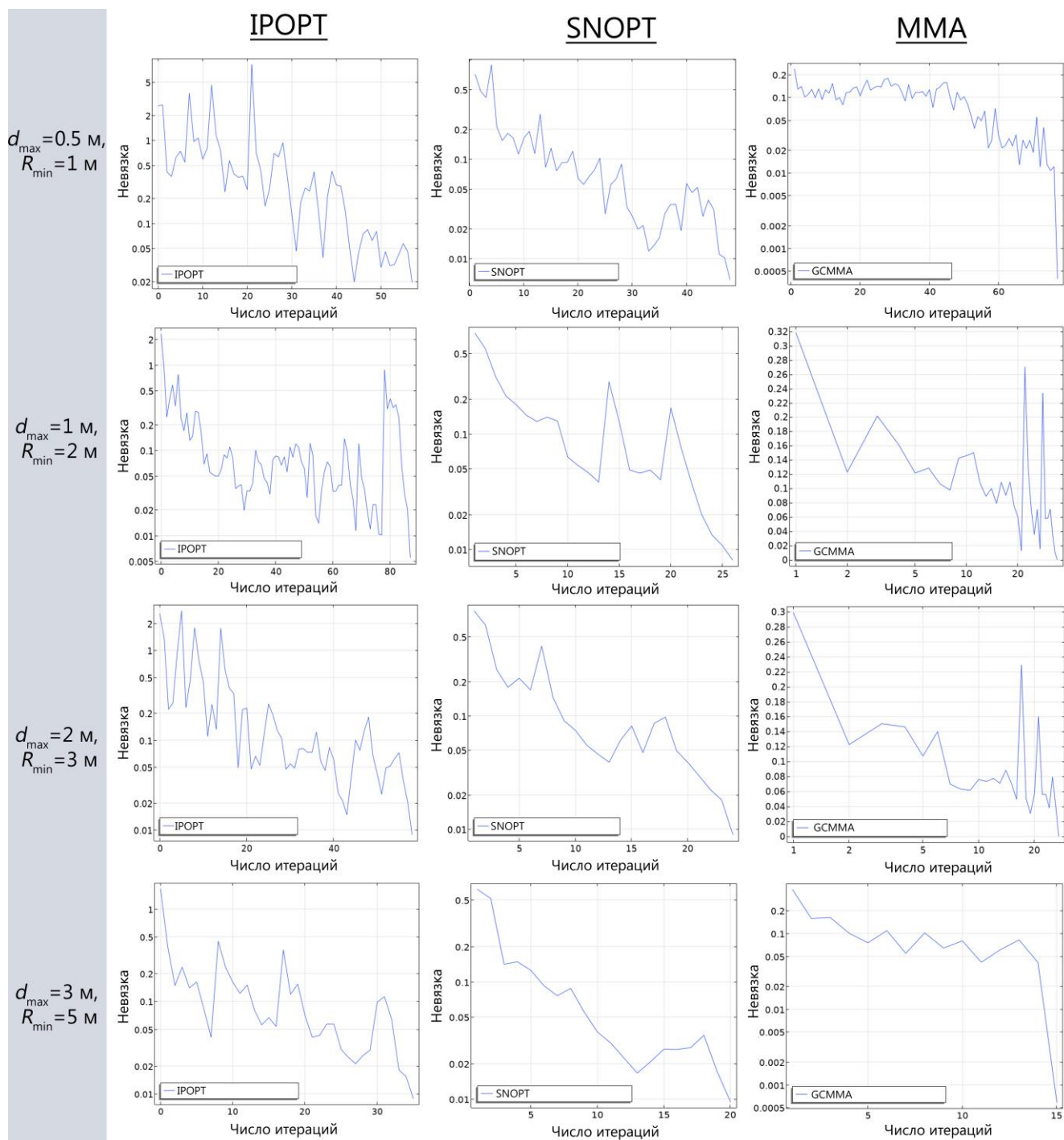


Приложение 2. Изменение границы формы сферической поверхности с установкой варьируемых значений параметров

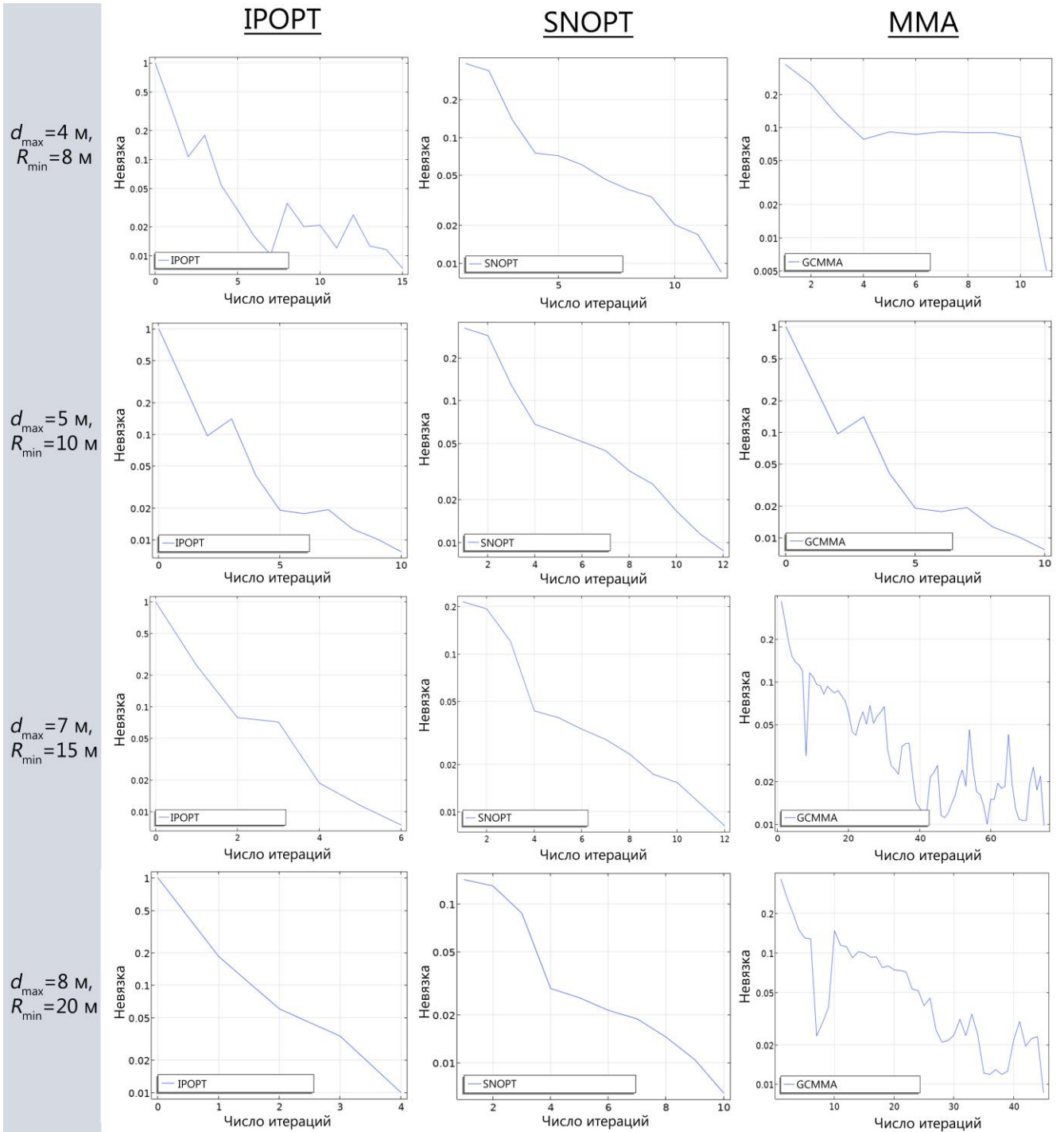
Изменение границы формы сферической поверхности, м



Приложение 3.1. Графики сходимости процесса оптимизации для сферической оболочки

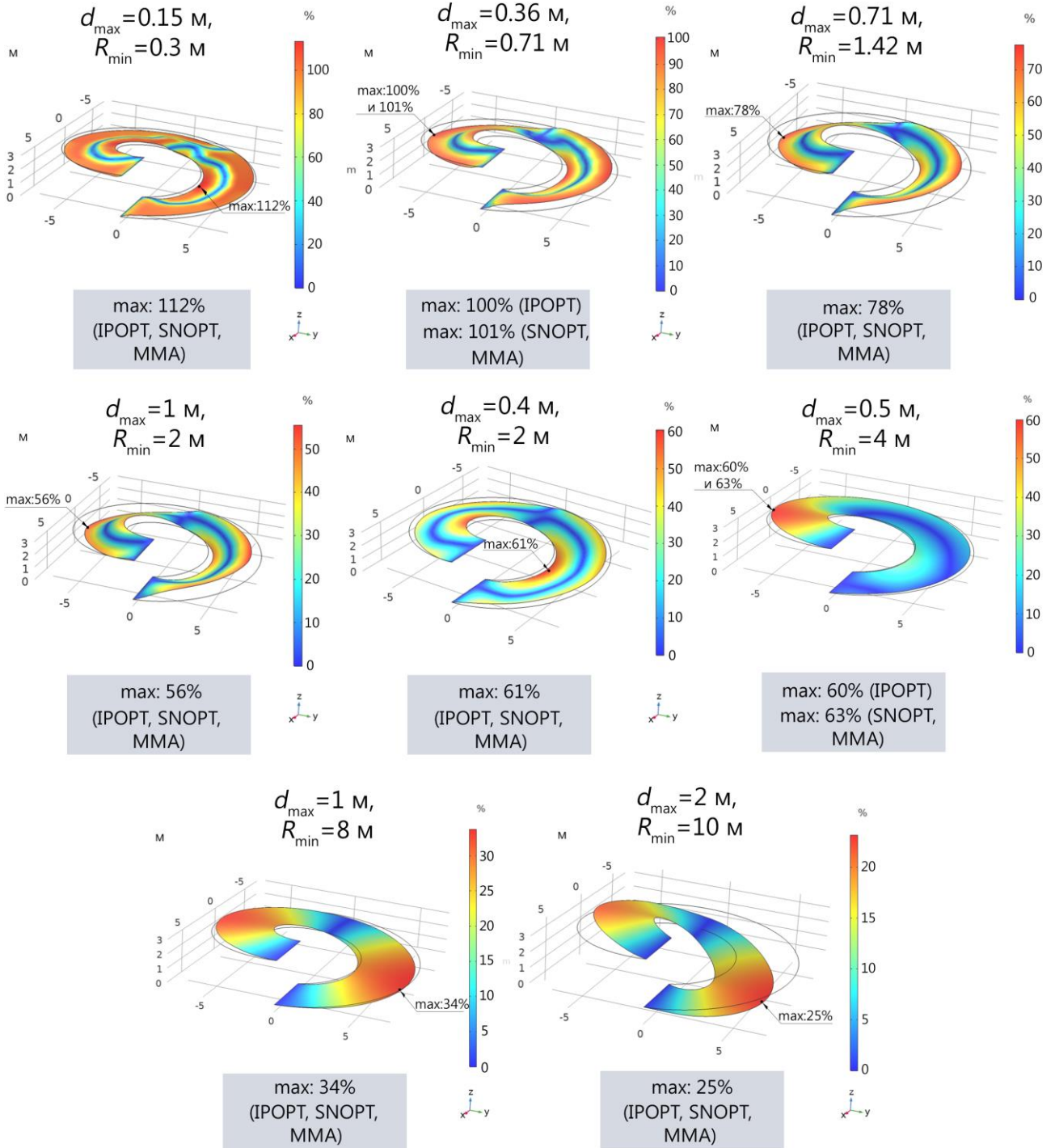


Приложение 3.2. Графики сходимости процесса оптимизации для сферической оболочки

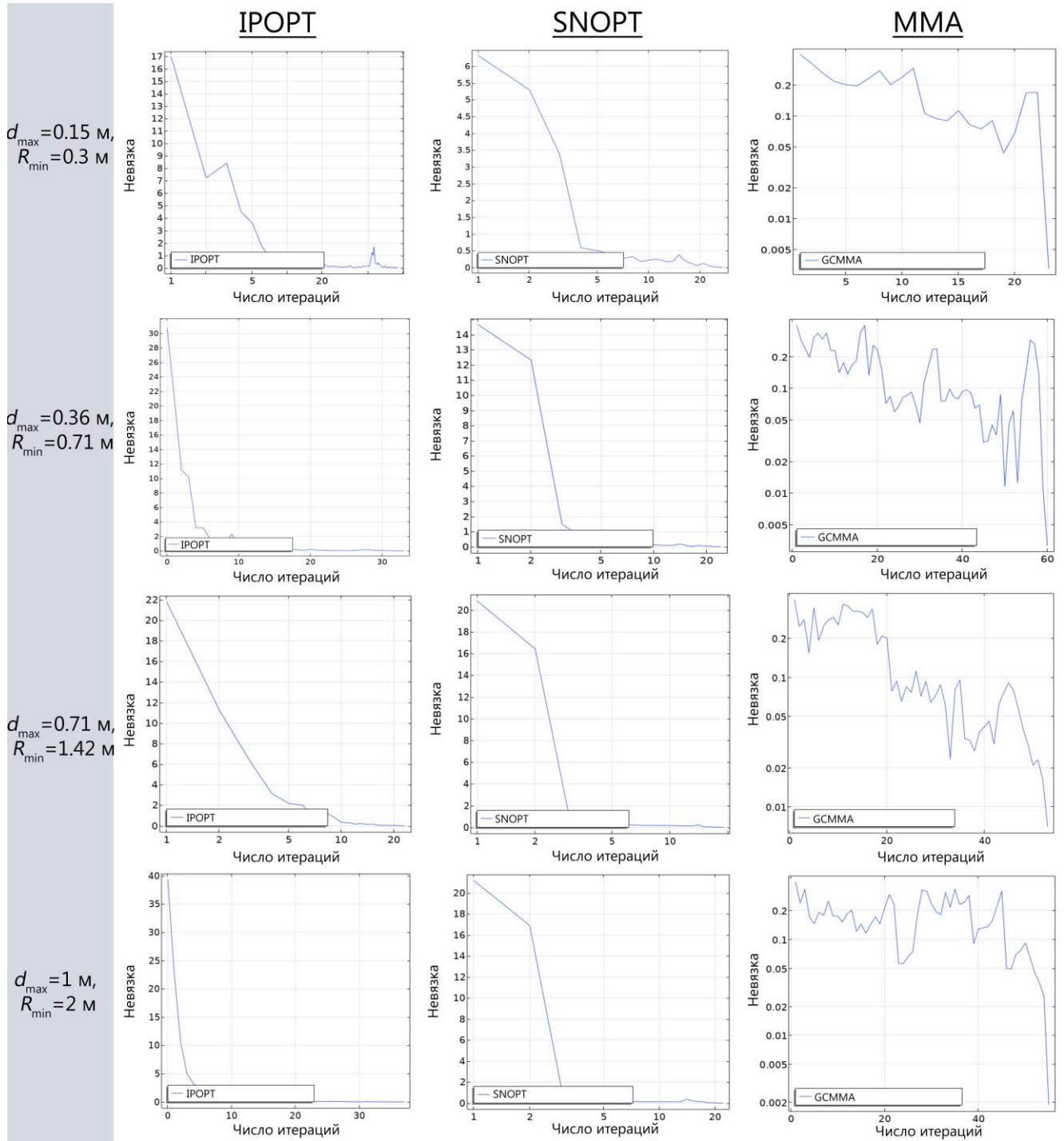


Приложение 4. Относительное нормальное граничное смещение прямого геликоида

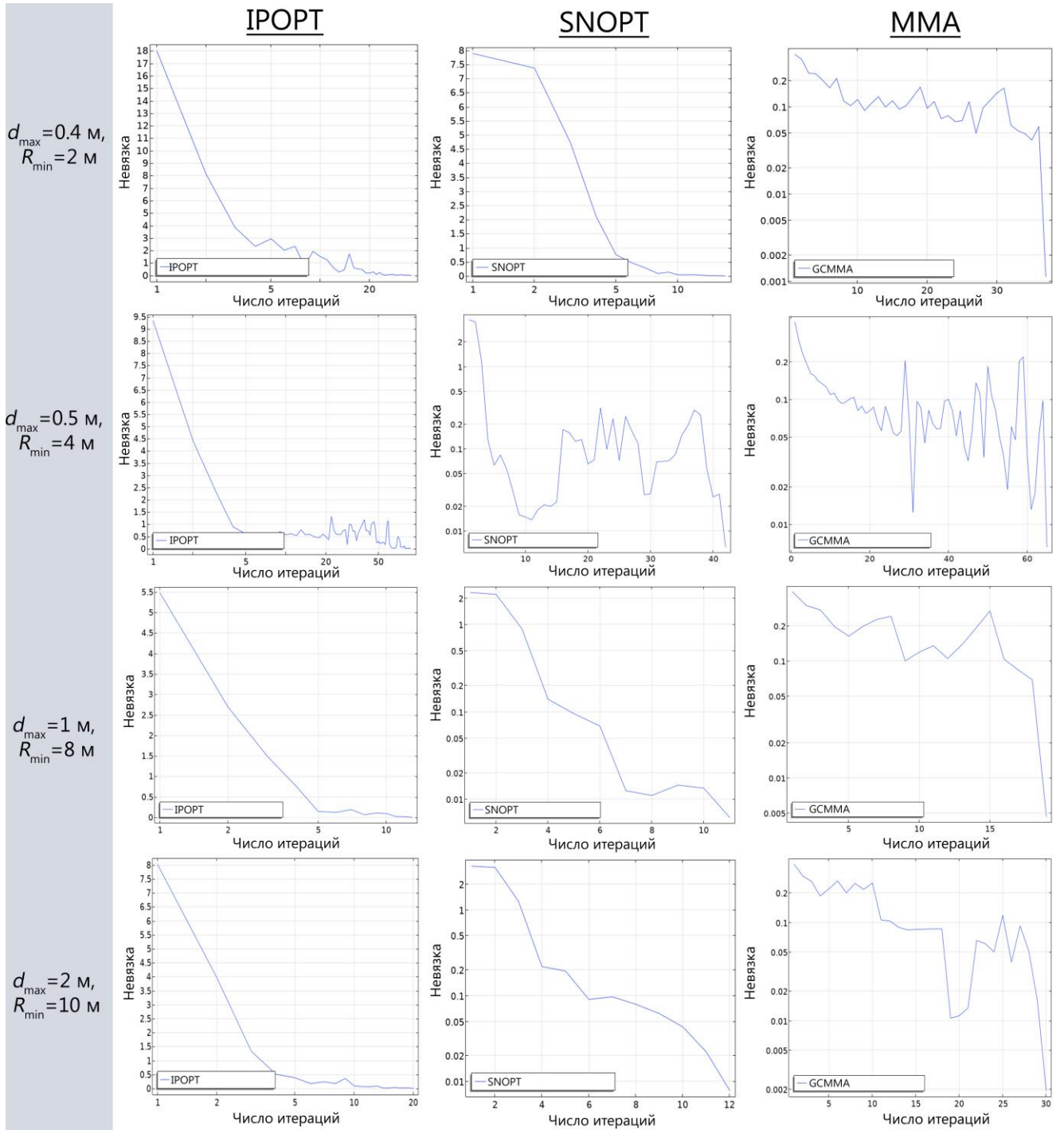
Относительное нормальное граничное смещение оболочки (%)



Приложение 5.1. Графики сходимости процесса оптимизации для прямого геликоида

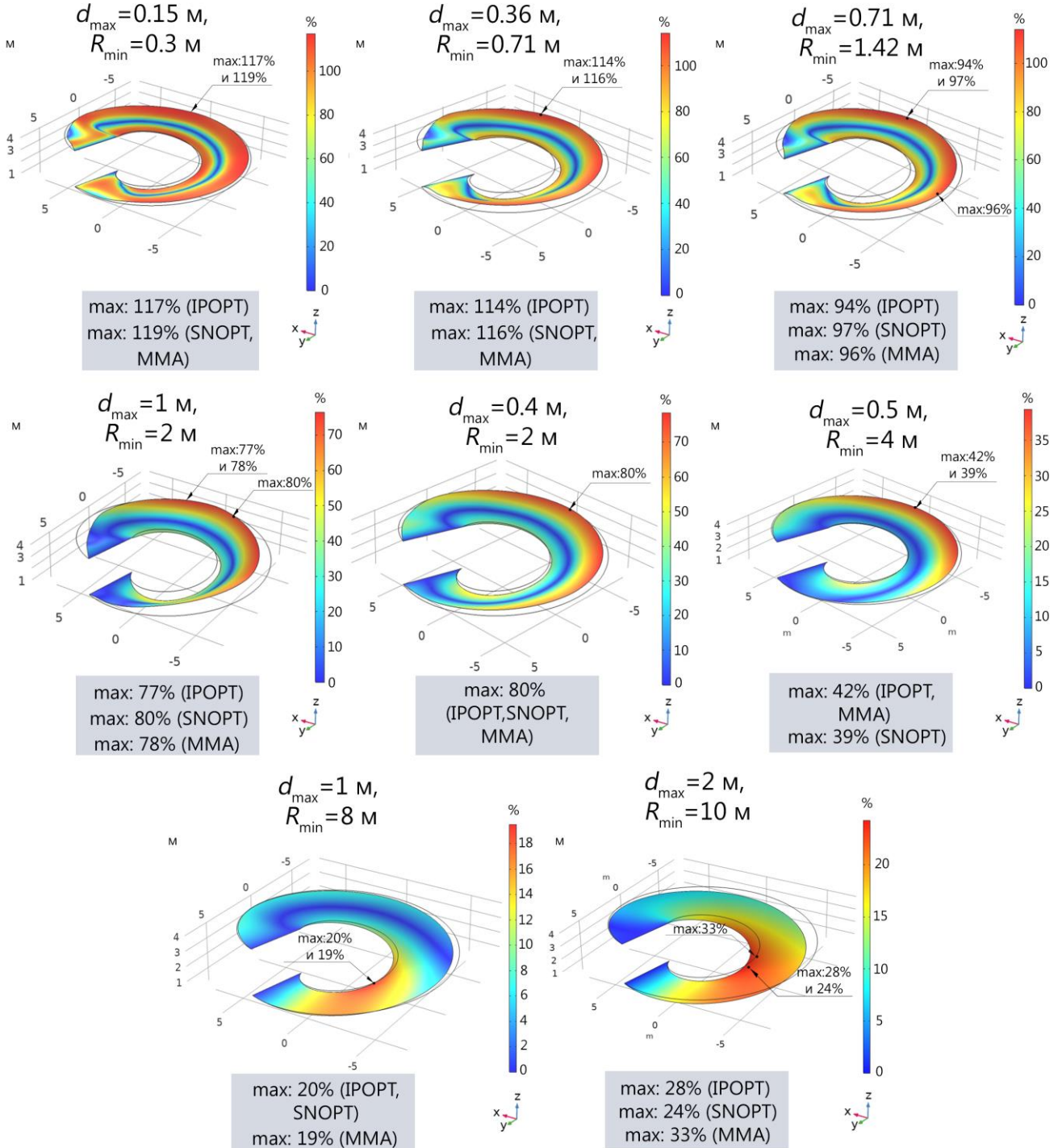


Приложение 5.2. Графики сходимости процесса оптимизации для прямого геликоида

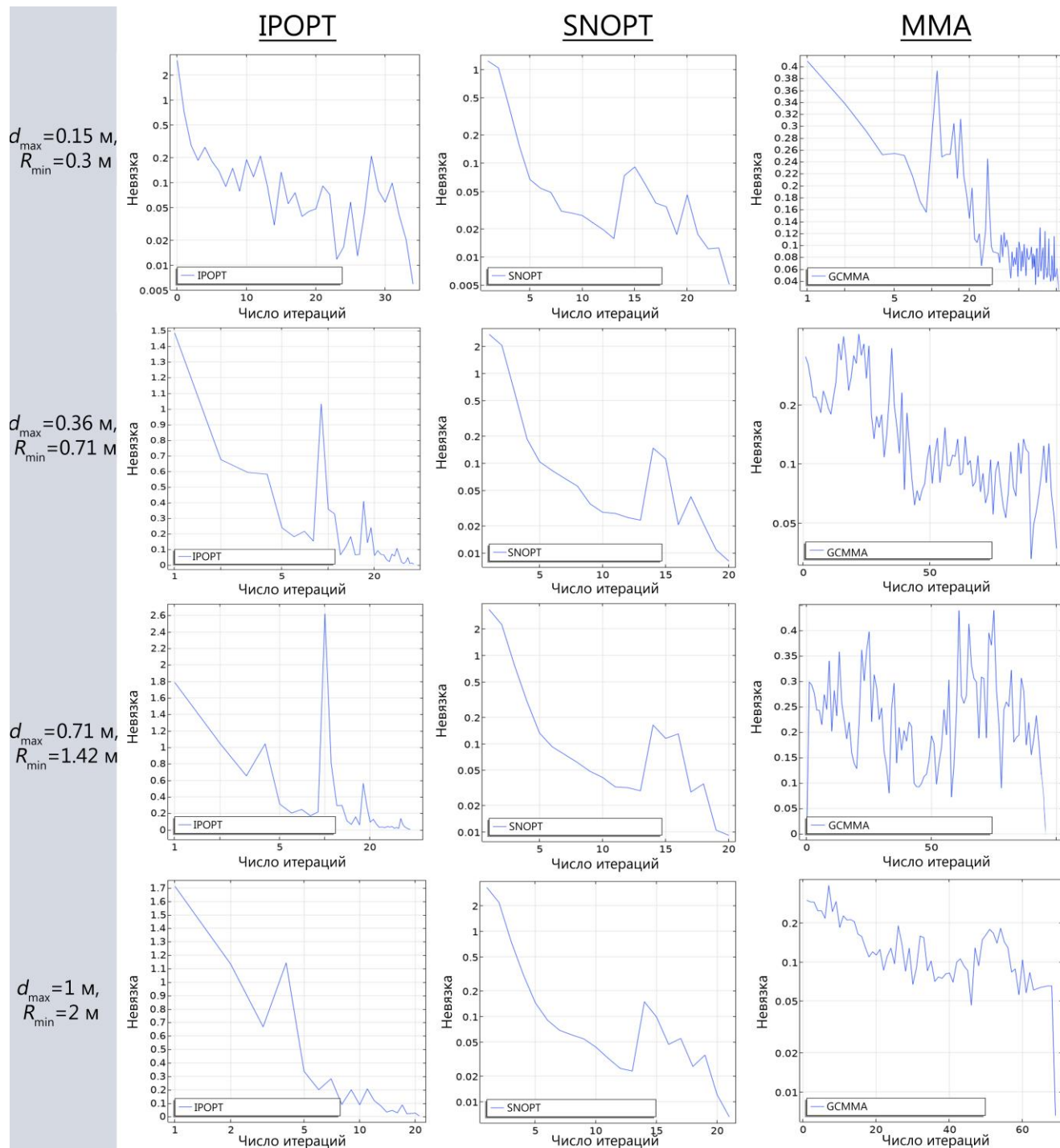


Приложение 6. Относительное нормальное граничное смещение развортывающегося геликоида

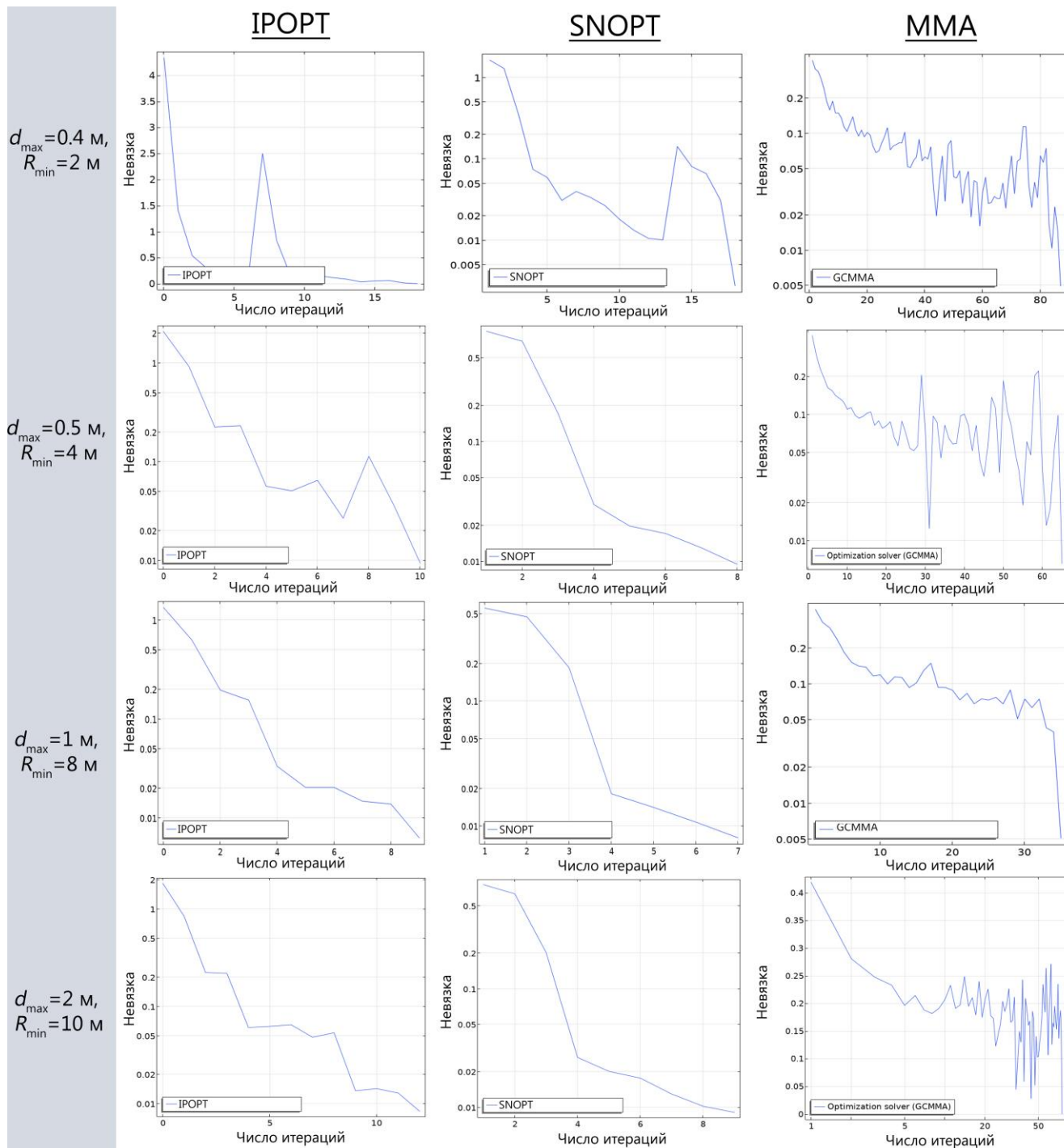
Относительное нормальное граничное смещение оболочки (%)



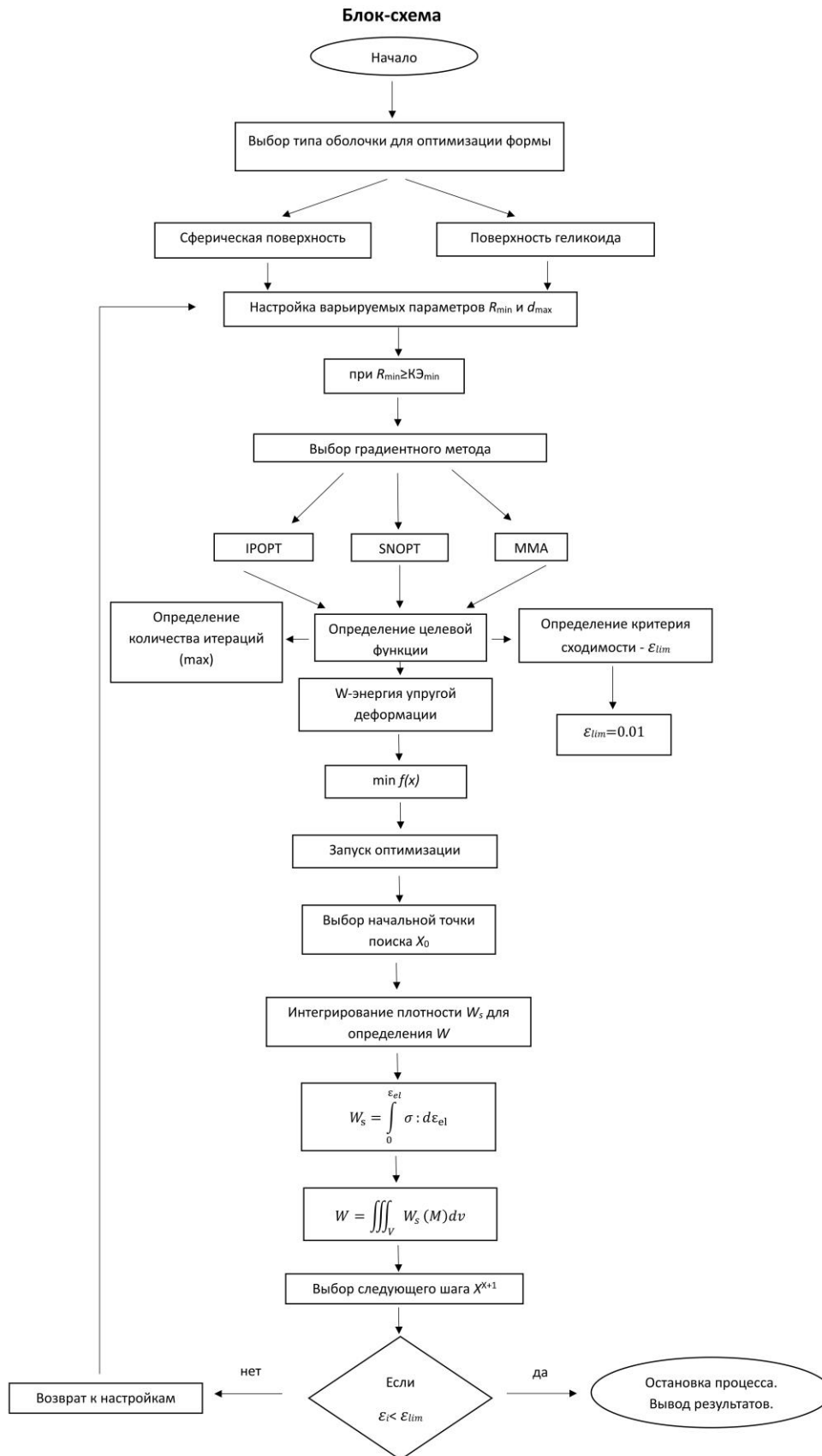
Приложение 7.1. Графики сходимости процесса оптимизации для развертывающегося геликоида



Приложение 7.2. Графики сходимости процесса оптимизации для развортывающегося геликоида



Приложение 8. Блок-схема



Приложение 9. Алгоритм расчета на ЭВМ

```

1  import numpy as np
2  import meshio
3  import nlopt
4  from scipy.sparse import coo_matrix
5  from scipy.sparse.linalg import spsolve
6  import logging
7  import os
8
9  # Настройка логирования
10 logging.basicConfig(level=logging.INFO)
11 logger = logging.getLogger(__name__)
12
13 class StructuralOptimizer:
14     def __init__(self, mesh_file, density=2300, youngs_modulus=30e9, poissons_ratio=
15         0.2, thickness=0.1,
16         R_min=None, d_max=None, shell_type="sphere" or "helicoid"):
17         """
18         Инициализация оптимизатора для структурной оптимизации оболочек
19
20         Parameters:
21         mesh_file: str - путь к файлу сетки
22         density: float - плотность
23         youngs_modulus: float - модуль Юнга материала
24         poissons_ratio: float - коэффициент Пуассона
25         thickness: float - толщина оболочки
26         R_min: float - радиус фильтра
27         d_max: float - максимальное перемещение
28         shell_type: str - тип оболочки ("sphere" или "helicoid")
29         """
30         self.mesh = meshio.read(mesh_file)
31         self.D = density
32         self.E = youngs_modulus
33         self.nu = poissons_ratio
34         self.t = thickness
35         self.shell_type = shell_type.lower()
36
37         # Установка параметров оптимизации в зависимости от типа оболочки
38         self.R_min, self.d_max = self.set_optimization_parameters(R_min, d_max)
39
40         logger.info(f"Тип оболочки: {self.shell_type}")
41         logger.info(f"Параметры оптимизации: R_min={self.R_min:.4f}, d_max={self.d_max
42             :.4f}")
43
44         # Параметры материала для плоского напряженного состояния
45         self.D = self.E * thickness / (1 - self.nu**2) * np.array([
46             [1, self.nu, 0],
47             [self.nu, 1, 0],
48             [0, 0, (1 - self.nu)/2]
49         ])
50         self.prepare_fem()
51
52     def set_optimization_parameters(self, R_min, d_max):
53         """
54         Установка параметров оптимизации в зависимости от типа оболочки
55
56         Для сферы:
57         - d_max: 3м ≤ d_max ≤ 5м (10-15% от ВВох)
58         - R_min: 5м ≤ R_min ≤ 10м (20-35% от ВВох)
59
60         Для геликоида:
61         - d_max: 0.5м ≤ d_max ≤ 1м (3-5% от ВВох)
62         - R_min: 4м ≤ R_min ≤ 10м (20-50% от ВВох)
63         """
64         # Вычисление ограничивающего прямоугольника
65         bbox_size = self.calculate_bbox_size()
66
67         if R_min is None or d_max is None:
68             # Установка значений по умолчанию в зависимости от типа оболочки
69             if self.shell_type == "sphere":
70                 R_min_default = 5

```

```

71         d_max_default = 3
72     else: # helicoid
73         R_min_default = 4
74         d_max_default = 0.5
75
76     R_min = R_min if R_min is not None else R_min_default
77     d_max = d_max if d_max is not None else d_max_default
78
79     # Проверка корректности параметров
80     self.validate_parameters(R_min, d_max, bbox_size)
81
82     return R_min, d_max
83
84 def calculate_bbox_size(self):
85     """Вычисление размера ограничивающего прямоугольника"""
86     min_coords = np.min(self.mesh.points, axis=0)
87     max_coords = np.max(self.mesh.points, axis=0)
88     bbox_size = np.linalg.norm(max_coords - min_coords)
89     return bbox_size
90
91 def validate_parameters(self, R_min, d_max, bbox_size):
92     """Проверка корректности параметров оптимизации"""
93     # Проверка минимального размера элемента
94     min_element_size = self.calculate_min_element_size()
95     if R_min < min_element_size:
96         logger.warning(f"R_min ({R_min:.4f}) меньше минимального размера элемента
97             ({min_element_size:.4f}")
98
99     # Проверка рекомендаций для типа оболочки
100     R_min_percent = (R_min / bbox_size) * 100
101     d_max_percent = (d_max / bbox_size) * 100
102
103     if self.shell_type == "sphere":
104         R_min_range = (5, 10)
105         d_max_range = (3, 5)
106     else: # helicoid
107         R_min_range = (4, 10)
108         d_max_range = (0.5, 1)
109
110     if self.shell_type.lower() == "sphere":
111         if not (20 <= R_min_percent <= 35):
112             logger.warning(f"R_min ({R_min_percent:.1f})% от BBox) вне
113                 рекомендуемого диапазона 20-35%")
114         if not (10 <= d_max_percent <= 15):
115             logger.warning(f"d_max ({d_max_percent:.1f})% от BBox) вне
116                 рекомендуемого диапазона 10-15%")
117     else: # helicoid
118         if not (20 <= R_min_percent <= 50):
119             logger.warning(f"R_min ({R_min_percent:.1f})% от BBox) вне
120                 рекомендуемого диапазона 20-50%")
121         if not (3 <= d_max_percent <= 5):
122             logger.warning(f"d_max ({d_max_percent:.1f})% от BBox) вне
123                 рекомендуемого диапазона 3-5%")
124
125 def calculate_min_element_size(self):
126     """Вычисление минимального размера конечного элемента"""
127     min_size = float('inf')
128     for element in self.mesh.cells_dict.get('triangle', []):
129         nodes = self.mesh.points[element]
130         for i in range(len(nodes)):
131             for j in range(i+1, len(nodes)):
132                 dist = np.linalg.norm(nodes[i] - nodes[j])
133                 if dist < min_size:
134                     min_size = dist
135     return min_size
136
137 def prepare_fem(self):
138     """Подготовка данных для метода конечных элементов"""
139     logger.info("Подготовка данных МКЭ...")
140
141     # Узлы и элементы
142     self.nodes = self.mesh.points

```

```

138 self.elements = self.mesh.cells_dict['triangle'] if 'triangle' in self.mesh.
    cells_dict else self.mesh.cells[0].data
139
140 self.n_nodes = len(self.nodes)
141 self.n_elems = len(self.elements)
142
143 # Параметры оптимизации
144 self.x = np.ones(self.n_elems) # Начальные плотности элементов
145 self.xmin = 0.001 # Минимальная плотность
146 self.xmax = 1.0 # Максимальная плотность
147
148 # Использование R_min как радиуса фильтра
149 self.filter_rmin = self.R_min
150
151 # Предел сходимости
152 self.epsilon_lim = 1e-2
153
154 # Построение матрицы жесткости
155 self.K_global, self.dofs = self.build_global_stiffness_matrix()
156
157 # Граничные условия
158 self.fixed_dofs = self.get_fixed_dofs()
159 self.free_dofs = np.setdiff1d(np.arange(len(self.dofs)), self.fixed_dofs)
160
161 # Нагрузка
162 self.load_vector = self.apply_loads()
163
164 def get_fixed_dofs(self):
165     """Определение закрепленных степеней свободы"""
166     # Для сферы закрепляем нижний край, для геликоида - нижний и верхний
    край, внутренний радиус
167     if self.shell_type == "sphere":
168         min_z = np.min(self.nodes[:, 2])
169         fixed_nodes = np.where(self.nodes[:, 2] < min_z + self.d_max)[0]
170     else: # helicoid
171         min_x = np.min(self.nodes[:, 0])
172         fixed_nodes = np.where(self.nodes[:, 0] < min_x + self.d_max)[0]
173
174     fixed_dofs = []
175     for node in fixed_nodes:
176         fixed_dofs.extend([3*node, 3*node+1, 3*node+2])
177     return np.array(fixed_dofs)
178
179 def apply_loads(self):
180     """Приложение нагрузок в зависимости от типа оболочки"""
181     load_vector = np.zeros(3 * self.n_nodes)
182
183     if self.shell_type == "sphere":
184         # Для сферы вертикальная равномерно распределенная нагрузка
185         max_z = np.max(self.nodes[:, 2])
186         load_nodes = np.where(self.nodes[:, 2] > max_z - self.d_max)[0]
187         load_per_node = -10000 / len(load_nodes) if len(load_nodes) > 0 else -
            10000
188         for node in load_nodes:
189             load_vector[3*node + 2] = load_per_node # Сила по Z
190     else: # helicoid
191         # Для геликоида вертикальная равномерно распределенная нагрузка
192         max_x = np.max(self.nodes[:, 0])
193         load_nodes = np.where(self.nodes[:, 0] > max_x - self.d_max)[0]
194         load_per_node = -5000 / len(load_nodes) if len(load_nodes) > 0 else -5000
195         for node in load_nodes:
196             load_vector[3*node + 1] = load_per_node # Сила по Z
197
198     return load_vector
199
200 def element_stiffness_matrix(self, nodes):
201     """Вычисление матрицы жесткости для треугольного элемента"""
202     # Координаты узлов
203     x1, y1, z1 = nodes[0]
204     x2, y2, z2 = nodes[1]
205     x3, y3, z3 = nodes[2]
206

```

```

207     # Площадь элемента
208     v1 = np.array([x2-x1, y2-y1, z2-z1])
209     v2 = np.array([x3-x1, y3-y1, z3-z1])
210     area = 0.5 * np.linalg.norm(np.cross(v1, v2))
211
212     # Упрощенная матрица жесткости
213     ke = np.eye(9) * area * self.E * self.t / (1 - self.nu**2)
214
215     return ke
216
217 def build_global_stiffness_matrix(self):
218     """Построение глобальной матрицы жесткости"""
219     n_dofs = 3 * self.n_nodes
220     K_data = []
221     rows = []
222     cols = []
223
224     for elem_idx, element in enumerate(self.elements):
225         nodes = self.nodes[element]
226         ke = self.element_stiffness_matrix(nodes)
227
228         # Сопоставление степеней свободы элемента с глобальными
229         dofs = []
230         for node in element:
231             dofs.extend([3*node, 3*node+1, 3*node+2])
232
233         # Добавление в глобальную матрицу
234         for i in range(9):
235             for j in range(9):
236                 if ke[i, j] != 0:
237                     rows.append(dofs[i])
238                     cols.append(dofs[j])
239                     K_data.append(ke[i, j])
240
241     return coo_matrix((K_data, (rows, cols)), shape=(n_dofs, n_dofs), np.arange(
242         n_dofs))
243
244 def solve_fem(self, x):
245     """Решение задачи МКЭ для заданных плотностей"""
246     # Модель SIMP:  $K_{mod} = x^p * K_{original}$ 
247     p = 3 # Параметр штрафа
248     K_mod = self.K_global.copy()
249
250     # Масштабирование жесткости элементов согласно их плотности
251     K_mod = K_mod * np.mean(x**p)
252
253     # Применение граничных условий
254     K_mod = K_mod.tocsr()
255     K_free = K_mod[self.free_dofs, :][:, self.free_dofs]
256     f_free = self.load_vector[self.free_dofs]
257
258     # Решение системы уравнений
259     u_free = spsolve(K_free, f_free)
260
261     # Восстановление полного вектора перемещений
262     u = np.zeros(3 * self.n_nodes)
263     u[self.free_dofs] = u_free
264
265     return u
266
267 def compliance(self, x):
268     """Вычисление податливости (энергии упругой деформации)"""
269     u = self.solve_fem(x)
270     return np.dot(u, self.K_global.dot(u))
271
272 def optimize(self, max_iter=100):
273     """Основная процедура оптимизации"""
274     logger.info("Запуск оптимизации...")
275
276 def objective(x, grad):
277     """Целевая функция для оптимизатора"""
278     if grad.size > 0:

```

```

278         sens = self.sensitivity_analysis(x)
279         grad[:] = self.filter_sensitivities(x, sens)
280
281         compliance_value = self.compliance(x)
282         logger.debug(f"Текущая податливость: {compliance_value:.6e}")
283         return compliance_value
284
285     # Настройка оптимизатора MMA
286     opt = nlopt.opt(nlopt.LD_MMA, self.n_elems)
287     opt.set_min_objective(objective)
288     opt.set_lower_bounds(self.xmin)
289     opt.set_upper_bounds(self.xmax)
290     opt.set_maxeval(max_iter)
291     opt.set_ftol_rel(1e-2)
292
293     # Запуск оптимизации с отслеживанием сходимости
294     x_prev = self.x.copy()
295     x_opt = self.x.copy()
296
297     def callback(x, grad):
298         """Callback-функция для отслеживания прогресса"""
299         nonlocal x_prev
300         current_iter = opt.get_numevals()
301         if self.check_convergence(x_prev, x, current_iter):
302             raise nlopt.ForcedStop("Сходимость достигнута")
303         x_prev = x.copy()
304
305     # Установка callback-функции
306     try:
307         opt.set_maxtime(3600) # Максимальное время выполнения - 1 час
308         x_opt = opt.optimize(self.x)
309         minf = opt.last_optimum_value()
310         logger.info(f"Оптимизация завершена успешно. Минимальное значение: {minf
311 :.6e}")
312     except nlopt.ForcedStop as e:
313         logger.info(f"Оптимизация остановлена: {e}")
314     except Exception as e:
315         logger.error(f"Ошибка оптимизации: {e}")
316
317     return x_opt
318
319     def optimize_shell(shell_type="sphere", R_min=None, d_max=None):
320         """Функция для оптимизации выбранного типа оболочки"""
321
322         # Выбор файла сетки в зависимости от типа оболочки
323         if shell_type == "sphere":
324             mesh_file = "half_sphere.msh"
325             logger.info("Оптимизация сферы")
326         else: # helicoid
327             mesh_file = "helicoid.msh"
328             logger.info("Оптимизация геликоида")
329
330         # Параметры оптимизации в зависимости от типа оболочки
331         if shell_type == "sphere":
332             R_min = R_min if R_min is not None else 5
333             d_max = d_max if d_max is not None else 3
334         else: # helicoid
335             R_min = R_min if R_min is not None else 4
336             d_max = d_max if d_max is not None else 0.5
337
338         # Создание и настройка оптимизатора
339         optimizer = StructuralOptimizer(
340             mesh_file=mesh_file,
341             R_min=R_min,
342             d_max=d_max,
343             shell_type=shell_type
344         )
345
346         # Запуск оптимизации
347         optimal_densities = optimizer.optimize(max_iter=100)
348
349         # Сохранение результатов

```

```

349     output_prefix = f"optimized_{shell_type}"
350     np.savetxt(f"{output_prefix}_densities.txt", optimal_densities)
351
352     # Сохранение оптимизированной сетки
353     optimizer.mesh.cell_data["density"] = [optimal_densities]
354     meshio.write(f"{output_prefix}_mesh.vtk", optimizer.mesh)
355
356     logger.info(f"Результаты сохранены в файлы с префиксом {output_prefix}")
357     return optimal_densities
358
359 def main():
360     """Основная функция с примером использования"""
361
362     print("Выберите тип оболочки для оптимизации:")
363     print("1 - Сфера")
364     print("2 - Геликоид")
365
366     choice = input("Введите номер (1 или 2): ").strip()
367
368     if choice == "1":
369         shell_type = "sphere"
370     elif choice == "2":
371         shell_type = "helicoid"
372     else:
373         print("Неверный выбор. Используется сфера по умолчанию.")
374         shell_type = "sphere"
375
376     # Дополнительные параметры (опционально)
377     use_custom_params = input("Использовать пользовательские параметры R_min и d_max?
378     (y/n): ").strip().lower()
379
380     R_min = None
381     d_max = None
382
383     if use_custom_params == 'y':
384         try:
385             R_min = float(input("Введите R_min: "))
386             d_max = float(input("Введите d_max: "))
387         except ValueError:
388             print("Ошибка ввода. Используются параметры по умолчанию.")
389             R_min = None
390             d_max = None
391
392     # Запуск оптимизации
393     try:
394         optimal_densities = optimize_shell(shell_type, R_min, d_max)
395         print("Оптимизация завершена успешно!")
396     except Exception as e:
397         print(f"Ошибка при оптимизации: {e}")
398
399 if __name__ == "__main__":
400     main()

```

Приложение 10. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2025693323

**Оптимизация формы сферы по критерию энергии
упругой деформации с использованием варьируемых
параметров**

Правообладатель: *Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов имени
Патриса Лумумбы» (RU)*

Автор(ы): *Ермакова Евгения Владимировна (RU)*

Заявка № 2025690222

Дата поступления **31 октября 2025 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **27 ноября 2025 г.**

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат 00a570e4f7add8d531b4b8818e75f29506
Владелец **Зубов Юрий Сергеевич**
Действителен с 04.09.2025 по 28.11.2026

Ю.С. Зубов



Приложение 11. Справка о внедрении результатов работы

ОБЩЕСТВО С ОГРАНИЧЕННОЙ ОТВЕТСТВЕННОСТЬЮ

«ИнтерСтрой Проект»

г.Москва, ул. 6-я Радиальная, д. 22, корп. 1

Тел: (495) 325-04-10, (495) 325-26-15

№ 24.10
От 20.10.2025 г.

СПРАВКА

о внедрении научных результатов диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук Ермаковой Е.В.

Результаты диссертационной работы Ермаковой Е.В. «Оптимизация формы тонких оболочек по критерию упругой энергии деформирования» были использованы ООО «ИнтерСтрой Проект» при расчете и проектировании купола православного храма в честь иконы Божьей Матери «Отрада и Утешение» по адресу: г. Москва, Ярославское ш., вл.147.

Внедрена в реальное производство и строительство методика определения оптимальной формы сферической оболочки по критерию энергии упругой деформации с использованием варьируемых параметров максимального перемещения и радиуса фильтра.

Положительным эффектом данной методики является возможность определения оптимальной высоты и формы купола храма «Отрада и Утешение», что улучшает технологичность строительного процесса и приводит к разработке рациональных решений пространственных конструкций.

Практическое применение результатов диссертационной работы позволяет проектировать прочные и безопасные конструкции и будет использоваться при создании новых объектов.

Генеральный директор
ООО «ИнтерСтрой Проект»

Главный архитектор
ООО «ИнтерСтрой Проект»



Сироткин А.В.

Тархова Е.А.