Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Российский университет дружбы народов «РУДН»

На правах рукописи

Жуйков Константин Николаевич

ОБ ИНДЕКСЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ГРУППАМИ СДВИГОВ

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук
Савин Антон Юрьевич

Москва — 2022

Оглавление

Стр.

Введение

Актуальность темы

В 1960 году Гельфанд в своей статье [11] поставил задачу вычисления индекса эллиптических псевдодифференциальных операторов (ПДО). В 1963 году проблема индекса была решена Атьёй и Зингером [34], которые получили теорему об индексе эллиптических псевдодифференциальных операторов на гладком замкнутом многообразии. Эта теорема выражает аналитический индекс оператора в терминах топологических инвариантов, а именно, характера Черна символа оператора и класса Тодда комплексифицированного кокасательного расслоения многообразия. В дальнейшем стали появляться различные обобщения теоремы об индексе — эквивариантная теорема об индексе [33], индекс семейства эллиптических операторов [36], индекс эллиптических операторов на некомпактных многообразиях [32], теорема об индексе на многообразии с краем [41], индекс тёплицевых операторов [42] и т.д. Также теория индекса нашла интересные применения в физике, например в квантовой теории поля.

Под G-теорией понимается теория эллиптических операторов, ассоциированных с действием группы G на многообразии. Более точно, для данного представления группы G в пространстве функций на многообразии M рассматривается класс операторов, порождённых операторами из представления и псевдодифференциальными операторами. Такие операторы были названы *G-операторами.* Впервые G-операторы появились в работе Карлемана [43] 1932 г., который рассматривал эллиптическую граничную задачу с нелокальными краевыми условиями, отвечающим инволюции границы. При этом задача сводится к изучению G-оператора на границе. В отличие от случая локального краевого условия, при сведении такой задачи на границу возникает не сингулярное интегральное уравнение, а *сингулярное интегральное уравнение со сдвигом.* Эта работа мотивировала изучение нелокальных операторов со сдвигами аргументов на гладких замкнутых многообразиях.

Теория эллиптических дифференциально-разностных уравнений была построена Скубачевским [66], теория краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений с растяжениями и сжатиями переменных была построена в работах Россовского [20].

Естественным обобщением операторов, возникших у Карлемана, являются операторы вида

$$D = \sum_{g \in G} D_g T_g \colon C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M), \tag{1}$$

где G — некоторая дискретная группа диффеоморфизмов гладкого замкнутого многообразия M, $[T_g u](x) = u(g^{-1}(x))$ — оператор сдвига, отвечающий диффеоморфизму $g \colon M \to M$, $\{D_g\}$ — набор псевдодифференциальных операторов порядка $\leqslant m$. Суммирование ведётся по конечному числу элементов $g \in G$, при этом сама группа G может быть как конечной, так и бесконечной. К изучению операторов (1) сводятся нелокальные краевые задачи для эллиптических дифференциальных уравнений в областях в $\mathbb{R}^n$, отвечающие диффеоморфизмам границы. Результаты о фредгольмовости операторов (1) в случаях конечной и бесконечной группы диффеоморфизмов получены в основополагающих работах Антоневича [3; 4], Антоневича и Лебедева (см. [6], [30], а также цитированную в них литературу), Рабиновича [18]. При этом как методы, так и результаты существенно зависели от свойств группы (конечной или бесконечной), порождаемой преобразованиями переменных. Было введено понятие траекторного символа для оператора (1), а именно, траекторный символ можно определить как семейство конечно-разностных операторов, параметризованное кокасательным расслоением многообразия без нулевого сечения $T^*_0 M$. Указанные операторы действуют ограниченно в пространствах $\ell^2(G) \to \ell^2(G)$ квадратично суммируемых функций на группе. Кроме того, символ можно определить как элемент скрещенного произведения [68] алгебры непрерывных функций на косферическом расслоении S^*M многообразия и группы G. Условие эллиптичности определяется как обратимость символа оператора (1) и влечёт фредгольмовость оператора в подходящих пространствах Соболева. При весьма общих предположениях установлена эквивалентность условий эллиптичности для этих двух символов. Важно отметить, что, в отличие от теории псевдодифференциальных операторов, эллиптичность (и, следовательно, фредгольмовость) оператора (1) существенно зависит от показателя гладкости s пространств Соболева H^s, в которых оператор действует (см., напр., [20; 24; 51]).

Первая формула индекса для нелокальных операторов была получена Антоневичем [2] для случая конечной группы G. Индекс нелокального оператора выражается через числа Лефшеца некоторого вспомогательного эллиптического псевдодифференциального оператора на многообразии M. В случае конечной группы для чисел Лефшеца имеется формула аналогичная формуле Атьи–Зингера [35], что решает проблему индекса. В случае бесконечной группы проблема оказалась намного более сложной и потребовала привлечения новых методов, связанных с некоммутативной геометрией.

Первое продвижение получено в работе Конна [44], который рассматривал операторы на прямой, порождённые дифференциальными операторами с коэффициентами из некоммутативной алгебры. Дальнейшие продвижения в решении проблемы индекса для эллиптических G-операторов на гладком замкнутом многообразии методами некоммутативной геометрии были сделаны в работах Назайкинского, Савина и Стернина [60], Савина и Стернина [23; 24], Савина [22]. Также G-операторы на контактных многообразиях изучались в [62], на многообразиях с особенностями — в [25], в $\mathbb{R}^n$ — в [7].

Проблема индекса G-операторов на некомпактных многообразиях изучалась мало. В локальном случае (т.е. без сдвигов) в работах Атьи, Патоди и Зингера [31] изучалась проблема индекса операторов Дирака на многообразиях с краем (или, эквивалентно, на некомактных многообразиях с цилиндрическими концами). Эта проблема эквивалентна задаче на некомпактном многообразии с цилиндрическим концом. В цитируемой серии работ введено важное понятие η-инварианта, описывающего вклад границы в формулу индекса. Он определяется как регуляризация типа ζ-функции сигнатуры квадратичной формы, ассоциированной с некоторым самосопряжённым оператором, и по своему определению является спектральным инвариантом. Исследованием η-инвариантов и их приложений в дальнейшем занимались многие авторы, например Бисмю, Чигер, Мюллер, Виттен и др.

Важное обобщение η-инварианта Атьи–Патоди–Зингера было найдено Мельроузом [56], который рассматривал ПДО с параметром, и η-инвариант определялся как специальная регуляризация числа вращения для таких семейств. А именно, в цитированной работе было предложено рассматривать семейства $D(p)$ ПДО с параметром $p \in \mathbb{R}$, и η-инвариант семейства определялся как специальная регуляризация числа вращения, представимого выражением

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{tr} \left(D^{-1}(p) \frac{dD(p)}{dp} \right) dp, \tag{2}$$

где tr — след оператора и предполагается, что семейство $D(p)$ является эллиптическим с параметром в смысле Аграновича–Вишика (см. [1]) и обратимым при всех $p \in \mathbb{R}$. Заметим, что регуляризация в (2) требуется как для следа tr (поскольку он применяется к оператору $D^{-1}dD/dp$, след которого, вообще говоря, не определён), так и для интеграла (который, как правило, расходится на бесконечности). Мельроуз определил как регуляризованный след (используя дифференцирование семейства по параметру), так и регуляризованный интеграл (используя регуляризацию типа главного значения), исследовал свойства η-инварианта, в частности, показал, что η-инвариант Атьи-Патоди-Зингера совпадает с η-инвариантом некоторого семейства с параметром. В дальнейшем η-инвариант семейств использовался в формулах индекса на многообразиях с коническими точками [47; 59] как вклад в формулу индекса от особой точки; кроме этого, были определены η-формы [57]. Отметим, что η-инварианты для G-операторов не изучались.

Во многих задачах возникают эллиптические уравнения с периодическими коэффициентами на некомпактных многообразиях. В частности, они играют важную роль в квантовой механике и физике твердого тела (см., напр., обзор [52] и ссылки в нём), а также в геометрии и топологии (см., напр., [17; 28; 32]). В то же время ряд задач геометрии (напр., задача о гладких структурах в $\mathbb{R}^4$ [67], задача изучения пространств модулей метрик Ямабе [54] и др.) и анализа (см. [40; 50]) приводят к изучению операторов с коэффициентами, периодическими на бесконечности (в отличие от рассмотренной выше ситуации, когда условие периодичности выполняется всюду). В литературе эта теория называется эллиптической теорией на многообразиях с периодическими концами.

На многообразиях с периодическими концами получены критерии фредгольмовости для операторов в пространствах Соболева (см. [19; 67]). Получена формула индекса для операторов типа Дирака на многообразиях с периодическими концами [58]. Авторы цитированный работы нашли обобщение η-инварианта Атьи–Патоди–Зингера, в терминах которого дана формула индекса. Следует отметить, что проблема индекса для эллиптических операторов общего вида на многообразиях с периодическими концами остается открытой. Задача изучалась в одномерном случае, т. е. для ПДО на прямой. В частности, K-группа C^*-алгебры символов псевдодифференциальных операторов вычислена в [55], формулы индекса для некоторых примеров приведены в [39; 40; 50]. Однако формула индекса для общих операторов не была дана даже в одномерном случае.

В G-теории также возникает интересный класс задач, где в качестве сдвига рассматривается представление группы G ограниченными операторами, действующими в пространстве $L^2(M)$ как *квантованные канонические преобразования*, которые являются квантованиями однородных канонических преобразований $g\colon T_0^*M \to T_0^*M$. Основное отличие от рассматриваемых выше G-операторов состоит в том, что здесь оператор ассоциирован с действием группы G на T_0^*M (а не на самом многообразии M). Данная структура включает операторы сдвига как частный случай, но также позволяет рассмотреть множество новых интересных приложений: граничные задачи для гиперболических уравнений с краевыми условиями на всей границе [37], операторы, ассоциированные с волновой группой на римановых многообразиях, и, наконец, метаплектические операторы. Для операторов, ассоциированных с квантованными каноническими преобразованиями, получен критерий фредгольмовости [63]. Однако открытой задачей является получение явных выражений для условий эллиптичности таких операторов в зависимости от показателя гладкости пространств Соболева, в которых оператор действует.

Цель

Целью работы является исследование эллиптических G-операторов на некоторых некомпактных пространствах и получение соответствующих формул индекса. Более точно, в работе изучаются дифференциально-разностные операторы на бесконечном цилиндре. Конормальный символ таких операторов на бесконечности представляет собой семейство операторов с параметром и периодическими коэффициентами на гладком замкнутом многообразии, для которых надо построить η-инвариант, отвечающий вкладу бесконечности в формулу индекса. Также изучаются операторы на прямой с коэффициентами, периодическими на бесконечности. В этом случае возникает необходимость построения η-инварианта для операторов со сдвигами. Наконец, изучаются операторы в $\mathbb{R}^N$, ассоциированные с метаплектической группой. Интерес представляет получение явных условий эллиптичности, гарантирующих фредгольмовость рассматриваемого оператора. Установленные результаты обобщают и расширяют некоторые результаты в теории эллиптических операторов на некомпактных многообразиях, и являются новыми в теории G-операторов.

Методы исследования

В работе широко используется аппарат классических ПДО и ПДО с параметром. η-инвариант определяется как некоторая регуляризация числа вращения, построенная при помощи конечно-разностных методов и асимптотических методов. При доказательстве теорем об индексе используются методы K-теории и C^*-алгебр, теории характеристических классов.

Основные результаты. Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1) Для обратимых семейств ПДО с параметром и периодическими коэффициентами на гладком замкнутом многообразии построен η-инвариант и установлены его основные свойства. Получена формула для производной η-инварианта.
2) Для эллиптических дифференциально-разностных операторов на бесконечном цилиндре получена формула индекса, включающая η-инвариант как вклад бесконечности.
3) Для ПДО на прямой, периодических на бесконечности, дано понятие η-инварианта, установлены его основные свойства, предъявлена соответствующая формула индекса. Получены формулы индекса и η-инварианта для дифференциальных операторов в терминах соответствующих матриц монодромии.
4) Исследованы нелокальные операторы в $\mathbb{R}^N$, ассоциированные с метаплектической группой. Даны явные условия на коэффициенты таких операторов, гарантирующие фредгольмовость.

Теоретическая значимость

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в исследованиях по теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Апробация диссертационной работы

Результаты диссертации докладывались на следующих международных конференциях:

– Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов”, Москва, 10–27 ноября 2020, 12–23 апреля 2021, 11–22 апреля 2022.
– Международная конференция “Понтрягинские чтения” в рамках Международной Воронежской весенней школы “Современные методы тео-

рии краевых задач" (ВВМШ), Воронеж, 3–9 мая 2020, 3–9 мая 2021, 3–9 мая 2022.

– Международный воркшоп "OTHA Online Workshop 2020 on Operator Theory and Harmonic Analysis and Their Applications", Ростов-на-Дону, 24–25 августа 2020.
– Международная конференция "Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis" (OTHA), Ростов-на-Дону, 22–27 августа 2021, 21–26 августа 2022.
– Международная студенческая конференция "Science and Progress", Санкт-Петербург, 10–12 ноября 2020, 9–11 ноября 2021.
– Летняя школа по спектральной теории в рамках тематической программы "Spectral Theory and Mathematical Physics" (STMP), Санкт-Петербург, 20–30 июня 2021.
– Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ), пос. Сатера, Крым, 17–26 сентября 2021.
– Международная конференция "The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations" (DFDE), Москва, 28 июня–5 июля 2022.

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах:

– Научный студенческий семинар по дифференциальным уравнениям, рук. А.Ю. Савин, П.А. Сипайло, РУДН (неоднократно, 2019–2021)
– Общематематический семинар молодых ученых Математического института им. С.М. Никольского, рук. Ю.О. Беляева, РУДН, 23.03.2021.
– Научный семинар Математического института им. С.М. Никольского РУДН по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям, рук. А.Л. Скубачевский, РУДН, 12.10.2021, 07.06.2022.
– Научный семинар "Некоммутативная геометрия и топология", рук. А.С. Мищенко, И.К. Бабенко, В.М. Мануйлов, А.А. Ирматов, А.А. Арутюнов, Ф.Ю. Попеленский, МГУ, 17.03.2022.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 14 работах, из них 4 статьи в научных журналах, индексируемых в международных базах данных (Scopus, MathSciNet) и 10 — в тезисах докладов на международных конференциях.

Список публикаций приведён в конце введения. Результаты совместных работ, включённые в диссертацию, получены автором самостоятельно.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения. Полный объём диссертации составляет 108 страниц. Список литературы содержит 70 наименований.

Краткое содержание работы

Глава 1 состоит из 5 параграфов и посвящена построению η-инварианта для операторов с параметром и периодическими коэффициентами на гладком замкнутом многообразии.

В **§1.1** напоминается определение топологии Фреше на пространстве псевдодифференциальных операторов с параметром, вводится основной объект исследования — операторы с параметром и периодическими коэффициентами, вводится понятие главного символа рассматриваемых операторов. Более точно, рассматривается факторпространство

$$\Phi_p^m(X) = \mathcal{S}\big(\mathbb{Z},\Psi_p^m(X)\big)/L$$

пространства Фреше $\mathcal{S}\big(\mathbb{Z},\Psi_p^m(X)\big)$ быстро убывающих последовательностей операторов из пространства псевдодифференциальных операторов с параметром $\Psi_p^m(X)$ по замкнутому подпространству

$$L=\Big\{\{D_k(p)\} \in \mathcal{S}\big(\mathbb{Z},\Psi_p^{-\infty}(X)\big) \;\Big|\; \sum_k D_k(p)e^{2\pi ikp}= 0\,\forall p \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Произвольному элементу $D = \{D_k(p)\} \in \Phi_p^m(X)$ сопоставим оператор

$$D(p) = \sum_k D_k(p)e^{2\pi ikp} \colon C^\infty(X) \longrightarrow C^\infty(X). \tag{3}$$

Очевидно, что этот оператор корректно определён, т.е. если $D \in L$, то $D(p) \equiv 0$. Далее элементы пространства $\Phi_p^m(X)$ будем записывать в виде (3). Введём обозначение $\Phi_p(X) = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \Phi_p^m(X)$.

Определение 0.1. Определим отображение

$$\begin{gathered}\overline{\sigma}_{\mathrm{pr}} \colon \Phi_p^m(X) \longrightarrow C^\infty\big(S(T^*X \oplus \mathbb{R}) \times \mathbb{S}^1\big),\\ D(p) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} D_k(p)e^{2\pi ikp} \longmapsto \overline{\sigma}_{\mathrm{pr}}(D(p)) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sigma_{\mathrm{pr}}(D_k)(x,\xi,p)z^k,\end{gathered} \tag{4}$$

где $z = e^{i\varphi}$. Функция $\overline{\sigma}_{\mathrm{pr}}(D(p)) \in C^\infty\big(S(T^*X \oplus \mathbb{R}) \times \mathbb{S}^1\big)$ называется *главным символом* оператора с параметром $D(p)$.

Отображение (4) корректно определено, поскольку символ семейств со сглаживающими коэффициентами тождественно равен нулю.

Предложение 0.2. *Имеет место точная последовательность алгебр*

$$0 \longrightarrow \Phi_p^{-1}(X) \longrightarrow \Phi_p^0(X) \xrightarrow{\overline{\sigma}_{\mathrm{pr}}} C^\infty\big(S(T^*X \oplus \mathbb{R}) \times \mathbb{S}^1\big) \longrightarrow 0.$$

В **§1.2** вводится пространство $S_{as}(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\mathbb{R})$ функций со специальной асимптотикой на бесконечности:

$$f(x) \sim \sum_{i \leqslant N} c_i^\pm(x) x^i + \sum_{j=0}^N d_j^\pm(x) x^j \ln|x| \quad \text{при } x \to \pm\infty$$

для некоторого $N \in \mathbb{Z}_+$, где $c_i^\pm$, $d_j^\pm$ — гладкие периодические функции периода 1. Ниже, если специально не оговорено противное, период периодической функции предполагается равным единице. Следующая теорема представляет собой основной технический результат главы.

Теорема 0.3. *Оператор разностного дифференцирования*

$$\begin{aligned} \delta\colon S_{as}(\mathbb{R}) &\longrightarrow S_{as}(\mathbb{R}) \\ f(x) &\longmapsto (\delta f)(x) = f(x+1) - f(x) \end{aligned}$$

корректно определён и является изоморфизмом линейных пространств

$$\delta\colon S_{as}(\mathbb{R})/\ker\delta \longrightarrow S_{as}(\mathbb{R}),$$

где $\ker\delta$ *— пространство гладких периодических функций.*

В **§1.3** строится регуляризация следа операторов с параметром и периодическими коэффициентами.

Определение 0.4. *Регуляризованным следом* оператора с параметром $D(p) \in \Phi_p^m(X)$ называется функция

$$(\mathrm{TR}\, D)(p) = \delta^{-\ell}\big[\mathrm{tr}(\delta^\ell D(p))\big] \in S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P}, \tag{5}$$

где $\ell > m + \dim X$, $[f(p)]$ — класс эквивалентности функции $f(p)$, а

$$\mathcal{P} = \left\{ f(p) \in C^\infty(\mathbb{R}) \;\middle|\; \exists N > 0\colon f(p) = \sum_{j=0}^N f_j(p) p^j \right\}.$$

В **§1.4** строится регуляризация интеграла функций из пространства $S_{as}(\mathbb{R})$.

Предложение 0.5. *Пусть* $f(p) \in S_{as}(\mathbb{R})$. *Тогда при* $T \to +\infty$ *существует асимптотическое разложение*

$$\int\limits_{-T}^{T} f(p)dp \sim \sum_{j\leqslant N} c_j(T)T^j + \sum_{0\leqslant r\leqslant N} d_r(T)T^r \ln T, \tag{6}$$

где $c_j(T)$, $d_r(T)$ *— гладкие периодические функции.*

Определение 0.6. *Регуляризованным интегралом* функции $f \in S_{as}(\mathbb{R})$ будем называть среднее значение коэффициента $c_0(T)$ в асимптотическом разложении (6) и будем обозначать его через

$$\fint\limits_{\mathbb{R}} f(p)dp \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_0^1 c_0(T)dT. \tag{7}$$

Следствие 0.7. *Функционал* $\mathrm{Tr}\colon \Phi_p(X) \to \mathbb{C}$, *определяемый формулой*

$$\mathrm{Tr}\, D \stackrel{\mathrm{def}}{=} \fint\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{TR}\, D(p)dp,$$

корректно определён и является следом, т.е. $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ *для любых* $A,B \in \Phi_p(X)$.

В **§1.5** вводится понятие η-инварианта и доказываются его основные свойства.

Определение 0.8. Пусть $D(p) \in \Phi_p^m(X)$ — обратимый элемент, т.е. существует обратный элемент $D^{-1}(p) \in \Phi_p^{-m}(X)$. Тогда число

$$\eta(D) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{Tr}\left(D^{-1}\partial_p D\right)$$

называется η-*инвариантом* оператора с параметром $D(p)$.

Предложение 0.9 (Свойства η-инварианта).

1. η-*инвариант удовлетворяет логарифмическому свойству:*

$$\eta(AB) = \eta(A) + \eta(B)$$

для любых обратимых элементов $A,B \in \Phi_p(X)$;

2. η-инвариант (1.49) является обобщением η-инварианта Мельроуза, а именно, если $D(p) \in \Psi_p(X)$ — обратимый ПДО с параметром, то

$$\eta(D) = \eta_M(D), \quad \text{где} \quad \eta_M(D) = \frac{1}{2\pi i} \fint_{\mathbb{R}} \mathrm{TR}_M \left(D^{-1}\partial_p D\right) dp.$$

Предложение 0.10. *Пусть $D_t(p) \in \Phi_p^m(X)$, $t \in [0,1]$ — гладкая гомотопия семейств обратимых операторов с параметром. Тогда*

1) производная η-инварианта семейства D_t по параметру t равна

$$\partial_t \eta(D_t) = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Tr}\bigl(\partial_p(D_t^{-1}\partial_t D_t)\bigr);$$

2) композиция $\widetilde{\operatorname{Tr}} \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname{Tr} \circ \partial_p$ является следом на алгебре $\Phi_p(X)$, т.е. $\widetilde{\operatorname{Tr}}(AB) = \widetilde{\operatorname{Tr}}(BA)$ для всех семейств $A,B \in \Phi_p(X)$;

3) для оператора с параметром $D(p) = \sum_k D_k(p)e^{2\pi ikp} \in \Phi_p^m(X)$ имеем

$$\widetilde{\operatorname{Tr}}\, D(p) = \int_{T^*X} [d_{0,-n}(x,\xi,1) - d_{0,-n}(x,\xi,-1)] \frac{\omega^n}{n!}, \quad n = \dim X,$$

где $(x,\xi) \in T^*X$, $\omega = \sum dx_j \wedge d\xi_j$ — симплектическая форма на T^*X, а $d_{0,j}$ — однородная компонента степени j полного символа ПДО с параметром $D_0(p)$, при этом интеграл в (1.51) абсолютно сходится.

На этом завершается первая глава.

Глава 2 состоит из 5 параграфов и посвящена проблеме индекса дифференциально-разностных операторов на бесконечном цилиндре.

В **§2.1** вводятся основные определения и даётся постановка задачи. На цилиндре $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ рассматривается оператор вида

$$D = \sum_k D_k T^k \colon H^{s,\gamma^-,\gamma^+}(M,\mathbb{C}^N) \longrightarrow H^{s-m,\gamma^-,\gamma^+}(M,\mathbb{C}^N), \tag{8}$$

где D_k — матричный дифференциальный оператор порядка $\leqslant m$ на M, $T^k u(x,t) = u(x,t-2\pi k)$ — оператор сдвига по переменной t, а $H^{s,\gamma^-,\gamma^+}(M)$ — весовое пространство Соболева. При этом мы предполагаем, что только конечное число слагаемых в сумме (8) не равно нулю, а коэффициенты оператора D_k не зависят от t при больших t.

Определение 0.11. *Внутренним символом* оператора (8) в точке $(x,t,\xi,p) \in T_0^*M = \{(x,t,\xi,p) \mid \xi^2 + p^2 \neq 0\}$ кокасательного расслоения без нулевого сечения называется оператор

$$\sigma(D)(x,t,\xi,p) = \sum_k \sigma(D_k)(x,t{+}2\pi n,\xi,p)\mathcal{T}^k \colon \ell^2(\mathbb{Z},\mu)\otimes\mathbb{C}^N \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z},\mu)\otimes\mathbb{C}^N, \quad (9)$$

где $\sigma(D_k)$ — главный символ оператора D_k, $\mathcal{T}w(n) = w(n-1)$ — оператор сдвига последовательности.

Наконец,

$$\ell^2(\mathbb{Z},\mu){=}\left\{w(n)\,\Big|\, \sum_n |w(n)|^2\mu(n) < \infty\right\}, \text{ где вес } \mu(n) = \begin{cases} e^{-2\gamma_+ n} & \text{при } n \geqslant 1, \\ e^{-2\gamma_- n} & \text{при } n \leqslant -1. \end{cases} \quad (10)$$

Определение 0.12. *Конормальным символом* оператора (8) называется пара $\bigl(\sigma_c^+(D),\sigma_c^-(D)\bigr)$ операторов с параметром и периодическими коэффициентами:

$$\sigma_c^\pm(D)(p) = \sum_k D_k^\pm(p)e^{ikp} \colon H^s(\mathbb{S}^1,\mathbb{C}^N) \longrightarrow H^{s-m}(\mathbb{S}^1,\mathbb{C}^N). \quad (11)$$

Отметим, что операторы с параметром $\sigma_c^\pm(D)(p) \in \Phi_p(\mathbb{S}^1)$ рассматривались в главе 1 в случае 1-периодических коэффициентов (см. (3)).

Определение 0.13. Оператор (8) называется *эллиптическим*, если

1) оператор (9) обратим при всех $(x,t,\xi,p) \in T_0^*M$;
2) операторы (11) обратимы на весовых прямых $L_{\gamma^\pm}$.

Из эллиптичности оператора (8) следует его фредгольмовость.

В **§2.2** определяется топологический индекс задачи. Далее используются следующие обозначения:

– σ — внутренний символ оператора (8) (см. (9));
– $\sigma_c^\pm$ — конормальные символы оператора (8) на плюс и минус бесконечности (см. (11));
– $M_0 = \mathbb{S}^1 \times [0,2\pi] \subset M$ — фундаментальная область действия группы $\mathbb{Z}$ на M;
– $\Omega^*\bigl(S^*M_0,\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z},\mu) \otimes \mathbb{C}^N)\bigr)$ — алгебра дифференциальных форм на косферическом расслоении $S^*M_0 \subset S^*M$ со значениями в алгебре ограниченных операторов в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z},\mu) \otimes \mathbb{C}^N$;
– d — продолжение внешнего дифференциала на S^*M_0 на указанную алгебру дифференциальных форм.

Определим функционал

$$\tau_{S^*M}\colon \Omega^*\big(S^*M_0,\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z},\mu)\otimes\mathbb{C}^N)\big)\longrightarrow\mathbb{C},\quad \omega\longmapsto\int\limits_{S^*M_0}\operatorname{Tr}\omega,$$

где Tr — операторный след, определённый на идеале форм со значениями в ядерных операторах.

Определение 0.14. *Полным символом* семейства $\sigma_c^+(p)$ называется функция

$$\widetilde{\sigma}(\sigma_c^+)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widetilde{\sigma}(D_k^+)z^k\in\operatorname{Mat}_N\left(C^\infty\big(\mathbb{S}^1_\varphi,S_\rho(\mathbb{S}^1_x\times\mathbb{R}^2_{\xi,\rho})\big)\right),$$

где $\widetilde{\sigma}(D_k^+)$ — полный символ семейства $D_k^+(p)$, $z=e^{i\varphi}\in\mathbb{S}^1_\varphi$, а $S_\rho(\mathbb{S}^1_x\times\mathbb{R}^2_{\xi,\rho})$ — пространство Фреше классических символов с параметром.

Пусть $\widetilde{\sigma}_j(D_k^+)$ — компонента степени j полного символа семейства $D_k^+(p)$. Тогда компонента степени j полного символа семейства σ_c^+ равна

$$\widetilde{\sigma}_j(\sigma_c^+)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widetilde{\sigma}_j(D_k^+)z^k,\quad j\leqslant m. \tag{12}$$

Определим функционал $\tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}$ на алгебре $\operatorname{Mat}_N\left(C^\infty(\mathbb{S}^1,S_\rho(\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}^2))\right)$:

$$\tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}\left(\widetilde{\sigma}\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}\operatorname{tr}\left(\int\limits_0^{2\pi}\sigma_{-1}\Big|_{\rho=-1}^{\rho=1}d\varphi\right)dx\,d\xi,$$

где $\widetilde{\sigma}=\widetilde{\sigma}(\sigma_c^+)$, $\sigma_j=\widetilde{\sigma}_j(\sigma_c^+)$. Аналогичные обозначения вводятся для семейства σ_c^-.

Определение 0.15. η-*инвариантом* эллиптического семейства $\sigma_c(p)$ вида (11), обратимого при $\operatorname{Im}p=\gamma$, называется число

$$\eta_\gamma(\sigma_c)=\frac{1}{2\pi i}\,⨍\limits_{\mathbb{R}}\operatorname{TR}\Big(\sigma_c^{-1}(\rho+i\gamma)\partial_\rho\sigma_c(\rho+i\gamma)-i\gamma\partial_\rho\big(\sigma_c^{-1}(\rho+i\gamma)\partial_\rho\sigma_c(\rho+i\gamma)\big)\Big)d\rho,$$

где TR — регуляризованный след (5), а $⨍_{\mathbb{R}}$ — регуляризованный интеграл (7) для 2π-периодических функций.

Отметим важное свойство η-инварианта.

Предложение 0.16. *Пусть* $\sigma_{c,\varepsilon}$, $\varepsilon \in [0,1]$ *— гладкая гомотопия обратимых семейств с параметром. Тогда производная* η*-инварианта семейства* $\sigma_{c,\varepsilon}$ *по параметру* ε *равна*

$$\partial_\varepsilon \eta_\gamma(\sigma_{c,\varepsilon}) = \frac{1}{2\pi i}\widetilde{\operatorname{Tr}}\Big(\sigma_{c,\varepsilon}^{-1}(\rho+i\gamma)\partial_\varepsilon\sigma_{c,\varepsilon}(\rho+i\gamma) - i\gamma\partial_\varepsilon\big(\sigma_{c,\varepsilon}^{-1}(\rho+i\gamma)\partial_\rho\sigma_{c,\varepsilon}(\rho+i\gamma)\big)\Big),$$

где

$$\widetilde{\operatorname{Tr}}\,\sigma_c \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi}\fint_{\mathbb{R}} \operatorname{TR}(\partial_\rho\sigma_c)d\rho = \frac{1}{2\pi}\tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}\left(\sigma_{-1}\right).$$

В терминах введённых выше функционалов предъявляется формула индекса — основной результат данной главы:

Теорема 0.17. *Индекс эллиптического оператора* (8) *равен*

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}^{\gamma^-,\gamma^+} D = \frac{1}{24\pi^2}\tau_{S^*M}\big((\sigma^{-1}d\sigma)^3\big) + \eta_{\gamma^+}(\sigma_c^+) - \eta_{\gamma^-}(\sigma_c^-) +\\ + \frac{1}{4\pi^2 i}\tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}\left(\frac{i}{2}\sigma_-^{-1}\partial_\xi\sigma_-\sigma_-^{-1}\partial_x\sigma_- + \sigma_-^{-1}\sigma_{m-1,-}\right) -\\ - \frac{1}{4\pi^2 i}\tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}\left(\frac{i}{2}\sigma_+^{-1}\partial_\xi\sigma_+\sigma_+^{-1}\partial_x\sigma_+ + \sigma_+^{-1}\sigma_{m-1,+}\right),\end{aligned} \quad (13)$$

где $\sigma_\pm = \widetilde{\sigma}_m(\sigma_c^\pm)$ *— главные символы конормальных символов* $\sigma_c^\pm$*, а* $\sigma_{m-1,\pm}$ *— компоненты степени* $m-1$ *полных символов конормальных символов* $\sigma_c^\pm$ *(см.* (12)*).*

Правую часть в (13) будем называть *топологическим индексом.*

В **§2.3** доказывается гомотопическая инвариантность топологического индекса.

Предложение 0.18. *Рассмотрим гладкую гомотопию* $D(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0,1]$ *эллиптических операторов вида* (2.1)*. Тогда производная топологического индекса по параметру* ε *равна нулю:*

$$\partial_\varepsilon \operatorname{ind}_t^{\gamma^-,\gamma^+} D(\varepsilon) = 0.$$

В **§2.4** предъявлены вспомогательные результаты, играющие важную роль в доказательстве теоремы 0.17:

Предложение 0.19. *Существует такая гладкая гомотопия эллиптических операторов* $D(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0,1]$ *вида* (8)*, что*

1. *$D(0) = D$, а оператор $D(1)$ имеет постоянные по t коэффициенты.*
2. *Для всех $\varepsilon \in [0,1]$ оператор $D(\varepsilon)$ является эллиптическим.*
3. *Оператор $D(\varepsilon)$ имеет постоянные по t коэффициенты при $|t| > M$.*

Предложение 0.20. *Пусть D' — эллиптический оператор вида* (2.1) *с внутренним символом $\sigma(D') = 1$, а $\gamma_- = \gamma_+ = 0$. Тогда формула индекса* (13) *верна для оператора D', т.е.*

$$\operatorname{ind}^{0,0} D' = \operatorname{ind}_t^{0,0} D'.$$

Наконец, в **§2.5** представлено доказательство теоремы 0.17.

На этом завершается вторая глава.

Глава 3 состоит из 5 параграфов и посвящена проблеме индекса дифференциальных операторов на прямой с коэффициентами, периодическими на бесконечности.

В **§3.1** вводится пространство периодических псевдодифференциальных операторов, вводится понятие символа таких операторов:

Определение 0.21. *Пространством периодических ПДО порядка $\leqslant m$* называется пространство операторов

$$\Psi^m_{\text{per}} = \left\{ D = \sum_{k\in\mathbb{Z}} D_k(-i\partial_t)e^{ikt} \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \right\}.$$

Здесь предполагается, что элементы $D_k(-i\partial_t) \in \Psi^m$ bp пространства ПДО порядка m быстро стремятся к нулю в следующем смысле: при заданных $k \in \mathbb{Z}$ и $N \geqslant 1$ справедлива оценка

$$\|D_k(-i\partial_t)\|_\ell \leqslant C_{\ell N}(1 + |k|)^{-N},$$

где $\|\cdot\|_\ell$ — произвольная полунорма в пространстве Фреше Ψ^m.

Определение 0.22. *Главным символом* периодических ПДО называется отображение

$$\begin{aligned} \sigma = (\sigma_+,\sigma_-) \colon \Psi^m_{\text{per}} &\longrightarrow C^\infty(\mathbb{S}^1) \oplus C^\infty(\mathbb{S}^1), \\ D = \sum_{k\in\mathbb{Z}} D_k(-i\partial_t)e^{ikt} &\longmapsto \sigma_\pm(D)(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sigma_\pm(D_k(-i\partial_t))e^{ik\varphi}, \qquad \varphi \in [0,2\pi], \end{aligned}$$

где $\sigma_\pm\big(D_k(-i\partial_t)\big) = \lim\limits_{p\to\pm\infty} |p|^{-m} D_k(p)$.

В **§3.2** вводятся понятия регуляризованного и формального следов и доказываются их основные свойства. Обозначим $\Psi_{\mathrm{per}} = \bigcup_m \Psi^m_{\mathrm{per}}$ и $\Psi = \bigcup_m \Psi^m$. Определим оператор усреднения

$$\begin{aligned} \mathrm{Av}\colon\ \Psi_{\mathrm{per}} &\longrightarrow \Psi, \\ D &\longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_\varphi D T_{-\varphi}\, d\varphi, \qquad \text{где}\quad T_\varphi u(t) = u(t-\varphi). \end{aligned}$$

Напомним, что *регуляризованным интегралом* функции $f(p) \in S_{\mathrm{cl}}$ называется значение свободного слагаемого в асимптотическом разложении её интеграла по отрезку $[-P,P]$ при $P \to +\infty$:

$$⨍_{\mathbb{R}} f(p) = a_0, \quad \text{где} \quad \int_{-P}^{P} f(p)dp \sim \sum_{k\leqslant N} a_k P^k + b_0 \ln P, \quad N > 0,\, a_k,b_k \in \mathbb{C}.$$

Лемма 0.23. *Для функционала*

$$\begin{aligned} \alpha\colon\ \Psi^{-1} &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ D(-i\partial_t) &\longmapsto ⨍_{\mathbb{R}} D(p)dp, \qquad \text{где}\quad D(p) = \mathcal{F} D(-i\partial_t)\mathcal{F}^{-1}, \end{aligned}$$

имеет место равенство

$$\alpha\bigl(D(-i\partial_t)\bigr) = \sqrt{2\pi}\lim_{t\to 0}\left[\frac{K_D(t,0)+K_D(-t,0)}{2} - c_1(\ln|t|+\gamma)\right].$$

Здесь $K_D(t,t')$ — ядро Шварца оператора $D(-i\partial_t)$, $c_1 = \lim\limits_{t\to 0}(K_D(t,0)/\ln|t|)$, а $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}\bigl(\sum_{k=1}^n 1/k - \ln n\bigr)$ — константа Эйлера.

Предложение 0.24. *Функционал* $\mathrm{Tr} \overset{\mathrm{def}}{=} \alpha\circ\mathrm{Av}\colon \Psi^{-1}_{\mathrm{per}} \to \mathbb{C}$ *является следом. Более точно, для всех таких $A,B \in \Psi_{\mathrm{per}}$, что* $\mathrm{ord}\, A + \mathrm{ord}\, B \leqslant -1$, *выполняется следующее равенство:*

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

Определение 0.25. *Формальным следом* на алгебре Ψ^0_{per} называется функционал

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{Tr}}\colon\ \Psi^0_{\mathrm{per}} &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ D &\longmapsto -i\,\mathrm{Tr}[t,D], \end{aligned}$$

где $[t,D] = tD - Dt$ — коммутатор, а $\mathrm{Tr} \overset{\mathrm{def}}{=} \alpha\circ\mathrm{Av}$.

Лемма 0.26. *Формальный след является следом на алгебре* Ψ^0_{per}, *т.е.* $\widetilde{\mathrm{Tr}}(AB) = \widetilde{\mathrm{Tr}}(BA)$ *для всех* $A,B \in \Psi^0_{\mathrm{per}}$. *Он вычисляется следующим образом:*

$$\widetilde{\mathrm{Tr}}\, D = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \big(\sigma_+(D)(\varphi) - \sigma_-(D)(\varphi)\big)d\varphi, \quad D \in \Psi^0_{\mathrm{per}}.$$

В **§3.3** вводится понятие η-инварианта, доказываются его основные свойства.

Определение 0.27. Пусть $D \in \Psi^m_{\mathrm{per}} \otimes \mathrm{Mat}_N$ — обратимый матричный оператор. Предположим, что существует обратный оператор $D^{-1} \in \Psi^{-m}_{\mathrm{per}} \otimes \mathrm{Mat}_N$. Тогда число

$$\eta(D) \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Tr}(D^{-1}[t,D])$$

называется η-*инвариантом* оператора D.

Предложение 0.28. η-*инвариант* (3.20) *обладает логарифмическим свойством*

$$\eta(AB) = \eta(A) + \eta(B)$$

для всех обратимых операторов $A,B \in \Psi_{\mathrm{per}} \otimes \mathrm{Mat}_N$.

Предложение 0.29. *Пусть* $D_\varepsilon \in \Psi^m_{\mathrm{per}} \otimes \mathrm{Mat}_N$, $\varepsilon \in [0,1]$ — *гладкая гомотопия обратимых операторов. Тогда производная* η-*инварианта* D_ε *по переменной* ε *равна*

$$\partial_\varepsilon \eta(D_\varepsilon) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{tr}\left[\sigma_+^{-1}(D_\varepsilon)\partial_\varepsilon\sigma_+(D_\varepsilon) - \sigma_-^{-1}(D_\varepsilon)\partial_\varepsilon\sigma_-(D_\varepsilon)\right] d\varphi.$$

Далее в качестве примера приведено вычисление η-инварианта для периодического оператора первого порядка. Пусть

$$D = -i\partial_t + a(t)\colon H^s(\mathbb{R}) \longrightarrow H^{s-1}(\mathbb{R}), \tag{14}$$

где $a(t)$ — гладкая 2π-периодическая комплекснозначная функция.

Предложение 0.30.

1. *Оператор* (14) *обратим тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{Im}\int\limits_0^{2\pi} a(t)dt \neq 0.$$

2. η-*инвариант обратимого оператора* (14) *равен*

$$\eta(D) = -\frac{1}{2}\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\int\limits_0^{2\pi} a(t)dt.$$

В **§3.4** предъявлены критерии обратимости периодических дифференциальных операторов произвольного порядка и формула индекса дифференциальных операторов с периодическими на бесконечности коэффициентами в терминах матриц монодромии предельных операторов.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор с периодическими коэффициентами (период равен 2π)

$$D = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} d_k(t)(-i\partial_t)^k \colon H^s(\mathbb{R},\mathbb{C}^N) \longrightarrow H^{s-n}(\mathbb{R},\mathbb{C}^N). \tag{15}$$

Предложение 0.31. *Дифференциальный оператор* (15) *обратим тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Spec} M \cap \mathbb{S}^1_\lambda = \varnothing$. *Здесь* $\operatorname{Spec} M \subset \mathbb{C}$ *— спектр матрицы монодромии* M, *а* $\mathbb{S}^1_\lambda = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda| = 1\}$.

Пусть коэффициенты дифференциального оператора порядка n

$$D = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} d_k(t)(-i\partial_t)^k \colon H^s(\mathbb{R},\mathbb{C}^N) \longrightarrow H^{s-n}(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)$$

суть гладкие периодические функции с периодом 2π при $|t| > T$. Обозначим

$$d_k^{\pm}(t) = \lim_{j\to+\infty} d_k(t \pm 2\pi j), \qquad D_{\pm} = \sum_k d_k^{\pm}(t)(-i\partial_t)^k.$$

Теорема 0.32. *Пусть главный символ оператора* (15) *обратим, а операторы* $D_+,D_- \colon H^s(\mathbb{R},\mathbb{C}^N) \to H^{s-n}(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)$ *обратимы. Тогда оператор* (15) *является фредгольмовым и его индекс равен*

$$\operatorname{ind} D = \frac{1}{2}\bigl(\operatorname{sign} M_- - \operatorname{sign} M_+\bigr).$$

Здесь $M_\pm$ — матрицы монодромии операторов $D_\pm$, а

$$\operatorname{sign} M = \#\{|\lambda_M| > 1\} - \#\{|\lambda_M| < 1\},$$

где λ_M пробегает множество $\mathrm{Spec} M$*, есть сигнатура матрицы M.*

В **§3.5** в качестве примере вычисляется индекс оператора первого порядка на прямой.

На этом завершается третья глава.

Глава 4 состоит из 3 параграфов и посвящена эллиптическим операторам в $\mathbb{R}^N$, ассоциированным с метаплектической группой.

В **§4.1** приводятся предварительные сведения о псевдодифференциальных операторах Шубина в $\mathbb{R}^N$, метаплектических операторах, а также строятся эргодические меры на сфере.

В **§4.2** вводятся двучленные операторы, ассоциированные с метаплектической группой, и определяется символ таких операторов:

$$\mathcal{D} = D_0 + D_1\Phi \colon \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{H}^{s-d}(\mathbb{R}^N), \tag{16}$$

где D_0 и D_1 — псевдодифференциальные операторы порядка d на $\mathbb{R}^N$, а $\Phi = \Phi(S)$ — метаплектический оператор, ассоциированный с симплектической матрицей $S \in \mathrm{Sp}(N)$.

Определение 0.33. *Траекторным символом* $\sigma_{\mathrm{tr}}(\mathcal{D})$ оператора (16) называется операторнозначная функция $\sigma_{\mathrm{tr}}(\mathcal{D})(x,\xi)\colon \ell^2(\mathbb{Z},\mu_{x,\xi,s}) \to \ell^2(\mathbb{Z},\mu_{x,\xi,s-d})$, на $\mathbb{R}^{2N}_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}$, заданная для каждого $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2N}_0$ формулой

$$\left[\sigma_{\mathrm{tr}}(\mathcal{D})(x,\xi)\right] w(n) = \sigma(D_0)\big(S^n(x,\xi)\big)\, w(n) + \sigma(D_1)\big(S^n(x,\xi)\big)\, w(n-1).$$

Здесь пространство $\ell^2(\mathbb{Z},\mu_{x,\xi,s})$ определено формулой (10) для веса

$$\mu_{x,\xi,s}(n) = |S^n(x,\xi)|^{2s}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Определение 0.34. Оператор (16) называется *эллиптическим*, если его траекторный символ $\sigma_{\mathrm{tr}}(\mathcal{D})$ определяет обратимый оператор для всех $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2N}_0$.

Основной результат главы — явные критерии фредгольмовости рассматриваемых операторов.

Теорема 0.35. *Пусть оператор* (16) *эллиптичен. Тогда он фредгольмов.*

Теорема 0.36. *Пусть для оператора* (16) *действие группы* $\mathbb{Z}$ *на* $\mathbb{S}^{2N-1}$, *индуцированное матрицей* $S = \pi^{\mathrm{Mp}}(\Phi)$, *топологически свободно. В этом случае оператор является фредгольмовым, если выполнено одно из следующих условий:*

1. $\sigma(D_0)(x,\xi) \neq 0$ *для всех* $(x,\xi) \in \mathbb{S}^{2N-1}$ *и*
$$\mathcal{M}_\mu\big(\sigma(D_0)(x,\xi)\big) > \mathcal{M}_\mu\big(|S^{-1}(x,\xi)|^{-s}\sigma(D_1)(x,\xi)\big)$$
для всех $\mu \in \mathrm{Meas}_S(\mathbb{S}^{2N-1})$;
2. $\sigma(D_1)(x,\xi) \neq 0$ *для всех* $(x,\xi) \in \mathbb{S}^{2N-1}$ *и*
$$\mathcal{M}_\mu\big(\sigma(D_0)(x,\xi)\big) < \mathcal{M}_\mu\big(|S^{-1}(x,\xi)|^{-s}\sigma(D_1)(x,\xi)\big)$$
для всех $\mu \in \mathrm{Meas}_S(\mathbb{S}^{2N-1})$.

Здесь $\mathcal{M}_\mu(a) = \exp\big(\int_{\mathbb{S}^{2N-1}} \ln|a(\omega)| d\mu(\omega)\big)$, *а через* $\mu \in \mathrm{Meas}_S(\mathbb{S}^{2N-1})$ *обозначено множество всех нормированных* S*-инвариантных эргодических мер на* $\mathbb{S}^{2N-1}$.

Наконец, в **§4.3** в качестве примера предъявлены явные условия фредгольмовости двучленных операторов, ассоциированных с симплектической матрицей специального вида.

На этом завершается четвёртая глава.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах:

1. Sipailo P. A., Zhuikov K. N. Elliptic $\mathbb{Z}$-operators assosiated with the metaplectic group // *Russ. J. Math. Phys.* — 2021. — Vol. 28, no. 3. — Pp. 377–388.

2. Savin A. Yu., Zhuikov K. N. η-invariant and index for operators on the real line periodic at infinity // *Eurasian Math J.* — 2021. — Vol. 12, no. 3. — Pp. 57–77.

3. Zhuikov K. N., Savin A. Yu. Eta-invariant for parameter-dependent families with periodic coefficients // *Ufa Math. J.* — 2022. — Vol. 14, no. 2. — Pp. 35–55.

4. Zhuikov K. N. Index of differential-difference operators on an infinite cylinder // *Russ. J. Math. Phys.* — 2022. — Vol. 29, no. 2. — Pp. 280–290.

Тезисы конференций:

1. Жуйков К.Н. “Об эллиптических операторах, ассоциированных с метаплектической группой,” *Материалы Международного молодежного научного форума “ЛОМОНОСОВ-2020”*, МАКС Пресс, 2020, ISBN 978-5-317-06519-5.
2. Zhuikov K.N., Savin A.Yu. “Eta-invariant for Elliptic Operators with Shifts on Manifolds with Cylindrical Ends,” *CONFERENCE ABSTRACTS. International Student Conference “Science and Progress”*, SPb.: SBORKA, 2020, ISBN 978-5-85263-224-1.
3. Жуйков К.Н., Сипайло П.А. “Об эллиптических операторах, ассоциированных с метаплектической группой,” *Современные методы теории краевых задач : материалы Международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа “Понтрягинские чтения — XXXI”*, Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2020, ISBN 978-5-9273-3025-6.
4. Zhuikov K.N., Savin A.Yu. “An Index Theorem for Operators on the Real Line Periodic at Infinity,” *CONFERENCE ABSTRACTS. International Student Conference “Science and Progress”*, SPb.: SBORKA, 2021, ISBN 978-5-85263-109-1.
5. Жуйков К.Н. “Эта-инвариант для семейств с параметром и периодическими коэффициентами,” *Материалы Международного молодежного научного форума “ЛОМОНОСОВ-2021”*, МАКС Пресс, 2021, ISBN 978-5-317-06593-5.
6. Жуйков К.Н., Савин А.Ю. “Эта-инвариант для семейств с параметром и периодическими коэффициентами,” *Современные методы теории краевых задач : материалы Международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа “Понтрягинские чтения — XXXII”*, Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2021, ISBN 978–5–9273–3219–9.
7. Zhuikov K. “Eta-invariant for parameter-dependent families with periodic coefficients,” *Spectral Theory and Mathematical Physics. Asymptotic Methods of Mathematical Physics (Buslaev conference). 12th St. Petersburg conference in Spectral Theory (Birman conference). Summer School. St. Petersburg*, Санкт-Петербург: ООО “Издательство ВВМ”, 2021.

8. Savin A.Yu., Zhuikov K.N. “On a Generalisation of the Melrose Eta-invariant,” *Сборник материалов международной конференции КРОМШ- 2021*, Симферополь: ПОЛИПРИНТ, 2021, ISBN 978-5-6046943-4-3.

9. Жуйков К.Н. “Эта-инвариант и индекс для операторов на прямой, периодических на бесконечности,” *Материалы Международного молодежного научного форума “ЛОМОНОСОВ-2022”*, МАКС Пресс, 2022, ISBN 978-5-317-06824-0.

10. Zhuikov K.N. “On the index of differential-difference operators in an infinite cylinder,” *Девятая международная конференция по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям. Москва, Россия, 28 июня – 5 июля 2022 г. = The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations, Moscow, Russia, June 28 – July 5, 2022 : тезисы докладов*, Москва: РУДН, 2022, ISBN 978-5-209-11108-5.

Глава 1. η-инвариант операторов с параметром и периодическими коэффициентами на гладком замкнутом многообразии

В настоящей главе вводится понятие η-инварианта обратимых семейств с параметром и периодическими коэффициентами на гладком замкнутом многообразии, а также устанавливаются его основные свойства. В §1.1 мы напоминаем определение топологии Фреше на алгебре ПДО с параметром, вводим пространство операторов с параметром и периодическими коэффициенами и определяем главный символ таких операторов. В §1.2 вводится пространство гладких функций со специальной (конормальной) асимптотикой на бесконечности и доказывается, что оператор разностного дифференцирования осуществляет изоморфизм в этих пространствах — основной технический результат данной главы. Параграфы 1.3 и 1.4 посвящены построению регуляризаций следа рассматриваемых операторов с параметром и интеграла функций с конормальной асимптотикой по прямой. Наконец, в §1.5 строится η-инвариант, доказываются его основные свойства, даётся формула производной η-инварианта. В частности, показано, что построенный η-инвариант обобщает η-инвариант Мельроуза и, как следствие, η-инвариант Атьи–Патоди–Зингера. В качестве замечаний приведены формулы для вычисления η-инварианта в двух частных случаях.

Результаты данной главы опубликованы в статье [13].

1.1 Алгебра операторов с параметром

Топология Фреше на пространстве ПДО с параметром. В данной работе используются классические ПДО с параметром на гладком замкнутом многообразии (см., напр., [27; 46]). Более точно, мы используем классические ПДО с параметром из [46, п. 7.2.2] на гладком замкнутом многообразии X. Пространство таких операторов порядка $\leqslant m$ будем обозначать через $\Psi_p^m(X)$. Напомним определение топологии Фреше на пространстве $\Psi_p^m(X)$ (см., напр., [46; 53]).

Обозначим $\partial_p = \partial/\partial p$ (аналогично для любых других переменных). Через $\mathcal{S}(\mathbb{R},V)$ будем обозначать пространство Шварца функций на прямой $\mathbb{R}$ со значениями в пространстве Фреше V, т.е. функций, удовлетворяющих оценкам

$$\left\|\partial_p^k f(p)\right\|_j \leqslant C_{jkN}(1+p^2)^{-N}, \tag{1.1}$$

где $\|\cdot\|_j$ пробегает все полунормы пространства Фреше V, число $N \geqslant 0$, а константа зависит только от j, k и N. Аналогично определяется пространство $\mathcal{S}(\mathbb{Z},V)$ быстро убывающих последовательностей элементов из V. В этом случае используется оценка (1.1) только при $k=0$. Элементы из $\mathcal{S}(\mathbb{Z},V)$ будем называть *быстро убывающими последовательностями.*

1. Сначала зафиксируем структуры пространства Фреше на следующих линейных пространствах:

– $\Psi_p^{-\infty}(X) \subset \Psi_p^m(X)$ — подпространстве сглаживающих операторов с параметром. Сопоставляя сглаживающему оператору $D(p)$ его ядро Шварца, обозначаемое через $K_D(x,y,p)$, получаем биективное отображение
$$\begin{gathered} \Psi_p^{-\infty}(X) \longrightarrow \mathcal{S}\big(\mathbb{R},C^\infty(X\times X)\big), \\ D(p) \longmapsto K_D(x,y,p). \end{gathered} \tag{1.2}$$

– $S^m_{cl,p}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1})$ — пространстве классических символов в $\mathbb{R}^n$ порядка $\leqslant m$ с параметром. На этом пространстве определена структура пространства Фреше. Здесь подразумеваются условия на гладкость по параметру p из [46, п. 7.2.2], а именно, символ $a=a(x,\xi,p)\in S^m_{cl,p}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет оценкам
$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_p^\gamma\right| \leqslant C_{\alpha\beta\gamma}(1+|p|+|\xi|)^{m-|\beta|-\gamma}$$
для всех мультииндексов α, β и чисел $\gamma \geqslant 0$ и имеет асимптотическое разложение $a \sim a_m + a_{m-1} + \ldots$ в ряд, где члены ряда $a_k(x,\xi,p)$ являются гладкими функциями, однородными по паре (ξ,p) степени k при $|\xi|^2 + p^2 \geqslant 1$.

2. Ниже мы покажем, что структура пространства Фреше на $\Psi_p^m(X)$ определяется в терминах структур из п. 1. Чтобы это показать, зафиксируем следующие объекты:

– конечное покрытие $X = \bigcup_j \mathcal{U}_j$ многообразия X координатными картами $\mathcal{U}_j \simeq \Omega_j \subset \mathbb{R}^n$, где Ω_j — некоторая область;

– разбиение единицы $\{\varphi_j(x)\}$ на X, подчинённое покрытию $\{\mathcal{U}_j\}$, т.е.
$$\varphi_j \in C^\infty(X), \quad \varphi_j(x) \geqslant 0 \ \forall x \in X, \quad \operatorname{supp}\varphi_j \subset \mathcal{U}_j, \quad \sum_j \varphi_j(x) \equiv 1;$$

– срезающие функции $\{\psi_j(x)\}$:
$$\psi_j \in C^\infty(X), \quad \operatorname{supp}\psi_j \subset \mathcal{U}_j, \quad \psi_j(x) \equiv 1 \text{ в окрестности } \operatorname{supp}\varphi_j;$$

– срезающую функцию $\chi(x,y)$:

$$\chi \in C^\infty(X \times X), \quad \chi(x,y) = \begin{cases} 1, & \operatorname{dist}(x,y) < \varepsilon, \\ 0, & \operatorname{dist}(x,y) > 2\varepsilon \end{cases}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$, где dist — функция расстояния на $X \times X$.

3. Определим теперь топологию Фреше на пространстве $\Psi_p^m(X)$. Рассмотрим элемент $A \in \Psi_p^m(X)$ с ядром Шварца $K_A(x,y)$. Рассмотрим разложение

$$A = B + C, \tag{1.3}$$

где ядро Шварца оператора B равно $K_A(x,y)\chi(x,y)$, а ядро Шварца оператора C равно $K_A(x,y)\bigl(1-\chi(x,y)\bigr)$. Из свойств алгебры ПДО с параметром следует, что $C \in \Psi_p^{-\infty}(X)$. Рассмотрим теперь оператор B. Если число $\varepsilon > 0$, входящее в определение функции χ, выбрать достаточно малым, то будут выполнены равенства

$$B = B \cdot \sum_j \varphi_j = \sum_j \psi_j B \varphi_j. \tag{1.4}$$

Оператор $B_j = \psi_j B \varphi_j$ является собственным ПДО с параметром в карте $\mathcal{U}_j \simeq \Omega_j \subset \mathbb{R}^n$. Поэтому он однозначно определяется своим полным символом

$$\sigma(B_j) = e^{-ix\xi}(B_j e^{ix\xi}) \in S^m_{cl,p}(\mathbb{R}^n). \tag{1.5}$$

Итак, счётный набор полунорм, определяющих топологию Фреше на пространстве $\Psi_p^m(X)$, для оператора $A \in \Psi_p^m(X)$ определяется так:

– берутся значения всех полунорм для оператора $C \in \Psi_p^{-\infty}(X)$ из (1.3);

– берутся значения всех полунорм для полных символов $\sigma(B_j) \in S^m_{cl,p}(\mathbb{R}^n)$ из (1.5).

Можно проверить, что топологии Фреше, отвечающие разным начальным данным в п.2, эквивалентны.

Символ операторов с параметром. Имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow \Psi_p^{m-1}(X) \longrightarrow \Psi_p^m(X) \xrightarrow{\sigma_{\rm pr}} C^\infty\bigl(S(T^*X \oplus \mathbb{R})\bigr) \longrightarrow 0, \tag{1.6}$$

где T^*X — кокасательное расслоение многообразия X, $S(E)$ — сферическое расслоение векторного расслоения E, а $\sigma_{\rm pr}$ — отображение взятия главного символа ПДО с параметром. Правое обратное отображение для отображения $\sigma_{\rm pr}$ в (1.6) строится явно. Более точно, рассмотрим функцию $a(x,\xi,p) \in C^\infty(S(T^*X \oplus \mathbb{R}))$. Продолжая данную функцию по однородности степени m на пространство $T^*X \oplus \mathbb{R}$ и умножая на срезающую функцию, получаем главный символ $\widetilde{a}$, однородный степени m на бесконечности в $T^*X \oplus \mathbb{R}$. Определим непрерывное отображение

$$\begin{aligned} C^\infty\big(S(T^*X \oplus \mathbb{R})\big) &\longrightarrow \Psi_p^m(X), \\ a &\longmapsto \widehat{a} = \sum_j \psi_j \widehat{a} \varphi_j, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где функции $\{\psi_j,\varphi_j\}$ определены в п.2 выше, а $\widehat{a}$ — квантование символа $\widetilde{a}$ в карте $\mathcal{U}_j$. Отображение (1.7) есть непрерывное отображение пространств Фреше, и оно является правым обратным к отображению главного символа.

Рассмотрим факторпространство

$$\Phi_p^m(X) = \mathcal{S}\big(\mathbb{Z},\Psi_p^m(X)\big)/L$$

пространства Фреше $\mathcal{S}\big(\mathbb{Z},\Psi_p^m(X)\big)$ быстро убывающих последовательностей операторов из $\Psi_p^m(X)$ по замкнутому подпространству

$$L = \Big\{\{D_k(p)\} \in \mathcal{S}\big(\mathbb{Z},\Psi_p^{-\infty}(X)\big) \;\Big|\; \sum_k D_k(p) e^{2\pi i k p} = 0 \;\forall p \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Корректно определена композиция

$$\begin{aligned} \Phi_p^m(X) \times \Phi_p^{m'}(X) &\longrightarrow \Phi_p^{m+m'}(X), \\ \{D_k(p)\},\{D'_k(p)\} &\longmapsto \left\{ \sum_{k_1+k_2=k} D_{k_1}(p) D'_{k_2}(p) \right\}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Произвольному элементу $D = \{D_k(p)\} \in \Phi_p^m(X)$ сопоставим оператор

$$D(p) = \sum_k D_k(p) e^{2\pi i k p} \colon C^\infty(X) \longrightarrow C^\infty(X). \tag{1.9}$$

Очевидно, что этот оператор корректно определён, т.е. если $D \in L$, то $D(p) \equiv 0$. Далее элементы пространства $\Phi_p^m(X)$ будем записывать в виде (1.9). В этих обозначениях умножение (1.8) отвечает просто композиции операторов (1.9). Введём обозначение $\Phi_p(X) = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \Phi_p^m(X)$.

Определение 1.1. Определим отображение

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_{\mathrm{pr}} \colon \Phi_p^m(X) &\longrightarrow C^\infty\big(S(T^*X \oplus \mathbb{R}) \times \mathbb{S}^1\big), \\ D(p) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} D_k(p) e^{2\pi i k p} &\longmapsto \overline{\sigma}_{\mathrm{pr}}(D(p)) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sigma_{\mathrm{pr}}(D_k)(x,\xi,p) z^k, \end{aligned} \tag{1.10}$$

где $z = e^{i\varphi}$. Функция $\overline{\sigma}_{\rm pr}(D(p)) \in C^\infty\big(S(T^*X \oplus \mathbb{R}) \times \mathbb{S}^1\big)$ называется *главным символом* оператора с параметром $D(p)$.

Отображение (1.10) корректно определено, поскольку символ семейств со сглаживающими коэффициентами тождественно равен нулю.

Предложение 1.2. *Имеет место точная последовательность алгебр*

$$0 \longrightarrow \Phi_p^{-1}(X) \longrightarrow \Phi_p^0(X) \xrightarrow{\overline{\sigma}_{\rm pr}} C^\infty\big(S(T^*X \oplus \mathbb{R}) \times \mathbb{S}^1\big) \longrightarrow 0. \tag{1.11}$$

Доказательство. 1. Докажем, что $\overline{\sigma}_{\rm pr}$ — гомоморфизм. Пусть $D', D'' \in \Phi_p^0(X)$. Имеем

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}_{\rm pr}(D'D'') &= \overline{\sigma}_{\rm pr}\left[\left(\sum_j D'_j(p)e^{2\pi ijp}\right)\left(\sum_k D''_k(p)e^{2\pi ikp}\right)\right] = \\ &= \overline{\sigma}_{\rm pr}\left(\sum_j\sum_k D'_j(p)D''_k(p)e^{2\pi i(j+k)p}\right) = \sum_{j,k}\sigma_{\rm pr}(D'_jD''_k)(x,\xi,p)z^{j+k} = \\ &= \left(\sum_j \sigma_{\rm pr}(D'_j)(x,\xi,p)z^j\right)\left(\sum_k \sigma_{\rm pr}(D''_k)(x,\xi,p)z^k\right) = \overline{\sigma}_{\rm pr}(D')\overline{\sigma}_{\rm pr}(D'').\end{aligned}$$

2. Докажем, что $\overline{\sigma}_{\rm pr}$ — сюръекция. Пусть дана функция $\overline{a}(x,\xi,p,z) \in C^\infty(S(T^*X \oplus \mathbb{R}) \times \mathbb{S}^1)$. Её разложение в ряд Фурье по переменной z имеет вид $\overline{a} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k$, где $a_k = a_k(x,\xi,p)$ — быстро убывающие при $k \to \infty$ функции из пространства Фреше $C^\infty(S(T^*X \oplus \mathbb{R}))$. Из вышесказанного следует, что для соответствующего семейства операторов имеем $\widehat{a}_k \to 0$ в пространстве $\Psi_p^0(X)$ при $k \to \infty$, поэтому корректно определён оператор

$$A = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{a}_k e^{2\pi ikp} \in \Phi_p^0(X),$$

причём отображение $\overline{a} \mapsto A$ является непрерывным отображением пространств Фреше $C^\infty(S(T^*X \oplus \mathbb{R}) \times \mathbb{S}^1) \to \Phi_p^0(X)$ и представляет собой правое обратное отображение к отображению $\overline{\sigma}_{\rm pr}$.
3. Точность последовательности (1.11) в членах $\Phi_p^{-1}(X)$ и $\Phi_p^0(X)$ следует из определений. $\square$

1.2 Пространство функций с конормальной асимптотикой на бесконечности

Через $S_{as}(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\mathbb{R})$ обозначим пространство всех функций $f(x)$, имеющих асимптотическое разложение вида

$$f(x) \sim \sum_{i \leqslant N} c_i^\pm(x) x^i + \sum_{j=0}^{N} d_j^\pm(x) x^j \ln|x| \quad \text{при } x \to \pm\infty \tag{1.12}$$

для некоторого $N \in \mathbb{Z}_+$, где $c_i^\pm$, $d_j^\pm$ — гладкие периодические функции периода 1. Ниже, если специально не оговорено противное, период периодической функции предполагается равным единице. Предполагается, что асимптотическое разложение (1.12) можно дифференцировать произвольное количество раз.

Теорема 1.3. *Оператор разностного дифференцирования*

$$\begin{aligned} \delta \colon S_{as}(\mathbb{R}) &\longrightarrow S_{as}(\mathbb{R}) \\ f(x) &\longmapsto (\delta f)(x) = f(x+1) - f(x) \end{aligned} \tag{1.13}$$

корректно определён и является изоморфизмом линейных пространств

$$\delta \colon S_{as}(\mathbb{R})/\ker\delta \longrightarrow S_{as}(\mathbb{R}),$$

где $\ker\delta$ *— пространство гладких периодических функций.*

Доказательство. 1. Сначала докажем, что оператор (1.13) корректно определён. Рассмотрим поведение функции $f(x+1)$ при $x \to +\infty$. При $x \to -\infty$ доказательство аналогично. Пусть функция $f(x)$ имеет асимптотику (1.12). Тогда

$$\begin{aligned} f(x+1) &\sim \sum_{i \leqslant N} c_i^+(x)(x+1)^i + \sum_{j=0}^{N} d_j^+(x)(x+1)^j \ln(x+1) \sim \\ &\sim \sum_{i \leqslant N} c_i^+(x) \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{i}{k} x^{i-k} 1^k + \sum_{j=0}^{N} d_j^+(x) \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} x^{j-l} 1^l \ln\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right) x\right) \sim \\ &\sim \sum_{i \leqslant N} c_i'^+(x) x^i + \sum_{j=0}^{N} d_j'^+(x) x^j \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k x^k} + \ln x \right) \sim \\ &\sim \sum_{i \leqslant N} c_i''^+(x) x^i + \sum_{j=0}^{N} d_j'^+(x) \ln|x|, \quad \text{где } \binom{i}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{r=0}^{k-1} (i-r). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Несложно убедиться в том, что разложение (1.14) можно дифференцировать. Из (1.14) следует, что функция δf имеет разложение (1.12) при $x \to +\infty$.

2. Ядро оператора δ, очевидно, состоит из периодических функций.

3. Уравнение $\delta u = f$ несложно решить. В самом деле, для функции $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ рассмотрим функцию

$$u(x) = -\sum_{i\geqslant 0} f(x+i)\big(1-\chi(x+i)\big) + \sum_{j\geqslant 1} f(x-j)\chi(x-j), \tag{1.15}$$

где функция $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ удовлетворяет соотношению

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 1, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \tag{1.16}$$

Из (1.16) следует, что в (1.15) при фиксированном x суммы содержат конечное число ненулевых слагаемых. Утверждается, что функция (1.15) является решением уравнения $\delta u = f$. В самом деле,

$$\begin{aligned}(\delta u)(x) = &-\sum_{i\geqslant 0} f\big(x+i+1)\big)\big(1-\chi\big(x+i+1)\big)\big) + \\ &+\sum_{j\geqslant 1} f\big(x-j-1)\big)\chi\big(x-(j-1)\big) + \sum_{i\geqslant 0} f(x+i)\big(1-\chi(x+i)\big) - \\ &-\sum_{j\geqslant 1} f(x-j)\chi(x-j) = f(x)(1-\chi(x)) + f(x)\chi(x) = f(x).\end{aligned}$$

Заметим, что если $f(x) = O((1+|x|)^{-2})$, то в качестве функции χ в (1.15) можно взять произвольную гладкую функцию, например, $\chi \equiv 0$ или $\chi \equiv 1$. В этом случае мы получаем сходящийся ряд в (1.15).

Замечание 1.4. Отметим, что решение уравнения $\delta u = f$ при некоторых предположениях на функцию f можно выписать явно (см. [10, Лемма 3.10]).

4. Прежде, чем доказывать сюръективность оператора δ, докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 1.5. *Пусть $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap O\big((1+|x|)^{-M}\big)$, где $M \geqslant 2$, и та же оценка верна для производных любого порядка. Тогда функция*

$$u(x) = \sum_{j\geqslant 1} f(x-j)$$

определяется сходящимся рядом, является гладкой и удовлетворяет уравнению $\delta u = f$*, причём при* $x \to +\infty$ *имеет место разложение*

$$u(x) = u_\infty(x) + O\big((1+|x|)^{-M+1}\big), \tag{1.17}$$

где $u_\infty(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(x-j)$ *— гладкая периодическая функция. Кроме этого, равенство вида* (1.17) *выполняется для производных любого порядка.*

Доказательство. Все свойства функций u и u_∞, кроме разложения (1.17), получаются непосредственно. Докажем разложение (1.17). При $x \to +\infty$ имеем

$$|u_\infty(x) - u(x)| = \left|\sum_{j\leqslant 0} f(x-j)\right| \leqslant C\sum_{j\leqslant 0}(1+|x-j|)^{-M} = C\sum_{j\geqslant 0}(1+x+j)^{-M} \tag{1.18}$$

для некоторой константы C. Последнее выражение имеет порядок интеграла

$$\int\limits_0^\infty \frac{dy}{(1+x+y)^M} = O\left((1+x)^{-M+1}\right). \tag{1.19}$$

Теперь из (1.18) и (1.19) получаем (1.17). Разложения вида (1.17) для производных функции $u(x)$ получаются аналогично. □

Лемма 1.6. *Пусть функция* $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ *при больших* $|x|$ *равна конечной сумме*

$$f(x) = \sum_{i=-M+1}^{N} c_i^\pm(x)x^i + \sum_{j=0}^{N} d_j^\pm(x)x^j \ln|x|$$

с гладкими периодическими коэффициентами $c_i^\pm$, $d_j^\pm$*, где* $M \geqslant 2$, $N \geqslant 0$*. Тогда существует функция* $\widetilde{u} \in S_{as}(\mathbb{R})$*, удовлетворяющая уравнению*

$$\delta\widetilde{u} = f + f_M, \quad \text{где} \quad f_M \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap O\big((1+|x|)^{-M}\big). \tag{1.20}$$

При этом соотношение (1.20) *выполнено для производных любого порядка.*

Доказательство. Уравнение (1.20) достаточно решить при больших $|x|$. Поскольку случаи $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ аналогичны, далее рассмотрим случай $x \to +\infty$. Искомую функцию $\widetilde{u}$ будем искать в виде

$$\widetilde{u}(x) = u_1(x) + u_2(x) = \sum_{i=-M+2}^{-1} a_i(x)x^i + \sum_{j=0}^{N+1}\left(a_j(x)x^j + b_j(x)x^j\ln|x|\right). \tag{1.21}$$

Всюду далее для краткости периодические коэффициенты a_j, b_j, c_j^+, d_j^+ будем писать без аргумента, подразумевая их зависимость от x.

Для функции u_2 имеем

$$
\begin{aligned}
\delta u_2(x) &= \sum_{j=0}^{N+1} \Big(a_j \left[(x+1)^j - x^j \right] + b_j \left[(x+1)^j \ln(x+1) - x^j \ln x \right] \Big) = \\
&= \sum_{j=0}^{N+1} \left(a_j \sum_{k=1}^{j} \binom{j}{k} x^{j-k} + b_j \left[x^j \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \sum_{\ell=1}^{j} \binom{j}{\ell} x^{j-\ell} \left(\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)\right]\right) = \\
&= \sum_{j=0}^{N+1} \left(a_j \sum_{k=1}^{j} \binom{j}{k} x^{j-k} + b_j \left[x^j \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r x^r} + \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \sum_{\ell=1}^{j} \binom{j}{\ell} x^{j-\ell} \left(\ln x + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r x^r} \right)\right]\right).
\end{aligned}
$$

Подставляя $u = u_1 + u_2$ в (1.20), сначала найдём коэффициенты при старшей степени x (при $j = N+1$, $k = \ell = r = 1$). Получаем соотношение

$$
a_{N+1}(N+1)x^N + \ldots + b_{N+1}\big(x^N + (N+1)x^N \ln x\big) + \ldots = c_N^+ x^N + d_N^+ x^N \ln x + \ldots ,
$$

где через $\ldots$ обозначены слагаемые младших степеней. Отсюда получаем систему уравнений для коэффициентов:

$$
a_{N+1}(N+1) + b_{N+1} = c_N^+, \qquad b_{N+1}(N+1) = d_N^+.
$$

Её решением является пара

$$
a_{N+1} = \frac{1}{N+1}\left(c_N^+ - \frac{1}{N+1} d_N^+ \right), \qquad b_{N+1} = \frac{1}{N+1} d_N^+,
$$

где c_N^+ и d_N^+ известны. Затем найдём решение для слагаемых, содержащих следующие по порядку степени x, и так далее. При этом, уменьшая с каждым шагом j на 1 и повторяя рассуждения, мы можем последовательно найти все коэффициенты a_j, b_j, $0 \leqslant j \leqslant N$, выражая их через c_j^+, d_j^+ и найденные на предыдущем шаге a_{j+1}, b_{j+1}. Итак, мы построили такую функцию u_2 из (1.21), что функция $\delta u_2 - f$ имеет асимптотику только с отрицательными степенями переменной x.

Для функции u_1 имеем

$$\delta u_1(x) = \sum_{i=-M+1}^{-1} \Big(a_i \left((x+1)^i - x^i \right) \Big) = \sum_{i=-M+1}^{-1} a_i \sum_{j=1}^{\infty} \binom{i}{j} x^{i-j} = \sum_{i \leqslant -1} \overline{a}_i x^i.$$

При этом коэффициенты a_i при $i \leqslant -1$ можно выбрать таким образом, что коэффициент $\overline{a}_i$ равен коэффициенту при x^i в асимптотическом разложении функции $\delta u_2 - f$ для всех $-M+1 \leqslant i \leqslant -1$. Тогда, очевидно, мы можем положить

$$f_M \stackrel{\text{def}}{=} \delta u_1 + \delta u_2 - f \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap O\big((1+|x|)^{-M}\big).$$

$\square$

5. Проверим теперь, что $u(x) \in S_{as}(\mathbb{R})$, если $f(x) \in S_{as}(\mathbb{R})$ и $\delta u = f$. Фиксируем произвольное целое число $M \geqslant 2$. Будем использовать разложение $f = f_0 + f_1$, где

$$\begin{aligned} f_0(x) = &\left(\sum_{i=-M+1}^{N} c_i^+(x) x^i + \sum_{j=0}^{N} d_j^+(x) x^j \ln|x| \right) \chi(x) + \\ &+ \left(\sum_{i=-M+1}^{N} c_i^-(x) x^i + \sum_{j=0}^{N} d_j^-(x) x^j \ln|x| \right) (1 - \chi(x)), \\ f_1(x) = &\, O\big((1+|x|)^{-M}\big). \end{aligned}$$

Тогда получаем разложение $u = u_0 + u_1$. Фиксируем решение уравнения $\delta u_1 = f_1$ в виде (1.15), где мы полагаем $\chi(x) \equiv 1$. Применяя лемму 1.5 к функции f_1, получаем решение $u_1 = u_{1,\infty}(x) + O\big((1+|x|)^{-M+1}\big)$, где $u_{1,\infty}$ — гладкая периодическая функция. Затем применим лемму 1.6 к функции f_0 и получим такую функцию $\widetilde{u}_0 \in S_{as}(\mathbb{R})$, что

$$\delta \widetilde{u}_0 = f_0 + f_M, \quad \text{где } f_M \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap O\big((1+|x|)^{-M}\big).$$

Далее, для разности $u - \widetilde{u}_0$ имеем

$$\delta(u - \widetilde{u}_0) = \delta(u) - \delta(\widetilde{u}_0) = f - f_0 - f_M = f_1 - f_M = O\big((1+|x|)^{-M}\big).$$

Наконец, применяя лемму 1.5 к функции $f_1 - f_M$, получаем

$$u - \widetilde{u}_0 = u_{2,\infty} + O\big((1+|x|)^{-M+1}\big). \tag{1.22}$$

Поскольку $\widetilde{u}_0, u_{2,\infty} \in S_{as}(\mathbb{R})$ и число M в (1.22) можно выбрать произвольно большим, из (1.22) следует, что $u \in S_{as}(\mathbb{R})$.

Теорема 1.3 доказана. $\square$

1.3 Регуляризация следа

Регуляризованный след. Для определения регуляризованного следа оператора с параметром $D(p) \in \Phi_p^m(X)$ нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1.7. *Пусть* $D(p) \in \Phi_p^m(X)$. *Тогда* $\delta D(p) \in \Phi_p^{m-1}(X)$.

Доказательство. Рассмотрим оператор с параметром

$$D(p) = \sum_k e^{2\pi ikp} D_k(p), \tag{1.23}$$

где $D_k(p) \in \Psi_p^m(X)$, причём полунормы $\|D_k(p)\|_j$ быстро убывают при $k \to \infty$ для всех j. Тогда имеем

$$\delta D(p) = D(p+1) - D(p) = \sum_k e^{2\pi ikp}\big[D_k(p+1) - D_k(p)\big] = \sum_k e^{2\pi ikp}\delta D_k(p).$$

Покажем, что оператор $\delta D_k(p) \in \Psi_p^{m-1}(X)$ и полунормы $\|\delta D_k(p)\|_j$ быстро убывают при $k \to \infty$ для всех j. Полный символ ПДО $D_k(p)$ имеет асимптотическое разложение

$$a(x,\xi,p) \sim \sum_{j\geqslant 0} a_{m-j}(x,\xi,p),$$

где функция $a_j(x,\xi,p)$ однородна степени j по паре переменных (ξ,p), т.е. $a_j(x,\lambda\xi,\lambda p) = \lambda^j a_j(x,\xi,p)$ при всех $\lambda > 0$ и $(x,\xi,p) \in (T^*X \oplus \mathbb{R}) \setminus 0$. Разложим функцию $a_j(x,\xi,p+1)$ в ряд Тейлора в точке p:

$$a_j(x,\xi,p+1) \sim \sum_{i\geqslant 0} \partial_p^i a_j(x,\xi,p)/j! \sim \sum_{i\geqslant 0} a_{j,i}(x,\xi,p),$$

где $a_{j,i}$ — однородная функция степени $j - i$. Тогда, как видно из последнего уравнения, полный символ ПДО $\delta D_k(p)$ имеет разложение

$$\delta a(x,\xi,p) \sim \sum_{j\leqslant m}\big[a_j(x,\xi,p+1) - a_j(x,\xi,p)\big] \sim$$
$$\sim \sum_{j\leqslant m}\sum_{i\geqslant 1} a_{j,i}(x,\xi,p) \sim \sum_{k\leqslant m-1}\left(\sum_{k+1\leqslant j\leqslant m} a_{j,j-k}(x,\xi,p)\right).$$

Порядок последнего символа равен $m - 1$. Следовательно, порядок оператора $\delta D_k(p)$ равен $m - 1$.

Осталось доказать, что полунормы $\|\delta D_k(p)\|_j$ быстро убывают при $k \to \infty$. В самом деле, имеем

$$\|\delta D_k(p)\|_j \leqslant \|D_k(p+1)\|_j + \|D_k(p)\|_j$$

— сумма быстро убывающих при $k \to \infty$ полунорм. $\square$

Лемма 1.8. *Пусть $D(p) \in \Phi^m_p(X)$, где $m < -\dim X$. Тогда оператор $D(p)$ является ядерным, след $\operatorname{tr} D(p)$ является гладкой функцией, и при $p \to \pm\infty$ имеет место асимптотическое разложение*

$$\operatorname{tr} D(p) \sim \sum_{j \leqslant m+n} c_j^{\pm}(p)|p|^j, \tag{1.24}$$

где $c_j^{\pm}$ — гладкие периодические функции. Разложение (1.24) *можно дифференцировать по параметру p.*

Доказательство. Пусть $D(p)$ — оператор вида (1.23). Поскольку $m < -n$, то имеем

$$\operatorname{tr} D(p) = \operatorname{tr}\left(\sum_k e^{2\pi i k p} D_k(p)\right) = \sum_k e^{2\pi i k p} \operatorname{tr} D_k(p). \tag{1.25}$$

В силу результатов работы [56, лемма 1] имеет место асимптотическое разложение

$$\operatorname{tr} D_k(p) \sim \sum_{j \leqslant m+n} \alpha^{\pm}_{k,j}|p|^j \quad \text{при } |p| \to \infty, \tag{1.26}$$

где коэффициенты $\alpha^{\pm}_{k,j} \in \mathbb{C}$ быстро убывают при $k \to \infty$ и выполнена оценка

$$\operatorname{tr} D_k(p) - \sum_{-N \leqslant j \leqslant m+n} \alpha^{\pm}_{k,j}|p|^j = O\left(|p|^{-N-1}(1+|k|)^{-L}\right) \quad \forall L \geqslant 0.$$

Теперь подставим асимптотическое разложение (1.26) в (1.25) и переставим суммирования по k и j. Получим асимптотическое разложение

$$\operatorname{tr} D(p) \sim \sum_{j \leqslant m+n} \left(\sum_k e^{2\pi i k p} \alpha^{\pm}_{k,j}\right)|p|^j,$$

где коэффициенты $c_j^{\pm}(p) = \sum_k e^{2\pi i k p} \alpha^{\pm}_{k,j}$ являются гладкими функциями.

Нетрудно видеть, что предыдущее доказательство также даёт дифференцируемость разложения (1.24) по параметру. Чтобы это сделать, достаточно провести следующие модификации приведённого выше доказательства. Из [56, лемма 1] следует, что разложение (1.26) можно дифференцировать по p:

$$\operatorname{tr} D_k'(p) \sim \sum_{j \leqslant m+n} \alpha_{k,j}^{\pm} j |p|^{j-1} \operatorname{sgn} p. \tag{1.27}$$

Подставляя (1.27) в выражение

$$\operatorname{tr} D'(p) = \sum_k e^{2\pi i k p} \left(\operatorname{tr} D_k'(p) + 2\pi i k \operatorname{tr} D_k(p) \right),$$

получаем асимптотическое разложение

$$\operatorname{tr} D'(p) \sim \sum_{j \leqslant m+n} \left(\sum_k e^{2\pi i k p} \alpha_{k,j}^{\pm} 2\pi i k \right) |p|^j + \sum_{j \leqslant m+n} \left(\sum_k e^{2\pi i k p} \alpha_{k,j}^{\pm} j \operatorname{sgn} p \right) |p|^{j-1}.$$

Аналогичным образом устанавливается, что асимптотическое разложение для производной $\operatorname{tr} D^{(j)}(p)$ порядка j получается j-кратным дифференцированием разложения (1.24). □

Через $\mathcal{P} \subset S_{as}(\mathbb{R})$ обозначим подпространство

$$\mathcal{P} = \left\{ f(p) \in C^\infty(\mathbb{R}) \;\middle|\; \exists N > 0 \colon f(p) = \sum_{j=0}^{N} f_j(p) p^j \right\},$$

где $f_j(p)$ — гладкие 1-периодические функции. Нетрудно убедиться в том, что

$$\mathcal{P} = \bigcup_{j \geqslant 0} \ker \delta^j. \tag{1.28}$$

Из теоремы 1.3 следует, что оператор δ индуцирует изоморфизм

$$\begin{array}{ccc} S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P} & \longrightarrow & S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P}, \\ [f] & \longmapsto & [\delta f], \end{array} \tag{1.29}$$

где через $[f]$ обозначается класс эквивалентности функции f. Отображение (1.29) также будем обозначать символом δ. В частности, для любого $\ell \geqslant 0$ определено отображение $\delta^{-\ell} \colon S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P} \to S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P}$.

Определение 1.9. *Регуляризованный след* оператора с параметром $D(p) \in \Phi_p^m(X)$ определим формулой

$$(\operatorname{TR} D)(p) = \delta^{-\ell} \big[\operatorname{tr}(\delta^\ell D(p)) \big] \in S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P}, \tag{1.30}$$

где $\ell > m + \dim X$.

Предложение 1.10 (Свойства регуляризованного следа)**.**

1. *Для оператора с параметром* $D(p) \in \Phi_p^m(X)$ *регуляризованный след* (1.30) *корректно определён, т.е. не зависит от выбора числа* ℓ*.*
2. *Отображение*
$$\begin{aligned} \mathrm{TR}\colon\ \Phi_p(X) &\longrightarrow S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P}, \\ D(p) &\longmapsto \mathrm{TR}\, D(p) \end{aligned}$$
удовлетворяет циклическому свойству $\mathrm{TR}(AB) = \mathrm{TR}(BA)$ *для всех* $A{,}B \in \Phi_p(X)$*.*

Доказательство. 1. Докажем, что регуляризованный след (1.30) корректно определён. Из леммы 1.7 следует, что $\delta^\ell D(p) \in \Phi_p^{m-\ell}(X)$. Тогда при $\ell > m+n$ след оператора с параметром $\delta^\ell D(p)$ определён и $\mathrm{tr}[\delta^\ell D(p)] \in S_{as}(\mathbb{R})$ (см. лемму 1.8). Из теоремы 1.3 следует, что $(\mathrm{TR}\, D)(p) \in S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P}$. Утверждается, что при этом следы $(\mathrm{TR}\, D)(p)$, отвечающие различным ℓ, отличаются на элементы пространства $\mathcal{P}$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \delta^{-\ell-1}\big[\mathrm{tr}\left(\delta^{\ell+1} D(p)\right)\big] = \delta^{-\ell}\left(\delta^{-1}\big[\mathrm{tr}\,\delta\big(\delta^\ell D(p)\big)\big]\right) = \delta^{-\ell}\left(\delta^{-1}\delta\big[\mathrm{tr}\big(\delta^\ell D(p)\big)\big]\right) = \\ = \delta^{-\ell}\big[\mathrm{tr}\left(\delta^\ell D(p)\right)\big] \in S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P}. \end{aligned}$$

2. Докажем равенство $\mathrm{TR}(AB) = \mathrm{TR}(BA)$.

Лемма 1.11. *Для любых семейств* $A(p){,}B(p)$ *имеют место следующие разностные формулы Лейбница:*

$$\delta^\ell(A(p)B(p)) = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} \delta^{\ell-j} A(p) \cdot \delta^j B\big(p + (\ell - j)\big), \tag{1.31}$$

$$\delta^\ell(A(p)B(p)) = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} \delta^{j} A\big(p + (\ell - j)\big) \cdot \delta^{\ell-j} B(p). \tag{1.32}$$

Доказательство. Доказательства формул (1.31) и (1.32) аналогичны, поэтому мы приводим доказательство только для первой. Докажем формулу (1.31) по индукции. При $\ell = 1$ формула верна:

$$\delta\big(A(p)B(p)\big) = A(p+1)B(p+1) - A(p)B(p) = \delta A(p) \cdot B(p+1) + A(p)\delta B(p).$$

Допустим, что формула верна при ℓ. Тогда для $\ell+1$ имеем

$$\begin{aligned}
\delta\delta^{\ell}\big(A(p)B(p)\big) &= \sum_{j=0}^{\ell}\binom{\ell}{j}\delta\big(\delta^{\ell-j}A(p)\cdot\delta^{j}B\big(p+(\ell-j)\big)\big) = \\
=&\sum_{j=0}^{\ell}\binom{\ell}{j}\Big(\delta^{\ell+1-j}A(p)\cdot\delta^{j}B\big(p+(\ell+1-j)\big)+ \\
&+\delta^{\ell-j}A(p)\cdot\delta^{j+1}B\big(p+(\ell-j)\big)\Big) \\
=&\sum_{j=0}^{\ell}\binom{\ell}{j}\delta^{\ell+1-j}A(p)\cdot\Big(\delta^{j+1}B\big(p+(\ell-j)\big)+\delta^{j}B\big(p+(\ell-j)\big)\Big) \\
&+\sum_{j=0}^{\ell}\binom{\ell}{j}\delta^{\ell-j}A(p)\cdot\delta^{j+1}B\big(p+(\ell-j)\big) = \\
=&\sum_{j=0}^{\ell}\binom{\ell}{j}\delta^{\ell+1-j}A(p)\cdot\delta^{j}B\big(p+(\ell+1-j)\big)+ \\
&+\sum_{j=1}^{\ell+1}\binom{\ell}{j-1}\delta^{\ell+1-j}A(p)\cdot\delta^{j}B\big(p+(\ell+1-j)\big) = \\
=&\delta^{\ell+1}A(p)\cdot B\big(p+(\ell+1)\big)+A(p)\delta^{\ell+1}B(p)+ \\
&+\sum_{j=1}^{\ell}\left[\binom{\ell}{j}+\binom{\ell}{j-1}\right]\delta^{\ell+1-j}A(p)\cdot\delta^{j}B\big(p+(\ell+1-j)\big) = \\
=&\sum_{j=0}^{\ell+1}\binom{\ell+1}{j}\delta^{\ell+1-j}A(p)\cdot\delta^{j}B\big(p+(\ell+1-j)\big).
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались равенством $B(p+1)=\delta B(p)+B(p)$. □

Теперь докажем равенство

$$\operatorname{tr}\left(\delta^{\ell}\big(A(p)B(p)\big)\right)=\operatorname{tr}\left(\delta^{\ell}\big(B(p)A(p)\big)\right). \tag{1.33}$$

Согласно (1.31), правую часть в (1.33) преобразуем к виду

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\left(\delta^{\ell}\big(B(p)A(p)\big)\right) &= \operatorname{tr}\left(\sum_{j=0}^{\ell}\binom{\ell}{j}\delta^{\ell-j}B(p)\cdot\delta^{j}A\big(p+(\ell-j)\big)\right) = \\
&= \operatorname{tr}\left(\sum_{j=0}^{\ell}\binom{\ell}{j}\delta^{j}A\big(p+(\ell-j)\big)\cdot\delta^{\ell-j}B(p)\right) = \operatorname{tr}\left(\delta^{\ell}\big(A(p)B(p)\big)\right).
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Здесь во втором равенстве мы воспользовались циклическим свойством следа tr. Циклическое свойство можно применить, поскольку композиция $\delta^\ell A\big(p + (\ell - j)\big)\delta^{\ell-j}B(p)$ имеет порядок $\leqslant \operatorname{ord} A + \operatorname{ord} B - \ell$ и имеет след, если число ℓ достаточно велико. Последнее равенство в (1.34) следует из формулы (1.32). Теперь искомое равенство регуляризованных следов вытекает из (1.33):

$$\mathrm{TR}(AB) = \delta^{-\ell}\left[\operatorname{tr}\left(\delta^\ell(AB)\right)\right] = \delta^{-\ell}\left[\operatorname{tr}\left(\delta^\ell(BA)\right)\right] = \mathrm{TR}(BA).$$

$\square$

Связь с регуляризованным следом Мельроуза. Оказывается, что в случае обычных ПДО с параметром введённый регуляризованный след равен регуляризованному следу Мельроуза (см. [56, параграф 4]). Напомним определение последнего. *Регуляризованный след Мельроуза* для ПДО с параметром $D(p) \in \Psi_p^m(X)$ определяется выражением

$$(\mathrm{TR}_M\, D)(p) = \int\limits_0^p \int\limits_0^{p_{\ell-1}} \cdots \int\limits_0^{p_1} \operatorname{tr}\left(\partial_q^\ell D(q)\right) dq dp_1 \dots dp_{\ell-1}, \tag{1.35}$$

где $\ell > m + n$. Выражение (1.35) не зависит от ℓ с точностью до элементов пространства $\mathcal{P}$.

Предложение 1.12. *Для любого оператора с параметром $D(p) \in \Psi_p^m(X)$ имеет место равенство*

$$\mathrm{TR}\, D = \mathrm{TR}_M\, D \in S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P}. \tag{1.36}$$

Доказательство. Для оператора $D(p) \in \Psi_p^m(X)$ необходимо доказать равенство

$$\delta^{-\ell}\big[\operatorname{tr}\big(\delta^\ell D(p)\big)\big] = \big[\mathrm{TR}_M\, D(p)\big],$$

или эквивалентно

$$\big[\operatorname{tr}\big(\delta^\ell D(p)\big)\big] = \delta^\ell\big[\mathrm{TR}_M\, D(p)\big]. \tag{1.37}$$

Равенство (1.37) очевидно при $m + n < 0$, так как в этом случае можно взять $\ell = 0$. При $m + n \geqslant 0$ рассмотрим оператор $\widetilde{D}(p) \in \Psi_p^m(X)/\Psi_p^{-n-1}(X)$. Равенство (1.36) для $\widetilde{D}(p)$ достаточно доказать локально, т.е. будем считать, что его полный символ $a(x,\xi,p)$ имеет носитель в локальной карте. Рассмотрим ПДО с параметром $D(p)$, полный символ которого равен $a(x,\xi,p)$. Подставим оператор $D(p)$ в правую часть (1.37). Тогда при $m-\ell<-n$ имеем

$$\begin{aligned}\delta^\ell\big[\mathrm{TR}_M\,D(p)\big] =&\delta^\ell\int\limits_0^p\int\limits_0^{p_{\ell-1}}\cdots\int\limits_0^{p_1}\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\partial_q^\ell a(x,\xi,q)dxd\xi dqdp_1\dots dp_{\ell-1}=\\ =&\delta^\ell\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\int\limits_0^p\int\limits_0^{p_{\ell-1}}\cdots\int\limits_0^{p_1}a^{(\ell)}(x,\xi,q)dqdp_1\dots dp_{\ell-1}dxd\xi=\\ =&\delta^\ell\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\left(a(x,\xi,p)-\sum_{k=0}^{\ell-1}\frac{1}{k!}a^{(k)}(x,\xi,0)p^k\right)dxd\xi=\\ =&\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\left(\delta^\ell a(x,\xi,p)-\delta^\ell\left(\sum_{k=0}^{\ell-1}\frac{1}{k!}a^{(k)}(x,\xi,0)p^k\right)\right)dxd\xi=\\ =&\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\delta^\ell a(x,\xi,p)dxd\xi=\big[\mathrm{tr}\big(\delta^\ell D(p)\big)\big].\end{aligned}\tag{1.38}$$

Здесь $a^{(k)}(x,\xi,q)$ — k-ая производная функции a по параметру q. Из (1.38) следуют искомые равенства (1.37) и (1.36) $\square$

1.4 Регуляризация интеграла

Регуляризованный след $\mathrm{TR}\,D(p)$ может возрастать при $p\to\infty$. Для интегрирования подобных функций по числовой прямой мы используем некоторую регуляризацию интеграла.

Предложение 1.13. *Пусть $f(p)\in S_{as}(\mathbb{R})$. Тогда при $T\to+\infty$ существует асимптотическое разложение*

$$\int\limits_{-T}^{T}f(p)dp\sim\sum_{j\leqslant N}c_j(T)T^j+\sum_{0\leqslant r\leqslant N}d_r(T)T^r\ln T,\tag{1.39}$$

где $c_j(T)$, $d_r(T)$ — гладкие периодические функции.

Доказательство. Достаточно получить асимптотическое разложение вида (1.39) для интеграла по отрезку $[1,T]$. Если функция $f(p)$ имеет асимптотическое разложение (1.12), то рассмотрим функцию

$$f_0(p) = f(p) - \left(\sum_{j=-1}^{N} c_j^+(p) p^j + \sum_{r=0}^{N} d_r^+(p) p^r \ln |p| \right) \sim \sum_{j \leqslant -2} c_j^+(p) p^j. \tag{1.40}$$

Из (1.40) получаем

$$\int_1^T f(p)dp = \int_1^T f_0(p)dp + \int_1^T \left(\sum_{j=-1}^{N} c_j^+(p) p^j + \sum_{r=0}^{N} d_r^+(p) p^r \ln |p| \right) dp. \tag{1.41}$$

Покажем, что каждое слагаемое в (1.41) имеет асимптотику (1.39).

1. Поскольку $f_0(p) = O(p^{-2})$ при $p \to \infty$, имеем

$$\int_1^T f_0(p)dp = \int_1^\infty f_0(p)dp - \int_T^\infty f_0(p)dp. \tag{1.42}$$

Докажем, что существует асимптотическое разложение

$$\int_T^\infty f_0(p)dp \sim \sum_{j \leqslant -2} a_j(T) T^j \tag{1.43}$$

с некоторыми гладкими периодическими функциями $a_j(T)$. Фиксируем число $M \geqslant 3$. Тогда имеем

$$\left| \int_T^{+\infty} f_0(p)dp - \sum_{j=-M+1}^{-2} \int_T^\infty c_j^+(p) p^j dp \right| = \left| \int_T^{+\infty} \left(f_0(p) - \sum_{j=-M+1}^{-2} c_j^+(p) p^j \right) dp \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_T^{+\infty} \left| f_0(p) - \sum_{j=-M+1}^{-2} c_j^+(p) p^j \right| dp \leqslant \int_T^{+\infty} C_M |p|^{-M} dp = C_M' T^{-M+1}, \tag{1.44}$$

где мы воспользовались тем, что в формуле (1.40) имеется асимптотические разложение, т.е. справедлива оценка

$$\left| f_0(p) - \sum_{j=-M+1}^{-2} c_j^+(p) p^j \right| \leqslant C_M |p|^{-M}$$

с некоторой константой $C_M > 0$.

Лемма 1.14. *Пусть $c(p)$ — гладкая периодическая функция. Тогда для любого $j \leqslant -2$ существует асимптотическое разложение*

$$\int\limits_T^\infty c(p)p^j\,dp \sim \sum_{k\leqslant j+1} \overline{c}_k(T)T^k \tag{1.45}$$

с гладкими периодическими коэффициентами $\overline{c}_k(T)$.

Доказательство. Определим разложение $c(p) = \overline{c} + \widetilde{c}(p)$, где $\overline{c} = \int_0^1 c(p)dp$. Тогда, интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_T^\infty c(p)p^j\,dp = \int\limits_T^\infty (\overline{c} + \widetilde{c}(p))p^j\,dp = \overline{c}\int\limits_T^\infty p^j\,dp + \int\limits_T^\infty \widetilde{c}(p)p^j\,dp =$$

$$= \frac{\overline{c}}{j+1}p^{j+1}\Big|_T^\infty + \int\limits_T^\infty p^j\,d(v(p)) = -\frac{\overline{c}}{j+1}T^{j+1} - T^j v(T) - \int\limits_T^\infty jv(p)p^{j-1}dp. \tag{1.46}$$

Здесь $v(p) = \int_0^p \widetilde{c}(q)dq$ — периодическая функция, поскольку $\int_0^1 \widetilde{c}(q)dq = 0$. Это рассуждение можно применить к последнему интегралу в (1.46), и мы по индукции доказываем справедливость разложения (1.45). □

Вернёмся к доказательству предложения 1.13. Из асимптотического разложения (1.45) и оценки (1.44) следует существование искомого асимптотического разложения (1.43) для интеграла (1.42). Отсюда получаем асимптотическое разложение (1.39).

2. Докажем, что второе слагаемое в (1.41) имеет асимптотическое разложение вида (1.39) при больших T. В самом деле, почленное интегрирование по частям, как в лемме 1.14, даёт искомое асимптотическое разложение:

$$\int\limits_1^T \left(\sum_{j=-1}^N c_j^+(p)p^j + \sum_{r=0}^N d_r^+(p)p^r\ln p\right)dp \sim \sum_{j\leqslant N+1} \overline{c}_j(T)T^j + \sum_{r=0}^{N+1} \overline{d}_r(T)T^r\ln T, \tag{1.47}$$

где $\overline{c}_j$, $\overline{d}_j$ — некоторые периодические функции. Предложение 1.13 доказано полностью. □

Определение 1.15. *Регуляризованным интегралом* функции $f \in S_{as}(\mathbb{R})$ будем называть среднее значение коэффициента $c_0(T)$ в асимптотическом разложении (1.39) и будем обозначать его через

$$\fint\limits_{\mathbb{R}} f(p)dp \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^1 c_0(T)dT. \tag{1.48}$$

Предложение 1.16 (Свойства регуляризованного интеграла)**.**

1. Если $f \in S_{as}(\mathbb{R}) \cap O\big((1+|p|)^{-2}\big)$, то

$$\fint\limits_{\mathbb{R}} f(p)dp = \int\limits_{\mathbb{R}} f(p)dp;$$

2. Если $f \in \mathcal{P}$, то $\fint_{\mathbb{R}} f(p)dp = 0$;

3. Если функция f нечётна, то $\fint_{\mathbb{R}} f(p)dp = 0$.

Доказательство. 1. Поскольку $f \in S_{as}(\mathbb{R}) \cap O\big((1+|p|)^{-2}\big)$, то функция $\int_{-T}^{T} f(p)dp$ при $T \to +\infty$ сходится к интегралу по всей прямой $\mathbb{R}$. Следовательно, коэффициент $c_0(T)$ в разложении (1.39) равен интегралу $\int_{\mathbb{R}} f(p)dp$, а его среднее значение совпадает с ним самим.

2. В силу соображений непрерывности достаточно доказать искомое равенство $\fint_{\mathbb{R}} f(p)dp = 0$ для $f(p) = e^{2\pi ikp}p^j$, где $k \in \mathbb{Z}$, $j \geqslant 0$. Искомое равенство при $k = 0$ проверяется непосредственно. Далее, при $k \neq 0$ интеграл $\int_{-T}^{T} e^{2\pi ikp}p^j dp$ имеет вид $e^{2\pi ikT}P(T) + e^{-2\pi ikT}Q(T)$, где $P(T)$, $Q(T)$ — некоторые многочлены. Поэтому получаем искомое равенство $\fint_{\mathbb{R}} e^{2\pi ikp}p^j dp = 0$, поскольку средние значения функций $e^{\pm 2\pi ikT}$ равны нулю.

3. Поскольку $f(-p) = -f(p)$, получаем $\int_{-T}^{T} f(p)dp = 0$. $\square$

Из предложения 1.12 получаем

Следствие 1.17. *Функционал* $\mathrm{Tr}\colon \Phi_p(X) \to \mathbb{C}$, *определяемый формулой*

$$\mathrm{Tr}\, D \stackrel{\text{def}}{=} \fint\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{TR}\, D(p)dp,$$

является следом, т.е. $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ *для любых* $A,B \in \Phi_p(X)$.

1.5 η-инвариант

Определение 1.18. Пусть $D(p) \in \Phi_p^m(X)$ — обратимый элемент, т.е. существует обратный элемент $D^{-1}(p) \in \Phi_p^{-m}(X)$. Тогда число

$$\eta(D) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Tr}\left(D^{-1}\partial_p D\right) \tag{1.49}$$

называется η-*инвариантом* элемента $D(p)$.

Замечание 1.19 (теорема 3.1 в [13])**.** Оператор с параметром $D(p) \in \Phi_p^0(X)$ обратим в алгебре $\Phi_p^0(X)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

1) главный символ $\overline{\sigma}_{\text{pr}}(D)(x,\xi,p,z)$ обратим при всех $(x,\xi,p,z) \in S(T^*X \oplus \mathbb{R}) \times \mathbb{S}^1$;
2) оператор $D(p) \colon L^2(X) \to L^2(X)$ обратим при всех $p \in \mathbb{R}$.

Замечание 1.20. Вычислим η-инвариант в частном случае при $X = pt$. При этом обратимый оператор с параметром $D(p)$ представляет собой всюду обратимую комплекснозначную функцию

$$D(p) = r(p)e^{i\varphi(p)}, \text{ где } r(p) = r(p + 2\pi k),\ \varphi(p + 2\pi) = \varphi(p) + 2\pi k^{\pm},\ k,k^{\pm} \in \mathbb{Z}.$$

Здесь $k^{\pm}$ равны числам вращения функций $D^{\pm}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{k\to\pm\infty} D(p + 2\pi k) = r^{\pm}(p)\varphi^{\pm}(p)$.

η-инвариант функции $D(p)$, периодической на бесконечности, равен

$$\eta(D) = \frac{a^+ - a^-}{4\pi^2} + i\frac{b^- - b^+}{4\pi^2},$$

где

$$a^{\pm} = \int\limits_0^{2\pi} \varphi^{\pm}(p)dp - k^{\pm}\pi, \quad b^{\pm} = \int\limits_0^{2\pi} \ln r^{\pm}(p)dp.$$

Замечание 1.21. Пусть $D(p) \in 1 + C_c^{\infty}(\mathbb{R},\Psi_p^{-\infty}(X))$. Тогда η-инвариант семейства $D(p)$ равен числу вращения семейства:

$$\eta(D) = w(D) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{tr}(D^{-1}dD).$$

В самом деле, регуляризация следа не требуется в силу бесконечно высокого отрицательного порядка семейства, а интеграл является сходящимся, поскольку $D(p)$ имеет компактный носитель.

Предложение 1.22 (**Свойства η-инварианта**).

1. η-инвариант удовлетворяет логарифмическому свойству:

$$\eta(AB) = \eta(A) + \eta(B)$$

для любых обратимых элементов $A,B \in \Phi_p(X)$;

2. η-инвариант (1.49) *является обобщением η-инварианта Мельроуза, а именно, если $D(p) \in \Psi_p(X)$ — обратимый ПДО с параметром, то*

$$\eta(D) = \eta_M(D), \quad \text{где} \quad \eta_M(D) = \frac{1}{2\pi i} \fint_{\mathbb{R}} \mathrm{TR}_M \left(D^{-1}\partial_p D\right) dp.$$

Доказательство. 1. Докажем логарифмическое свойство:

$$\begin{aligned} 2\pi i\eta(AB) &= \mathrm{Tr}\left((AB)^{-1}\partial_p(AB)\right) = \mathrm{Tr}\left(B^{-1}A^{-1}\left(\partial_p AB + A\partial_p B\right)\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(B^{-1}A^{-1}\partial_p AB\right) + \mathrm{Tr}\left(B^{-1}A^{-1}A\partial_p B\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(BB^{-1}A^{-1}\partial_p A\right) + \mathrm{Tr}\left(B^{-1}\partial_p B\right) = 2\pi i\big(\eta(A) + \eta(B)\big). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались циклическим свойством следа Tr.

2. На подалгебре $\Psi_p(X)$ регуляризованный след совпадает с регуляризованным следом Мельроуза (см. (1.36)). Отсюда получаем

$$\eta(D) = \frac{1}{2\pi i} \fint_{\mathbb{R}} \mathrm{TR}\left(D^{-1}\partial_p D\right) dp = \frac{1}{2\pi i} \fint_{\mathbb{R}} \mathrm{TR}_M\left(D^{-1}\partial_p D\right) dp = \eta_M(D).$$

□

Вариация η-инварианта.

Предложение 1.23. *Пусть $D_t(p) \in \Phi_p^m(X)$, $t \in [0,1]$ — гладкая гомотопия семейств обратимых операторов с параметром. Тогда*

1) производная η-инварианта семейства D_t по параметру t равна

$$\partial_t \eta(D_t) = \frac{1}{2\pi i} \mathrm{Tr}\big(\partial_p(D_t^{-1}\partial_t D_t)\big); \tag{1.50}$$

2) композиция $\widetilde{\mathrm{Tr}} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Tr} \circ \partial_p$ является следом на алгебре $\Phi_p(X)$, т.е. $\widetilde{\mathrm{Tr}}(AB) = \widetilde{\mathrm{Tr}}(BA)$ для всех семейств $A,B \in \Phi_p(X)$;

3) для оператора с параметром $D(p)=\sum_k D_k(p)e^{2\pi ikp}\in\Phi_p^m(X)$ имеем

$$\widetilde{\operatorname{Tr}}\,D(p)=\int\limits_{T^*X}\left[d_{0,-n}(x,\xi,1)-d_{0,-n}(x,\xi,-1)\right]\frac{\omega^n}{n!},\quad n=\dim X,\qquad(1.51)$$

где $(x,\xi)\in T^*X$, $\omega=\sum dx_j\wedge d\xi_j$ — симплектическая форма на T^*X, а $d_{0,j}$ — однородная компонента степени j полного символа ПДО с параметром $D_0(p)$, при этом интеграл в (1.51) абсолютно сходится.

Доказательство. 1. Левая часть в (1.50) равна

$$\partial_t\eta(D_t)=\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Tr}\left(\partial_t(D_t^{-1}\partial_pD_t)\right)=\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Tr}\left(-D_t^{-1}\partial_tD_tD_t^{-1}\partial_pD_t+D_t^{-1}\partial_{tp}D_t\right).\qquad(1.52)$$

Правая часть в (1.50) равна

$$\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Tr}\left(\partial_p(D_t^{-1}\partial_tD_t)\right)=\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Tr}\left(-D_t^{-1}\partial_pD_tD_t^{-1}\partial_tD_t+D_t^{-1}\partial_{pt}D_t\right)=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Tr}\left(-D_t^{-1}\partial_tD_tD_t^{-1}\partial_pD_t+D_t^{-1}\partial_{tp}D_t\right).\qquad(1.53)$$

Последнее равенство следует из циклического свойства следа Tr. Поскольку выражения в (1.52) и (1.53) совпадают, то мы получили равенство левой и правой частей в (1.50).

2. Докажем циклическое свойство следа $\widetilde{\operatorname{Tr}}$:

$$\widetilde{\operatorname{Tr}}(AB)=\operatorname{Tr}\left(\partial_p(AB)\right)=\operatorname{Tr}\left(\partial_pAB+A\partial_pB\right)=\operatorname{Tr}\left(\partial_pBA+B\partial_pA\right)=\widetilde{\operatorname{Tr}}(BA).$$

Предпоследнее равенство следует из циклического свойства следа Tr.

3. Установим формулу (1.51). Имеем

$$\widetilde{\operatorname{Tr}}\,D(p)=\fint\limits_{\mathbb{R}}\operatorname{TR}\big(\partial_pD(p)\big)dp=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\fint\limits_{\mathbb{R}}e^{2\pi ikp}\operatorname{TR}\big(2\pi ikD_k(p)+\partial_pD_k(p)\big)dp.\qquad(1.54)$$

Утверждается, что

$$\fint\limits_{\mathbb{R}}e^{2\pi ikp}\left(2\pi ik\operatorname{TR}D_k(p)+\operatorname{TR}\big(\partial_pD_k(p)\big)\right)dp=0\quad\text{при}\quad k\neq0.$$

В самом деле, в локальных координатах в силу формулы (1.38) и предложения 1.12 о равенстве регуляризованного следа TR и регуляризованного следа

Мельроуза получаем

$$
\begin{aligned}
\operatorname{TR} D_k(p) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \left(d_k(x,\xi,p) - \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{j!} d_k^{(j)}(x,\xi,0)p^j \right) dxd\xi,\\
\operatorname{TR}(\partial_p D_k(p)) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \left(\partial_p d_k(x,\xi,p) - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j!} d_k^{(j+1)}(x,\xi,0)p^j \right) dxd\xi,
\end{aligned}
\tag{1.55}
$$

где $d_k(x,\xi,p)$ — полный символ оператора $D_k(p)$, а $d_k^{(j)}$ — его j-ая производная по переменной p. Отметим, что регуляризованные следы TR и TR_M совпадают по модулю элементов пространства $\mathcal{P}$. Однако такие функции не дают вклад в регуляризованный интеграл (см. предложение 1.16). Данные интегралы в (1.55) абсолютно сходятся. Далее, из (1.55) по формуле Ньютона-Лейбница получаем

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{-T}^{T} e^{2\pi i k p} \left(2\pi i k \operatorname{TR} D_k(p) + \operatorname{TR}\big(\partial_p D_k(p)\big)\right) dp =\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} e^{2\pi i k p} \left(d_k(x,\xi,p) - \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{j!} d_k^{(j)}(x,\xi,0)p^j \right) dxd\xi \Bigg|_{p=-T}^{T} =\\
&= e^{2\pi i k T} \int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \left(d_k(x,\xi,T) - \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{j!} d_k^{(j)}(x,\xi,0)T^j \right) dxd\xi =\\
&\quad - e^{-2\pi i k T} \int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \left(d_k(x,\xi,-T) - \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{j!} d_k^{(j)}(x,\xi,0)(-T)^j \right) dxd\xi.
\end{aligned}
\tag{1.56}
$$

Интегралы в последней формуле являются гладкими функциями переменной T и имеют разложение вида (1.12) с постоянными коэффициентами. После подстановки этих разложений в формулу (1.56) и выделения постоянного члена в асимптотическом разложении мы видим, что этот коэффициент равен нулю при всех $k \neq 0$.

Таким образом, в силу формулы (1.36) из (1.54) получаем

$$
\widetilde{\operatorname{Tr}}\, D = \fint\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{TR}\big(\partial_p D_0(p)\big) dp = \fint\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{TR}_M\big(\partial_p D_0(p)\big) dp. \tag{1.57}
$$

След (1.57) был вычислен в [56, предложение 6]. Применение цитированного результата к правой части в (1.57) даёт искомую формулу (1.51). □

Замечание 1.24. Все результаты данной главы нетрудно обобщить на случай семейств с коэффициентами произвольного периода.

Глава 2. Индекс дифференциально-разностных операторов на бесконечном цилиндре

Настоящая глава посвящена проблеме индекса эллиптических дифференциально-разностных операторов на бесконечном цилиндре. В §2.1 вводится понятие символа рассматриваемых операторов и напоминаются условия, гарантирующие фредгольмовость рассматриваемых операторов. В §2.2 вводятся вспомогательные определения и конструкции (в частности, модификация η-инварианта из главы 1), в терминах которых формулируется теорема об индексе — основной результат главы. Параграфы 2.3 и 2.4 посвящены доказательству важных вспомогательных результатов о гомотопической инвариантности топологического индекса и сведении к операторам с постоянными коэффициентами. Наконец, в §2.5 приводится доказательство теоремы об индексе.

Результаты данной главы опубликованы в статье [70].

2.1 Постановка задачи

Более точно, рассматривается бесконечный цилиндр $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ с координатами (x,t), на котором задано действие группы $\mathbb{Z}$ диффеоморфизмами $g^k\colon M \to M$, $k \in \mathbb{Z}$, где $g(x,t) = (x,t + 2\pi)$. На M рассматривается оператор вида

$$D = \sum_k D_k T^k\colon H^{s,\gamma^-,\gamma^+}(M,\mathbb{C}^N) \longrightarrow H^{s-m,\gamma^-,\gamma^+}(M,\mathbb{C}^N), \qquad (2.1)$$

где D_k — матричный дифференциальный оператор порядка $\leqslant m$ на M, $T^k u(x,t) = u(x,t-2\pi k)$ — оператор сдвига по переменной t, а $H^{s,\gamma^-,\gamma^+}(M)$ — весовое пространство Соболева (см., напр., [14; 59]). При этом мы предполагаем, что только конечное число слагаемых в сумме (2.1) не равно нулю, а коэффициенты оператора D_k не зависят от t при больших t. Норма функции $u(x,t)$ в весовом пространстве Соболева H^{s,γ^-,γ^+} для функций с носителем в фиксированном компакте эквивалентна норме в пространстве Соболева H^s, а для функций с носителем в окрестности плюс бесконечности определяется выражением

$$\|u\|^2_{s,\gamma^+} = \int\limits_{\mathbb{R}} \left\| \left(1 + \left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + \left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\right)^{s/2} e^{\gamma^+ t} u(x,t) \right\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1,\mathbb{C}^N)} dt$$

или, эквивалентно,

$$\|u\|^2_{s,\gamma^+} = \int\limits_{L_{\gamma^+}} \left\| \left(1 + p^2 + \left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\right)^{s/2} \widetilde{u}(x,p) \right\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1,\mathbb{C}^N)} dp,$$

где $\widetilde{u}(x,p) = \mathcal{F}_{t\to p} u(x,t)$ — преобразование Фурье, а $L_{\gamma_+} = \{\operatorname{Im} p = \gamma_+\}$ — весовая прямая в комплексной плоскости, отвечающая плюс бесконечности. Норма в окрестности минус бесконечности задаётся аналогично. Оператор вида (2.1) является *G-оператором* ($G = \mathbb{Z}$).

Напомним условия фредгольмовости оператора (2.1) (см. [25; 29]). Для этого дадим определение символа оператора в этой ситуации. Символ имеет три компоненты, которые называются *внутренним символом* и *конормальными символами* на бесконечности, когда $t \to \pm\infty$.

Определение 2.1. *Внутренним символом* оператора (2.1) в точке $(x,t,\xi,p) \in T^*_0 M = \{(x,t,\xi,p) \mid \xi^2 + p^2 \neq 0\}$ кокасательного расслоения без нулевого сечения называется оператор

$$\sigma(D)(x,t,\xi,p) = \sum_k \sigma(D_k)(x,t+2\pi n,\xi,p)\mathcal{T}^k \colon \ell^2(\mathbb{Z},\mu) \otimes \mathbb{C}^N \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z},\mu) \otimes \mathbb{C}^N, \tag{2.2}$$

где $\sigma(D_k)$ — главный символ оператора D_k, $\mathcal{T}w(n) = w(n-1)$ — оператор сдвига последовательности.

Здесь

$$\ell^2(\mathbb{Z},\mu) = \left\{ w(n) \,\Big|\, \sum_n |w(n)|^2 \mu(n) < \infty \right\}, \text{ где вес } \mu(n) = \begin{cases} e^{-2\gamma_+ n} & \text{при } n \geqslant 1, \\ e^{-2\gamma_- n} & \text{при } n \leqslant -1 \end{cases} \tag{2.3}$$

вычислен в [25, стр. 177]. Нетрудно проверить, что если A и B — операторы вида (2.1), то для внутреннего символа справедлива *формула композиции*:

$$\sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B). \tag{2.4}$$

Оператор (2.2) зависит от параметров (x,t,ξ,p) гладким образом и определяет элемент алгебры $C^\infty\big(S^*M,\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z},\mu)\otimes\mathbb{C}^N)\big)$ гладких функций на косферическом расслоении $S^*M=\{(x,t,\xi,p)\mid\ \xi^2+p^2=1\}$ со значениями в алгебре ограниченных операторов в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z},\mu)\otimes\mathbb{C}^N$.

Напомним определение конормального символа оператора D_k (см., напр., [59]). Конормальный символ оператора $D_k=\sum\limits_{\alpha,\beta}a_{\alpha\beta k}(x,t)\,(-i\partial_x)^\alpha\,(-i\partial t)^\beta$ равняется

$$D_k^\pm(p)=\sum_{\alpha,\beta}a_{\alpha\beta k}(x,\pm\infty)\,(-i\partial_x)^\alpha\,p^\beta.$$

Заметим, что конормальные символы $D_k^\pm(p)$ являются дифференциальными операторами с параметром (см., напр., [27]).

Определение 2.2. *Конормальным символом* оператора (2.1) называется пара $\big(\sigma_c^+(D),\sigma_c^-(D)\big)$ операторов с параметром и периодическими коэффициентами:

$$\sigma_c^\pm(D)(p)=\sum_k D_k^\pm(p)e^{ikp}\colon H^s(\mathbb{S}^1,\mathbb{C}^N)\longrightarrow H^{s-m}(\mathbb{S}^1,\mathbb{C}^N). \tag{2.5}$$

Отметим, что операторы с параметром $\sigma_c^\pm(D)(p)\in\Phi_p(\mathbb{S}^1)$ были рассмотрены в главе 1 в случае 1-периодических коэффициентов (см. (1.9)).

Определение 2.3. Оператор (2.1) называется *эллиптическим*, если

1) оператор (2.2) обратим при всех $(x,t,\xi,p)\in T_0^*M$;
2) операторы (2.5) обратимы на весовых прямых $L_{\gamma^\pm}$.

Теорема 2.4 (теорема 2.1 и замечание 2.3 в [25])**.** *Если G-оператор* (2.1) *эллиптичен, то он фредгольмов. Кроме того, конормальные символы* (2.5) *обратимы при больших $p\in L_{\gamma^\pm}$ при условии, что внутренний символ* (2.2) *является эллиптическим для весов $\gamma^\pm$.*

Цель данной главы — дать формулу индекса для эллиптических операторов (2.1).

2.2 Теорема об индексе

Будем использовать следующие обозначения:

– σ — внутренний символ оператора (2.1) (см. (2.2));

- $\sigma_c^{\pm}$ — конормальные символы оператора (2.1) на плюс и минус бесконечности (см. (2.5));
- $M_0 = \mathbb{S}^1 \times [0,2\pi] \subset M$ — фундаментальная область действия группы $\mathbb{Z}$ на M;
- $\Omega^*\big(S^*M_0, \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z},\mu) \otimes \mathbb{C}^N)\big)$ — алгебра дифференциальных форм на косферическом расслоении $S^*M_0 \subset S^*M$ со значениями в алгебре ограниченных операторов в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z},\mu) \otimes \mathbb{C}^N$;
- d — продолжение внешнего дифференциала на S^*M_0 на указанную алгебру дифференциальных форм.

Некоммутативные дифференциальные формы и градуированный след. Определим функционал

$$\tau_{S^*M} \colon \Omega^*\big(S^*M_0, \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z},\mu) \otimes \mathbb{C}^N)\big) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \omega \longmapsto \int\limits_{S^*M_0} \operatorname{Tr} \omega,$$

где Tr — операторный след, определённый на идеале форм со значениями в ядерных операторах. Функционал τ_{S^*M} является *градуированным следом*, т.е. удовлетворяет свойству

$$\tau_{S^*M}(\omega_1\omega_2) = (-1)^{\deg \omega_1 \deg \omega_2} \tau_{S^*M}(\omega_2\omega_1),$$

где $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^*\big(S^*M_0, \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z},\mu) \otimes \mathbb{C}^N)\big)$ и хотя бы одна из форм ω_1, ω_2 принимает значения в ядерных операторах.

Функционал на алгебре полных символов конормальных символов.

Определение 2.5. *Полным символом* семейства $\sigma_c^+(p)$ называется функция

$$\widetilde{\sigma}(\sigma_c^+) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{\sigma}(D_k^+) z^k \in \operatorname{Mat}_N\left(C^\infty\big(\mathbb{S}^1_\varphi, S_\rho(\mathbb{S}^1_x \times \mathbb{R}^2_{\xi,\rho})\big)\right), \tag{2.6}$$

где $\widetilde{\sigma}(D_k^+)$ — полный символ семейства $D_k^+(p)$, $z = e^{i\varphi} \in \mathbb{S}^1_\varphi$, а $S_\rho(\mathbb{S}^1_x \times \mathbb{R}^2_{\xi,\rho})$ — пространство Фреше классических символов с параметром (см., напр., [27]).

Пусть $\widetilde{\sigma}_j(D_k^+)$ — компонента степени j полного символа семейства $D_k^+(p)$. Тогда компонента степени j полного символа семейства σ_c^+ равна

$$\widetilde{\sigma}_j(\sigma_c^+) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{\sigma}_j(D_k^+) z^k, \quad j \leqslant m. \tag{2.7}$$

Определим функционал $\tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}$ на алгебре $\mathrm{Mat}_N\left(C^\infty(\mathbb{S}^1, S_\rho(\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}^2))\right)$:

$$\tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}\left(\widetilde{\sigma}\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}\operatorname{tr}\left(\int\limits_0^{2\pi}\sigma_{-1}\Big|_{\rho=-1}^{\rho=1}d\varphi\right)dxd\xi, \tag{2.8}$$

где $\widetilde{\sigma}=\widetilde{\sigma}(\sigma_c^+)$, $\sigma_j=\widetilde{\sigma}_j(\sigma_c^+)$. Аналогичные обозначения вводятся для семейства σ_c^-. Интеграл в (2.8) сходится абсолютно. В самом деле, поскольку σ_{-1} имеет порядок -1, после подстановки в точках $\rho=\pm1$ порядока подынтегрального становится равным -2. Отметим, что в скалярном случае функционал (2.8) совпадает с функционалом (1.51) для семейств $D(\rho)$ на многообразии $X=\mathbb{S}^1$.

η-инвариант. Следуя [47], дадим модификацию η-инварианта из параграфа 1.5 для случая семейств вида (2.5), где $\operatorname{Im}p\neq0$.

Определение 2.6. η-*инвариантом* эллиптического семейства $\sigma_c(p)$ вида (2.5), обратимого при $\operatorname{Im}p=\gamma$, называется число

$$\eta_\gamma(\sigma_c)=\frac{1}{2\pi i}\fint\limits_{\mathbb{R}}\mathrm{TR}\Big(\sigma_c^{-1}(\rho+i\gamma)\partial_\rho\sigma_c(\rho+i\gamma)-i\gamma\partial_\rho\big(\sigma_c^{-1}(\rho+i\gamma)\partial_\rho\sigma_c(\rho+i\gamma)\big)\Big)d\rho, \tag{2.9}$$

где TR — регуляризованный след (1.30), а $\fint_{\mathbb{R}}$ — регуляризованный интеграл (1.48) для 2π-периодических функций.

Отметим важное свойство η-инварианта.

Предложение 2.7. *Пусть $\sigma_{c,\varepsilon}$, $\varepsilon\in[0,1]$ — гладкая гомотопия обратимых семейств с параметром. Тогда производная η-инварианта семейства $\sigma_{c,\varepsilon}$ по параметру ε равна*

$$\partial_\varepsilon\eta_\gamma(\sigma_{c,\varepsilon})=\frac{1}{2\pi i}\widetilde{\mathrm{Tr}}\Big(\sigma_{c,\varepsilon}^{-1}(\rho+i\gamma)\partial_\varepsilon\sigma_{c,\varepsilon}(\rho+i\gamma)-i\gamma\partial_\varepsilon\big(\sigma_{c,\varepsilon}^{-1}(\rho+i\gamma)\partial_\rho\sigma_{c,\varepsilon}(\rho+i\gamma)\big)\Big), \tag{2.10}$$

где

$$\widetilde{\mathrm{Tr}}\,\sigma_c\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{1}{2\pi}\fint\limits_{\mathbb{R}}\mathrm{TR}(\partial_\rho\sigma_c)d\rho=\frac{1}{2\pi}\tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}\left(\sigma_{-1}\right). \tag{2.11}$$

Доказательство. Следует из предложения 1.23. □

Заметим (см. предложение 1.22), что функционал $\widetilde{\mathrm{Tr}}$ является следом, т.е. $\widetilde{\mathrm{Tr}}(AB)=\widetilde{\mathrm{Tr}}(BA)$ для любых семейств A,B вида (2.5).

Формула индекса.

Теорема 2.8. *Индекс эллиптического оператора* (2.1) *равен*

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ind}^{\gamma^-,\gamma^+} D = \frac{1}{24\pi^2}\tau_{S^*M}\big((\sigma^{-1}d\sigma)^3\big) + \eta_{\gamma^+}(\sigma_c^+) - \eta_{\gamma^-}(\sigma_c^-) + \\
+ \frac{1}{4\pi^2 i}\tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}\left(\frac{i}{2}\sigma_-^{-1}\partial_\xi\sigma_-\sigma_-^{-1}\partial_x\sigma_- + \sigma_-^{-1}\sigma_{m-1,-}\right) - \\
- \frac{1}{4\pi^2 i}\tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}\left(\frac{i}{2}\sigma_+^{-1}\partial_\xi\sigma_+\sigma_+^{-1}\partial_x\sigma_+ + \sigma_+^{-1}\sigma_{m-1,+}\right), \quad (2.12)
\end{aligned}
$$

где $\sigma_\pm = \widetilde{\sigma}_m(\sigma_c^\pm)$ *— главные символы конормальных символов* $\sigma_c^\pm$*, а* $\sigma_{m-1,\pm}$ *— компоненты степени* $m-1$ *полных символов конормальных символов* $\sigma_c^\pm$ *(см.* (2.7)*).*

Заметим, что след $\tau_{S^*M}\big((\sigma^{-1}d\sigma)^3\big)$ в (2.12) корректно определён. В самом деле, форма $(\sigma^{-1}d\sigma)^3$ имеет коэффициенты, которые являются суммами мономов, содержащих ограниченный оператор σ^{-1} и производные $\partial_x\sigma$, $\partial_\xi\sigma$, $\partial_\rho\sigma$, $\partial_t\sigma$, при этом производная $\partial_t\sigma$ является оператором конечного ранга (что следует из постоянства коэффициентов оператора D по переменной t на бесконечности).

Доказательство теоремы 2.8 дано в §2.5. Прежде, докажем ряд важных вспомогательных результатов.

2.3 Инвариантность топологического индекса относительно гомотопий

Обозначим правую часть в (2.12) через $\operatorname{ind}_t^{\gamma_-,\gamma_+}(D)$ и будем называть её *топологическим индексом* оператора D.

Предложение 2.9. *Рассмотрим гладкую гомотопию* $D(\varepsilon)$*,* $\varepsilon \in [0,1]$ *эллиптических операторов вида* (2.1)*. Тогда производная топологического индекса по параметру* ε *равна нулю:*

$$\partial_\varepsilon \operatorname{ind}_t^{\gamma^-,\gamma^+} D(\varepsilon) = 0.$$

Прежде чем дать доказательство предложения 2.9, докажем ряд вспомогательных результатов. Для простоты предположим, что операторы D_k в (2.1) при $t < -1$ не зависят от ε. При выполнении этого условия третье и четвёртое слагаемые в (2.12) не зависят от ε, и их производные равны нулю.

Поэтому для удобства ниже мы будем опускать знаки $\pm$ в обозначениях конормального символа. Далее будем использовать следующие обозначения. Пусть $\sigma_j = \widetilde{\sigma}_j(\sigma_c)$ — компонента степени j полного символа (см. (2.7)) семейства $\sigma_c(p) = \sum_k D_k(p)e^{ikp}$ ($p = \rho + i\gamma$), а $\sigma = \widetilde{\sigma}_m(\sigma_c)$. Через σ_x, σ_t, σ_ξ, σ_ρ и σ_ε будем обозначать производные по переменным x, t, ξ, ρ и ε соответственно. Аналогичные обозначения вводятся для j-ых компонент σ_j.

Лемма 2.10. *Производная первого слагаемого в* (2.12) *равна*

$$\partial_\varepsilon\left(\frac{1}{24\pi^2}\tau_{S^*M}\big((\sigma^{-1}d\sigma)^3\big)\right) = \frac{1}{8\pi^2}\tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}\left(\sigma^{-1}\sigma_\varepsilon\big[\sigma^{-1}\sigma_\xi,\sigma^{-1}\sigma_x\big]\right), \tag{2.13}$$

где σ *в левой части выражения — внутренний символ* (2.2), *а* $[\cdot,\cdot]$ *— коммутатор.*

Замечание 2.11. Здесь положительная ориентация на многообразии $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ определяется координатами (x,ξ), а на $\mathbb{S}^1_x \times \mathbb{S}^1_{\xi,\rho}$ — координатами (x,ρ,ξ).

Доказательство. Для краткости обозначим первое слагаемое в (2.12) через $\mathrm{AS}\big(D(\varepsilon)\big)$. Имеем

$$\partial_\varepsilon \mathrm{AS}\big(D(\varepsilon)\big) = \frac{1}{24\pi^2}\tau_{S^*M}\left(\partial_\varepsilon\left((\sigma^{-1}d\sigma)^3\right)\right) = \frac{1}{8\pi^2}\tau_{S^*M}\left(d\left(\sigma^{-1}\partial_\varepsilon\sigma(\sigma^{-1}d\sigma)^2\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{8\pi^2}\tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1}\left(\sigma^{-1}\sigma_\varepsilon(\sigma^{-1}d\sigma)^2\right), \quad \text{где} \quad \tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{S}^1_x\times\mathbb{S}^1_{\xi,\rho}}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{Tr}\,\omega d\varphi. \tag{2.14}$$

Здесь второе равенство доказывается аналогично [69, Lemma 1.17], а третье — вытекает из формулы Стокса. Имеем

$$(\sigma^{-1}d\sigma)^2 = [\sigma^{-1}\sigma_x,\sigma^{-1}\sigma_\xi]dx\wedge d\xi + [\sigma^{-1}\sigma_x,\sigma^{-1}\sigma_\rho]dx\wedge d\rho + [\sigma^{-1}\sigma_\rho,\sigma^{-1}\sigma_\xi]d\rho\wedge d\xi. \tag{2.15}$$

Воспользуемся соотношением Эйлера для однородных функций степени 0: $\xi\sigma_\xi + \rho\sigma_\rho = 0$, откуда имеем $\sigma_\rho = -(\xi/\rho)\sigma_\xi$. Кроме того, поскольку $\partial S^*M = \mathbb{S}^1_x \times \mathbb{S}^1_{\xi,\rho}$, координаты ξ и ρ связаны соотношением $\xi^2 + \rho^2 = 1$. Прямым вычислением получаем $d\rho = -(\xi/\rho)d\xi$ и $d\xi \wedge d\rho = 0$. Выполним описанные замены переменных в (2.15). Получим

$$(\sigma^{-1}d\sigma)^2 = [\sigma^{-1}\sigma_x,\sigma^{-1}\sigma_\xi]dx\wedge d\xi +$$
$$+ \frac{\xi^2}{\rho^2}[\sigma^{-1}\sigma_x,\sigma^{-1}\sigma_\xi]dx\wedge d\xi = \frac{1}{\rho^2}[\sigma^{-1}\sigma_x,\sigma^{-1}\sigma_\xi]dx\wedge d\xi.$$

Введём обозначение

$$a(\xi,\rho) = \operatorname{Tr}\left(\frac{1}{\rho^2}\sigma^{-1}\sigma_t[\sigma^{-1}\sigma_x,\sigma^{-1}\sigma_\xi]\right)$$

и выполним замену переменных $\xi = \sin\varphi$, $\rho = \cos\varphi$ в интеграле (2.14). Поскольку функция a однородна степени -1, то получаем

$$\int\limits_{\mathbb{S}^1_{\xi,\rho}} a(\xi,\rho)d\xi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} a(\operatorname{tg}\varphi,1)d\varphi - \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} a(\operatorname{tg}\psi,-1)d\psi, \qquad \psi = \pi - \varphi.$$

Теперь выполним замену $\eta = \operatorname{tg}\varphi$ (аналогично для ψ). Получаем

$$\int\limits_{\mathbb{S}^1_{\xi,\rho}} a(\xi,\rho)d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} \big(a(\eta,1) - a(\eta,-1)\big)\frac{d\eta}{\eta^2+1}. \tag{2.16}$$

Заметим, что $1/\rho^2 = 1/\cos^2\varphi = \operatorname{tg}^2\varphi + 1 = \eta^2 + 1$. Подставляя (2.16) в (2.14) и переобозначая для удобства η через ξ, получаем искомую формулу (2.13). □

Лемма 2.12. *Производная* η*-инварианта семейства* $\sigma_c(\rho + i\gamma)$ *равна*

$$\begin{aligned}&8\pi^2 i\partial_\varepsilon\eta_\gamma(\sigma_c) =\\ &= \tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}\Big(2\sigma^{-1}\big(\sigma_{m-1,\varepsilon} - (i\sigma_\xi\sigma^{-1}\sigma_x + \sigma_{m-1})\sigma^{-1}\sigma_\varepsilon\big) + i\sigma^{-1}\big(\sigma_\xi\sigma^{-1}\sigma_{x\varepsilon} + \sigma_{\xi\varepsilon}\sigma^{-1}\sigma_x\big)\Big),\end{aligned} \tag{2.17}$$

где σ_{m-1} *— компонента степени* $m-1$ *полного символа конормального символа* σ_c *(см.* (2.7)*).*

Доказательство. 1. Вклад в производную η-инварианта несёт только компонента степени -1 полного символа семейства $\sigma_c^{-1}\partial_\varepsilon\sigma_c - i\gamma\partial_\varepsilon(\sigma_c^{-1}\partial_\rho\sigma_c)$ (см. (2.11)). В силу линейности имеем

$$\widetilde{\operatorname{Tr}}\big(\sigma_c^{-1}\partial_\varepsilon\sigma_c - i\gamma\partial_\varepsilon(\sigma_c^{-1}\partial_\rho\sigma_c)\big) = \widetilde{\operatorname{Tr}}(\sigma_c^{-1}\partial_\varepsilon\sigma_c) - i\gamma\,\widetilde{\operatorname{Tr}}\big(\partial_\varepsilon(\sigma_c^{-1}\partial_\rho\sigma_c)\big). \tag{2.18}$$

2. Рассмотрим первое слагаемое в правой части (2.18). Воспользуемся циклическим свойством следа $\widetilde{\operatorname{Tr}}$:

$$\widetilde{\operatorname{Tr}}(\sigma_c^{-1}\partial_\varepsilon\sigma_c) = \widetilde{\operatorname{Tr}}\big((\partial_\varepsilon\sigma_c)\sigma_c^{-1}\big) = \frac{1}{2}\left(\widetilde{\operatorname{Tr}}(\sigma_c^{-1}\partial_\varepsilon\sigma_c) + \widetilde{\operatorname{Tr}}\big((\partial_\varepsilon\sigma_c)\sigma_c^{-1}\big)\right). \tag{2.19}$$

Полные символы семейств в правой части (2.19) имеют вид

$$\widetilde{\sigma}(\sigma_c^{-1}\partial_\varepsilon\sigma_c)=\widetilde{\sigma}(\sigma_c^{-1})*\widetilde{\sigma}(\partial_\varepsilon\sigma_c)\sim\widetilde{\sigma}(\sigma_c^{-1})\widetilde{\sigma}(\partial_\varepsilon\sigma_c)-i\partial_\xi\widetilde{\sigma}(\sigma_c^{-1})\partial_x\widetilde{\sigma}(\partial_\varepsilon\sigma_c)+\ldots,$$
$$\widetilde{\sigma}((\partial_\varepsilon\sigma_c)\sigma_c^{-1})=\widetilde{\sigma}(\partial_\varepsilon\sigma_c)*\widetilde{\sigma}(\sigma_c^{-1})\sim\widetilde{\sigma}(\partial_\varepsilon\sigma_c)\widetilde{\sigma}(\sigma_c^{-1})-i\partial_\xi\widetilde{\sigma}(\partial_\varepsilon\sigma_c)\partial_x\widetilde{\sigma}(\sigma_c^{-1})+\ldots,\tag{2.20}$$

где $*$ — умножение в алгебре полных символов. Здесь и ниже через $\ldots$ будем обозначать слагаемые младшего порядка.

Прямым вычислением получаем разложение

$$\widetilde{\sigma}(\sigma_c^{-1})\sim\sigma_m^{-1}-\sigma_m^{-1}\big(i\sigma_{m,\xi}\sigma_m^{-1}\sigma_{m,x}+\sigma_{m-1}\big)\sigma_m^{-1}+\ldots.$$

Таким образом, из (2.20) получаем

$$\begin{aligned}\widetilde{\sigma}(\sigma_c^{-1}\partial_\varepsilon\sigma_c)\sim{}&\sigma_m^{-1}\sigma_{m,\varepsilon}+\sigma_m^{-1}\sigma_{m-1,\varepsilon}-\\&-\sigma_m^{-1}\big(i\sigma_{m,\xi}\sigma_m^{-1}\sigma_{m,x}+\sigma_{m-1}\big)\sigma_m^{-1}\sigma_{m\varepsilon}+i\sigma_m^{-1}\sigma_{m\xi}\sigma_m^{-1}\sigma_{m,x\varepsilon}+\ldots.\end{aligned}\tag{2.21}$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned}\widetilde{\sigma}((\partial_\varepsilon\sigma_c)\sigma_c^{-1})\sim{}&\sigma_{m,\varepsilon}\sigma_m^{-1}+\sigma_{m-1,\varepsilon}\sigma_m^{-1}-\\&-\sigma_{m,\varepsilon}\sigma_m^{-1}\big(i\sigma_{m,\xi}\sigma_m^{-1}\sigma_{m,x}+\sigma_{m-1}\big)\sigma_m^{-1}+i\sigma_{m,\xi\varepsilon}\sigma_m^{-1}\sigma_{m,x}\sigma_m^{-1}+\ldots.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Подставляя (2.21) и (2.22) в (2.19), в силу линейности следа $\widetilde{\operatorname{Tr}}$ из (2.11) получаем

$$\begin{aligned}\widetilde{\operatorname{Tr}}(\sigma_c^{-1}\partial_\varepsilon\sigma_c)={}&\frac{1}{4\pi}\tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}\Big(2\sigma_m^{-1}\big(\sigma_{m-1,\varepsilon}-(i\sigma_{m,\xi}\sigma_m^{-1}\sigma_{m,x}+\sigma_{m-1})\sigma_m^{-1}\sigma_{m,\varepsilon}\big)+\\&+i\sigma_m^{-1}\big(\sigma_{m,\xi}\sigma_m^{-1}\sigma_{m,x\varepsilon}+\sigma_{m,\xi\varepsilon}\sigma_m^{-1}\sigma_{m,x}\big)\Big).\end{aligned}\tag{2.23}$$

3. Теперь рассмотрим второе слагаемое в (2.18). Семейство $\partial_\varepsilon(\sigma_c^{-1}\partial_\rho\sigma_c)$ имеет порядок -1, поэтому нас интересует только его главный символ. Прямым вычислением получаем

$$\widetilde{\sigma}\big(\partial_\varepsilon(\sigma_c^{-1}\partial_\rho\sigma_c)\big)\sim\sigma_m^{-1}(\sigma_{m,\rho\varepsilon}-\sigma_{m,\varepsilon}\sigma_m^{-1}\sigma_{m,\rho})+\ldots.\tag{2.24}$$

Из (2.24), (2.23) и (2.18) имеем

$$\begin{aligned}&\widetilde{\operatorname{Tr}}\big(\sigma_c^{-1}\partial_\varepsilon\sigma_c-i\gamma\partial_\varepsilon(\sigma_c^{-1}\partial_\rho\sigma_c)\big)=\\&\quad=\frac{1}{4\pi}\tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}\Big(2\sigma_m^{-1}\big(\sigma_{m-1,\varepsilon}-(i\sigma_{m,\xi}\sigma_m^{-1}\sigma_{m,x}+\sigma_{m-1})\sigma_m^{-1}\sigma_{m,\varepsilon}-\\&\quad-i\gamma(\sigma_{m,\rho\varepsilon}-\sigma_{m,\varepsilon}\sigma_m^{-1}\sigma_{m,\rho})\big)+i\sigma_m^{-1}\big(\sigma_{m,\xi}\sigma_m^{-1}\sigma_{m,x\varepsilon}+\sigma_{m,\xi\varepsilon}\sigma_m^{-1}\sigma_{m,x}\big)\Big).\end{aligned}\tag{2.25}$$

4. Поскольку

$$\widetilde{\sigma}(\sigma_c) = \sum_{\substack{j+k\leqslant m\\ l\in\mathbb{Z}}} a_{jk}(x)(\rho+i\gamma)^j\xi^k z^l,$$

прямым вычислением получаем

$$\sigma_m = \sum_{\substack{j+k=m\\ l\in\mathbb{Z}}} a_{jk}(x)\rho^j\xi^k z^l, \quad \sigma_{m-1} = \sum_{\substack{j+k=m-1\\ l\in\mathbb{Z}}} a_{jk}(x)\rho^j\xi^k z^l + i\gamma\sum_{\substack{j+k=m\\ l\in\mathbb{Z}}} ja_{jk}(x)\rho^{j-1}\xi^k z^l. \tag{2.26}$$

Переходя к введённым ранее обозначениям, из (2.26) имеем $\sigma_m = \sigma$, $\sigma_{m-1} = \sigma_{m-1} + i\gamma\sigma_\rho$. Подставляя в (2.25) и пользуясь циклическим свойством следа, получаем

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathrm{Tr}}\big(\sigma_c^{-1}\partial_\varepsilon\sigma_c - i\gamma\partial_\varepsilon(\sigma_c^{-1}\partial_\rho\sigma_c)\big) = \\ &=\frac{1}{4\pi}\tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}\Big(2\sigma^{-1}\big(\sigma_{m-1,\varepsilon}-(i\sigma_\xi\sigma^{-1}\sigma_x+\sigma_{m-1})\sigma^{-1}\sigma_\varepsilon\big)+i\sigma^{-1}\big(\sigma_\xi\sigma^{-1}\sigma_{x\varepsilon}+\sigma_{\xi\varepsilon}\sigma^{-1}\sigma_x\big)\Big).\end{aligned} \tag{2.27}$$

Наконец, подставляя (2.27) в (2.10), получаем искомую формулу (2.17). □

Лемма 2.13. *Производная последнего слагаемого в* (2.12) *равна*

$$\begin{aligned}\partial_\varepsilon\tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}\left(\frac{i}{2}\sigma^{-1}\sigma_\xi\sigma^{-1}\sigma_x + \sigma^{-1}\sigma_{m-1}\right) &= \\ = \tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}\Bigg(\sigma^{-1}\Big(-\frac{i}{2}\big(\sigma_\varepsilon\sigma^{-1}\sigma_\xi + \sigma_\xi\sigma^{-1}\sigma_\varepsilon\big)\sigma^{-1}\sigma_x +& \\ +\frac{i}{2}\big(\sigma_{\xi\varepsilon}\sigma^{-1}\sigma_x + \sigma_\xi\sigma^{-1}\sigma_{x\varepsilon}\big) - \sigma_\varepsilon\sigma^{-1}\sigma_{m-1} + \sigma_{m-1,\varepsilon}\Big)\Bigg)&.\end{aligned}$$

Доказательство. Прямое вычисление. □

Вернёмся к доказательству предложения 2.9.

Доказательство. Вычислим сумму подынтегральных выражений для $8\pi^2 i\partial_\varepsilon \operatorname{ind}_t D(\varepsilon)$. Из лемм 2.10, 2.12, 2.13 и циклического свойства следа $\tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}$ получаем

$$\begin{aligned}&\partial_\varepsilon \operatorname{ind}_t^{\gamma^-,\gamma^+} D(\varepsilon) = \tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}\Big[2\sigma^{-1}\big(\sigma_{m-1,\varepsilon} - \sigma_{m-1}\sigma^{-1}\sigma_\varepsilon\big) + \\ &+2\sigma^{-1}\big(\sigma_{m-1}\sigma^{-1}\sigma_\varepsilon - \sigma_{m-1,\varepsilon}\big)\Big] + i\tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}\Big[-\sigma^{-1}\sigma_\varepsilon\sigma^{-1}\sigma_x\sigma^{-1}\sigma_\xi + \sigma^{-1}\sigma_\varepsilon\sigma^{-1}\sigma_x\sigma^{-1}\sigma_\xi\Big] + \\ &+ i\tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}\Big[\sigma^{-1}\sigma_\varepsilon\sigma^{-1}\sigma_\xi\sigma^{-1}\sigma_x - 2\sigma^{-1}\sigma_\varepsilon\sigma^{-1}\sigma_\xi\sigma^{-1}\sigma_x + \sigma^{-1}\sigma_\varepsilon\sigma^{-1}\sigma_\xi\sigma^{-1}\sigma_x\Big] + \\ &+ i\tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}\Big[\sigma^{-1}(\sigma_\xi\sigma^{-1}\sigma_{0x\varepsilon} + \sigma_{\xi\varepsilon}\sigma^{-1}\sigma_x) - \sigma^{-1}(\sigma_\xi\sigma^{-1}\sigma_{x\varepsilon} + \sigma_{\xi\varepsilon}\sigma^{-1}\sigma_x)\Big] = 0.\end{aligned}$$

□

Следствие 2.14. *Топологический индекс удовлетворяет логарфмическому свойству, т.е.*

$$\operatorname{ind}_t^{\gamma_-,\gamma_+}(AB) = \operatorname{ind}_t^{\gamma_-,\gamma_+}(A) + \operatorname{ind}_t^{\gamma_-,\gamma_+}(B)$$

для любых эллиптических операторов A и B вида (2.1).

Доказательство. Утверждение следует из гомотопической инвариантности топологического индекса и гомотопности диагональных матриц $\operatorname{diag}(AB,1)$ и $\operatorname{diag}(A,B)$ (см., напр., [8, стр. 63]). □

Замечание 2.15. Все предыдущие результаты переносятся на случай операторов (2.1), где коэффициенты D_k являются псевдодифференциальными операторами (ПДО) на цилиндре, внутренний символ которых не зависит от t на бесконечности.

2.4 Сведение к операторам с постоянными коэффициентами

Предложение 2.16. *Существует такая гладкая гомотопия эллиптических операторов $D(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0,1]$ вида* (2.1), *что*

1. *$D(0) = D$, а оператор $D(1)$ имеет постоянные по t коэффициенты.*
2. *Для всех $\varepsilon \in [0,1]$ оператор $D(\varepsilon)$ является эллиптическим.*
3. *Оператор $D(\varepsilon)$ имеет постоянные по t коэффициенты при $|t| > M$.*

Доказательство. 1. Рассмотрим внутренний символ как элемент скрещенного произведения

$$\sigma(D)(x,t,\xi,p) \in \operatorname{Mat}_N\big(C(\mathbb{S}^1_x \times \mathbb{S}^1_{\xi,p} \times \overline{\mathbb{R}}_t) \rtimes \mathbb{Z}\big), \quad \overline{\mathbb{R}}_t = (-\infty,+\infty) \cup \{\pm\infty\}.$$

При этом действие группы $\mathbb{Z}$ $(x,t,\xi,p) \longmapsto (x,t+2\pi k,\xi,p)$ нетривиально только на $\overline{\mathbb{R}}_t$, где $\pm\infty$ — неподвижные точки. Внутренний символ $\sigma(D)$ в силу эллиптичности является обратимым и определяет класс в K-группе (см., напр., [38])

$$[\sigma(D)] \in K_1\big(C(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \overline{\mathbb{R}}) \rtimes \mathbb{Z}\big).$$

Применяя изоморфизм (см., напр., [38]) $K_1\big(C(X) \rtimes \mathbb{Z}\big) \simeq K^0\big((X \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}\big)$, где K^* — топологическая K-группа факторпространства $(X \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}$, получаем изоморфизмы

$$K_1\big(C(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1\times\overline{\mathbb{R}})\rtimes\mathbb{Z}\big)\simeq K^0\big(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1\times(\overline{\mathbb{R}}\times\mathbb{R})/\mathbb{Z}\big)\simeq$$
$$\simeq K^0\big(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1\times(\mathbb{R}/\mathbb{Z})\big)\simeq K_1\big(C(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1)\rtimes\mathbb{Z}\big),$$

где второй изоморфизм индуцирован стягиванием отрезка $\overline{\mathbb{R}}$ в точку. Таким образом, мы получаем равенство $[\sigma(D)]=[\sigma_0]$, где σ_0 — некоторый символ, не зависящий от t. Из определения K-групп следует, что существует непрерывная гомотопия σ_ε, $\varepsilon\in[0,1]$, внутренних символов

$$\sigma_\varepsilon\in\mathrm{Mat}_N\big(C(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1\times\overline{\mathbb{R}})\rtimes\mathbb{Z}\big),\tag{2.28}$$

удовлетворяющая свойствам

– $\sigma_\varepsilon\big|_{\varepsilon=0}=\sigma_0,\quad \sigma_\varepsilon\big|_{\varepsilon=1}=\sigma(D)$;

– семейство σ_0 обратимо для всех $\varepsilon\in[0,1]$.

Выполним сглаживание функции σ_ε по переменным ε,x,ξ,p. Поскольку семейство σ_ε обратимо, то для достаточно малого положительного числа δ можно выбрать такое гладкое обратимое семейство $\widetilde{\sigma}_\varepsilon$, что $\|\sigma_\varepsilon-\widetilde{\sigma}_\varepsilon\|<\delta$.

2. Рассмотрим диффеоморфизм

$$\mathbb{R}\longrightarrow(-\pi/2,\pi/2)\,,\quad t\longmapsto y=\operatorname{arctg}t\tag{2.29}$$

и определим алгебру

$$\mathcal{A}=\left\{f(\varepsilon,x,\xi,p,\operatorname{arctg}t)\mid f\in C^\infty\left([0,1]\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1\times[-\pi/2,\pi/2]\right)\right\}.$$

Очевидно, что $\sigma(D_k)\in\mathcal{A}$ (см. (2.2)). Снабдим алгебру $\mathcal{A}$ структурой пространства Фреше, индуцируемой стандартной структурой пространства Фреше на $C^\infty\left([0,1]\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1\times[-\pi/2,\pi/2]\right)$.

Лемма 2.17. *При диффеоморфизме* (2.29) *сдвиг* $t\mapsto t+2\pi k$ *переходит в отображение* $y\mapsto\varphi_k(y)=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}y+2\pi k)$, *и для j-ой производной функции* $\varphi_k(y)$ *справедлива оценка*

$$\max_{y\in[-\pi/2,\pi/2]}|\varphi_k^{(j)}(y)|=O\big(k^{4j-2}\big).\tag{2.30}$$

Доказательство. Первое утверждение леммы напрямую следует из определения диффеоморфизма (2.29).

Вычислим производную функции $\varphi_k(y)$:

$$\varphi_k'(y)=\frac{1}{1+(\operatorname{tg}y+2\pi k)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2y}=\frac{1}{1+2(\pi k)^2+2\pi k\sin2y+2(\pi k)^2\cos2y}.\tag{2.31}$$

Знаменатель в (2.31) оценивается снизу выражением

$$\sqrt{(1+2(\pi k^2))^2}-\sqrt{(2\pi k)^2+(2(\pi k)^2)^2}\sim\frac{C}{k^2},$$

т.е. оценка (2.30) выполнена при $j=1$.

Несложно по индукции показать, что

$$\varphi_k^{(j)}(y)=\frac{P_{2(j-1)}(k,y)}{(1+2(\pi k)^2+2\pi k\sin 2y+2(\pi k)^2\cos 2y)^j},$$

где $P_{2(j-1)}(k,y)$ — многочлен степени $2(j-1)$ по переменной k с коэффициентами-периодическими функциями от y. Из этого представления и оценки знаменателя получаем справедливость оценки (2.30). □

Вернёмся к доказательству предложения 2.16. Из леммы 2.17 следует, что действие группы $\mathbb{Z}$ на алгебре $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям теоремы Швайцера (см., напр., [60, Theorem 1.23]). В самом деле, из леммы 2.17 получаем оценки

$$\max_y|\partial_y f\big(\varphi_k(y)\big)|=\max_y|f'\varphi_k'|\leqslant\max_y|f'|\cdot\max_y|\varphi_k'|\leqslant Ck^2\max_y|f'|,$$
$$\max_y|\partial^2 f\big(\varphi_k(y)\big)|=\max_y|f''\varphi_k'^2+f'\varphi_k''|\leqslant C_1k^4\max_y|f''|+C_2k^6\max_y|f'|.$$

Аналогично оцениваются производные $\partial_y^j f\big(\varphi_k(y)\big)$, $j\geqslant 3$. Отсюда следует, что существуют такой многочлен $P(k)$ и число j', что для j-ой полунормы пространства Фреше $\mathcal{A}$ справедлива оценка

$$\|f(\varphi)\|_j\leqslant P(k)\|f\|_{j'},$$

что и обеспечивает выполнение предположений в теореме Швайцера для действия группы $\mathbb{Z}$ на алгебре $\mathcal{A}$.

Далее, из теоремы Швайцера следует, что гомотопию (2.28) можно выбрать в виде

$$\widetilde{\sigma}_\varepsilon=\sum_k a_{k\varepsilon}T^k\in\operatorname{Mat}_N\big(\mathcal{A}\rtimes\mathbb{Z}\big),\tag{2.32}$$

где коэффициенты $a_{k\varepsilon}\in\operatorname{Mat}_N\big(\mathcal{A}\big)$ быстро убывают при $k\to\pm\infty$, т.е. для всякого $N>1$ справедливо неравенство

$$\|a_{k\varepsilon}\|_j\leqslant C_{jN}(1+|k|)^{-N},$$

где $\|\cdot\|_j$ пробегает все полунормы пространства Фреше $\mathcal{A}$. Далее, поскольку ряд (2.32) является сходящимся, то рассмотрим конечную сумму

$$\overline{\sigma}_\varepsilon=\sum_{-N\leqslant k\leqslant N}a_{k\varepsilon}T^k.\tag{2.33}$$

Пусть $1 = \chi_- + \chi + \chi_+$ — разбиение единицы, подчинённое покрытию

$$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, -M+1) \cup (-M,M) \cup (M-1, +\infty].$$

Поскольку M можно выбрать сколь угодно большим, коэффициенты $a_{k\varepsilon}(t)$ в (2.33) заменим на функции

$$\widetilde{a}_{k\varepsilon}(t) = \chi_-(t) a_{k\varepsilon}(-\infty) + \chi(t) a_{k\varepsilon}(t) + \chi_+(t) a_{k\varepsilon}(+\infty),$$

при этом для всякого положительного числа δ, за счёт выбора большого M, можно обеспечить справедливость неравенства

$$\sup_t |a_{k\varepsilon} - \widetilde{a}_{k\varepsilon}| < \delta.$$

Таким образом, получаем гомотопию внутренних символов

$$\widetilde{\sigma}_\varepsilon = \sum_{k=-N}^{N} \widetilde{a}_{k\varepsilon} T^k \tag{2.34}$$

с постоянными при $|t| > M$ коэффициентами.

3. Построим гомотопию эллиптических конормальных символов. Гомотопии внутренних символов (2.34) сопоставим семейство

$$\operatorname{Op}\big(\widetilde{\sigma}_\varepsilon|_{t=\pm\infty}\big)(p) = \mathcal{F}_{t\to p} \widetilde{\sigma}_\varepsilon|_{t=\pm\infty} \mathcal{F}^{-1}_{p\to t}. \tag{2.35}$$

Семейство (2.35) является всюду фредгольмовым и обратимым при $|p| > M$. При этом существует такое семейство операторов (см., напр., [61])

$$K_\varepsilon(p) \in C_c^\infty\big(L_{\gamma_\pm}, \Psi^{-\infty}(\mathbb{S}^1)\big),$$

где $\Psi^{-\infty}(\mathbb{S}^1)$ — пространство сглаживающих ПДО, что сумма

$$\operatorname{Op}\big(\widetilde{\sigma}_\varepsilon|_{t=\pm\infty}\big)(p) + K_\varepsilon(p) \tag{2.36}$$

является обратимым семейством для всех p и ε.

Теперь в качестве искомого семейства эллиптических операторов $D(\varepsilon)$ из предложения 2.16 возьмём семейство с внутренним символом (2.34) и конормальным символом (2.36). $\square$

Предложение 2.18. *Пусть D' — эллиптический оператор вида* (2.1) *с внутренним символом $\sigma(D') = 1$, а $\gamma_- = \gamma_+ = 0$. Тогда формула индекса* (2.12) *верна для оператора D', т.е.*

$$\operatorname{ind}^{0,0} D' = \operatorname{ind}_t^{0,0} D'.$$

Доказательство. 1. Соображения непрерывности позволяют прогомотопировать конормальные символы $\sigma_c^{\pm}(D')$ к конормальным символам из пространства $1+C_c^{\infty}\big(\mathbb{R},\Psi^{-\infty}(\mathbb{S}^1)\big)$.

2. С одной стороны, в силу гомотопической инвариантности индекса и результата из [59, Proposition 4.21] для оператора D' справедлива формула индекса

$$\operatorname{ind}^{0,0} D' = w\big(\sigma_c^{+}(D')\big) - w\big(\sigma_c^{-}(D')\big), \tag{2.37}$$

где $w(\cdot)$ — число вращения.

3. С другой стороны, из формулы (2.12) получаем

$$\operatorname{ind}_t^{0,0} D' = \eta_0(\sigma_c^{+}) - \eta_0(\sigma_c^{-}). \tag{2.38}$$

В самом деле, поскольку $\sigma(D') = 1$, все слагаемые в формуле (2.12), кроме η-инвариантов, равны нулю.

Наконец, поскольку в этом случае $\eta_0(\cdot) = w(\cdot)$ (см. замечание 1.21), сравнивая (2.38) и (2.37), получаем искомый результат. □

2.5 Доказательство теоремы об индексе

Вернёмся к доказательству теоремы 2.8.

1. Из предложения 2.16 следует, что существует такая гладкая гомотопия эллиптических семейств $D(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0,1]$, что $D(0) = D$ — исходный эллиптический оператор, а $D(1)$ является оператором с постоянными по переменной t коэффициентами. Поскольку аналитический и топологический индексы являются гомотопическими инвариантами (предложение 2.9), то достаточно доказать теорему для оператора $D_1 = D(1)$.

2. Без ограничения общности будем считать, что $\gamma_+ = \gamma_- = 0$.

3. Построим оператор с постоянными по переменной t коэффициентами

$$D_1' = \mathcal{F}^{-1}_{p\to t}\sigma_c^{-}(D_1)(p)\mathcal{F}_{t\to p} = \sigma_c^{-}(D_1)(-i\partial_t).$$

Очевидно, оператор D_1' обратим и $\operatorname{ind}_t^{0,0} D_1' = 0$.

4. Справедливы равенства

$$\operatorname{ind}^{0,0} D_1 = \operatorname{ind}^{0,0} D_1 D_1'^{-1} = \operatorname{ind}_t^{0,0} D_1 D_1'^{-1} = \operatorname{ind}_t^{0,0} D_1. \tag{2.39}$$

В самом деле, первое и последнее равенства в (2.39) следуют из логарифмических свойств аналитического и топологического индексов (следствие 2.14), а второе равенство — из предложения 2.18. Это завершает доказательство теоремы. □

Глава 3. Индекс операторов на прямой, периодических на бесконечности

Настоящая глава посвящена проблеме индекса эллиптических дифференциальных операторов на вещественной прямой с периодическими на бесконечности коэффициентами. В §3.1 вводится пространство периодических ПДО и понятие символа таких операторов. В §3.2 строятся регуляризованные следы периодических ПДО, устанавливается связь с регуляризованными следами из главы 1. Параграф 3.3 посвящён определению η-инварианта, доказательству его основных свойств и вычислению η-инварианта дифференциального оператора первого порядка в качестве примера. В §3.4 исследуется обратимость дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами, предъявляется формула индекса для дифференциальных операторов с коэффициентами, периодическими на бесконечности, в терминах матрицы монодромии предельных операторов — основной результат данной главы. В качестве следствия мы приводим формулу η-инварианта для дифференциальных операторов в терминах спектра соответствующей матрицы монодромии. Наконец, в §3.5 в качестве примера приводится вычисление индекса дифференциальных операторов первого порядка.

Результаты данной главы опубликованы в статье [64].

3.1 Периодические псевдодифференциальные операторы

В дальнейшем большинство структур определяется на вещественной прямой $\mathbb{R}$, поэтому в обозначениях мы в большинстве случаев будем опускать символ $\mathbb{R}$.

Напомним, что *пространство S^m_{cl} классических символов порядка $\leqslant m$, $m \in \mathbb{Z}$, на* $\mathbb{R}$ есть множество гладких функций $A(p) \in C^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющих оценкам

$$|\partial_p^\alpha A(p)| \leqslant C_\alpha (1+|p|)^{m-\alpha} \quad \forall p \in \mathbb{R},\ \alpha \geqslant 0,$$

где C_α — некоторая константа. Кроме того, предполагается, что существует асимптотическое разложение

$$A(p) \sim \sum_{j\leqslant m} A_j(p), \quad \text{где} \quad A_j(p) \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ и } A_j(\lambda p) = \lambda^j A_j(p) \; \forall \lambda \geqslant 1, |p| \geqslant 1.$$

Линейное пространство $S_{\rm cl} = \bigcup_m S^m_{\rm cl}$ называется *пространством классических символов на прямой*. Пространство $S_{\rm cl}$ является алгеброй относительно умножения.

Пространство Ψ^m псевдодифференциальных операторов (ПДО) порядка $\leqslant m$ с постоянными коэффициентами есть пространство операторов

$$A(-i\partial_t) \stackrel{\rm def}{=} \mathcal{F}^{-1}A(p)\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}), \qquad A(p) \in S^m_{\rm cl}, \tag{3.1}$$

где $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ — пространство Шварца на $\mathbb{R}$. Пространство $\Psi = \bigcup_m \Psi^m$ называется *алгеброй ПДО с постоянными коэффициентами.* Пространства $S^m_{\rm cl}$ и Ψ^m являются пространствами Фреше (см. [27, параграф 27]).

Определение 3.1. *Пространством периодических ПДО порядка $\leqslant m$* называется пространство операторов

$$\Psi^m_{\rm per} = \left\{ D = \sum_{k\in\mathbb{Z}} D_k(-i\partial_t)e^{ikt}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \right\}. \tag{3.2}$$

Здесь предполагается, что элементы $D_k(-i\partial_t) \in \Psi^m$ быстро стремятся к нулю в следующем смысле: при заданных $k \in \mathbb{Z}$ и $N \geqslant 1$ справедлива оценка

$$\|D_k(-i\partial_t)\|_\ell \leqslant C_{\ell N}(1+|k|)^{-N},$$

где $\|\cdot\|_\ell$ — произвольная полунорма в пространстве Фреше Ψ^m. Пространство $\Psi_{\rm per} = \bigcup_m \Psi^m_{\rm per}$ называется *алгеброй периодических ПДО.*

Лемма 3.2. *Представление оператора $D \in \Psi^m_{\rm per}$ в виде ряда в* (3.2) *единственно.*

Доказательство. Приведем доказательство в случае $m = 0$ (общий случай сводится к этому редукцией порядка). После применения преобразования Фурье $\mathcal{F}$ оператор D в (3.2) принимает вид оператора со сдвигами

$$\widetilde{D} = \mathcal{F}D\mathcal{F}^{-1} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} D_k(P)T^k, \quad \text{где} \quad (Tu)(p) = u(p-1). \tag{3.3}$$

Замыкание множества операторов вида (3.3) относительно операторной нормы в $L^2(\mathbb{R})$ соответствует C^*-динамической системе $(A,\mathbb{Z},\tau)$. Здесь $A \subset C_b(\mathbb{R})$ — C^*-алгебра непрерывных функций на $\mathbb{R}$, имеющих пределы при $p \to +\infty$ и $p \to -\infty$ (эта алгебра изоморфна C^*-алгебре $C[0,1]$ и является замыканием алгебры S^0_{cl}), а $\tau\colon \mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(A)$ — действие группы автоморфизмами

$$\big(\tau(k)f\big)(p) = f(p-k).$$

Поскольку действие τ на спектре $\widehat{A} \simeq [-\infty, +\infty] \simeq [0,1]$ топологически свободно[1], по теореме об изоморфизме [30, следствие 12.17] представление (3.3) оператора $\widetilde{D}$ в виде суммы единственно. Следовательно, обратное преобразование Фурье даёт желаемое однозначное разложение оператора D в (3.2). □

Определение 3.3. *Главным символом* периодических ПДО называется отображение

$$\begin{aligned} \sigma = (\sigma_+,\sigma_-)\colon \Psi^m_{\mathrm{per}} &\longrightarrow C^\infty(\mathbb{S}^1) \oplus C^\infty(\mathbb{S}^1), \\ D = \sum_{k\in\mathbb{Z}} D_k(-i\partial_t)e^{ikt} &\longmapsto \sigma_\pm(D)(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sigma_\pm(D_k(-i\partial_t))e^{ik\varphi}, \qquad \varphi \in [0,2\pi], \end{aligned}$$

где $\sigma_\pm\big(D_k(-i\partial_t)\big) = \lim\limits_{p\to\pm\infty} |p|^{-m} D_k(p)$.

Легко проверить, что для всех $A,B \in \Psi_{\mathrm{per}}$ имеет место *формула композиции*

$$\sigma_\pm(AB) = \sigma_\pm(A)\sigma_\pm(B). \tag{3.4}$$

3.2 Регуляризованные следы

Определим оператор усреднения

$$\begin{aligned} \mathrm{Av}\colon \Psi_{\mathrm{per}} &\longrightarrow \Psi, \\ D &\longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_\varphi D T_{-\varphi}\, d\varphi, \qquad \text{где} \quad T_\varphi u(t) = u(t-\varphi). \end{aligned}$$

[1] Напомним, что действие группы G на компактном топологическом пространстве X, индуцированное гомеоморфизмом g, называется *топологически свободным*, если множество апериодических точек отображения g плотно в X

Если $K_D(t,t')$ — ядро Шварца оператора D, то $\operatorname{Av} D$ имеет ядро Шварца

$$K_{\operatorname{Av} D}(t,t') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} K_D(t+\varphi,t'+\varphi)d\varphi.$$

Кроме того, очевидно, имеем

$$\operatorname{Av}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} D_k(-i\partial_t)e^{ikt}\right) = D_0(-i\partial_t). \tag{3.5}$$

Напомним (см. [56, определение 2]), что *регуляризованным интегралом* функции $f(p)\in S_{\mathrm{cl}}$ называется значение свободного слагаемого в асимптотическом разложении её интеграла по отрезку $[-P,P]$ при $P\to+\infty$:

$$⨍\limits_{\mathbb{R}} f(p) = a_0, \quad \text{где} \quad \int\limits_{-P}^{P} f(p)dp \sim \sum_{k\leqslant N} a_k P^k + b_0\ln P, \quad N>0,\, a_k,b_k\in\mathbb{C}. \tag{3.6}$$

Отметим, что регуляризованный интеграл (3.6) совпадает с (1.48).

Лемма 3.4. *Для функционала*

$$\begin{aligned} \alpha\colon \quad \Psi^{-1} \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{C}, \\ D(-i\partial_t) \quad &\longmapsto \quad ⨍\limits_{\mathbb{R}} D(p)dp, \quad \text{где} \quad D(p) = \mathcal{F}D(-i\partial_t)\mathcal{F}^{-1}, \end{aligned}$$

имеет место равенство

$$\alpha\big(D(-i\partial_t)\big) = \sqrt{2\pi}\lim_{t\to0}\left[\frac{K_D(t,0)+K_D(-t,0)}{2} - c_1(\ln|t|+\gamma)\right]. \tag{3.7}$$

Здесь $K_D(t,t')$ — ядро Шварца оператора $D(-i\partial_t)$, $c_1 = \lim\limits_{t\to0}(K_D(t,0)/\ln|t|)$, а $\gamma = \lim\limits_{k\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n 1/k - \ln n\right)$ — константа Эйлера.

Доказательство. Обозначим $\widetilde{f}(p) = D(p)$. Обратное преобразование Фурье этой функции равно $f(t) = \mathcal{F}^{-1}(\widetilde{f}(p)) = \sqrt{2\pi}K_D(t,0)$. Поскольку $D(-i\partial_t)\in\Psi^{-1}$, то существует разложение

$$\widetilde{f}(p) = \widetilde{f}_0(p) + C_1\chi_+(p)p^{-1} + C_2\chi_-(p)p^{-1}, \tag{3.8}$$

где $\widetilde{f}_0(p) = O\big((1+|p|)^{-2}\big)$ и

$$\chi_+(p) = \begin{cases} 0, & p<1, \\ 1, & p\geqslant 1, \end{cases} \qquad \chi_-(p) = \begin{cases} 1, & p\leqslant -1, \\ 0, & p>-1. \end{cases}$$

Прямое вычисление даёт следующее выражение для левой части в (3.7):

$$\fint_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(p)dp = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}_0(p)dp + C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = \sqrt{2\pi} f_0(0). \tag{3.9}$$

Теперь вычислим правую часть в (3.7) для функции

$$f(t) = f_0(t) + \mathcal{F}^{-1}\left(C_1\chi_+(p)p^{-1} + C_2\chi_-(p)p^{-1}\right). \tag{3.10}$$

По линейности подставим первое и второе слагаемые из (3.10) в (3.7) по отдельности. Для первого слагаемого имеем

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{f_0(t)+f_0(-t)}{2} - c_1\left(\ln|t| + \gamma\right)\right] = \lim_{t\to 0}\frac{f_0(t)+f_0(-t)}{2} = f_0(0), \tag{3.11}$$

поскольку $f_0(t)$ непрерывна в точке $t=0$, и поэтому $c_1 = \lim_{t\to 0}(f_0(t)/\ln|t|) = 0$. Запишем второе слагаемое в (3.10) в виде

$$\begin{aligned}
g(t) =&\mathcal{F}^{-1}\left(C_1\chi_+(p)p^{-1} + C_2\chi_-(p)p^{-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[C_1\int_1^{\infty} e^{ipt}\frac{dp}{p} + C_2\int_{-\infty}^{-1} e^{ipt}\frac{dp}{p}\right] = \\
=&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[C_1'\int_1^{\infty}\cos pt\frac{dp}{p} + C_2'\int_1^{\infty}\sin pt\frac{dp}{p}\right] = \\
=&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[C_1'\int_{|t|}^{\infty}\cos p\frac{dp}{p} + C_2'\operatorname{sgn} t\int_{|t|}^{\infty}\sin p\frac{dp}{p}\right] = \\
=&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[-C_1'\operatorname{Ci}(|t|) - C_2'\operatorname{sgn} t\operatorname{si}(|t|)\Big] = \\
=&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-C_1'\left(\gamma + \ln|t| - \operatorname{Cin}(|t|)\right) - C_2'\operatorname{sgn} t\left(\operatorname{Si}(|t|) - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \\
=&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-C_1'\ln|t| + \left(-C_1'\gamma + C_2'\operatorname{sgn} t\frac{\pi}{2}\right) + O(t)\right],
\end{aligned}$$

где $C_1' = C_1 - C_2$ и $C_2' = i(C_1 + C_2)$. Здесь мы используем специальные функции (см. [9, с. 254]): интегральный косинус

$$\operatorname{Ci}(t) = -\int_x^{\infty}\frac{\cos p}{p}dp, \quad \operatorname{Cin}(t) = \int_0^x \frac{1-\cos p}{p}dp, \quad \text{где } \operatorname{Ci}(t) + \operatorname{Cin}(t) = \gamma + \ln t,$$

и интегральный синус

$$\operatorname{si}(t) = -\int_x^{\infty}\frac{\sin p}{p}dp, \quad \operatorname{Si}(t) = \int_0^x \frac{\sin p}{p}dp, \quad \text{где } \operatorname{si}(t) = \operatorname{Si}(t) - \pi/2.$$

Отсюда для $g(t)$ получаем

$$c_1 = \lim_{t\to 0}\frac{g(t)}{\ln|t|} = -\frac{C_1'}{\sqrt{2\pi}}, \tag{3.12}$$

$$\frac{g(t)+g(-t)}{2} - c_1\left(\ln|t|+\gamma\right) = -C_1'\ln|t| - C_1'\gamma + C_1'\left(\ln|t|+\gamma\right) + O(t) = O(t). \tag{3.13}$$

Таким образом, из (3.11) и (3.13) следует, что правая часть в (3.7) для функции (3.8) равна $\sqrt{2\pi}f_0(0)$ и совпадает с левой частью (см. (3.9)). Это завершает доказательство леммы 3.4. $\square$

Предложение 3.5. *Функционал* $\mathrm{Tr} \overset{\mathrm{def}}{=} \alpha\circ\mathrm{Av}\colon \Psi_{\mathrm{per}}^{-1}\to\mathbb{C}$ *является следом. Более точно, для всех таких* $A,B\in\Psi_{\mathrm{per}}$, *что* $\operatorname{ord}A+\operatorname{ord}B\leqslant -1$, *выполняется следующее равенство:*

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

Доказательство. В соответствии с (3.5), достаточно доказать искомое равенство для операторов $A_k(-i\partial_t)e^{ikt}$ и $B_{-k}(-i\partial_t)e^{-ikt}$, $k\in\mathbb{Z}$. Прямым вычислением получаем

$$e^{ikt}B_{-k}(-i\partial_t) = B_{-k}(-i\partial_t - k)e^{ikt}.$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(A_k(-i\partial_t)e^{ikt}B_{-k}(-i\partial_t)e^{-ikt}\right) &= \\ = \mathrm{Tr}(A_k(-i\partial_t)B_{-k}(-i\partial_t-k)) &= \fint_{\mathbb{R}} A_k(p)B_{-k}(p-k)\,dp.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Аналогично получаем

$$\mathrm{Tr}\left(B_{-k}(-i\partial_t)e^{-ikt}A_k(-i\partial_t)e^{ikt}\right) = \fint_{\mathbb{R}} B_{-k}(p)A_k(p+k)\,dp = \fint_{\mathbb{R}} A_k(p+k)B_{-k}(p)\,dp. \tag{3.15}$$

Подынтегральные выражения в (3.14) и (3.15) являются элементами из S_{cl}^{-1} и отличаются друг от друга сдвигом на k.

Лемма 3.6. *Регуляризованный интеграл* (3.6) *является трансляционно-инвариантным, т.е. для* $\widetilde{f}\in S_{\mathrm{cl}}^{-1}$ *мы имеем* $\fint_{\mathbb{R}}\widetilde{f}(p+k)dp = \fint_{\mathbb{R}}\widetilde{f}(p)dp$ *для всех* $k\in\mathbb{R}$.

Доказательство. Регуляризованный интеграл функции (3.8), сдвинутый на k, равен

$$\begin{aligned}
&\fint_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(p+k)dp = \fint_{\mathbb{R}} \left(\widetilde{f}_0(p+k) + C_1 \frac{1}{p+k} \chi_+(p+k) + C_2 \frac{1}{p+k} \chi_-(p+k) \right) dp = \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}_0(p+k)dp + \fint_{\mathbb{R}} \big(C_1 \frac{1}{p} \chi_+(p) + C_1 \left(\frac{1}{p+k} \chi_+(p+k) - \frac{1}{p} \chi_+(p) \right) = \\
&\qquad + C_2 \frac{1}{p} \chi_-(p) + C_2 \left(\frac{1}{p+k} \chi_-(p+k) - \frac{1}{p} \chi_-(p) \right) \big) dp = \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}_0(p)dp + C_1 \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{p+k} \chi_+(p+k) - \frac{1}{p} \chi_+(p) \right] dp = \\
&\qquad + C_2 \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{p+k} \chi_-(p+k) - \frac{1}{p} \chi_-(p) \right] dp.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
&\fint_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(p+k)dp - \fint_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(p)dp = \\
&= C_1 \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{p+k} \chi_+(p+k) - \frac{1}{p} \chi_+(p) \right] dp + C_2 \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{p+k} \chi_-(p+k) - \frac{1}{p} \chi_-(p) \right] dp.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Вычисляя первый интеграл в (3.16) при $k > 0$, получаем

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{p+k} \chi_+(p+k) - \frac{1}{p} \chi_+(p) \right] dp = \int_{-k+1}^{1} \frac{dp}{p+k} + \int_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{p+k} - \frac{1}{p} \right) dp = \\
&= \ln(p+k) \Big|_{-k+1}^{1} + \big(\ln(p+k) - \ln(p) \big) \Big|_{1}^{\infty} = \ln(1+k) - \ln(1+k) = 0.
\end{aligned}$$

Для $k < 0$, из (3.16) получаем

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{p+k} \chi_+(p+k) - \frac{1}{p} \chi_+(p) \right] dp = - \int_{1}^{-k+1} \frac{dp}{p} + \int_{-k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{p+k} - \frac{1}{p} \right) dp = \\
&= - \ln(p) \Big|_{1}^{-k+1} + \big(\ln(p+k) - \ln(p) \big) \Big|_{-k+1}^{\infty} = - \ln(-k+1) + \ln(-k+1) = 0.
\end{aligned}$$

Аналогичные вычисления для второго интеграла в (3.16) также дают 0. □

Теперь искомое равенство выражений в (3.14) и (3.15) следует из леммы 3.6. □

Определение 3.7. *Формальным следом* на алгебре Ψ^0_{per} называется функционал

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{Tr}}\colon\ \Psi^0_{\mathrm{per}} &\longrightarrow \quad \mathbb{C},\\ D &\longmapsto -i\,\mathrm{Tr}[t,D], \end{aligned}$$

где $[t,D] = tD - Dt$ — коммутатор, а $\mathrm{Tr} \overset{\mathrm{def}}{=} \alpha \circ \mathrm{Av}$.

Лемма 3.8. *Формальный след является следом на алгебре Ψ^0_{per}, т.е. $\widetilde{\mathrm{Tr}}(AB) = \widetilde{\mathrm{Tr}}(BA)$ для всех $A,B \in \Psi^0_{\mathrm{per}}$. Он вычисляется следующим образом:*

$$\widetilde{\mathrm{Tr}}\, D = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \big(\sigma_+(D)(\varphi) - \sigma_-(D)(\varphi)\big)d\varphi, \quad D \in \Psi^0_{\mathrm{per}}. \tag{3.17}$$

Замечание 3.9. Формула (3.17) аналогична формуле (1.51).

Доказательство. Циклическое свойство проверяется напрямую. Докажем равенство (3.17). Пусть $D \in \Psi^0_{\mathrm{per}}$. С одной стороны, имеем

$$\widetilde{\mathrm{Tr}}\, D = -i\,\mathrm{Tr}[t,D] = \fint\limits_{\mathbb{R}} [\partial_p, \widetilde{D}]_0 dp = \fint\limits_{\mathbb{R}} \partial_p(\widetilde{D}_0) dp = D_0(+\infty) - D_0(-\infty), \tag{3.18}$$

где $\widetilde{D} = \mathcal{F} D \mathcal{F}^{-1}$, а D_0 — слагаемое из представления $D = \sum D_k T^k$. Пределы в (3.18) существуют, поскольку $D_k(p) \in S^0_{\mathrm{cl}}$. С другой стороны, имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \big(\sigma_+(D)(\varphi) - \sigma_-(D)(\varphi)\big)d\varphi = \\ = \sigma_+\big(D_0(-i\partial_t)\big) - \sigma_-\big(D_0(-i\partial_t)\big) = D_0(+\infty) - D_0(-\infty). \tag{3.19}$$

Из (3.18) и (3.19) получаем искомое равенство (3.17). $\square$

В таблице 1 приведены используемые операции в t- и p-пространствах (ср. с результатами из первой главы). Последняя строка таблицы определяется в следующем параграфе.

Замечание 3.10. Все результаты этого параграфа могут быть обобщены на случай операторов из алгебры $\Psi_{\mathrm{per}} \otimes \mathrm{Mat}_N$ матричных $N \times N$ ПДО. В частности, регуляризованный след $\mathrm{Tr}\colon \Psi^{-1}_{\mathrm{per}} \otimes \mathrm{Mat}_N \to \mathbb{C}$ определяется как $\mathrm{Tr} = \mathrm{tr} \circ \alpha \circ \mathrm{Av}$, где tr — матричный след.

	t-**пространство**	p-**пространство**
Оператор	$D=\sum_{k\in\mathbb{Z}} D_k\left(-i\partial_t\right)e^{ikt}$	$\widetilde{D}=\sum_{k\in\mathbb{Z}} D_k(p)T^k$, $Tu(p)=u(p-1)$
Дифференцирование	$D\mapsto -i[t,D]$	$\widetilde{D}\mapsto[\partial_p,\widetilde{D}]$
Усреднение	$D\mapsto \operatorname{Av}D$	$\widetilde{D}\mapsto D_0(p)$
Регуляризованный интеграл	$f(t)\mapsto\sqrt{2\pi}\lim\limits_{t\to0}\left[\left(f(t)+f(-t)\right)/2\right.$ $\left.-c_1(\ln\lvert t\rvert+\gamma)\right]$, где $c_1=\lim_{t\to0}(f(t)/\ln\lvert t\rvert)$	$⨍_{\mathbb{R}} f(p)dp=c_0$, where $\int_{-P}^{P}f(p)dp\sim\sum_{j\leqslant0}c_jP^j+$ $+d_0\ln P$ as $P\to+\infty$
Формальный след	$\widetilde{\operatorname{Tr}}\,D=-i\alpha\left(\operatorname{Av}[t,D]\right)=$ $={}^1/_{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sigma_+(D)-\sigma_-(D))d\varphi$	$\widetilde{\operatorname{Tr}}\,D(p)=⨍_{\mathbb{R}}\partial_pD_0(p)dp=$ $=D_0(+\infty)-D_0(-\infty)$
η-инвариант	$\eta(D)=-{}^1/_{2\pi}\alpha\left(\operatorname{Av}(D^{-1}[t,D])\right)$	$\eta(D)={}^1/_{2\pi i}⨍_{\mathbb{R}}D^{-1}[\partial_p,D]_0dp$

Таблица 1 — Операции в t- и p-пространствах

3.3 η-инвариант

Определение 3.11. Пусть $D\in\Psi^m_{\mathrm{per}}\otimes\mathrm{Mat}_N$ — обратимый матричный оператор. Предположим, что $D^{-1}\in\Psi^{-m}_{\mathrm{per}}\otimes\mathrm{Mat}_N$. Тогда число

$$\eta(D)\overset{\mathrm{def}}{=}-\frac{1}{2\pi}\operatorname{Tr}(D^{-1}[t,D])\tag{3.20}$$

называется η-*инвариантом* оператора D.

Предложение 3.12. η-*инвариант* (3.20) *обладает логарифмическим свойством*

$$\eta(AB)=\eta(A)+\eta(B)$$

для всех обратимых операторов $A,B\in\Psi_{\mathrm{per}}\otimes\mathrm{Mat}_N$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}-2\pi\eta(AB)&=\operatorname{Tr}\bigl((AB)^{-1}[t,AB]\bigr)=\operatorname{Tr}\bigl(B^{-1}A^{-1}([t,A]B+A[t,B])\bigr)=\\&=\operatorname{Tr}\bigl(BB^{-1}A^{-1}[t,A]\bigr)+\operatorname{Tr}\bigl(B^{-1}A^{-1}A[t,B]\bigr)=\\&=\operatorname{Tr}\bigl(A^{-1}[t,A]\bigr)+\operatorname{Tr}\bigl(B^{-1}[t,B]\bigr)=-2\pi\bigl(\eta(A)+\eta(B)\bigr).\end{aligned}$$

Здесь третье равенство следует из линейности и цикличности следа Tr (см. предложение 3.5). Заметим, что условия предложения 3.5 выполнены, поскольку $\operatorname{ord}\bigl(B^{-1}A^{-1}[t,A]B\bigr)\leqslant-1$. □

Предложение 3.13. *Пусть* $D_\varepsilon \in \Psi^m_{\mathrm{per}} \otimes \mathrm{Mat}_N$, $\varepsilon \in [0,1]$ — *гладкая гомотопия обратимых операторов. Тогда производная* η*-инварианта* D_ε *по переменной* ε *равна*

$$\partial_\varepsilon \eta(D_\varepsilon) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{tr}\left[\sigma_+^{-1}(D_\varepsilon)\partial_\varepsilon \sigma_+(D_\varepsilon) - \sigma_-^{-1}(D_\varepsilon)\partial_\varepsilon \sigma_-(D_\varepsilon)\right] d\varphi. \qquad (3.21)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}-2\pi\partial_\varepsilon\eta(D_\varepsilon) = \mathrm{Tr}\left(\partial_\varepsilon(D_\varepsilon^{-1}[t,D_\varepsilon])\right) = \mathrm{Tr}\left(-D_\varepsilon^{-1}(\partial_\varepsilon D_\varepsilon)D_\varepsilon^{-1}[t,D_\varepsilon] + D_\varepsilon^{-1}[t,\partial_\varepsilon D_\varepsilon]\right) =\\ = \mathrm{Tr}\left(-D_\varepsilon^{-1}[t,D_\varepsilon]D_\varepsilon^{-1}(\partial_\varepsilon D_\varepsilon) + D_\varepsilon^{-1}[t,\partial_\varepsilon D_\varepsilon]\right) =\\ = \mathrm{Tr}\left([t,D_\varepsilon^{-1}]\partial_\varepsilon D_\varepsilon + D_\varepsilon^{-1}[t,\partial_\varepsilon D_\varepsilon]\right) = \mathrm{Tr}\left([t,D_\varepsilon^{-1}\partial_\varepsilon D_\varepsilon]\right) = i\,\widetilde{\mathrm{Tr}}(D_\varepsilon^{-1}\partial_\varepsilon D_\varepsilon) =\\ = \frac{i}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{tr}\left(\sigma_+^{-1}(D_\varepsilon)\partial_\varepsilon\sigma_+(D_\varepsilon) - \sigma_-^{-1}(D_\varepsilon)\partial_\varepsilon\sigma_-(D_\varepsilon)\right) d\varphi.\end{aligned}$$

Здесь второе равенство следует из правила Лейбница, третье — из циклического свойства следа Tr (см. предложение 3.5), четвертое — из правила Лейбница для коммутатора, пятое — из определения коммутатора, шестое — из определения следа $\widetilde{\mathrm{Tr}}$, а последнее следует из леммы 3.8. □

Пример. η-инвариант оператора первого порядка. Рассмотрим оператор

$$D = -i\partial_t + a(t)\colon H^s(\mathbb{R}) \longrightarrow H^{s-1}(\mathbb{R}), \qquad (3.22)$$

где $a(t)$ — гладкая периодическая комплекснозначная функция с периодом 2π, а $H^s(\mathbb{R})$ — пространство Соболева с показателем гладкости s. Введём обозначение $\mathbb{S}^1_z = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$.

Предложение 3.14.

1. *Оператор* (2.1) *обратим тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{Im}\int\limits_0^{2\pi} a(t)dt \neq 0.$$

2. η*-инвариант обратимого оператора* (2.1) *равен*

$$\eta(D) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}\,\mathrm{Im}\int\limits_0^{2\pi} a(t)dt.$$

Доказательство. 1. Получим условия обратимости оператора (2.1). Через $\mathcal{F}_z\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{S}^1_t \times \mathbb{S}^1_z)$ обозначим *преобразование Фурье-Лапласа*(см. [58;67])

$$(\mathcal{F}_z u)(t,z) = z^{t/2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n u(t+2\pi n) \tag{3.23}$$

финитной функции u для фиксированной ветви комплексного логарифма $\ln z$. Отметим, что в литературе существует множество вариантов этого преобразования (историческую справку см. в [52, стр. 359]). Обратное преобразование Фурье-Лапласа дается формулой

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=1} z^{-t/2\pi} (\mathcal{F}_z u)(t,z) \frac{dz}{z}.$$

Из [19, теорема 2] (см. также [67, лемма 4.3]) следует, что оператор $D\colon H^s(\mathbb{R}) \to H^{s-1}(\mathbb{R})$ обратим тогда и только тогда, когда оператор

$$D_z = \mathcal{F}_z D \mathcal{F}_z^{-1} \colon H^s(\mathbb{S}^1_t) \to H^{s-1}(\mathbb{S}^1_t)$$

обратим для всех $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0,2\pi]$. Имеем

$$\begin{aligned} D\mathcal{F}_z u(t) =& (-i\partial_t + a(t))\Big(z^{t/2\pi}\sum_n z^n u(t+2\pi n)\Big) = \\ &= -\frac{i}{2\pi} z^{t/2\pi} \ln z \sum_n z^n u(t+2\pi n) - i z^{t/2\pi} \sum_n z^n u'(t+2\pi n) + \\ &\quad + a(t)\Big(z^{t/2\pi}\sum_n z^n u(t+2\pi n)\Big) = -\frac{i}{2\pi}\ln z \mathcal{F}_z u(t) + \\ &\quad + z^{t/2\pi}\sum_n z^n\big(-i\partial_t + a(t)\big)u(t+2\pi n) = -\frac{i}{2\pi}\ln z\mathcal{F}_z u(t) + \mathcal{F}_z D u(t). \end{aligned}$$

Отсюда имеем $\mathcal{F}_z D = \big(D + \frac{i}{2\pi}\ln z\big)\mathcal{F}_z$, и поэтому

$$D_z = D + \frac{i}{2\pi}\ln z = -i\partial_t + a(t) - \frac{\theta}{2\pi}. \tag{3.24}$$

Последний оператор имеет нулевой индекс, поэтому его обратимость эквивалентна тривиальности его ядра. Вычислим ядро оператора D_z. Уравнение $D_z u = 0$ имеет решение

$$u(t) = C \exp\left(-i\int\limits_0^t \left(a(t') - \frac{\theta}{2\pi}\right) dt'\right),$$

где C — некоторая константа. Требуется, чтобы решение удовлетворяло условиям периодичности

$$u(0) = C, \quad u(2\pi) = C \exp\left(-i\int\limits_0^{2\pi}\left(a(t') - \frac{\theta}{2\pi}\right)dt'\right) = C.$$

Следовательно, ядро оператора D_z тривиально тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_0^{2\pi}\left(a(t') - \frac{\theta}{2\pi}\right)dt' \neq 2\pi k \iff \int\limits_0^{2\pi} a(t')dt' \neq 2\pi k + \theta, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, все операторы D_z, $z = e^{i\theta}$, обратимы тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Im}\int\limits_0^{2\pi} a(t)dt \neq 0.$$

2. Вычислим η-инвариант обратимого оператора (3.22). Сначала опишем оператор D^{-1}. Прямым вычислением доказывается следующий результат.

Лемма 3.15. *Пусть f — функция с компактным носителем. Тогда уравнение $Du = f$ имеет решение*

$$u(t) = \begin{cases} i\int\limits_{-\infty}^{t}\exp\left(-i\int\limits_{t'}^{t} a(t'')dt''\right)f(t')dt' & \text{\textit{при}} \quad \operatorname{Im}\int\limits_0^{2\pi} a(t)dt < 0. \\ -i\int\limits_{t}^{+\infty}\exp\left(i\int\limits_{t}^{t'} a(t'')dt''\right)f(t')dt' & \text{\textit{при}} \quad \operatorname{Im}\int\limits_0^{2\pi} a(t)dt > 0. \end{cases}$$

Как следует из леммы 3.15, при $\operatorname{Im}\int_0^\infty a(t)dt < 0$ ядро Шварца оператора D^{-1} равно

$$K_{D^{-1}}(t,t') = i\exp\left(-i\int\limits_{t'}^{t} a(t'')dt''\right)\chi(t-t'), \quad \text{где} \quad \chi(t-t') = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t - t' \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad t - t' < 0. \end{cases}$$

Пусть $B = D^{-1}[t,D]$. Поскольку $[t,D] = i\,\mathrm{Id}$, то имеем $K_B = iK_{D^{-1}}$. Ядро Шварца усреднённого оператора $\operatorname{Av} B$ равно

$$K_{\operatorname{Av} B}(t,t') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\exp\left(-i\int\limits_{t'+\delta}^{t+\delta} a(t'')dt''\right)\chi(t-t')d\delta. \tag{3.25}$$

В дальнейшем для вычисления η-инварианта будем использовать формулу (3.7). Поскольку ядро Шварца $K_{\mathrm{Av}\,B}$ (см. (3.25)) ограничено, константа c_1 в (3.7) равна 0, и мы получаем

$$\eta(D)=\frac{1}{4\pi}\lim_{h\to 0+}\int\limits_0^{2\pi}\left(\exp\left(-i\int\limits_{\delta}^{h+\delta}a(t'')dt''\right)\cdot 1+\exp\left(-i\int\limits_{\delta}^{-h+\delta}a(t'')dt''\right)\cdot 0\right)d\delta=\frac{1}{2}.$$

При $\operatorname{Im}\int_0^{2\pi}a(t)dt>0$ аналогично получаем

$$\eta(D)=-\frac{1}{2}.$$

$\square$

3.4 Теорема об индексе для дифференциальных операторов

В этом параграфе мы получаем формулу индекса в случае дифференциальных операторов в терминах матриц монодромии предельных операторов на бесконечности. Мы также выражаем η-инвариант дифференциальных операторов через спектр матрицы монодромии.

Обратимость операторов произвольного порядка. Рассмотрим линейный дифференциальный оператор с периодическими коэффициентами (период равен 2π)

$$D=\sum_{0\leqslant k\leqslant n}d_k(t)(-i\partial_t)^k\colon H^s(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)\longrightarrow H^{s-n}(\mathbb{R},\mathbb{C}^N). \tag{3.26}$$

Напомним, что матрица монодромии оператора (3.26) — это такая матрица $M\in\mathrm{Mat}_{nN}$, что выполнено равенство

$$M(v_0,\dots,v_{n-1})=(u(t),u'(t),\dots,u^{(n-1)}(t))\Big|_{t=T+2\pi}.$$

Здесь $u(t)$ — решение однородного уравнения $Du=0$ с данными Коши при $t=T$:

$$u(T)=v_0,\ \dots,u^{(n-1)}(T)=v_{n-1}.$$

Предложение 3.16. *Дифференциальный оператор* (3.26) *обратим тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Spec}M\cap\mathbb{S}^1_\lambda=\varnothing$. *Здесь* $\operatorname{Spec}M\subset\mathbb{C}$ *— спектр матрицы монодромии* M, *а* $\mathbb{S}^1_\lambda=\{\lambda\in\mathbb{C}\colon|\lambda|=1\}$.

Доказательство. Сопряжение оператора D с преобразованием Фурье–Лапласа (3.23) даёт семейство операторов (см. (3.24))

$$D_z = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k(t)\left(-i\partial_t + \frac{i}{2\pi}\ln z\right)^k : H^s(\mathbb{S}^1_t,\mathbb{C}^N) \longrightarrow H^{s-n}(\mathbb{S}^1_t,\mathbb{C}^N), \quad z\in\mathbb{S}^1_z.$$

Аналогично доказательству предложения 3.14, оператор D обратим тогда и только тогда, когда семейство D_z обратимо на окружности $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}_t/2\pi\mathbb{Z}$ для всех $z\in\mathbb{S}^1_z$. Поскольку индекс семейства D_z равен нулю, D_z обратимо тогда и только тогда, когда его ядро тривиально для всех $z\in\mathbb{S}^1_z$. Таким образом, необходимо найти условия, при которых задача

$$\begin{cases} D_z u &= 0,\\ u(0) &= u(2\pi),\\ &\dots\\ u^{(n-1)}(0) &= u^{(n-1)}(2\pi) \end{cases} \tag{3.27}$$

имеет только тривиальное решение. Легко видеть, что $D_z = z^{t/2\pi} D z^{-t/2\pi}$. Таким образом, задача (3.27) эквивалентна задаче

$$\begin{cases} D(z^{-t/2\pi}u) &= 0,\\ u(0) &= u(2\pi),\\ &\dots\\ u^{(n-1)}(0) &= u^{(n-1)}(2\pi). \end{cases} \tag{3.28}$$

Утверждается, что задача (3.28) эквивалентна задаче

$$\begin{cases} Dw &= 0,\\ z^{-1}w(0) &= w(2\pi),\\ &\dots\\ z^{-1}w^{(n-1)}(0) &= w^{(n-1)}(2\pi), \end{cases} \tag{3.29}$$

где $w(t) = z^{-t/2\pi}u(t)$. В самом деле, получаем

$$w^{(k)}(t) = z^{-t/2\pi}\sum_{0\leqslant j\leqslant k} C_k^j\left(-\frac{\ln z}{2\pi}\right)^k u^{(k-j)}(t),$$

$$w^{(k)}(0) = \sum_{0\leqslant j\leqslant k} C_k^j\left(-\frac{\ln z}{2\pi}\right)^k u^{(k-j)}(0),$$

$$w^{(k)}(2\pi) = z^{-1}\sum_{0\leqslant j\leqslant k} C_k^j\left(-\frac{\ln z}{2\pi}\right)^k u^{(k-j)}(2\pi).$$

Отсюда прямо следует эквивалентность задач (3.28) и (3.29).

Введём вектор-функцию $W(t) = \big(w(t),w'(t),\ldots,w^{(n-1)}(t)\big)$ для решения задачи (3.29). По определению матрицы монодромии имеем $W(2\pi) = MW(0)$. Следовательно, задача (3.29) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда существует нетривиальное решение уравнения

$$MW(0) = z^{-1}W(0).$$

Последнее условие эквивалентно условию $z \in \operatorname{Spec} M$. Следовательно, условие обратимости семейства D_z эквивалентно условию $\operatorname{Spec} M \cap \mathbb{S}^1_z = \varnothing$. $\square$

Формула индекса. Пусть коэффициенты дифференциального оператора порядка n

$$D = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} d_k(t)(-i\partial_t)^k \colon H^s(\mathbb{R},\mathbb{C}^N) \longrightarrow H^{s-n}(\mathbb{R},\mathbb{C}^N) \tag{3.30}$$

суть гладкие периодические функции с периодом 2π при $|t| > T$. Обозначим

$$d_k^{\pm}(t) = \lim_{j\to+\infty} d_k(t\pm 2\pi j), \qquad D_{\pm} = \sum_k d_k^{\pm}(t)(-i\partial_t)^k.$$

Теорема 3.17. *Пусть главный символ оператора* (3.30) *обратим, а операторы* $D_+,D_- \colon H^s(\mathbb{R},\mathbb{C}^N) \to H^{s-n}(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)$ *обратимы. Тогда оператор* (3.30) *является фредгольмовым и его индекс равен*

$$\operatorname{ind} D = \frac{1}{2}\big(\operatorname{sign} M_- - \operatorname{sign} M_+\big). \tag{3.31}$$

Здесь $M_\pm$ *— матрицы монодромии операторов* $D_\pm$, *а*

$$\operatorname{sign} M = \#\{|\lambda_M| > 1\} - \#\{|\lambda_M| < 1\}$$

— сигнатура матрицы M.

Доказательство. 1. Фредгольмовость следует из [64, Theorem 6.1]. Определим разбиение $\mathbb{R} = (-\infty,-T]\cup[-T,T]\cup[T,+\infty)$, где $T > 0$ выбирается из условий $d_k(t) = d_k^+(t)$ при $t \geqslant T$ и $d_k(t) = d_k^-(t)$ при $t \leqslant -T$. Поскольку индекс не зависит от s, мы предполагаем, что $s = n$. Кроме того, пространства $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)$ и $H^n(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)$ изоморфны пространствам

$$\begin{aligned} L^2_T(\mathbb{R},\mathbb{C}^N) &= L^2\big((-\infty,-T],\mathbb{C}^N\big)\oplus L^2\big([-T,T],\mathbb{C}^N\big)\oplus L^2\big([T,+\infty),\mathbb{C}^N\big),\\ H^n_T(\mathbb{R})\cap H_B &=\\ &= \Big(H^n\big((-\infty,-T],\mathbb{C}^N\big)\oplus H^n\big([-T,T],\mathbb{C}^N\big)\oplus H^n\big([T,+\infty),\mathbb{C}^N\big)\Big)\cap H_B \end{aligned}$$

соответственно. Здесь $H_B = \big\{(u_-,u_0,u_+) \in H^n_T(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)\big\}$, где функции u_-,u_0,u_+ удовлетворяют условиям сопряжения

$$u_-^{(j)}(-T) = u_0^{(j)}(-T) \text{ и } u_0^{(j)}(T) = u_+^{(j)}(T) \quad \forall j = 0,1,\dots,n-1.$$

Рассмотрим оператор $D'\colon H^n_T(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)\cap H_B \to L^2_T(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)$, изоморфный оператору D. Имеем

$$D' = D_- \oplus D_0 \oplus D_+\Big|_{H^n_T(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)\cap H_B},$$

где

$$\begin{aligned}
D_- &= D\Big|_{(-\infty,-T]}\colon H^n\big((-\infty,-T],\mathbb{C}^N\big) \longrightarrow L^2\big((-\infty,-T],\mathbb{C}^N\big),\\
D_0 &= D\Big|_{[-T,+T]}\colon H^n\big([-T,T],\mathbb{C}^N\big) \longrightarrow L^2\big([-T,T],\mathbb{C}^N\big),\\
D_+ &= D\Big|_{[T,+\infty)}\colon H^n\big([T,+\infty),\mathbb{C}^N\big) \longrightarrow L^2\big([T,+\infty),\mathbb{C}^N\big).
\end{aligned}$$

Отсюда,

$$\operatorname{ind} D = \operatorname{ind} D' = \operatorname{ind} D_- + \operatorname{ind} D_0 + \operatorname{ind} D_+ - 2nN, \tag{3.32}$$

где последний член соответствует условиям сопряжения, включённым в определение пространства H_B.

2. Вычислим индексы операторов в (3.32). Так как уравнение $D_0 u_0 = 0$ имеет решение на отрезке $[-T,T]$ для любых данных Коши (решение единственно) и коядро оператора D_0 тривиально, то

$$\operatorname{ind} D_0 = nN. \tag{3.33}$$

Чтобы вычислить индекс оператора $D_+\colon H^n\big([T,+\infty),\mathbb{C}^N\big) \to L^2\big([T,+\infty),\mathbb{C}^N\big)$, рассмотрим вектор-функцию $U(t) = \big(u(t),u'(t),\dots,u^{(n-1)}(t)\big)$, отвечающую решению u уравнения $D_+u = 0$. Имеем

$$U(T + 2\pi k) = M_+^k U(T) \quad \text{при} \quad k \geqslant 0,$$

где M_+ — матрица монодромии опеаратора D_+.

Лемма 3.18. *Условие $U \in L^2\big([T,+\infty),\mathbb{C}^N\big)$ выполняется тогда и только тогда, когда $U(T) \in L^{\pm}_{M_+}$, где $L^+_{M_+}$ и $L^-_{M_+}$ — прямые суммы собственных и корневых подпространств матрицы монодромии M_+, отвечающих собственным значениям $|\lambda| < 1$ для $L^+_{M_+}$ и $|\lambda| > 1$ для $L^-_{M_+}$.*

Доказательство. Пусть $U(T) \in L^+_{M_+}$. Тогда имеет место оценка

$$\|U(T+2\pi k)\| \leqslant q^k \|U(T)\|, \quad \text{где} \quad q = \max_{\substack{\lambda \in \operatorname{Spec} M_+ \\ |\lambda|<1}} |\lambda| + \varepsilon,$$

а число $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Поскольку оператор D_+ имеет периодические коэффициенты, получаем

$$\|U(t)\| \leqslant Ce^{-\gamma(t-T)} \|U(T)\| \quad \text{для всех } t \geqslant T, \text{ где} \quad \gamma = -\frac{\ln q}{2\pi}.$$

Отсюда следует, что $U \in L^2\bigl([T,+\infty),\mathbb{C}^N\bigr)$. Обратное также верно. Более точно, если $U(T) \notin L^+_{M_+}$, то

$$\|U(T+2\pi k)\| \geqslant Cq^k \|U(T)\|, \quad \text{где} \quad 1 < q = \min_{\substack{\lambda \in \operatorname{Spec} M_+ \\ |\lambda|>1}} |\lambda| - \varepsilon.$$

Поскольку оператор D_+ имеет периодические коэффициенты, существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех t, удовлетворяющих условию $|t-(T+2\pi k)| < \varepsilon$, получаем

$$\|U(t)\| \geqslant C' e^{\gamma(t-T)} \|U(T)\|, \quad \text{где} \quad \gamma = \frac{\ln q}{2\pi}.$$

Следовательно, $U \notin L^2\bigl([T,+\infty),\mathbb{C}^N\bigr)$. $\square$

Из леммы 3.18 следует, что

$$\dim\ker D_+ = \dim L^+_{M_+}. \tag{3.34}$$

Кроме того, имеем

$$\begin{cases} \dim L^+_{M_+} + \dim L^-_{M_+} &= \quad nN, \\ \dim L^+_{M_+} - \dim L^-_{M_+} &= -\operatorname{sign} M_+. \end{cases} \tag{3.35}$$

Далее, поскольку $\operatorname{coker} D_+ \simeq \ker D_+^*$ и область определения оператора D_+^* имеет вид

$$\mathcal{D}(D_+^*) = \Bigl\{u_+(t)\colon D_+^* u_+ \in L^2\bigl([T,+\infty),\mathbb{C}^N\bigr) \text{ и } u_+^{(j)}(0) = 0 \ \forall j = 0,1,\dots,n-1\Bigr\},$$

то коядро тривиально: $\operatorname{coker} D_+ = 0$. Следовательно, из (3.34) и (3.35) следует, что

$$\operatorname{ind} D_+ = \dim\ker D_+ - \dim\operatorname{coker} D_+ = \frac{1}{2}(nN - \operatorname{sign} M_+). \tag{3.36}$$

Для D_- аналогично получаем

$$\operatorname{ind} D_- = \dim\ker D_- - \dim\operatorname{coker} D_- = \frac{1}{2}(nN + \operatorname{sign} M_-). \tag{3.37}$$

3. Наконец, подставляя (3.33), (3.36) и (3.37) в (3.32), мы получаем искомую формулу (3.31):

$$\operatorname{ind} D = \frac{1}{2}(nN - \operatorname{sign} M_+ + nN + \operatorname{sign} M_-) + nN - 2nN = \frac{1}{2}(\operatorname{sign} M_- - \operatorname{sign} M_+).$$

□

Применим полученные результаты в задаче о вычислении η-инвариантов.

Следствие 3.19. *η-инвариант обратимого дифференциального оператора $D_+ \in \Psi^n_{\mathrm{per}} \otimes \mathrm{Mat}_N$ равен*

$$\eta(D_+) = -\frac{\operatorname{sign} M_+}{2}. \tag{3.38}$$

Здесь $\operatorname{sign} M_+ = \#\{|\lambda_{M_+}| > 1\} - \#\{|\lambda_{M_+}| < 1\}$ *— сигнатура матрицы монодромии M_+ оператора D_+, а $\#A$ — мощность множества A.*

Доказательство. Пусть оператор $D_+ \in \Psi^n_{\mathrm{per}} \otimes \mathrm{Mat}_N$ обратим, тогда запишем его в виде

$$D_+ = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} d_k(t)\,(-i\partial_t)^k\,, \quad \text{где} \quad d_n(t) \neq 0.$$

Построим оператор с периодическими коэффициентами

$$D_- = d_n(t)\,(-i\partial_t + i)^n$$

и оператор с периодическими на бесконечности коэффициентами

$$D = \chi(t)D_+ + (1-\chi(t))D_- \colon H^s(\mathbb{R},\mathbb{C}^N) \longrightarrow H^{s-n}(\mathbb{R},\mathbb{C}^N). \tag{3.39}$$

Здесь $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\chi(t) \geqslant 0$ и

$$\chi(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \leqslant -T, \\ 1 & \text{при} \quad t \geqslant T. \end{cases}$$

Оператор (3.39) удовлетворяет условиям теоремы [64, Theorem 6.2] и, следовательно, является фредгольмовым. С одной стороны, применяя теорему [64, Theorem 6.2] к оператору (3.39), получаем

$$\operatorname{ind} D = \eta(D_+) - \eta(D_-). \tag{3.40}$$

Далее, из предложений 3.12 и 3.14 имеем

$$\eta(D_-) = \eta(d_n) + nN\eta(-i\partial_t + i) = -\frac{nN}{2}, \tag{3.41}$$

где $\eta(d_n) = 0$ (см. (3.20)). С другой стороны, из теоремы 3.17 следует, что

$$\operatorname{ind} D = \frac{1}{2}(\operatorname{sign} M_- - \operatorname{sign} M_+) = \frac{1}{2}(nN - \operatorname{sign} M_+). \tag{3.42}$$

Из соотношений (3.40), (3.41) и (3.42) получаем искомое равенство (3.38). □

3.5 Пример. Индекс операторов первого порядка

Вычислим индекс оператора $D\colon H^1(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ на вещественной прямой $\mathbb{R} = (-\infty, -T] \cup [-T, T] \cup [T, +\infty)$. В соответствии с таким разбиением вещественной прямой пространство Соболева $H^1(\mathbb{R})$ изоморфно пространству

$$H^1(\mathbb{R}) \simeq \left\{(u_-, u_0, u_+) \in H^1(-\infty, -T] \oplus H^1[-T, T] \oplus H^1[T, +\infty)\right\},$$

где u_-, u_0, u_+ удоылетворют условиям сопряжения, а именно, $u_-(-T) = u_0(-T)$ и $u_0(T) = u_+(T)$. Таким образом, из формулы индекса получаем

$$\operatorname{ind} D = \operatorname{ind}_+ D + \operatorname{ind}_- D + \operatorname{ind}_0 D - 2,$$

где $\operatorname{ind}_\pm D = \operatorname{ind} D_\pm$, $\operatorname{ind}_0 D$ —индекс оператора D на отрезке $[-T, T]$, а последний член отвечает условиям сопряжения в точках $\pm T$.

Вычислим индекс дифференциального оператора $D_+ = -i\partial_t + a(t)$, где a — периодическая функция с периодом 2π на полупрямой $[T, \infty)$. Решение уравнения $D_+ u = 0$ равно

$$u(t) = C \exp\left(-i\int_T^t a(t)dt\right) = C \exp\left(-i \operatorname{Re}\int_T^t a(t)dt\right) \exp\left(\operatorname{Im}\int_T^t a(t)dt\right).$$

Очевидно, ядро оператора зависит от значения

$$\alpha \stackrel{\mathrm{def}}{=} \operatorname{sgn} \operatorname{Im}\int_0^{2\pi} a(t)dt.$$

Более точно, для существования решения при $\alpha < 0$ константа C может быть выбрана произвольно, а при $\alpha > 0$ решение убывает на бесконечности только при $C = 0$. Таким образом,

$$\ker D_+ = \begin{cases} \left\{ C\exp\left(-i\int\limits_T^t a(t)dt \right) \right\}, & \alpha < 0, \\ 0, & \alpha > 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $\operatorname{coker} D_+ = \ker D_+^*$, из условия $u(T) = 0$ для уравнения $D_+^* u = 0$ получаем

$$\operatorname{coker} D_+ = 0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{ind}_+ D = \begin{cases} 1, & \alpha < 0, \\ 0, & \alpha > 0. \end{cases} \tag{3.43}$$

Выразим этот результат в терминах сигнатуры. Так как решение уравнения $D_+ u = 0$ имеет вид $u(t) = C\exp\left(-i\int_T^t a(t)dt\right)$ при $t > T$, то соответствующая матрица монодромии, описываемая формулой $u(2\pi) = M_+ u(0)$, равняется

$$M_+ = \exp\left(-i\int\limits_0^{2\pi} a(t)dt \right). \tag{3.44}$$

Отсюда,

$$|M_+| = \exp\left(\operatorname{Im}\int\limits_0^{2\pi} a(t)dt \right).$$

Из (3.34) и (3.35) получаем

$$\operatorname{sign} M_+ = \operatorname{sgn}\operatorname{Im}\int\limits_0^{2\pi} a(t)dt, \quad \operatorname{ind} D_+ = \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{sgn}\operatorname{Im}\int\limits_0^{2\pi} a(t)dt \right).$$

Последнее выражение совпадает с (3.43).

Индекс оператора D_0, очевидно, равен 1, а $\operatorname{ind}_- D$ вычисляется аналогично:

$$\operatorname{ind} D_- = \begin{cases} 0, & \alpha < 0, \\ 1, & \alpha > 0. \end{cases}$$

Таким образом, имеем

$$\operatorname{ind} D = \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{sgn}\operatorname{Im}\int\limits_0^{2\pi} a(t)dt + 1 + \operatorname{sgn}\operatorname{Im}\int\limits_0^{2\pi} a(t)dt \right) - 1 = 0.$$

Последнее совпадает с утверждением теоремы 3.17, поскольку $\operatorname{sign} M_+ = \operatorname{sign} M_-$ (см. (3.44)).

Глава 4. Эллиптические операторы в $\mathbb{R}^N$, ассоциированные с метаплектической группой

В настоящей главе рассматриваются G-операторы, ассоциированные с действием метаплектической группы. В §4.1 приведены предварительные сведения — вводится понятие ПДО Шубина в $\mathbb{R}^N$, метаплектических операторов и напоминаются их основные свойства, применяемые в дальнейшем. Также в данном параграфе строятся эргодические меры на сфере, в терминах которых в дальнейшем даются условия эллиптичности рассматриваемых операторов, и приводится результат об обратимости конечно-разностных двучленных операторов. В параграфе 4.2 вводится понятие символа рассматриваемых операторов и устанавливается теорема конечности. Также, в качестве следствия, устанавливаются явные условия эллиптичности рассматриваемых операторов в зависимости от показателя гладкости пространств Соболева, в которых оператор действует — основной результат данной главы. Наконец, в §4.3 в качестве примера предъявлены явные условия эллиптичности оператора, ассоциированного с симплектической матрицей специального вида.

Результаты данной главы опубликованы в статье [65].

4.1 Предварительные сведения

Псевдодифференциальные операторы в $\mathbb{R}^N$. Кратко напомним основы исчисления псевдодифференциальных операторов в $\mathbb{R}^N$. Подробное изложение см. в [27, Глава 4].

Определение 4.1. *ПДО* в $\mathbb{R}^N$ порядка $d \in \mathbb{R}$ называется оператор, заданный формулой

$$[Du](x) = (2\pi)^{-N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{ix\xi}\, a(x,\xi)\, \widetilde{u}(\xi)\, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{4.1}$$

где u — гладкая функция на $\mathbb{R}^N$ с компактным носителем, $\widetilde{u}(\xi) = \mathcal{F}_{x\to\xi}u$ — преобразование Фурье функции u, а $a(x,\xi)$ — гладкая функция (называемая символом) на $\mathbb{R}^{2N}$, удовлетворяющая оценкам

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)\right| \leqslant C_{\alpha\beta}\big(1+|x|^2+|\xi|^2\big)^{(d-|\alpha|-|\beta|)/2}, \tag{4.2}$$

справедливая для любых мультииндексов α и β и некоторой константы $C_{\alpha\beta}$, зависящей от α и β.

Функция a называется *полным символом* ПДО (4.1), а его главный символ обозначается $\sigma(D)$.

Справедливы следующие утверждения (см. [27]).

1. Всякий ПДО в $\mathbb{R}^N$ действует ограниченно в специальных пространствах типа Соболева (см. [60, стр. 139]). А именно, для каждого $s \in \mathbb{R}$ определим пространство $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^N)$ как пополнение пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ гладких функций на $\mathbb{R}^N$ с компактным носителем по норме

$$\|u\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^N)} = \left\|H^{s/2}u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

где $H^{s/2}$ — $s/2$-ая степень оператора

$$H = x^2 - \partial^2/\partial x^2$$

(квантовый осциллятор). ПДО (4.1) продолжается до ограниченного оператора в пространствах

$$D\colon \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{H}^{s-d}(\mathbb{R}^N),$$

при этом главный символ $\sigma(D)$ определяет вышеуказанное продолжение однозначно с точностью до компактных операторов.

2. ПДО в $\mathbb{R}^N$ образуют алгебру относительно сложения и композиции операторов; кроме того, если D_1 и D_2 — два ПДО порядков d_1 и d_2 соответственно, то их композиция $D_1 D_2$ есть ПДО порядка $d_1 + d_2$ с главным символом

$$\sigma(D_1 D_2) = \sigma(D_1)\,\sigma(D_2). \tag{4.3}$$

Метаплектические операторы. Подробное описание группы метаплектических операторов и её свойств см. в [15; 45; 48].

Напомним, что *симплектическая группа* $\mathrm{Sp}(N)$ состоит из невырожденных вещественных $2N \times 2N$-матриц S, для которых выполняются следующие равенства:

$$S^t J S = S J S^t = J.$$

Здесь верхний индекс t обозначает транспонирование, а матрица J равна

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ -I_N & 0 \end{pmatrix},$$

где I_N — $N \times N$ единичная матрица. Группа $\mathrm{Sp}(N)$ является подгруппой группы Ли $\mathrm{GL}(2N,\mathbb{R})$ всех невырожденных $2N \times 2N$-матриц. Матрицы $S \in \mathrm{Sp}(N)$ называются *симплектическими.*

Метаплектическая группа $\mathrm{Mp}(N)$ определяется как пространство нетривиального двулистного накрытия $\pi^{\mathrm{Mp}}\colon \mathrm{Mp}(N) \to \mathrm{Sp}(N)$ симплектической группы. Как известно, такое покрытие единственно и существует точная последовательность групп Ли

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Mp}(N) \xrightarrow{\pi^{\mathrm{Mp}}} \mathrm{Sp}(N) \longrightarrow 0.$$

Группа $\mathrm{Mp}(N)$ допускает точное представление в группе $\mathcal{U}L^2(\mathbb{R}^N)$ унитарных операторов, действующих в пространствах $L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ (так называемое *метаплектическое представление*). Соответствующую подгруппу в $\mathcal{U}L^2(\mathbb{R}^N)$ мы называем группой *метаплектических операторов* и отождествляем её ниже с группой $\mathrm{Mp}(N)$. Как известно, эта подгруппа порождается следующими операторами:

1) умножение на экспоненту $\widehat{V}_P u(x) = e^{i(Px,x)/2}\, u(x)$, где P — вещественная симметрическая $N \times N$ матрица;

2) унитарный оператор растяжения $\widehat{M}_{L,m} u(x) = (2\pi i)^{-N/2} i^m \sqrt{|\det L|}\, u(Lx)$, где L — вещественная невырожденная $N \times N$ матрица, а m — целое число, заданное соотношением $\pi m \equiv \arg\det L \mod 2\pi$;

3) унитарное преобразование Фурье $(2\pi i)^{-N/2}\mathcal{F}_{x\to\xi}$, где $\mathcal{F}_{x\to\xi}$ — преобразование Фурье.

Отметим, что метаплектические операторы являются интегральными операторами Фурье в $\mathbb{R}^N$ [49], чьи ядра Шварца даны осциллирующими интегралами с квадратичной фазой (в отличие от классической теории [16; 26], где фаза является положительно однородной функцией степени 1). Такие операторы ассоциированы с графиками симплектических преобразований (т.е. преобразований, данных симплектическими матрицами) кокасательного расслоения $T^*\mathbb{R}^N$.

Для каждого оператора $\Phi \in \mathrm{Mp}(N)$ симплектическая матрица $S = \pi^{\mathrm{Mp}}(\Phi)$ считается *ассоциированной* с Φ.

Отметим следующие свойства операторов из $\mathrm{Mp}(N)$ (см. [45; 48]).

1. Метаплектические операторы являются непрерывными автоморфизмами пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ быстро убывающих функций на $\mathbb{R}^N$. Эти

операторы также действуют ограниченно в пространствах $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^N)$ для любого s.

2. Имеет место следующий аналог теоремы Егорова (для обычных ПДО см. [12]). Пусть Φ — метаплектический оператор, ассоциированный с симплектической матрицей S, а D — ПДО в $\mathbb{R}^N$; тогда композиция $\Phi D \Phi^{-1}$ также является ПДО в $\mathbb{R}^N$, а его главный символ равен

$$\sigma\big(\Phi D \Phi^{-1}\big)(x,\xi) = \sigma(D)\big(S^{-1}(x,\xi)\big). \tag{4.4}$$

Здесь S^{-1} — обратная матрица к S.

Эргодические меры на сфере. Сформулируем результат из [29] о классификации эргодических мер, инвариантных относительно линейного преобразования на сфере в $\mathbb{R}^d$.

Пусть $\mathbb{S}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ — единичная сфера в пространстве $\mathbb{R}^d$ (где $d \in \mathbb{N}$), и пусть $S\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ — невырожденное линейное преобразование. Преобразование S индуцирует диффеоморфизм $S_0\colon \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{S}^{d-1}$,

$$S_0(x) = \frac{Sx}{|Sx|}, \qquad x \in \mathbb{S}^{d-1}. \tag{4.5}$$

Напомним описание инвариантных эргодических мер на $\mathbb{S}^{d-1}$, отвечающих отображению S_0 (см. [29, §38]). Сначала напомним основные определения.

Пусть X — топологическое пространство, а $F\colon X \to X$ — гомеоморфизм.

Определение 4.2. Борелевская мера μ на X называется *F-инвариантной*, если $\mu(A) = \mu(F^{-1}(A))$ для всякого борелевского множества $A \subset X$. Нормированная мера μ на X называется *эргодической* по отношению к отображению F, если для всякого борелевского множества $A \subset X$ из равенства $\mu(A \triangle F^{-1}(A)) = 0$ следует, что либо $\mu(A) = 0$, либо $\mu(A) = 1$. Здесь $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ — симметрическая разность множеств A и B.

Основной результат, сформулированный ниже, состоит в том, что мера μ на сфере $\mathbb{S}^{d-1}$ инвариантна и эргодична относительно (4.5) тогда и только тогда, когда её носитель лежит в некотором подмногообразии $\mathbb{S}^{d-1}$ и, кроме того, он имеет специальный вид. Чтобы воспроизвести эту конструкцию, нам понадобятся некоторые обозначения.

Прежде всего, для выбранного числа $r > 0$ рассмотрим множество собственных значений λ преобразования S, по модулю равных r. Для них мы обозначаем через $\chi = \chi(r)$ сумму геометрических кратностей действительных собственных значений $\lambda \in \mathbb{R}$, а через $v_1, \ldots, v_\chi$ — собственные векторы единичной длины, отвечающие этим собственным значениям. Обозначим также через $\zeta = \zeta(r)$ полусумму геометрических кратностей всех комплексно-сопряжённых собственных значений $\lambda = re^{\pm i\varphi} \notin \mathbb{R}$; перечисляя пары таких собственных значений с номерами от $\chi + 1$ до $\chi + \zeta$, для каждой пары с индексом l обозначим через $v_l^\pm$ пару вещественных линейно независимых векторов единичной длины, порождающих собственное подпространство $V(re^{\pm i\varphi})$, отвечающее этой паре.

Далее, пусть M_r — подпространство в $\mathbb{R}^d$, порождённое семейством векторов

$$v_1, \ldots, v_\chi, v_{\chi+1}^\pm, \ldots, v_{\chi+\zeta}^\pm, \tag{4.6}$$

и пусть $S_r = \mathbb{S}^{d-1} \cap M_r$ — единичная сфера в M_r. На S_r определим отображение $\pi_r \colon S_r \to \mathbb{R}^{\chi+\zeta}$ следующим образом. Для вектора $x \in M_r$ и числа l, $1 \leqslant l \leqslant \chi$, обозначим через x_l координату вектора x, соответствующего базисному вектору v_l в множестве (4.6), а для числа l, $\chi + 1 \leqslant l \leqslant \chi + \zeta$, обозначим через $x_l^\pm$ пару координат, соответствующих паре базисных векторов $v_l^\pm$ в множестве (4.6). Определим отображение π_r по правилу

$$\begin{aligned} \pi_r \colon S_r &\longrightarrow \mathbb{R}^{\chi+\zeta}, \\ x &\longmapsto \bigl(\xi_1(x), \ldots, \xi_{\chi+\zeta}(x)\bigr), \end{aligned}$$

где

$$\xi_l(x) = \begin{cases} |x_l| & \text{при} \quad 1 \leqslant l \leqslant \chi, \\ |x_l^+ + ix_l^-| & \text{при} \quad \chi + 1 \leqslant l \leqslant \chi + \zeta. \end{cases} \tag{4.7}$$

Теперь для каждой точки $\xi \in \mathbb{R}^{\chi+\zeta}$, лежащей в образе отображения π_r, рассмотрим её прообраз $\pi_r^{-1}(\xi)$. Из (4.7) следует, что $\pi_r^{-1}(\xi)$ имеет вид

$$\pi_r^{-1}(\xi) = (\mathbb{S}^0)^p \times (\mathbb{S}^1)^q, \tag{4.8}$$

где p равняется числу ненулевых координат точки ξ с индексами $\leqslant \chi$, а q — число ненулевых координат среди оставшихся. В дальнейшем будем обозначать $G^r(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \pi_r^{-1}(\xi)$.

Замечание 4.3. По построению, множество $G^r(\xi)$ является подмногообразием сферы S_r и, следовательно, подмногообразием исходной сферы $\mathbb{S}^{d-1}$.

На многообразии $G^r(\xi)$ рассматривается специальный класс мер (из которого ниже мы получаем эргодические меры на $\mathbb{S}^{d-1}$). А именно, заметим (см. (4.8)), что $G^r(\xi)$ имеет естественную структуру группы Ли

$$G^r(\xi) \simeq (\mathbb{Z}_2)^p \times \mathbb{T}^q,$$

где $\mathbb{T}^q = \{ z = (z_1, \dots, z_q) \in \mathbb{C}^q : |z_j| = 1 \}$ q-мерный тор. Искомые меры на $G^r(\xi)$ имеют вид произведений некоторых мер на $(\mathbb{Z}_2)^p$ и на $\mathbb{T}^q$. Сначала рассмотрим q-мерный тор $\mathbb{T}^q$. Выберем $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_q) \in \mathbb{T}^q$ и рассмотрим замкнутую подгруппу $\Gamma_\gamma = \overline{\langle \gamma \rangle} \subset \mathbb{T}^q$, порождённую этим элементом. Эта подгруппа Γ_γ изоморфна группе Ли

$$\Gamma_\gamma \simeq \mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}_k, \tag{4.9}$$

где числа m и k зависят от γ. Более точно, выпишем каждую координату γ_j вектора γ в виде

$$\gamma_j = e^{2\pi i \tau_j}, \qquad \tau_j \in [0,1).$$

Тогда m — максимальное количество рационально независимых чисел среди $\tau_1, \dots, \tau_q$ (иными словами, числа $\tau_1, \dots, \tau_q$ образуют m-мерное векторное пространство над $\mathbb{Q}$), а k — наименьший общий знаменатель среди всех дробей вида $\tau = n_1\tau_1 + \dots + n_q\tau_q \in \mathbb{Q}$, $n_j \in \mathbb{Z}$. На группе (4.9) рассмотрим нормированную меру Хаара μ_γ. Она имеет вид

$$\mu_\gamma = \frac{1}{k}\, d^m x \times \delta_k, \tag{4.10}$$

где $d^m x$ — мера Хаара на $\mathbb{T}^m$, а δ_k —- считающая мера на $\mathbb{Z}_k$ (т.е. δ_k — сумма дельта-функций Дирака, сосредоточенных на элементах множества $\mathbb{Z}_k$). Выражение (4.10) определяет нормированную меру на $\mathbb{T}^q$ с носителем, лежащим в подгруппе Γ_γ. Кроме того, из построения видно, что если

$$L_\gamma \colon \mathbb{T}^q \longrightarrow \mathbb{T}^q, \qquad z \longmapsto \gamma z, \tag{4.11}$$

есть отображение сдвига на $\mathbb{T}^q$, порождённое элементом γ, то эта мера инвариантна и эргодична относительно сдвига L_γ. Теперь рассмотрим множество смежных классов $z\Gamma_\gamma$, $z \in \mathbb{T}^q$; каждая из них имеет свою меру $\mu_{z\gamma}$ с носителем, лежащим в $z\Gamma_\gamma$; $\mu_{z\gamma}$ определяется аналогично мере μ_γ (здесь меры $\mu_{z\gamma}$ и μ_γ преобразуются друг в друга сдвигом, индуцированным элементом z). Как и мера μ_γ, все меры $\mu_{z\gamma}$, $z \in \mathbb{T}^q$, инвариантны и эргодичны относительно сдвига (4.11). Эти меры называются *стандартными мерами* на торе $\mathbb{T}^q$, соответствующими сдвигу (4.11). Отображение (4.11) называется *сдвигом* на торе $\mathbb{T}^q$. Таким образом, стандартная мера на $\mathbb{T}^q$, отвечающая элементу γ с носителем $z\Gamma_\gamma = z\mathbb{T}^m \times z\mathbb{Z}_k$, имеет вид

$$\mu_{\mathbb{T}^q, z\gamma} = \frac{1}{k}\, d^m_{z\mathbb{T}^m} \times \delta_{z\mathbb{Z}_k}, \tag{4.12}$$

где $d^m_{z\mathbb{T}^m}$ — мера Лебега на Торе $z\mathbb{T}^m$, а $\delta_{z\mathbb{Z}_k}$ — сумма функций Дирака на $\mathbb{T}^q$, сосредоточенных на $z\mathbb{Z}_k$.

По аналогии с построением стандартной меры на торе $\mathbb{T}^q$ определим стандартные меры на дискретной группе $(\mathbb{Z}_2)^p$, отвечающие сдвигу, порождённому элементом $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_p) \in (\mathbb{Z}_2)^p$. Единственное отличие состоит в том, что теперь подгруппа $\Gamma_\gamma = \overline{\langle\gamma\rangle}$ имеет вид

$$\Gamma_\gamma \simeq (\mathbb{Z}_2)^{m'} \times \{1\}^{k'},$$

где m' — число координат γ_j элемента γ, равных -1, а k' — количество координат, равных 1. Стандартная мера на $(\mathbb{Z}_2)^p$, отвечающая элементу γ, с носителем $z\Gamma_\gamma$ имеет вид

$$\mu_{(\mathbb{Z}_2)^p, z\gamma} = \frac{1}{2^{m'}} \prod \big(\delta(-z\gamma_\alpha) + \delta(z\gamma_\alpha)\big) \times \prod \delta(z\gamma_\beta), \tag{4.13}$$

где первое произведение берётся по всем координатам γ_α элемента γ, равным -1, а второе — по координатам γ_β, равным 1.

Возвращаясь к группе $G^r(\xi) \simeq (\mathbb{Z}_2)^p \times \mathbb{T}^q$, предположим, что элемент $\gamma = (\gamma^p, \gamma^q) \in G^r(\xi)$ и рассмотрим сдвиг $L_\gamma \colon G^r(\xi) \to G^r(\xi)$, порожденный этим элементом. Ясно, что L_γ индуцирует сдвиги L_{γ^p} и L_{γ^q} на множителях $(\mathbb{Z}_2)^p$ и $\mathbb{T}^q$ соответственно.

Определение 4.4. Мера μ_γ на $G^r(\xi)$ называется *стандартной* относительно сдвига L_γ на $G^r(\xi)$, индуцированного элементом $\gamma = (\gamma^p, \gamma^q)$, если она имеет вид

$$\mu_\gamma = \mu_{\gamma^p} \times \mu_{\gamma^q},$$

где μ_{γ^p} и μ_{γ^q} — стандартные меры на $(\mathbb{Z}_2)^p$ и $\mathbb{T}^q$, отвечающим сдвигам L_{γ^p} и L_{γ^q}, соответственно (см. (4.13) и (4.12)).

Замечание 4.5. Из построения снова видно, что стандартная мера μ_γ на $G^r(\xi)$, отвечающая сдвигу $L_\gamma\colon G^r(\ xi) \to G^r(\xi)$, инвариантна и эргодична относительно этого сдвига.

Заметим теперь, что ограничение отображения S_0 на $G^r(\xi)$ (см. замечание 4.3) есть в точности сдвиг на $G^r(\xi)$. А именно, действие S_0 на S_r описывается в базисе (4.6) формулой

$$S_0(x) = \Big(\gamma_1 x_1, \dots, \gamma_\chi x_\chi, R(\theta_{\chi+1}) x^{\pm}_{\chi+1}, \dots, R(\theta_{\chi+\zeta}) x^{\pm}_{\chi+\zeta}\Big), \tag{4.14}$$

где: числа γ_l, $1 \leqslant l \leqslant \chi$, равны $\gamma_l = \operatorname{sgn} \lambda_l$, а λ_l — вещественные собственные значения отображения S, отвечающие собственным векторам v_l семейства (4.6); $R(\theta_l)x^{\pm}_l$, $\chi + 1 \leqslant l \leqslant \chi + \zeta$, суть пары чисел

$$R(\theta_l)x^{\pm}_l = (x^+_l \cos\theta_l - x^-_l \sin\theta_l,\ x^+_l \sin\theta_l + x^-_l \cos\theta_l),$$

где угол θ_l является аргументом одного из комплексно-сопряжённых собственных значений $\lambda_l = re^{\pm i|\theta_l|}$, соответствующих собственному подпространству преобразования S, порождённому векторами $v^{\pm}_l$ из семейства (4.6) (знак θ_l зависит от выбора пары $v^{\pm}_l$ в (4.6)). Легко видеть, что формула (4.14) определяет сдвиг на группе $G^r(\xi)$.

Из предыдущих рассуждений видно, что любая мера на $G^r(\xi)$, стандартная относительно отображения (4.14), определяет нормированную меру на $\mathbb{S}^{d-1}$ (с носителем в $G^r(\xi)$), инвариантную и эргодическую относительно отображения S_0. Согласно [29, теорема 38.9] все нормированные инвариантные эргодические меры на $\mathbb{S}^{d-1}$ имеют такой вид.

Обозначим множество всех нормированных S_0-инвариантных эргодических мер на $\mathbb{S}^{2N-1}$ через $\operatorname{Meas}_{S_0}(\mathbb{S}^{2N-1})$.

Теорема 4.6 (теорема 38.9 в [29])**.** *Нормированная мера μ на сфере $\mathbb{S}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ принадлежит множеству $\operatorname{Meas}_{S_0}(\mathbb{S}^{2N-1})$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) *носитель μ принадлежит одному из множеств $G^r(\xi)$;*
2) *μ является стандартной мерой на соответствующем множестве $G^r(\xi)$ относительно ограничения отображения (4.5) на $G^r(\xi)$.*

Обратимость конечно-разностных двучленных операторов. Пусть X — компактное топологическое пространство, μ — нормированная борелевская мера на X, а a — непрерывная функция на X.

Определение 4.7. *Геометрическим средним* функции a по отношению к мере μ на X называется число

$$\mathcal{M}_\mu(a) = \exp\left(\int\limits_X \ln|a(x)|\, d\mu(x)\right).$$

Далее, пусть дан гомеоморфизм $F\colon X \to X$.

Рассмотрим следующее семейство двучленных конечно-разностных операторов, параметризованных точками $x \in X$:

$$\ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \qquad w(n) \longmapsto a_0\big(F^n x\big)w(n) + a_1\big(F^n x\big)w(n-1), \tag{4.15}$$

где a_0 и a_1 — непрерывные функции на X.

Теорема 4.8 (теорема 4.6.5 в [5])**.** *Пусть действие $n \mapsto F^n$ группы $\mathbb{Z}$ на X топологически свободно. Тогда оператор* (4.15) *обратим тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*:

1. $a_0 \neq 0$ для всех $x \in X$ и $\mathcal{M}_\mu(a_0) > \mathcal{M}_\mu(a_1)$ для всех $\mu \in \mathrm{Meas}_F(X)$;

2. $a_1 \neq 0$ для всех $x \in X$ и $\mathcal{M}_\mu(a_0) < \mathcal{M}_\mu(a_1)$ для всех $\mu \in \mathrm{Meas}_F(X)$,

где $\mathrm{Meas}_F(X)$ обозначает множество нормированных F-инвариантных эргодических мер на X.

4.2 Эллиптические операторы, ассоциированные с метаплектическим представлением

Ниже рассмотрим операторы вида

$$\mathcal{D} = D_0 + D_1\Phi\colon \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{H}^{s-d}(\mathbb{R}^N), \tag{4.16}$$

где D_0 и D_1 — ПДО порядка d на $\mathbb{R}^n$, а $\Phi = \Phi(S)$ — метаплектический оператор, ассоциированный с матрицей $S \in \mathrm{Sp}(N)$. Эта формула определяет (двучленный) G-оператор, где группа G равна $\mathbb{Z}$ и порождена степенями оператора Φ.

Замечание 4.9. Заметим, что можно рассматривать суммы (4.16) с большим числом слагаемых, отвечающих целым степеням оператора Φ, а именно операторы вида

$$\mathcal{D} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} D_k\Phi^k\colon \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{H}^{s-d}(\mathbb{R}^N), \tag{4.17}$$

где только конечное число членов отлично от нуля (ср. с результатами второй главы). Формулировка и доказательства теоремы конечности 4.14 (см. ниже) аналогичны.

Дадим определение эллиптичности для $\mathbb{Z}$-оператора (4.16). Для этого введем понятие траекторного символа такого оператора (ср. [21; 30]). По определению это операторная функция, определённая в точках $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2N}_0 = \mathbb{R}^{2N} \setminus \{(0,0)\}$ и принимающая значения в ограниченных разностных операторах

$$\sigma_{\mathrm{tr}}(\mathcal{D})(x,\xi)\colon \ell^2(\mathbb{Z},\mu_{x,\xi,s}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z},\mu_{x,\xi,s-d}), \tag{4.18}$$

где пространство $\ell^2(\mathbb{Z},\mu_{x,\xi,s})$ определено формулой (2.3) для веса

$$\mu_{x,\xi,s}(n) = |S^n(x,\xi)|^{2s}, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{4.19}$$

Здесь и далее S^n — это n-я степень линейного оператора S на $\mathbb{R}^{2N}$, соответствующая матрице S.

Определение 4.10. *Траекторным символом* $\sigma_{\mathrm{tr}}(\mathcal{D})$ оператора (4.16) называется операторнозначная функция (4.18) на $\mathbb{R}^{2N}_0$, заданная для каждого $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2N}_0$ формулой

$$\left[\sigma_{\mathrm{tr}}(\mathcal{D})(x,\xi)\right] w(n) = \sigma(D_0)\big(S^n(x,\xi)\big)\, w(n) + \sigma(D_1)\big(S^n(x,\xi)\big)\, w(n-1).$$

Замечание 4.11. Используя (4.3) и (4.4), легко показать, что набор операторов (4.17) замкнут относительно композиций (таким образом, эти операторы образуют алгебру); более того, если $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ суть два таких оператора, то имеем

$$\sigma_{\mathrm{tr}}(\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2) = \sigma_{\mathrm{tr}}(\mathcal{D}_1)\, \sigma_{\mathrm{tr}}(\mathcal{D}_2). \tag{4.20}$$

Определение 4.12. Оператор (4.16) называется *эллиптическим*, если его траекторный символ $\sigma_{\mathrm{tr}}(\mathcal{D})$ определяет обратимый оператор (4.18) для всех $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2N}_0$.

Замечание 4.13. Как будет видно ниже (см. теорему 4.15), в общем случае понятие эллиптичности для оператора (4.16) зависит от порядка s соболевских пространств, в которых рассматривается этот оператор!

Теорема 4.14. *Пусть оператор* (4.16) *эллиптичен. Тогда он фредгольмов.*

Доказательство. 1. Прежде всего отметим, что в случае $d = 0$ и $s = 0$ нужный результат можно получить стандартными методами теории скрещенных произведений C^*-алгебры. Соответствующее рассуждение полностью повторяет доказательство аналогичного утверждения в [63, Theorem 1], поэтому мы его опускаем.

2. Пусть $d \neq 0$, а s произвольно. Рассмотрим оператор

$$\widetilde{\mathcal{D}} = H^{(s-d)/2}\,\mathcal{D}\,H^{-s/2} = H^{(s-d)/2}\,(D_0 + D_1\Phi)\,H^{-s/2}, \tag{4.21}$$

где $H = x^2 - \partial^2/\partial x^2$. Согласно определению пространств $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^N)$ операторы $H^{\alpha/2}$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$, определяют изоморфизмы $\mathcal{H}^\alpha(\mathbb{R}^N) \simeq L^2(\mathbb{R}^N)$. Отсюда следует, что оператор $\widetilde{\mathcal{D}}$ действует ограниченно в пространствах $L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$; более того, операторы $\mathcal{D}$ и $\widetilde{\mathcal{D}}$ являются фредгольмовыми (или не фредгольмовыми) одновременно. С другой стороны, всякий $H^{\alpha/2}$ является ПДО в $\mathbb{R}^N$ с главным символом $\sigma(H^{\alpha/2}) = |(x,\xi)|^\alpha$; из (4.4) следует, что $\widetilde{\mathcal{D}}$ также является $\mathbb{Z}$-оператором.

Прямое вычисление показывает, что траекторные символы операторов $\widetilde{\mathcal{D}}$ и $\mathcal{D}$ связаны коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc}
\ell^2(\mathbb{Z},\mu_{x,\xi,s}) & \xrightarrow{\sigma_{\mathrm{tr}}(\mathcal{D})(x,\xi)} & \ell^2(\mathbb{Z},\mu_{x,\xi,s-d}) \\
{\scriptstyle |S^n(x,\xi)|^{-s}}\Big\uparrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle |S^n(x,\xi)|^{s-d}} \\
\ell^2(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sigma_{\mathrm{tr}}(\widetilde{\mathcal{D}})(x,\xi)} & \ell^2(\mathbb{Z}),
\end{array}$$

в котором вертикальные стрелки суть умножения на функции $n \mapsto |S^n(x,\xi)|^\alpha$, $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha = -s,s-d$. Из (4.19) следует, что эти вертикальные стрелки являются изоморфизмами. Следовательно, в силу обратимости оператора $\sigma_{\mathrm{tr}}(\mathcal{D})(x,\xi)$ в соответствующих пространствах, оператор $\sigma_{\mathrm{tr}}(\widetilde{\mathcal{D}})(x,\xi)$ обратим в пространствах $\ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$. Теперь утверждение теоремы следует из пункта 1 доказательства. $\square$

Используя доказанную выше теорему, мы можем получить явные условия фредгольмовости оператора (4.16), используя результаты из [29], описывающие условия обратимости двучленных конечно-разностных операторов на $\ell^2(\mathbb{Z})$. Эти результаты приведены в предыдущем параграфе. Ниже для $S \in \mathrm{Sp}(N)$ обозначим через S_0 отображение единичной сферы $\mathbb{S}^{2N-1} \subset \mathbb{R}^{2N}$ в себя по формуле

$$S_0(x,\xi) = \frac{S(x,\xi)}{|S(x,\xi)|}. \tag{4.22}$$

Заметим, что семейство отображений S_0^n для всех возможных целых чисел n определяет действие группы $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{S}^{2N-1}$. Далее, обозначим через $\mathrm{Meas}_{S_0}(\mathbb{S}^{2N-1})$ множество всех нормированных S_0-инвариантных эргодических мер на $\mathbb{S}^{2N-1}$ (см. определение 4.2). Для меры $\mu \in \mathrm{Meas}_{S_0}(\mathbb{S}^{2N-1})$ и функции $a \in C^\infty(\mathbb{S}^{2N-1})$ через $\mathcal{M}_\mu(a)$ обозначим геометрическое среднее функции a относительно меры μ (см. определение 4.7).

Теорема 4.15. *Пусть для оператора* (4.16) *действие группы* $\mathbb{Z}$ *на* $\mathbb{S}^{2N-1}$, *индуцированное матрицей* $S = \pi^{\mathrm{Mp}}(\Phi)$, *топологически свободно. В этом случае оператор является фредгольмовым, если выполнено одно из следующих условий*:

1. $\sigma(D_0)(x,\xi) \neq 0$ *для всех* $(x,\xi) \in \mathbb{S}^{2N-1}$ *и*

$$\mathcal{M}_\mu\big(\sigma(D_0)(x,\xi)\big) > \mathcal{M}_\mu\big(|S^{-1}(x,\xi)|^{-s}\sigma(D_1)(x,\xi)\big) \tag{4.23}$$

для всех $\mu \in \mathrm{Meas}_{S_0}(\mathbb{S}^{2N-1})$;

2. $\sigma(D_1)(x,\xi) \neq 0$ *для всех* $(x,\xi) \in \mathbb{S}^{2N-1}$ *и*

$$\mathcal{M}_\mu\big(\sigma(D_0)(x,\xi)\big) < \mathcal{M}_\mu\big(|S^{-1}(x,\xi)|^{-s}\sigma(D_1)(x,\xi)\big)$$

для всех $\mu \in \mathrm{Meas}_{S_0}(\mathbb{S}^{2N-1})$.

Доказательство. Следуя доказательству теоремы 4.14, вместо оператора (4.16) рассмотрим редуцированный оператор $\widetilde{\mathcal{D}}$, заданный формулой (4.21). Как указано в доказательстве, упомянутом выше, операторы $\mathcal{D}$ и $\widetilde{\mathcal{D}}$ одновременно фредгольмовы или нефредгольмовы, а $\widetilde{\mathcal{D}}$ является $\mathbb{Z}$-оператором. Из (4.20) следует, что траекторный символ оператора $\widetilde{\mathcal{D}}$ равен

$$\begin{aligned}\big[\sigma_{\mathrm{tr}}(\widetilde{\mathcal{D}})(x,\xi)\big]\, w(n) &= |S^n(x,\xi)|^{-d}\,\sigma(D_0)\big(S^n(x,\xi)\big)\, w(n)\\ &\quad + |S^n(x,\xi)|^{s-d}\,|S^{n-1}(x,\xi)|^{-s}\sigma(D_1)\big(S^n(x,\xi)\big)\, w(n-1).\end{aligned}$$

Поскольку функции $\sigma(D_k)$ являются однородными степени d, из (4.22) следует, что последнее выражение можно преобразовать к виду

$$\big[\sigma_{\mathrm{tr}}(\widetilde{\mathcal{D}})(x,\xi)\big]\, w(n) = a_0\big(S_0^n(x,\xi)\big)\, w(n) + a_1\big(S_0^n(x,\xi)\big)\, w(n-1),$$

где

$$a_0(x,\xi) = \sigma(D_0)(x,\xi), \qquad a_1(x,\xi) = |S^{-1}(x,\xi)|^{-s}\,\sigma(D_1)(x,\xi).$$

Искомый результат теперь следует из теоремы 4.8. $\square$

4.3 Пример. Эллиптичность операторов, ассоциированных с симплектической матрицей специального вида

Применим теорему 4.15 к следующему случаю. Предположим, что собственные значения матрицы S имеют разные модули, их геометрические кратности равны 1, а аргументы пар комплексно-сопряжённых собственных значений не рациональны. Для определенности будем также считать, что $\sigma(D_0)(x,\xi) \neq 0$ для всех $(x,\xi) \in \mathbb{S}^{2N-1}$.

Воспользуемся обозначениями из предыдущего параграфа, предшествующими теореме 4.6. Согласно этой теореме инвариантные эргодические меры из множества $\mathrm{Meas}_{S_0}(\mathbb{S}^{2N-1})$ отвечают специальным подмногообразиям $G^{|\lambda|} \subset \mathbb{S}^{2N-1}$, которые, в свою очередь, отвечают модулям $|\lambda|$ собственных значений λ матрицы S. При указанных в примере условиях для каждого такого $|\lambda|$ подмногообразие $G^{|\lambda|}$ единственно и состоит либо (в случае $\lambda \in \mathbb{R}$) из двух точек $\{v, -v\}$, где v — единичный собственный вектор, отвечающий вещественному собственному значению λ, или (в случае $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$) представляет собой окружность $\mathbb{S}^1$, которая вырезается на $\mathbb{S}^{2N-1}$ собственным подпространством $V(re^{\pm i\theta})$, отвечающим комплексно-сопряжённым собственным значениям $\lambda = re^{\pm i\theta}$. В первом случае искомые меры имеют вид

$$\mu_{|\lambda|} = \begin{cases} \delta(v),\, \delta(-v), & \lambda > 0, \\ \frac{1}{2}\big(\delta(v) + \delta(-v)\big), & \lambda < 0, \end{cases}$$

а в другом случае искомая мера единственна и есть в точности мера Лебега $dx/(2\pi)$ на окружности $V(re^{\pm i\theta}) \cap \mathbb{S}^{2N-1}$. Условие (4.23) в первом случае имеет вид

$$\left|\frac{\sigma(D_1)(\pm v)}{\sigma(D_0)(\pm v)}\right| < |\lambda|^{-s} \text{ при } \lambda > 0; \quad \left|\frac{\sigma(D_1)(v)\,\sigma(D_1)(-v)}{\sigma(D_0)(v)\,\sigma(D_0)(-v)}\right| < |\lambda|^{-2s} \text{ при } \lambda < 0.$$

Во втором случае оно имеет вид

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\left|\frac{\sigma(D_1)(R(\varphi)v)}{\sigma(D_0)(R(\varphi)v)}\right| d\varphi < s\ln|\lambda|, \tag{4.24}$$

где теперь v — произвольный единичный вектор из собственного подпространства $V(re^{\pm i\theta})$, а $R(\varphi)$ — оператор поворота в этом подпространстве на угол φ.

Условие эллиптичности оператора (4.16), отвечающего матрице S, состоит в одновременном выполнении условий (4.3) и (4.24) для всех собственных значений λ матрицы S.

Замечание 4.16. Заметим, что теорема 4.6 явно описывает множество $\mathrm{Meas}_{S_0}(\mathbb{S}^{2N-1})$ для каждой симплектической матрицы S. Это позволяет выписать формулы, дающие условия эллиптичности оператора (4.16) для произвольных симплектических матриц S, для которых индуцированное действие группы $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{S}^{2N-1}$ топологически свободно. Мы не приводим эти формулы ввиду их громоздкости.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Для обратимых операторов с параметром и периодическими коэффициентами на гладком замкнутом многообразии введено понятие η-инварианта, установлены его основные свойства. Для гладких гомотопий семейств получена формула производной η-инварианта.
2. Для эллиптических дифференциально-разностных операторов на бесконечном цилиндре получена формула индекса. Более точно, получено выражение аналитического индекса в терминах внутреннего и конормальных символов на бесконечности, последние при этом представляют собой операторы с параметром и периодическими коэффициентами.
3. Для операторов на прямой, периодических на бесконечности, введено понятие η-инварианта, установлены его основные свойства, выражена его связь с η-инвариантом соответствующих операторов с параметром. Установлена формула индекса в случае дифференциальных операторов в терминах матриц монодромии предельных операторов на бесконечности. Получено выражение для η-инварианта через спектр матрицы монодромии.
4. Для операторов в $\mathbb{R}^N$, ассоциированных с метаплектической группой, получены явные условия эллиптичности, гарантирующие фредгольмовость оператора, в терминах эргодических мер, в зависимости от показателя гладкости пространств Соболева, в которых оператор действует.

В заключение автор выражает глубокую благодарность и большую признательность научному руководителю Савину А. Ю. за постановку задачи, поддержку и внимание к работе. Также автор благодарит Сипайло П. А. за помощь и плодотворные обсуждения в ходе работы над диссертацией. Автор является победителем конкурса “Молодая математика России” и выражает благодарность его спонсорам и жюри.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания: соглашение № 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

Литература

1. М. С. Агранович, М. И. Вишик. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. *Успехи матем. наук*, 19(3):53–161, 1964.

2. А. Б. Антоневич. Эллиптические нсевдодиффереициальиые операторы с конечной группой сдвигов. *Изв. АН СССР, сер. мат.*, 37(3):663–675, 1973.

3. А. Б. Антоневич. Об индексе и нормальной разрешимости общей эллиптической задачи с конечной группой сдвигов на границе. *Дифф. уравн.*, 8:309–317, 1972.

4. А. Б. Антоневич. Операторы со сдвигом, порожденным действием компактной группы Ли. *Сиб. матем. журн.*, 20(3):467–468, 1979.

5. А. Б. Антоневич, А. В. Лебедев. Функциональные и функционально-операторные уравнения. C^*-алгебраический подход. *Тр. С.-Петерб. мат. о-ва*, 6:34–140, 1998.

6. А. Б. Антоневич, А. В. Лебедев. О нётеровости функционально-дифференциального оператора с частными производными, содержащего линейное преобразование аргумента. *Дифф. уравн.*, 18:987–996, 2015.

7. А. А. Арутюнов. Редукция нелокальных псевдодифференциальных операторов на некомпактном многообразии к классическим псевдодифференциальным операторам на компактном многообразии удвоенной размерности. *Матем. заметки*, 97(4):493–502, 2015.

8. М. Атья. *Лекции по K-теории.* М.: Мир, 1967.

9. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. *Высшие трансцендентные функции.* М.: Наука, 1973.

10. В. С. Буслаев, А. А. Федотов. Комплексный метод ВКБ для уравнения Харпера. *Алгебра и Анализ*, 6(3):59–83, 1994.

11. И. М. Гельфанд. Об эллиптических уравнениях. *Успехи матем. наук*, 15(3):121–132, 1960.

12. Ю. В. Егоров. О канонических преобразованиях псевдодифференциальных операторов. *УМН*, 24(5):235–236, 1969.

13. К. Н. Жуйков, А. Ю. Савин. Эта-инвариант для семейств с параметром и периодическими коэффициентами. *Уфимск. матем. журн.*, 14(2):37–57, 2022.

14. В. А. Кондратьев. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками. *Труды Моск. матем. об-ва*, 16:209–292, 1967.

15. Ж. Лере. *Лагранжев анализ и квантовая механика.* М.: Мир, 1981.

16. В. П. Маслов. *Теория возмущений и асимптотические методы.* М.: Изд. МГУ, 1965.

17. А. С. Мищенко. Банаховы алгебры, псевдодифференциальные операторы и их приложения к K-теории. *УМН*, 34(6):67–79, 1979.

18. В. С. Рабинович. О разрешимости дифференциально-разностных уравнений на $\mathbb{R}^n$ и в полупространстве. *Докл. АН СССР*, 243(5):1134–1137, 1978.

19. В. С. Рабинович. Об алгебре, порожденной псевдодифференциальными операторами на $\mathbb{R}^n$, операторами умножения на почти-периодические функции и операторами сдвига. *Докл. АН СССР*, 263(5):1066–1070, 1982.

20. Л. Е. Россовский. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции. *СМФН*, 54:3–138, 2014.

21. А. Ю. Савин. О символе нелокальных операторов в пространствах Соболева. *Дифф. уравн.*, 47(6):890–893, 2011.

22. А. Ю. Савин. Об индексе нелокальных эллиптических операторов, отвечающих неизометрическому диффеоморфизму. *Матем. заметки*, 90(5):712–726, 2011.

23. А. Ю. Савин, Б. Ю. Стернин. Об индексе некоммутативных эллиптических операторов над C^*-алгебрами. *Матем. сб.*, 201(3):63–106, 2010.

24. А. Ю. Савин, Б. Ю. Стернин. Об индексе эллиптических операторов для группы растяжений. *Матем. сб.*, 202(10):99–130, 2011.

25. А. Ю. Савин, Б. Ю. Стернин. Эллиптические G-операторы на многообразиях с изолированными особенностями. *СМФН*, 59:173–191, 2016.

26. Л. Хёрмандер. Интегральные операторы Фурье. I. *Математика*, 16(1,2):17–61, 67–136, 1972.

27. М. А. Шубин. *Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория.* М.: Наука, 1978.

28. М. А. Шубин. Спектральная теория и индекс эллиптических операторов с почти-периодическими коэффициентами. *УМН*, 34(2):95–135, 1979.

29. A. Antonevich, M. Belousov, A. Lebedev. *Functional differential equations. II. C^*-applications. Parts 1, 2.* Longman, Harlow, 1998.

30. A. Antonevich, A. Lebedev. *Functional-Differential Equations. I. C^*-Theory.* Longman, Harlow, 1994.

31. M Atiyah, V. Patodi, I. Singer. Spectral asymmetry and Riemannian geometry I,II,III. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 77:43–69, 1975. 78 (1976) 405–432, 79 (1976) 71–99.

32. M. F. Atiyah. Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras. *Astérisque*, 32–33:43–72, 1976.

33. M. F. Atiyah, G. B. Segal. The index of elliptic operators II. *Ann. Math.*, 87:531–545, 1968.

34. M. F. Atiyah, I. M. Singer. The index of elliptic operators on compact manifold. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69:422–433, 1963.

35. M. F. Atiyah, I. M. Singer. The index of elliptic operators III. *Ann. Math.*, 87:546–604, 1968.

36. M. F. Atiyah, I. M. Singer. The index of elliptic operators IV. *Ann. Math.*, 93:119–138, 1971.

37. Ch. Bär, A. Strohmaier. An index theorem for Lorentzian manifolds with compact spacelike Cauchy boundary. *Amer. J. Math.*, 290(141):1421–1455, 2019.

38. B. Blackadar. *K-Theory for Operator Algebras*. Cambridge University Press, 1998. Second edition.

39. G. Bogveradze, L. P. Castro. On the Fredholm property and index of Wiener-Hopf plus/minus Hankel operators with piecewise almost periodic symbols. *Appl. Math. Inform. Mech.*, 12(1):25–40, 119–120, 2007.

40. A. Böttcher, Yu. I. Karlovich, I. M. Spitkovsky. *Convolution Operators and Factorization of Almost Periodic Matrix Functions*. Birkhäuser, Basel, 2002.

41. L. Boutet de Monvel. Boundary problems for pseudodifferential operators. *Acta Math.*, 126:11–51, 1971.

42. L. Boutet de Monvel. On the index of Toeplitz operators of several complex variables. *Invent. math.*, 92(2):243–254, 1988.

43. T. Carleman. Sur la théorie des équations intégrales et ses applications. *Mathem. Kongr. Zürich*, 1:138–151, 1932.

44. A. Connes. *Noncommutative geometry*. Academic Press Inc., San Diego, CA, 1994.

45. M. de Gosson. *Symplectic Methods in Harmonic Analysis and in Mathematical Physics*. Birkhäuser, Basel, 2011.

46. Yu. Egorov, B.-W. Schulze. *Pseudo-Differential Operators, Singularities, Applications*. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1997.

47. B. V. Fedosov, B.-W. Schulze, N. Tarkhanov. The index of higher order operators on singular surfaces. *Pacific J. of Math.*, 191(1):25–48, 1999.

48. G. B. Folland. *Harmonic analysis in phase space*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

49. B. Helffer, D. Robert. Comportement asymptotique précisé du spectre d'opérateurs globalement elliptiques dans $\mathbb{R}^n$. In *Goulaouic-Meyer-Schwartz Seminar, 1980–1981*, pages Exp. No. II, 23. École Polytech., Palaiseau, 1981.

50. H. Inoue, S. Richard. Index theorems for Fredholm, semi-Fredholm and almost-periodic operators: all in one example. *J. Noncommut. Geom.*, 13(4):1359–1380, 2019.

51. N. R. Izvarina, A. Yu. Savin. Ellipticity of operators associated with Morse-Smale diffeomorphisms. In *Differential equations on manifolds and mathematical physics*, Trends Math., pages 202–220. Birkhäuser/Springer, Cham, 2021.

52. P. Kuchment. An overview of periodic elliptic operators. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 53(3):343–414, 2016.

53. M. Lesch, M. Pflaum. Traces on algebras of parameter dependent pseudodifferential operators and the eta-invariant. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352(11):4911–4936, 2000.

54. R. Mazzeo, D. Pollack, K. Uhlenbeck. Moduli spaces of singular Yamabe metrics. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(2):303–344, 1996.

55. S. T. Melo. K-theory of pseudodifferential operators with semi-periodic symbols. *K-theory*, 37(3):235–248, 2006.

56. R. Melrose. The eta invariant and families of pseudodifferential operators. *Math. Research Letters*, 2(5):541–561, 1995.

57. R. Melrose, F. Rochon. Eta forms and the odd pseudodifferential families index. In *Surveys in differential geometry. Volume XV. Perspectives in mathematics and physics*, pages 279–322. Int. Press, Somerville, MA, 2011.

58. T. Mrowka, D. Ruberman, N. Saveliev. An index theorem for end-periodic operators. *Compositio Math.*, 152(2):399–444, 2016.

59. V. Nazaikinskii, A. Savin, B.-W. Schulze, B. Sternin. *Elliptic Theory on Singular Manifolds.* CRC-Press, Boca Raton, 2005.

60. V. E. Nazaikinskii, A. Yu. Savin, B. Yu. Sternin. *Elliptic theory and noncommutative geometry.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.

61. V. Nistor. An index theorem for gauge-invariant families: The case of solvable groups. *Acta Math. Hungarica*, 99(2):155–183, 2003.

62. D. Perrot, R. Rodsphon. An equivariant index theorem for hypoelliptic operators. ArXiv, 2014. arXiv:1412.5042v2.

63. A. Savin, E. Schrohe, B. Sternin. Elliptic operators associated with groups of quantized canonical transformations. *Bull. Sci. Math.*, 155:141–167, 2019.

64. A. Yu. Savin, K. N. Zhuikov. η-invariant and index for operators on the real line periodic at infinity. *Eurasian Math J.*, 12(3):57–77, 2021.

65. P. A. Sipailo, K. N. Zhuikov. Elliptic $\mathbb{Z}$-operators associated with the metaplectic group. *Russ. J. Math. Phys.*, 28(3):377–388, 2021.

66. A. L. Skubachevskii. Elliptic functional differential equations and applications. Basel: Birkhäuser Verlag, 1997.

67. C. H. Taubes. Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds. *J. Differential Geom.*, 25(3):363–430, 1987.

68. G. Zeller-Meier. Produits croisés d'une C^*-algébre par un groupe d'automorphismes. *J. Math. Pures. Appl.*, 47:101–239, 1968.

69. W. Zhang. *Lectures on Chern-Weil theory and Witten deformations.* World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2001.

70. K. N. Zhuikov. Index of differential-difference operators on an infinite cylinder. *Russ. J. Math. Phys.*, 29(2):280–290, 2022.