Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ
ИМЕНИ ПАТРИСА ЛУМУМБЫ»
(РУДН)

На правах рукописи

ОЛИВИО АДИЛСОН ПЕДРО

МЕТОД РАСЧЕТА МАНЕВРОВ МАЛОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА, ОСНАЩЕННОГО ДВИГАТЕЛЯМИ МАЛОЙ ТЯГИ

Научная специальность
2.5.16. Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов

Диссертация
на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель
БАРАНОВ АНДРЕЙ АНАТОЛЬЕВИЧ
доктор физико-математических наук

Москва
2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время разработка методов расчета маневров малого космического аппарата (МКА), оснащенного двигателями малой тяги для решения многих исследовательских и прикладных задач, по-прежнему актуальна. Непрекращающийся прогресс космических технологий и повышение исследовательской и практической деятельности в космосе доказывают эту актуальность. В условиях стремительного развития космических технологий и появления новых сложных задач актуализируется необходимость выполнения точных и эффективных маневров с использованием МКА. Это, со своей стороны, обуславливает непрерывное улучшение таких методов расчета маневров МКА, что значительно способствует их более масштабному применению в различной текущей и будущей космической деятельности.

К числу характерных примеров задач, требующих разработки более точных и эффективных методов расчета маневров МКА, можно отнести: сближение и стыковку КА, движущихся по околокруговым орбитам, реализацию группового полета нескольких КА, формирование и поддержание заданной конфигурации спутниковых систем, удаление космического мусора, проведение операций по обслуживанию КА и другие астронавтические миссий с участием более чем одного КА. Такие задачи решаются с помощью МКА, находящихся на околоземных орбитах и оснащенных двигателями малой тяги. МКА - аппараты, применяемые в различных областях, таких как телекоммуникации, наблюдение Земли и научные исследования.

По мере повышения спроса на данные и изображения растет потребность в меньших, более легких и дешевых КА, известных как МКА. Это, безусловно, обеспечивает увеличение количества МКА на орбите (особенно на низкой околоземной орбите, где сосредоточено множество таких аппаратов, решающих различные задачи, упомянутые выше), требующих точные управления их маневров для выполнения определенных задач в космосе. Данные КА обычно оснащены двигателями малой тяги, которые эффективнее, чем традиционные химические двигатели, легче их и компактнее. Двигатели КА имеют ограничения по доступному топливу и энергии, и именно это делает выбор метода расчета маневра критической задачей для обеспечения успеха космических миссий (КМ). С другой стороны, необходимо обращать внимание на энергоэффективность и точность расчетов маневров, так как эти параметры являются первостепенными критериями, гарантирующими успех КМ. Однако, расчет маневров для этих КА является сложной задачей, поскольку двигатели малой тяги имеют значительные ограничения с точки зрения увеличения времени реализации маневра.

В ходе полета важнейшее место занимают маневры КА (например, в окрестностях круговых орбит), позволяющие целенаправленно изменять параметры орбиты КА, корректировать траектории и соответствующее позиционирование КА, сближаться, состыковаться, расстыковаться КА на орбите, обеспечить условия входа и выхода из атмосферы планеты с помощью двигательной установки (ДУ). Маневры присутствуют во всех космических миссиях, поэтому они привлекают большое внимание экспертов на протяжении всего процесса, от планирования до реализации. Очень важно ответить на все вопросы, связанные с процессом маневрирования, чтобы избежать ошибок во время проведения маневра сближения и стыковки, например, между двумя КА. Поэтому корректировки необходимо тщательно планировать, чтобы обеспечить успех и безопасность миссии.

Исследуя способы маневрирования КА, сегодня в механике полета можно обнаружить два направления, которые представляют собой важные компоненты современной космонавтики и находят применение в различных КМ и исследованиях: Полет КА с двигателем большой тяги и полет КА с двигателем малой тяги.

Полет КА с использованием двигателя большой тяги включает в себя применение мощного двигателя, способного создавать значительную тягу, что позволяет выполнить крупные маневры, изменить орбиту или осуществить вход в атмосферу планеты. Характеристики полета с таким двигателем включают высокие скорости и возможность преодолевать сильное гравитационное воздействие, обеспечивая возможность исследования далеких космических объектов в Солнечной системе. Методика маневрирования с использованием двигателя большой тяги важна для различных миссий, таких как межпланетные исследования и спутниковая навигация.

При полете КА с двигателем малой тяги КА оснащен двигателем относительно небольшой тяги, используемым для мелких коррекций орбиты, стабилизации и точных маневров. Данный полет характеризуется ограниченными возможностями изменения орбиты, но обеспечивает эффективность в долгосрочных миссиях, таких как спутниковые системы и исследовательские аппараты. Двигатели малой тяги, работающие на различных типах топлива, активно применяются для корректировки орбит спутников и выполнения точных маневров в космосе.

В литературе представлено множество подходов, описывающих типы космических маневров, которые играют ключевую роль в реализации любой КМ. Выбор конкретного типа маневра определяется целями миссии и ее характеристиками. Например, если задачей является переход из одной точки орбиты в другую, находящуюся либо в той же орбитальной плоскости, либо в другой, оптимальным решением будут орбитальные переходы, которые классифицируются на копланарные и некомпланарные. В случае же сближения двух КА до достижения одинаковой скорости для последующего контакта выполняются маневры сближения или встречи. Таким образом, различные миссии требуют различных типов маневров, строго соответствующих их целям и ограничениям.

Согласно исследованию [1], орбитальные маневры перехода и встречи подразделяются на три категории в зависимости от их геометрических характеристик и близости орбит к круговым. Это маневры между касающимися, непересекающимися и пересекающимися орбитами. Различия между ними определяются параметрами орбиты, такими как эксцентриситет и большая полуось (БПО).

Помимо классификации маневров по геометрическим характеристикам, их можно разделять по типу и особенностям ДУ. Однако углубление в технические характеристики двигателей выходит за рамки рассматриваемой темы, так как этот вопрос подробно освещен в ряде фундаментальных работ, таких как Sutton и Biblarz (2017), Fortescue, Stark и Swinerd (2011), Vasilyev (2001), Goebel и Katz (2008), Chobotov (2002), Zhukov и Zakharov (2019) и других. В этих работах авторы классифицируют активные маневры на два типа в зависимости от величины управляющего ускорения и времени работы двигателя: маневры с импульсной тягой и маневры с малой тягой (МТ). Первый тип выполняется в течение короткого промежутка времени, тогда как второй предполагает длительное воздействие тяги.

С другой стороны, пассивные маневры выполняются без активного использования ДУ и зависят исключительно от естественных сил, таких как гравитация или давление солнечного излучения, а также от внутренних характеристик КА, таких как момент инерции или аэродинамические свойства. Эти маневры применяются преимущественно для экономии топлива при операциях, требующих точной корректировки орбиты, ориентации или траектории КА.

Тем не менее, в данной диссертации основное внимание будет уделено изучению активных маневров, учитывая переход на другую орбиту в центральном ньютоновском гравитационном поле. Разделение этих маневров связано с энергетическими возможностями и принципами работы ДУ. Двигательные установи, в свою очередь, подразделяются на системы с большой тягой (основанные на химических или ядерных двигателях) и системы с малой тягой (использующие электроракетные двигатели). Такой подход позволяет учитывать как технические ограничения двигательных систем, так и специфику задач, решаемых малым космическим аппаратом.

Крайне важно понимать, как управлять МКА и выполнять точные маневры, поскольку это повышает эффективность и безопасность КМ. Методы расчета маневров МКА с двигателями МТ предполагают использование математических моделей для моделирования и прогнозирования динамики КА в космосе. Эти модели основаны на уравнениях движения, описывающих, как система ДУ, положение и скорость КА влияют на его траекторию. Одной из известных моделей является модель Hill-Clohessy-Wiltshire (HCW) [94], которая широко используется для расчета управления КА на низкой околоземной орбите. Модель HCW представляют собой линейные дифференциальные уравнения в орбитальной системе, упрощающие орбитальную динамику и полезна для расчета траекторий КА, движущихся вокруг Земли. Кроме нее, для расчета маневров встречи более эффективным оказалось использование линеаризованных уравнений в цилиндрической системе координат (линеаризованные уравнения П.Е. Эльясберга) [46].

В самом деле, концепция применения методов расчета параметров маневров для решения практических и прикладных задач возникла в начале XX века, в связи с развитием множества ракетных техник. Тем не менее, метод расчета параметров маневров начали активно применяться в экспериментальном режиме лишь с 20-х годов прошлого века, особенно после публикации работы американского ученого R. H. Goddard "Метод достижения экстремальных высот". В этой работе был предложен интересный подход к задаче оптимального перехода КА между двумя точками, включая приближенные оптимальные решения для запуска ракеты на большие высоты [61].

В 1925 году W. Hohmann представил свою классическую работу, посвященную орбитальным перелетам. W. Hohmann разработал оптимальное решение задачи перехода КА между двумя круговыми компланарными орбитами в рамках Ньютоновского гравитационного поля [62]. Это решение, известное как “маневры Хомана”, до сих пор используется, хотя с некоторыми ограничениями. Хомановские маневры характеризуется биимпульсными маневрами, направленными на минимизацию расхода топлива, что достигается за счет минимального изменения скорости, необходимого для выполнения маневра [63]. Подход к оптимизации траекторий КА, Которые впервые был представлен Хоманом, получил теоретическое обоснование значительно позже в [115, 116].

Во второй половине 20-го века была предложена концепция применения электрических ракетных двигателей (ЭРД) [2-4, 64, 65]. Эта идея обеспечила значительные преимущества, такие как высокий удельный импульс, что сыграло решающую роль в разработке более эффективных технологий космических двигателей. Задача сближения и стыковки космических аппаратов на околоземных орбитах привлекла внимание ученых еще в 60-х годах, когда были осуществлены первые успешные операции по стыковке космических аппаратов. Особое значение имеют работы [5, 6, 66], которые оказали весомое влияние на изучение задачи стыковки космических аппаратов на околокруговых орбитах с использованием ДУ большой тяги. Эти исследования рассматривали маневры продолжительностью до трех витков для компланарных круговых орбит с различной угловой дальностью. В работе [66] была исследована классическая задача некомпланарной встречи средней продолжительности.

С 90-х годов электроракетные двигательные установки (ЭРДУ) начали использоваться в межорбитальных и межпланетных перелетах. Благодаря их высокому удельному импульсу стало возможным значительно сократить расход топлива, однако низкий уровень тяги этих двигателей потребовал увеличения продолжительности маневров. В результате была создана методика расчета траекторий КА с использованием ЭРДУ для выполнения многовитковых маневров [7, 8, 67]. Оптимизация таких маневров остается сложной задачей, особенно при большом числе витков, что требуется создания высокоточных алгоритмов.

Начиная с 2000-х годов до настоящего времени, наиболее распространенным применением двигателей малой тяги стали перелеты на околоземных орбитах. Как правило, двигатели малой тяги используются для коррекции положения спутников и вывода их на заданные орбиты. Хотя перелеты на околоземных орбитах являются наиболее распространенными, они также обычно оказываются наиболее сложными для оптимизации в реалистичных сценариях. Многочисленные витки орбиты, характерные для таких перелетов, порождают большое количество переменных для оптимизации, что приводит к значительному увеличению размера задачи и усложняет ее решение. В научной литературе ускорение тяги обычно поддерживается на достаточно высоком уровне, чтобы сократить количество витков и, соответственно, уменьшить размер задачи.

Задача оптимизации траектории КА может быть описана как поиск траектории, которая удовлетворяет определенным критериям, включая начальные и конечные условия. В исследованиях [9–14, 67–69] получено широкое освещение задачи оптимизации траекторий КА. Первые подходы к таким задачам основывались на вариационном исчислении, включая принцип максимума Понтрягина (ПМП) [70], динамическое программирование [71]. Помимо них, значительный вклад в развитие методов решения задач данного класса внесли и другие исследователи, включая работы [15, 72]. Однако для сложных задач, таких как нелинейные системы с ограничениями, применяются численные методы, которые стали возможны только с развитием вычислительных технологий. В последние десятилетия наблюдается прогресс в разработке методов расчета маневров КА, минимизирующих расходов топлива или характеристической скорости. Новый подход заключается в использовании простых алгоритмов, которые способны с большей вероятностью находить глобальные минимумы, чем традиционные оптимизаторы.

Вероятно, первой значимой попыткой систематизировать методы оптимизации траектории КА стала работа [171], опубликованная в 1998 году. В этой работе была предложена основная классификация, которая выделяла два ключевых подхода — прямые и непрямые методы. Кроме того, основные техники, связанные с этими методами, были обобщены и представлены в рамках данной классификации. В 2012 году автор работы [172] внес другой значительный вклад в численные подходы, применяемые в динамических системах. Автор этой работы также представил замечательный обзор различных методов, аналогичный обзору, приведенному в работе [171], сопровождая его практическими примерами. Однако динамические системы, рассмотренные в его обзоре, являются в общем виде. Были сделаны и другие попытки, но ограниченные конкретными КМ, такими как стыковка КА [152] и др. В них представлены различные классификации задач, связанных с оптимизацией траекторий КА. В зависимости от целей классификации, каждый метод или подход обладает своими преимуществами, но также имеет и определенные ограничения [166].

За последние годы наблюдается значительное развитие методов, направленных на определение оптимальных траекторий КА для выполнения различных миссий. В рамках этого прогресса этапы проектирования траектории классифицируются на основе ключевых элементов, которые играют важную роль в решении задач оптимизации, таких как математическая модель, цели, подходы, а также, что особенно важно, используемые методы, техники и алгоритмы.

В общем, существует два типа подходов: аналитические подходы и численные подходы. Аналитические подходы для оптимальной траектории приводят к аналитическим решениям. Их можно получить только в особых случаях, например, для подъема орбиты с очень малой тяги [22, 69, 87]. Однако, даже с учетом некоторых возмущений [95-102], результаты, полученные аналитическим методом, редко применимы к большинству задач оптимизации траектории МКА [155].

Большая часть исследований сосредоточена на численных методах решения задач оптимизации траектории КА [16, 75-80, 140-143, 155]. Эти подходы можно разделить на два известных метода, называемых прямыми и косвенными (или непрямыми) методами [20, 21, 25, 72, 83, 84, 155]. С помощью прямых методов решение находится приближенным образом на основе концепции параметризации переменных состояния и управлений. Концепция параметризации обычно включает в себя дискретизацию, которая касается процесса транскрипции задачи для перевода непрерывных функций, моделей и уравнений в дискретные аналоги. После того, задача оптимального управления преобразуется в задачу нелинейного программирования [73, 74]. Конечно, такие методы позволяют найти потенциальное решение, но не дают никаких гарантий относительно его оптимальности [155]. Эта задача может решаться методами последовательного квадратичного программирования, дифференциального динамического программирования и другими.

Еще одна обширная группа прямых методов, разработанная на основе различных модификаций градиентного метода [17, 18, 81, 82]. Прямые методы отличаются высокой чувствительностью к выбору начального приближения (НП), что является очевидной проблемой. Вместе с тем они предоставляют возможность относительно легко вводить в математическую модель движения ограничения на управление и фазовые координаты. Кроме того, эти методы позволяют модифицировать саму модель движения, добавляя в нее дополнительные возмущающие ускорения.

В работах [145, 146] с использованием прямых методов оптимизации был выполнен один из первых анализов переходов на околоземные орбиты с применением ДУ малой тяги. Авторами была поставлена задача решения идеального перехода с использованием двух и трех импульсов тяги, при этом маневры выполнялись за один и два витка орбиты соответственно.

Напротив, косвенные методы используют те же приемы и концепции, что и прямой метод, но имеют особенность наличия необходимых аналитических условий оптимальности. Это позволяет перенести задачу оптимизации на определение некоторых параметров, известных как множители Лагранжа, которые должны удовлетворять условиям оптимальности в начале и в конце процесса. Эти переменные часто определяются как сопутствующие, поскольку они развиваются вместе с вектором состояния. Другими словами, основное различие между прямыми и косвенными методами заключается в использовании сопутствующих переменных. Основная проблема, связанная с косвенными методами, заключается в невозможности узнать начальное приближение, позволяющее выполнить граничные условия. Область поиска в таких методах, которая основана на ПМП [19, 155], еще более усложняется тем фактом, что каждый множитель Лагранжа изменяется в неограниченном множестве [155].

Связь между этими двумя методами была проблемой и предметом интереса в научном сообществе. Длительная история, касающаяся связи этих методов, привела к недавнему прогрессу в оптимизации траекторий. Эта связь описана относительно принципа ковекторого отображения благодаря усилиям авторов работ [173]. Этот принцип описывает связь между множителями дискретизированных задач оптимизации и сопутствующими состояниями непрерывной задачи оптимального управления.

При использовании непрямых методов, задача сводится к решению нелинейной системы, как правило, методом стрельбы, реализуемым на основе алгоритма, аналогичного методу Ньютона. Такой подход обеспечивает высокую точность и быструю сходимость, однако требует тщательной начальной аппроксимации и высокой точности интегрирования. Для уменьшения чувствительности к начальному приближению применяется разбиение траектории на участки, соединенные интерфейсными ограничениями, что приводит к решению более крупной нелинейной системы. При этом учет ограничений на состояние системы, а также на сингулярные решения требует дополнительного теоретического анализа. Методы штрафов могут быть использованы для обработки таких ограничений, однако это может привести к менее оптимальным решениям.

В работах [147, 148] были найдены оптимальные траектории для более крупных задач оптимизации с различными уровнями ускорения тяги, где самый низкий уровень ускорения позволял выполнить переход на орбиту с восемью витками. В обоих исследованиях использовался метод коллокации.

Ввиду, что данные решения задачи оптимального управления, полученные с использованием ПМП, обеспечивают необходимое условие, однако управление, утверждающее этому принципу, не всегда является оптимальным - его правильнее называть экстремальным. Следовательно, оптимальное управление является экстремальным управлением, однако обратное неверно. Если оптимальное управление существует, то оно принадлежит множеству экстремальных управлений. Существуют достаточные условия, обеспечивающие оптимальность управления, но их трудно применить. Поэтому для некоторых специальных классов задач ПМП является необходимым и достаточным условием.

После использования ПМП задача оптимального управления преобразуется в краевую задачу (КЗ) для системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами граничными условиями. Для решения этой КЗ необходимо найти начальное приближение вектора сопряженных переменных, гарантирующее соответствие заданным конечным условиям. Очевидно, можно решить полученную систему аналитически и численно. Но есть частные случаи, когда необходимо учитывать дополнительный вектор, «называемый вектором инициатора или базис-вектором Лоудена». Поэтому в силу физической важности для задачи направление тяги выбирается таким, чтобы было идеальным [106]. Важно отметить, легко показать, что если гамильтониан не зависит явно от времени, то является константой на оптимальной траектории. Этот результат не обязательно полезен для получения оптимального управления, но может быть очень полезен для апостериорного определения точности численного решения двухточечной краевой задачи (ДКЗ), то есть хорошее решение будет иметь один и тот же гамильтониан с точностью до нескольких значащих цифр, при оценке в любой точке численного решения, такие подходы представлены в [117, 118].

Следует отметить, что траектории, соответствующие необходимым условиям, могут представлять как минимум, так и максимум функции целевого функционала. Однако в задачах проектирования космических траекторий обычно не существует ограничений на максимальный расход топлива, кроме полного израсходования его запаса, что позволяет утверждать, что решение представляет собой локальный минимум. Хотя базис-вектора (Prime vector) может быть определен и имеет значение для оптимального направления тяги, это справедливо только для оптимальной траектории. Улучшение известной неоптимальной траектории с помощью теории базис-вектора впервые обсуждалось в работах [38, 119] где показали, при каких условиях оптимальную траекторию N-импульса можно улучшить за счет добавления еще одного импульса, а также где и в каком направлении его применять.

Для ряда частных случаев задачи, таких как движение КА на орбитах с малой тягой, возможно получение аналитических или приближенных решений. Примеры таких подходов приведены в [120]. При этом допускаются упрощения, такие как предположение о тангенциальном направлении тяги или использовании круговых орбит, что в ряде случаев позволяет найти даже точные решения, несмотря на возмущения от несферической формы Земли [121].

В работе [149] авторы нашли оптимальную траекторию с постоянной малой тягой для минимального времени перехода с низкой околоземной орбиты (НОО) на геостационарную орбиту (ГСО) при начальном уровне ускорения тяги 32×10^{-4} Н/кг. Эта траектория включала 100.6 витков, что привело к значительной сложности задачи оптимизации. Для учета большого числа переменных авторы применили метод множества стрельбы. Также была исследована задача подъема орбиты с геостационарной орбиты до траектории ухода с начальным ускорением тяги 48.5×10^{-6} Н/кг. В этом случае время перехода составило 133.7 дня и включало 100.8 витков.

Численные методы, используемые для решения ДКЗ, включают метод стрельбы [122], методы конечных разностей [123, 124] и методы коллокации [125, 117]. Одной из основных сложностей применения непрямых методов является необходимость точного задания начальных приближений сопряженных переменных, которые не имеют физической интерпретации. Кроме того, решения крайне чувствительны к небольшим изменениям начальных условий, что может приводить к численным нестабильностям и сложностям в интегрировании [72]. Для преодоления этих трудностей разработаны дополнительные методы, такие как статическо-динамическое управление, представленные в [80, 127] и основанные на принципе оптимальности в [71]. Этот метод обеспечивает решение задач оптимального управления даже при большом числе переменных состояния и управления, но требует аналитического системы дифференциальных уравнений для обеспечения выполнения необходимых условий первого порядка.

Некоторым исследователям свойственно характеризовать непрямые методы как их способность давать результаты с «хорошей точностью» [71, 122-124], что связано с тем, что решение задачи основано на соблюдении условий непрямой оптимальности. Это происходит даже в ситуациях, когда задача оптимального управления предполагает большое количество состояний и управлений. Одна из основных трудностей применения этого метода связана с необходимостью получения аналитических производных в каждом случае задачи для оценки необходимых условий первого порядка. Эти уравнения может быть трудно получить, особенно при работе с системой высокого порядка, даже при наличии вычислительных инструментов, работающих с символической алгеброй.

В [126] представлены численные соображения, которые также затрудняют использование этих методов, например, необходимость хорошей начальной оценки вектора параллельного состояния для сходимости алгоритмов, которую трудно получить, поскольку эти значения не всегда имеют четкий физический смысл, относительно проблемы. Даже при разумной инициализации дополнительных переменных численное решение может быть плохо обусловлено. Основная трудность с этими методами заключается в инициализации, то есть в нахождении первой оценки неуказанных условий на одном конце, которая дает разумно закрытое решение для заданного условия на другом конце. Причина этой специфической трудности заключается в том, что экстремальные решения часто очень чувствительны к небольшим изменениям неопределенных граничных условий. Поскольку уравнения динамической системы и уравнения Эйлера-Лагранжа связаны, численное интегрирование с плохими начальными координатами нередко приводит к странным траекториям в пространстве состояний, такой подход показан в [72].

Основная сложность при использовании этих методов заключается в процессе инициализации, то есть в определении первой оценки неизвестных граничных условий на одном из концов, которая обеспечит адекватное решение для заданных условий на другом конце. Эта трудность обусловлена высокой чувствительностью экстремальных решений к малейшим изменениям неопределенных граничных условий. Поскольку уравнения динамической системы тесно связаны с уравнениями Эйлера-Лагранжа, некорректный выбор начальных условий при численном интегрировании часто приводит к появлению аномальных траекторий в пространстве состояний, как показано в [72].

В [147] была оптимизирована земная орбита с постоянной низкой тягой для низких уровней тяги (12.5×10^{-5} Н/кг), что потребовало выполнения более 578 витков. Эта задача оптимизации оказалась чрезвычайно крупной, требуя 416.123 переменных и 249.674 ограничений. Более недавно в [150] использовали метод коллокации высокого порядка для решения задач траекторий с низкой тягой на земной орбите. Были рассмотрены различные минимальные топливные переходы: с НОО на ГСО, с НОО на среднюю околоземную орбиту и с НОО на высокую околоземную орбиту при начальном ускорении тяги в диапазоне от 10 Н/кг до 10^{-2} Н/кг.

Все вышеуказанные методы [145-151] имеют недостаток, состоящий в том, что они становятся все более сложными для решения с уменьшением уровня тяги. Чтобы учесть очень низкую тягу и большое количество витков, в [151] разработали метод получения почти оптимальных траекторий. Для уменьшения вычислительных затрат численного интегрирования уравнений движения они использовали усреднение орбиты, а также оптимальную комбинацию трех параметризованных экстремальных законов обратной связи (по БПО, эксцентриситету и наклонению). Они получили минимальные временные переходы для уровней ускорения тяги около 29×10^{-5} Н/кг.

В рамках прямых и непрямых методов, иногда динамическое программирование также рассматривается как третий вариант численных методов, в которой критерии оптимальности в непрерывном времени основаны на частном дифференциальном уравнении Гамильтона-Якоби-Беллмана [71]. Однако большинство исследований в литературе рассматривают только прямые и косвенные методы как единственные варианты численных подходов [155, 171].

Помимо вышеуказанных методов, другой численный метод представляет собой метод продолжения по параметру (также называемый гомотопический метод). Концепция использования продолжения решения, лежащая в основе метода возмущений, была впервые рассмотрена в XIX веке. Однако только спустя столетие возникли сложные проблемы, для которых не хватало ряда мощных электронных компьютеров, которые могли бы помочь в получении различных численных решений. В результате появилось несколько подходов к этому методу и его вариантам, представленным в [10, 11, 46, 49, 56, 68, 92, 94], в том числе и те, которые используются для решения задач оптимизации траектории космических аппаратов, как указано в [8, 51, 52, 67, 70, 128-130].

Главная идея метода продолжения заключается в пошаговом решении сложной задачи, начиная с упрощенной версии, путем постепенной деформации параметра. Теория и практика методов продолжения широко применены в работах [12, 21, 67]. В сочетании с задачей стрельбы, полученной на основе ПМП, метод продолжения позволяет сначала упростить задачу до решаемой формы, а затем пошагово решить серию задач стрельбы, возвращаясь к исходной задаче. Иными словами, метод продолжения по параметру помогает решить КЗ, полученную с использованием ПМП.

В то же время, сложность метода продолжения по параметру (ПП) заключается в выборе НП, которое должно быть «близким» к оптимальному или, по крайней мере, допустимому решению. Однако разработка качественного НП может быть столь же сложной задачей, как и сама оптимизация. Как правило, для нахождения удачного НП необходимо сделать определенные предположения о структуре решения. Поскольку некоторые задачи имеют множество локальных минимумов, конечный результат зачастую определяется исходным выбором НП.

На данный момент существует множество подходов к обеспечению сходимости метода ПП, которое можно легко найти в литературных источниках. В этой работе будет применен один из этих подходов, который представляет собой использование сглаживания релейной функции тяги в форме, предложенной в [67, 85, 86].

К настоящему времени, благодаря усилиям многих ученых, разработано несколько основных подходов к решению сложных многоимпульсных задач маневрирования КА, подробно описанных в работах [22-41, 66, 89-91]. Для упрощения решения подобных задачи, уравнения движения, в первую очередь, подразделяются на две части: в плоскости опорной орбиты (x-y) и по нормали к плоскости опорной орбиты (вдоль оси z). Это объясняется тем, что в системе уравнений движения космического аппарата существуют две подсистемы, которые не взаимосвязаны между собой. Затем применяются аналитические, численно-аналитические и численные методы, для нахождения оптимальных решений практических задач с учетом некоторых ограничений.

Многоимпульсные задачи встречи КА занимают особое место в области оптимального управления. Им посвящено значительное количество научных статей, а также были опубликованы несколько работ [42, 43], особо стоит выделить достижения авторов [44, 47, 48, 92], которые внесли существенный вклад в развитие данной области.

Учитывая сложность задач, связанных с выполнением маневров с использованием двигателей МТ, их решение чаще всего применяются численные методы, среди которых можно выделить ПМП и метод ПП. На сегоднящий день метод внутренней точки, предложенный в [45], становится все более популярным для задач с большим числом маневров [45].

Кроме задач, связанных с многоимпульсными встречами, в данной работе также будет уделено внимание многовитковым задачам встречи, которые имеют свои особенности и сложности. Эти задачи представляют собой важный аспект, требующий детального анализа и разработки эффективных методов для решения, что позволит значительно улучшить точность и эффективность маневров МКА, оснащенных двигателями МТ.

Данная работа направлена на разработку методов расчета маневров МКА, оснащенного двигателями МТ. Предложенные аналитические, числено-аналитические и численные методы позволяют определять параметры маневров, осуществляемых в течение нескольких орбитальных витков с использованием таких двигателей. Основной задачей этих маневров является обеспечение перемещения активного КА в заданную область, близкую к целевому объекту. Разработанные методы отличаются простотой и высокой степенью надежности, что делает их пригодными для использования непосредственно на борту аппарата. Для повышения точности расчета параметров маневров предусмотрена итерационная процедура, позволяющая учитывать различные возмущения.

Таким образом, основное внимание этой работы уделено последовательному использованию аналитических, численных и численно-аналитических методов для решения различных задач, связанных с механикой полета КА, оснащенных двигателями МТ. Рассматриваются задачи оптимизации траекторий КА с ДУ ограниченной мощности и ограниченной тяги с постоянной скоростью истечения. В результате исследования был разработан комплекс аналитических, численных и численно-аналитических методов, которые обеспечивают решение разнообразных задач по оптимизации маневров КА с ЭРДУ (в частности МКА), обеспечивая улучшенные характеристики по сходимости, затратам топлива и скорости.

Вместе с тем, **актуальность настоящей работы** обусловлена следующими основными аспектами:

- расширением использования ЭРДУ в современных и перспективных космических проектах;
- необходимостью дальнейшей разработки механики КА вблизи круговых орбит;
- созданием более совершенных динамических моделей, учитывающих сложные взаимодействия между МКА и орбитальной средой, принимая во внимание гравитационные возмущения, аэродинамические силы и другие соответствующие явления;
- внедрением новых технологий, таких как искусственный интеллект и машинное обучение, для улучшения алгоритмов оптимизации траектории и принятия решений, что приведет к созданию более автономных и адаптивных систем;
- реалистичным моделированием для проверки полученных результатов с учетом различных сценариев эксплуатации и изменчивости окружающей среды, обеспечивая надежность и практическую применимость предлагаемых решений;
- разработкой методов и алгоритмов для оптимизации и проектирования траекторий МКА с ЭРДУ, предназначенных для применения в полетах реальных МКА;
- разработкой алгоритмов, направленных на повышение эффективности решения задач, упрощение вычисления параметров маневров и увеличение их надежности;
- углублением исследований и развитием методов оптимизации маневров КА с использованием ЭРДУ для решения задач, связанных с устранением космического мусора;
- резким увеличение числа маневрирующих МКА в космосе делает необходимым расчет их маневров непосредственно на борту МКА.

Целью данной диссертационной работы является разработка методов и алгоритмов расчета параметров маневров малого космического аппарата, оснащенного двигателями малой тяги.

Чтобы достичь рассматриваемую цель необходимо решить следующие задачи:

1.Разработка математических моделей контролируемого относительного движения МКА, основанных на уравнениях HCW и П.Е. Эльясберга;

2.Разработка математических моделей оптимального движения МКА с двигателями МТ;

3. Изучение существующих методов расчета маневров МКА с двигателями малой тяги и оценка их эффективности и точности;

4. Формулировка математической постановки задачи расчета параметров маневров МКА, оснащенного двигателями МТ;

5. Разработка варианта метода ПП для решения задачи оптимизации траектории МКА с идеально-регулируемым двигателем ограниченной мощности (ИРОМ-двигатель), при наличии ограничений на ориентацию двигателей МТ;

6. Разработка варианта метода ПП для решения задачи оптимизации траектории МКА с помощью двигателей ограниченной тяги с постоянной скоростью истечения (ОТСИ-двигателя), с учетом ограничения на ориентацию двигателей МТ;

7. Разработка численно-аналитических методов для решения задачи оптимального маневрирования МКА, оснащенного двигателями МТ;

8. Разработка численно-аналитических алгоритмов решения импульсной компланарной и некомпланарной задачи встречи МКА;

9. Разработка численно-аналитических алгоритмов решения компланарной и некомпланарной задачи встречи МКА, оснащенного двигателями МТ.

Учитывая, что разработка аналитических, численных и численно-аналитических методов позволяет решать широкий круг задач, включая переходы и встречи вблизи околокруговых орбит, становится очевидным, что результаты таких решений должны быть максимально упрощены и приближены к оптимальным значениям.

Использование геометрической интерпретации решений, полученных численно-аналитическими методами, открывает возможность определения областей, в которых находятся оптимальные траектории и параметры маневров для различных задач.

Метод проведения исследования - для решения задачи оптимизации маневров МКА, оснащенного двигателями малой тяги, применяется ПМП. Принцип максимума Понтрягина редуцирует задачу оптимального управления с двигателями малой тяги к КЗ. С использованием метода ПП на основе ньютоновской гомотопии, данная КЗ преобразуется задачу Коши, решение которой может быть получено аналитически или численным интегрированием системы Обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Для нахождения решений этой системы применяются методы теории линейных дифференциальных уравнений. Для решения задачи расчета параметров оптимальных маневров МКА (на компланарных или некомпланарных орбитах) используются аналитические и численно-аналитические методы. Кроме того, используются также теория космического полета, прикладные методы космической баллистики, методы математического моделирования и методы численного интегрирования системы ОДУ.

Объектом исследования являются оптимальные маневры малых космических аппаратов, оснащенных двигателями малой тяги.

Предметом исследования являются математические модели расчета параметров оптимальных маневров перехода и встречи вблизи круговой орбиты выполняемых МКА, оснащенными двигателями МТ.

Научная новизна работы состоит в следующем:

– получено новое аналитическое решение задачи оптимизации траектории КА с ИРОМ-двигателем, с учетом ограничений на ориентацию двигателей МТ;

– получено новое численное решение задачи оптимизации траектории КА с ИРОМ-двигателем, при наличии ограничений на ориентацию ДУ малой тяги для проверки полученного аналитического решения ОМ-задачи;

– получено новое численное задачи оптимизации траектории КА, оснащенного ОТСИ-двигателем, при наличии ограничений на ориентацию ДУ малой тяги;

– разработан алгоритм решения компланарной и некомпланарной задачи встречи КА при импульсной модели маневров;

– разработан алгоритм решения компланарной и некомпланарной задачи встречи КА, оснащенного двигателями МТ;

– разработан алгоритм решения компланарной и некомпланарной задачи встречи КА при фиксировании части маневров;

Практическая значимость полученных результатов определяется:

• возможностью использования полученных аналитических решений для проектно-баллистического анализа перспективных КМ, формирования алгоритмов управления относительным движением КА, в качестве начального приближения для решения задач оптимизации траекторий КА с двигателями ограниченной тяги;

• необходимостью применения канальных систем управления для решения задач, обусловленных ограниченными возможностями системы управления, требованиями к обеспечению радиосвязи или взаимной видимости сближающихся КА, а также по другим причинам;

• сокращением значительного времени, требующегося для выполнения сложных маневров, что позволит ускорить выполнение масштабных расчетов на этапе концептуального проектирования новых КА благодаря внедрению современных вычислительных методов;

• обеспечением высокой устойчивости при решении задач и достижение требуемой точности при формировании заданных орбит. Этот аспект имеет ключевое значение для баллистического сопровождения реальных миссий КА, основывающегося на современных математических и вычислительных основах;

• на борту таких КА могут быть внедрены специализированные алгоритмы управления движением и маневрами, основанные на предложенных численно-аналитических решениях, что позволит проводить адаптивную корректировку орбиты в реальном времени, что особенно важно для долгосрочных миссий с меняющимися целями или условиями эксплуатации, таких как спутники дистанционного зондирования, навигационные системы и спутниковые группы.

Теоретическая значимость работы состоит в том, что метод продолжения по параметру для решения задачи оптимизации траектории МКА с идеально-регулируемым двигателем ограниченной мощности распространен на случай наличия ограничений на ориентацию ДУ МТ. При этом предложен принципиально новый подход к распределению маневрирования между разрешенными для маневрирования витками, позволяющий получить оптимальное решение как в случае, когда маневры выполняются двигателями большой тяги, так и в случае работы двигателей малой тяги.

Достоверность полученных результатов работы подтверждена следующими факторами:

– численно-аналитическим моделированием, выполненным с применением различных математических моделей движения, что дает возможность комплексно оценить точность и стабильность решения при изменении исходных данных и параметров;

– сравнением с другими методами и результатами, представленными различными авторами. Полученные решения сравниваются с результатами, достигнутыми с использованием альтернативных методов, что позволяет подтвердить корректность подхода и его преимущества при решении аналогичных задач.

Апробация работы

Результаты работы докладывались на Международных и Всероссийских конференциях и опубликованы в материалах конференций, а также докладывались на научных семинарах в РУДН, в Международном научном обзоре проблем технических наук, математики и информатики, на научных конференциях «принципы построения новой экосистемы: поликультурное пространство», «IAA/AAS SciTech on Space Flight Mechanics and Space Structures and Materials: Advances in the Astronautical Sciences Series» и др.

На защиту выносятся:

1) аналитическое решение задачи оптимизации траектории КА с ИРОМ-двигателем и ограничением на ориентацию вектора реактивного ускорения;

2) вариант численного метода ПП решения задачи оптимизации траектории КА с ОТСИ-двигателем, с учетом ограничения на ориентацию вектора реактивного ускорения;

3) численно-аналитический метод решения компланарной и некомпланарной задачи встречи КА при импульсном моделировании маневров;

4) численно-аналитический метод решения компланарной и некомпланарной задачи встречи КА, оснащенного двигателем малой тяги;

5) численно-аналитический метод решения компланарной и некомпланарной задачи встречи КА при фиксировании части импульсов скорости.

Во введении обосновывается актуальность исследования, определяются цель работы, подчеркивается научная новизна и практическая значимость достигнутых результатов. Кроме того, приводится краткая характеристика структуры исследования.

В первой главе представятся математические модели, описывающие движение КА вблизи круговой орбиты, а также вывод и решение линеаризованной системы уравнений HCW. Проводится сравнение аналитических и численных решений данной системы уравнений. Вводятся линеаризованные уравнения, предложенные П.Е. Эльясбергом, с подробным выводом и их решением. Рассматриваются задачи оптимального управления относительным движением КА вблизи круговой орбиты с учетом использования двигателя с ограниченной мощностью и ограниченной тяги. Рассматриваются два случая: при наличие всех составляющих вектора реактивного ускорения (трехканальное управление) и без радиального составляющего реактивного ускорения (двухканальное управление) для двух моделей движения. Вводится постановка задачи минимизации функционала для обеих задач.

Во второй главе рассматриваются различные методы решения КЗ оптимального управления. Приводятся различные методы: аналитические, численные и численно-аналитические для решения задачи оптимизации траекторий КА с малой тягой.

Применяется ПМП, чтобы свести задачу оптимального управления к КЗ для системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами граничными условиями. Вводятся аналитический метод решения ОМ-задачи и численный метод ПП на основе Ньютоновской гомотопии между искомой системой нелинейных уравнений и системой нелинейных уравнений с заранее известным решением. Этот метод преобразует КЗ для рассматриваемой системы ОДУ задачу Коши, при этом необходимо интегрировать вложенные системы ОДУ.

В третьей главе приводятся постановка задачи перехода и встречи КА, алгоритмы решения задачи перехода между компланарными орбитами и импульсной задачи встречи КА, алгоритмы решения задачи с малой тягой. Алгоритмы расчета параметров маневров КА позволяют получить практически оптимальное решение задачи встречи, если начальная фаза находится в пределах оптимального фазового диапазона, а суммарная характеристическая скорость (СХС) решения задачи встречи совпадает с СХС оптимального решения задачи перехода. Это также верно в случае, когда маневры выполняются с использованием двигателей малой тяги. Приводится алгоритм решения задачи встречи при фиксировании части маневров, который позволяет сократить продолжительность импульсов, ограничивая их величину до такого уровня, при котором они еще максимально изменяют величину эксцентриситета (на 180 градусов). Представляется итерационная процедура, чтобы решить задачи встречи с учетом реальной точности выполнения конкретных терминальных условий).

В четвертой главе приводятся алгоритмы решения задачи перехода между некомпланарными орбитами, задачи встречи КА на некомпланарных орбитах и импульсной некомпланарной задачи встречи КА. Применяется универсальный метод, чтобы решить задачу переходов. Вводится алгоритм расчета параметров маневров КА, который эффективно позволял получать оптимальные решения задачи встречи в двух случаях: когда начальная фаза находится в оптимальном фазовом диапазоне, а СХС решения задачи встречи совпадает с СХС оптимального решения задачи перехода, и когда маневры выполняются двигателями малой тяги. Задача встречи КА на некомпланарных орбитах решается с использованием итерационной процедуры. Также представлен алгоритм для решения задачи встречи на некомпланарных орбитах при фиксировании части маневров, когда из-за очень малой тяги приходится последовательно ограничивать несколько маневров.

В пятой главе описываются современные тенденции к оптимизации траектории КА с двигателем малой тяги. Приводятся решения задачи оптимизации траектории КА, оснащенного двигателями малой тяги. Вводятся две задачи оптимизации траектории КА: одна - для аппарата с ИР-двигателем ограниченной мощности, а другая - для аппарата с двигателем, ограниченным по тяге, но с постоянной скоростью истечения. В случае с двигателем МТ важно учитывать возможность его выключения (когда тяга равна нулю) или включения с ограничениями на максимальную тягу. Также рассматриваются различные способы управления, в том числе трехканальное и двухканальное управления, с учетом ограничений на ориентацию вектора тяги. Формулируются уравнения оптимального движения и стандартные краевые условия для задач оптимизации траекторий КА с ЭРДУ. Для численного решения применяется метод непрерывного продолжения по параметру на основе Ньютоновской гомотопии с нулевым НП для неизвестных начальных значений сопряженных переменных. Этот метод позволяет преобразовать КЗ для системы ОДУ в задачу Коши, что требует интеграции вложенных систем ОДУ.

В шестой главе рассматриваются численные примеры решения различных задач. Для численного решения задачи оптимизации траектории с ИР-двигателем ограниченной мощности и задача оптимизации траектории с двигателем ограниченной скорости истечения используется метод непрерывного продолжения по параметру, основанный на ньютоновской гомотопии после применения ПМП. Приводятся примеры решения задач переходов между орбитами и встречи КА с применением универсального численно-аналитического метода и итерационной процедуры.

ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ В ОКРЕСТНОСТИ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ

1.1. Математическая модель движения КА в окрестности круговой орбиты

Предположим, что движение КА происходит в центральном гравитационном поле, у которого КА имеет круговую скорость на расстоянии l_0 от центра Земли и рассчитывается через формулу:

$$V_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{\mu}{l_0}}, \tag{1.1}$$

где μ – коэффициент, равный произведению гравитационной постоянной на массу притягивающего тела (для Земли $\mu_{з} = \gamma\text{M} \approx 3{,}98600436.\,10^{14}\text{м}^3/\text{с}^2$, $R_{з} \approx 6371$ км – радиус Земли), l_0 – радиус круговой орбиты.

Помимо моделей для типичных задач двух тел, общие уравнения движения могут быть переформулированы и представлены в новых формах, касающихся конкретных КМ. Одной из сложных задач, часто рассматриваемых в литературе, является задача сближения в космосе. Наиболее используемой моделью для этой миссии является система уравнений HCW [93, 94], которые широко применяются для исследования задач относительного движения КА. Эти уравнения были разработаны в 1878 году и широко использованы для моделирования операций сближения и стыковки [103].

1.1.1. Уравнения относительного движения КА «Модель HCW»

При условии небольшого расстояния между преследователем и целью линейные уравнения их относительного движения могут быть описаны следующим образом [174]:

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_x - 2nV_y - 3n^2x \\ \dot{V}_y + 2nV_x \\ \dot{V}_z + n^2 z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{pmatrix} \tag{1.1.2}$$

где x, y, z – координаты КА; V_x, V_y, V_z – составляющие вектора скорости КА; $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ – составляющие вектора реактивного ускорения и n обозначает среднее движение КА-цели.

Эти уравнения могут быть использованы для изучения сил, необходимых для выполнения стыковки орбит, отклонений от эталонной траектории, вызванных маневрами или другими изменениями скорости, а также для анализа воздействия возмущений на отклонения от эталонной траектории. Эти дифференциальные уравнения второго порядка справедливы для малых отклонений (несколько десятков километров в радиальном и перпендикулярном направлениях), но остаются корректными для изменений порядка величины (сотни километров) в координате по траектории. Множество уравнений HCW выведено из предположений, что оба КА движутся по соседним круговым орбитам в задаче двух тел, а их относительное расстояние значительно меньше их геоцентрического расстояния. Также применяется приближение первого порядка, что позволяет игнорировать члены второго и высших порядков относительно позиций и скоростей. Это требует дополнительной доработки для более точного описания относительных траекторий, не удовлетворяющих этим предположениям, как описано в [152].

1.1.2. Решение уравнения относительного движения КА

Предполагая малое расстояние между преследователем и целью, были получены решения HCW для случая постоянного реактивного ускорения в следующей форме:

$$x(t) = (4 - 3\cos\tau)x_0 + \frac{V_{x0}}{n}\sin\tau + \frac{2V_{y0}}{n}(1-\cos\tau) + \frac{\gamma_x}{n^2}(1-\cos\tau) \quad + \frac{2\gamma_y}{n^2}(\tau - \sin\tau),$$

$$y(t) = 6(\sin\tau - \tau)x_0 + y_0 + \frac{2V_{x0}}{n}(\cos\tau - 1) + \frac{V_{y0}}{n}(4\sin\tau - 3\tau) \ + \frac{2\gamma_x}{n^2}(\sin\tau - \tau)$$
$$+ \gamma_y\left[\frac{4}{n^2}\left(1 - \cos\tau - \frac{3}{2}\tau^2\right)\right],$$

$$z(t) = z_0\cos\tau + \frac{V_{z0}}{n}\sin t + \frac{\gamma_z}{n^2}(1-\cos\tau), \tag{1.1.3}$$

а выражения для компонент скорости имеют вид:

$$V_x(t) = 3nx_0\sin\tau + V_{x0}\cos\tau + 2V_{y0}\sin\tau + \gamma_x\sin\tau + \frac{2\gamma_y}{n}(1-\cos\tau),$$

$$V_y(t) = 6(\cos\tau - 1)nx_0 - 2V_{x0}\sin\tau + (4\cos\tau - 3)V_{y0} + \frac{2\gamma_x}{n}(\cos\tau - 1)$$
$$+ \frac{\gamma_y}{n}[4\sin\tau - 3\tau],$$

$$V_z(t) = -z_0 n\sin\tau + V_{z0}\cos\tau + \frac{\gamma_z}{n}\sin\tau. \tag{1.1.4}$$

где $x_0, y_0, z_0, V_{x0}, V_{y0}$ и V_{z0} – начальные координаты и начальные составляющие скорости КА в некоторый $t = 0$, а $\tau = nt$ – безразмерная переменная по времени.

Хотя уравнения HCW широко используется благодаря своей простоте и популярности, они имеют ряд значительных ограничений:

1. Одно из основных предположений уравнений HCW состоит в том, что главной

КА движется по строго круговой орбите. Однако большинство реальных орбит, особенно на низких околоземных высотах, являются эллиптическими. Это приводит к погрешностям в расчетах, особенно для длительных интервалов времени и значительных относительных отклонений.

2. Уравнения HCW основаны на линеаризации уравнений движения вокруг номинальной круговой орбиты. Это означает, что точность решений уравнений HCW существенно снижается, когда отклонения от этой номинальной траектории становятся большими. При больших относительных перемещениях, маневрах с большой тягой или длительных маневрах ошибки могут накапливаться, и линеаризованные уравнения перестают адекватно описывать поведение системы.

3. Уравнения HCW работают хорошо только для коротких временных интервалов. Поскольку они линеаризованы вокруг круговой орбиты, они теряют точность при длительных расчетах. Чем дольше рассчитывается траектория относительного движения, тем сильнее становятся ошибки, вызванные линеаризацией и предположениями об идеальной круговой орбите.

4. Уравнения HCW не учитывают внешние возмущающие факторы, такие как: гравитационные возмущения от других небесных тел, отклонения в гравитационном поле Земли (например, возмущения J2), давление солнечной радиации, а также аэродинамическое сопротивление, которое существенно проявляется на низких орбитах. Эти возмущения могут оказывать значительное влияние на движение КА, особенно при длительных маневрах или движении на орбитах с низкой высотой.

5. Уравнения HCW предполагают, что маневры с использованием двигателей малой тяги происходят относительно медленно и плавно. Они не подходят для резких или мощных маневров, когда необходимо учитывать значительные изменения в относительной скорости и положении. Для таких ситуаций требуется использовать более точные нелинейные модели относительного движения.

6. Гравитационное поле Земли не является идеальной центральной силой, особенно на низких орбитах, где сказываются эффекты сжатия Земли (возмущение J2). Уравнения HCW игнорируют эту нелинейность, что приводит к увеличению ошибок при моделировании долгосрочных маневров или полетов на низких орбитах.

7. Уравнения HCW не подходят для задач, где КА должен выполнять маневры на сложных, нестандартных орбитах (например, гиперболические, эллиптические с

больши́м эксцентриситетом) или для межпланетных миссий, где круговая орбита – не лучший ориентир для относительных движений.

1.2. Вывод уравнений движения КА в цилиндрической системе координат «Линеаризованные уравнения Эльясберга»

П.Э. Эльясбергом в [46] предложен метод линеаризации уравнений движения КА для задач с управляемыми маневрами КА в цилиндрической системе координат. Основной целью линеаризации является упростить нелинейные уравнения, чтобы получить более удобные для решения аналитические или численные методы. Линеаризация эффективна при малых отклонениях от исходной траектории, что типично для задач малых маневров или коррекций орбит.

Для каждой из задач с малой тягой, решение задачи оптимизации требует учета ограничений, связанных с энергетикой, временем полета и другими факторами. Из-за сложности задачи, прямое решение этих уравнений часто невозможно, поэтому вводится линейная аппроксимация. Линеаризация уравнения движения КА заключается в разложении этих уравнений в ряд Тейлора по малым отклонениям от номинальной траектории, что позволит сделать их решение более эффективным в задачах оптимального управления малой тягой.

Применение метода линеаризации Эльясберга, представленное в [46] используется для решения широкого класса задач в области управления движением КА: расчет маневров для коррекции орбит спутников; управление траекторией КА с малым импульсом тяги; задачи сближения и стыковки в космосе и оптимизация перелета КА с малой тягой в межпланетных миссиях.

После линеаризации уравнения движения КА можно вырозить следующим образом [46]:

$$\begin{cases} \Delta\dot{V}_r = \gamma_{\text{x}} + 2n\Delta V_t + n^2\Delta r, \\ \Delta\dot{V}_t = \gamma_y - n\Delta V_r, \\ \Delta\dot{r} = \Delta V_r, \\ r_0\Delta\dot{u} = \Delta V_t - n\Delta r, \\ \dot{z} = V_z, \\ \dot{V}_z = \gamma_z - n^2 z. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Далее, чтобы было проще понять используются следующие новые обозначения:

$\Delta r \sim \mathrm{x}, r_0 \Delta u \sim y, \Delta V_r \sim V_\mathrm{x}, \Delta V_t \sim V_y$ и подставляя их в (1.2.1), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{x}} = V_\mathrm{x}, \\ \dot{\mathrm{y}} = V_y - n\mathrm{x}, \\ \dot{z} = V_z, \\ \dot{V}_\mathrm{x} = \gamma_\mathrm{x} + 2nV_y + n^2\mathrm{x}, \\ \dot{V}_\mathrm{y} = \gamma_y - nV_\mathrm{x}, \\ \dot{V}_\mathrm{y} = \gamma_z - n^2 z. \end{cases} \qquad (1.2.1)$$

Зависимость относительных координат и составляющих скорости от времени для случая постоянного реактивного ускорения примет следующим образом:

$$\mathrm{x}(t) = (2 - \cos\vartheta)\mathrm{x}_0 + \frac{V_{x0}}{n}\sin\vartheta + \frac{2V_{y0}}{n}(1 - \cos\vartheta) + \frac{\gamma_x}{n^2}(1 - \cos\vartheta) \quad + \frac{2\gamma_y}{n^2}(\vartheta - \sin\vartheta),$$
$$\mathrm{y}(t) = (2\sin\vartheta - 3\vartheta)\mathrm{x}_0 + y_0 + \frac{2V_{x0}}{n}(\cos\vartheta - 1) + \frac{V_{y0}}{n}(4\sin\vartheta - 3\vartheta) + \frac{2\gamma_x}{n^2}(\sin\vartheta - \vartheta)$$
$$+ \gamma_y\left[\frac{4}{n^2}(1 - \cos\vartheta) - \frac{3}{2}t^2\right],$$
$$z(t) = z_0\cos\vartheta + \frac{V_{z0}}{n}\sin\vartheta + \frac{\gamma_z}{n^2}(1 - \cos\vartheta),$$
$$V_x(t) = n\mathrm{x}_0\sin\vartheta + V_{x0}\cos\vartheta + 2V_{y0}\sin\vartheta + \frac{\gamma_x}{n}\sin\vartheta + \frac{2\gamma_y}{n}(1 - \cos\vartheta),$$
$$V_y(t) = n\mathrm{x}_0(\cos\vartheta - 1) - V_{x0}\sin\vartheta + V_{y0}(2\cos\vartheta - 1) + \frac{\gamma_x}{n}(\cos\vartheta - 1) + \frac{\gamma_y}{n}(2\sin\vartheta - \vartheta),$$
$$V_z(t) = -nz_0\sin\vartheta + V_{z0}\cos\vartheta + \frac{\gamma_z}{n}\sin\vartheta. \qquad (1.2.3)$$

где $\vartheta = nt$ – невозмущенное значение угла u.

Конечно, линеаризованные уравнения Эльясберга, применяемые для описания относительного движения КА, имеют несколько недостатков, которые могут ограничивать их применение в реальных задачах:

i. Поскольку линеаризация предполагает малые отклонения от номинальной траектории, при больших отклонениях точность приближений, основанных на линеаризации, значительно снижается. Это, в свою очередь, ограничивает применимость уравнений Эльясберга для задач, связанных с крупными маневрами или значительными возмущениями.

ii. Линеаризованные уравнения игнорируют нелинейные члены в исходных уравнениях движения. Однако в реальных КМ такие эффекты могут оказывать значительное влияние, особенно при длительных временных интервалах или при наличии значительных возмущающих сил (например, атмосферного сопротивления или гравитационных возмущений от других небесных тел).

iii. Уравнения Эльясберга эффективно применяются для моделирования относительного движения вблизи круговых орбит, особенно когда это движение происходит на малых расстояниях от центрального тела. Однако для более сложных орбит, таких как эллиптические или гиперболические и значительные изменения в относительном движении требуется более точная нелинейная модель.

iv. Линеаризованные уравнения не всегда корректно учитывают влияние внешних возмущающих факторов, таких как давление солнечного излучения, неоднородности гравитационного поля Земли или эффекты от воздействия других космических тел. Для высокоточных задач требуется либо дополнение этих уравнений, либо их модификация.

v. Эти уравнения хорошо работают для краткосрочных расчетов или маневров. Для долгосрочного прогнозирования движения КА (особенно при многократных орбитальных оборотах) линеаризованные уравнения могут накопить значительные ошибки, что сделает их непригодными.

vi. В задачах оптимизации траекторий КА, особенно оснащенных двигателями МТ, линеаризация может приводить к чрезмерно упрощенным решениям, которые не учитывают все ограничения и потенциалы системы.

1.3. Анализ и сравнение матриц коэффициентов, характеризующих начальные отклонения решений уравнений относительного движения КА «Уравнения HCW и уравнения Эльясберга»

Для сравнения матриц коэффициентов начальных отклонений решений уравнений относительного движения КА примем, что компоненты реактивного ускорения постоянны и равны нулю. В таблице 1.3.1 представлены коэффициенты начальных отклонений решений уравнений относительного движения КА для обеих моделей.

Таблица 1.3.1 – матрица коэффициентов начальных отклонений решений уравнений относительного движения КА для моделей HCW и Эльясберга.

1	δx0	δy0	δz0	δVx0	δVy0	δVz0
δx	$4-3\cos\tau$	0	0	$\frac{1}{n}\sin\tau$	$\frac{2}{n}(1-\cos\tau)$	0
δy	$6(\sin\tau-\tau)$	1	0	$\frac{2}{n}(\cos\tau-1)$	$\frac{1}{n}(4\sin\tau-3\tau)$	0
δz	0	0	$\cos\tau$	0	0	$\frac{1}{n}\sin\tau$
δVx	$3n\sin\tau$	0	0	$\cos\tau$	$2\sin\tau$	0
δVy	$6n(\cos\tau-1)$	0	0	$-2\sin\tau$	$4\cos\tau-3$	0
Vz	0	0	$-n\sin\tau$	0	0	$\cos\tau$

2	δx0	δy0	δz0	δVx0	δVy0	δVz0
δx	$2-\cos\vartheta$	0	0	$\frac{1}{n}\sin\vartheta$	$\frac{2}{n}(1-\cos\vartheta)$	0
δy	$2\sin\vartheta-3\vartheta$	1	0	$\frac{2}{n}(\cos\vartheta-1)$	$\frac{1}{n}(4\sin\vartheta-3\vartheta)$	0
δz	0	0	$\cos\vartheta$	0	0	$\frac{1}{n}\sin\vartheta$
δVx	$n\sin\vartheta$	0	0	$\cos\vartheta$	$2\sin\vartheta$	0
δVy	$n(\cos\vartheta-1)$	0	0	$-\sin\vartheta$	$2\cos\vartheta-1$	0
δVz	0	0	$-n\sin\vartheta$	0	0	$\cos\vartheta$

Из таблицы 1.3.1 видно, что в уравнениях HCW используется переменная τ, связанная с временной шкалой движения, тогда как в уравнениях Эльясберга используется угол ϑ, отражающий угловое смещение вдоль орбиты. В уравнениях HCW координаты x и y содержат термины 4-3cosτ и 6(sinτ-τ), что отличается от терминов в уравнениях Эльясберга – 2-cosϑ и 2sinϑ-3ϑ. Это различие показывает в характер относительного координата в зависимости от безразмерной переменной по времени (τ) и невозмущенное значение угла (ϑ).

В уравнениях HCW коэффициенты, связанные со скоростями, включают такие термины, как 3nsinτ, 6n(cosτ-1), -2sinτ и 4cosτ-3, что свидетельствует о более значительной зависимости от времени. В отличие от этого, в уравнениях Эльясберга коэффициенты скоростей содержат термины с меньшими величинами: -sinϑ, -nsinϑ, n(cosϑ-1) и 2cosϑ-1, что уменьшает влияние на высокие угловые скорости. Кроме этих коэффициентов, в обеих уравнениях есть и другие термины, которые совпадают между собой.

1.4. Графические анализы решений уравнения относительного движения КА «Уравнения HCW и уравнения Эльясберга»

а) Рассмотрим графическую интерпретацию и сравнение решения уравнений HCW, полученные аналитическим и численным методами. Зависимости относительных координат и скоростей от времени в случае нулевого реактивного ускорения ($\gamma_x = \gamma_y = \gamma_z = 0$) можно визуализировать графически. Для этого выберем следующие начальные условия: (x0, y0, z0) = (10, 100, −5) км, (Vx0, Vy0, Vz0) = (1, −10, 3) м/с при t = 86400 с. Аналитическое решение показано на рисунках 1.4.1 и 1.4.2, а результат численного интегрирования методом Рунге-Кутты 4-го порядка представлен на рисунках 1.4.3 и 1.4.4.

На рисунке 1.4.1 приведены графики, которые отображают зависимость относительных координат и скоростей от времени. Они демонстрируют, как меняются координаты x, y и z с течением времени t, а также скорости Vx, Vy и Vz КА вдоль соответствуеющих осей.

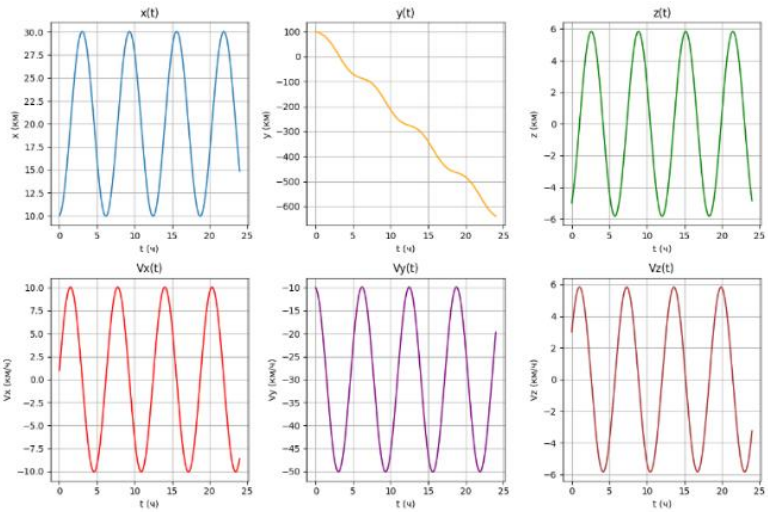

Рис. 1.4.1. Графики зависимостей относительных координат и скоростей от времени

На рисунке 1.4.2 демонстрированы взаимные зависимости между координатами и скоростями. Траектория КА представлена в плоскостях x−y, x−z и y−z. Очевидно, что графики взаимных скоростей V_x–V_y, V_x–V_z, V_y–V_z дают более глубокое понимание динамики системы, показывая, как скорости изменяются относительно друг друга. Кроме того, эти графики также показывают, как скорости вдоль различных осей соотносятся между собой, что позволяет проанализировать изменения направлений движения и их взаимосвязь.

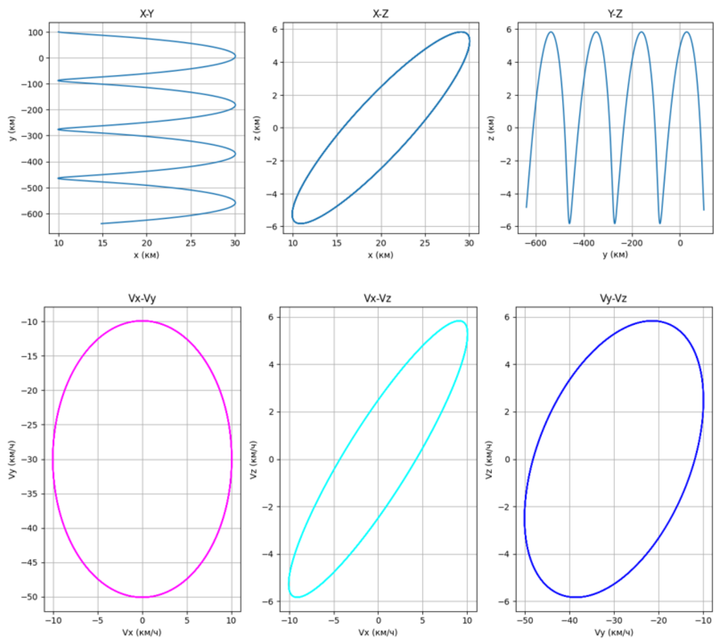

Рис. 1.4.2. Графики взаимных зависимостей между координатами и скоростями

Решение уравнений HCW имеет физический смысл, заключающийся в том, что относительное движение КА описывается периодическими колебаниями вдоль осей x, y и z. При этом движение в плоскости орбиты (x-y) является более сложным, чем вдоль оси z, так как включает как колебания, так и линейные тренды - линейные изменения зависят от времени и появляются в выражениях для координат, описывающих относительное движение вдоль оси y. Это обусловлено тем, что уравнения HCW учитывают влияние центробежных и кориолисовых сил, которые изменяют характер движения вдоль разных осей.

На рисунке 1.4.3 приведены графики, отображающие зависимость относительных координат и скоростей от времени. Графики были получены численно с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка. Они показывают также, как изменяются координаты x, y и z по времени t, а также скорости Vx, Vy и Vz КА вдоль осей.

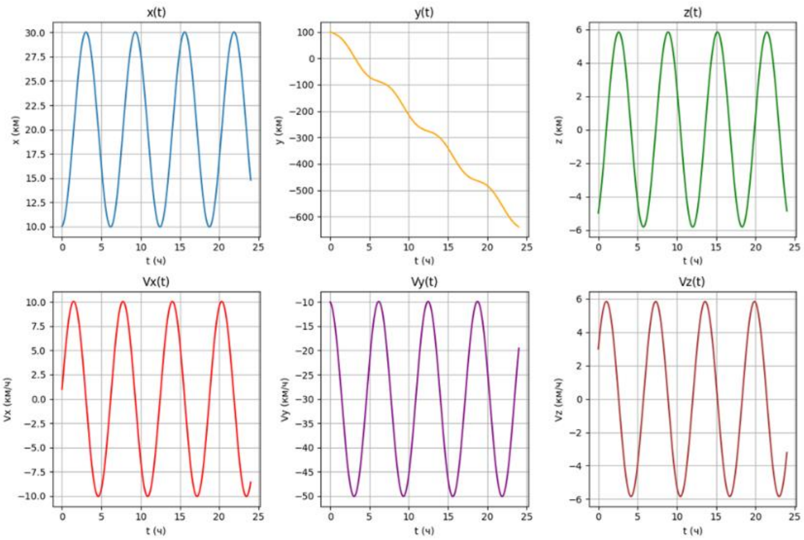

Рис. 1.4.3. Графики зависимостей x, y, z, Vx, Vy, Vz от t

На рисунке 1.4.4 представлены взаимные зависимости между координатами и скоростями. Траектория КА представлена в плоскостях $x{-}y$, $x{-}z$ и $y{-}z$. Очевидно, что графики взаимных скоростей $V_x - V_y$, $V_x – V_z$, $V_y – V_z$ дают более глубокое понимание динамики системы, показывая, как скорости изменяются относительно друг друга. Кроме того, эти графики также показывают, как скорости вдоль различных осей соотносятся между собой, что позволяет проанализировать изменения направлений движения и их взаимосвязь.

На графиках показано относительное движение КА в различных плоскостях: положение в плоскости орбиты x-y — периодическое движение с различными тренденциями по обеим осям; x-z — эллиптическая траектория, отражающая колебательное движение вдоль оси z относительно положения по оси x; y-z — комбинированное колебательное движение вдоль оси z и сложное движение по оси y. Графики взаимных скоростей V_x–V_y, V_x–V_z, V_y–V_z — фазовые диаграммы, показывающие эллиптические зависимости между скоростями по разным осям.

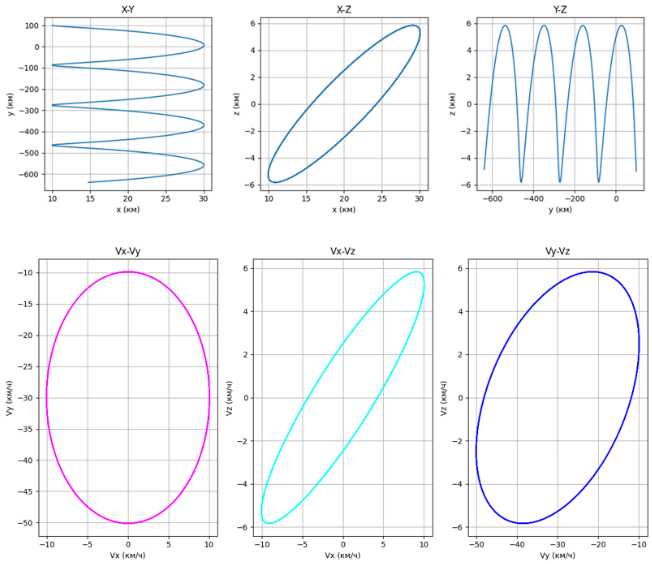

Рис. 1.4.4 - графики взаимных зависимостей между координатами и скоростями.

б) Начальные условия этого случая полностью совпадает с первым случаем, однако в этот раз, представим графики решения уравнений Эльясберга, полученные численным методами. Численное интегрирование этих уравнений методом Рунге-Кутты 4-го порядка показано на рисунках 1.4.5 и 1.4.6.

На рисунке 1.4.5 приведены графики, изображающие зависимость относительных координат и компонентов скорости по времени. Они демонстрируют, как изменяются координаты x, y и z по времени t, а также периодические колебания КА вдоль осей.

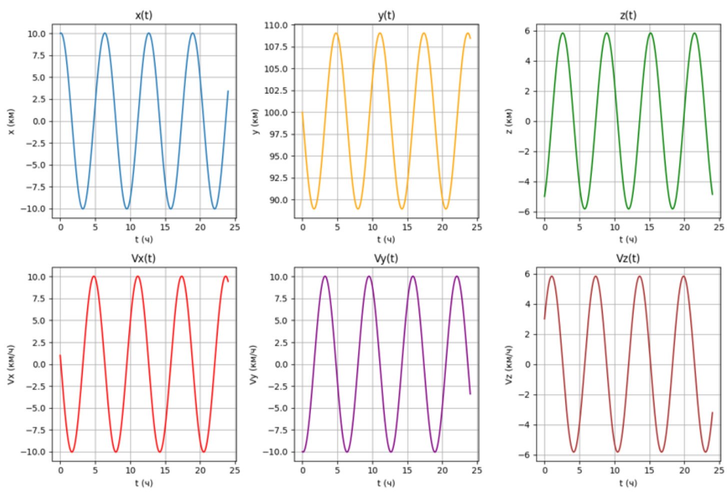

Рис. 1.4.5. Графики зависимостей x, y, z, Vx, Vy, Vz от t

На рисунке 1.4.6 отражены взаимные зависимости между координатами и скоростями. В зависимости от начальных условий траектория может быть круговой, эллиптической или иной, в зависимости от типа орбиты. На данном наборе графиков также показано относительное движение КА. В отличие от рисунка 1.4.4, траектории здесь выглядят более эллиптическими и симметричными. В плоскости x-y движение КА происходит по круговой орбите, тогда как в плоскостях x-z и y-z видны эллиптические траектории, отображающие зависимость движения вдоль вертикальной оси Z относительно горизонтальных осей x и y. Графики скоростей V_x–V_y, V_x–V_z, V_y–V_z представляют собой фазовые диаграммы, демонстрирующие гармоническое движение и взаимосвязь скоростей вдоль различных осей. Это полезно для анализа маневров или изменений в орбитальной скорости при выполнении задач коррекции орбиты или сближения с другим космическим объектом.

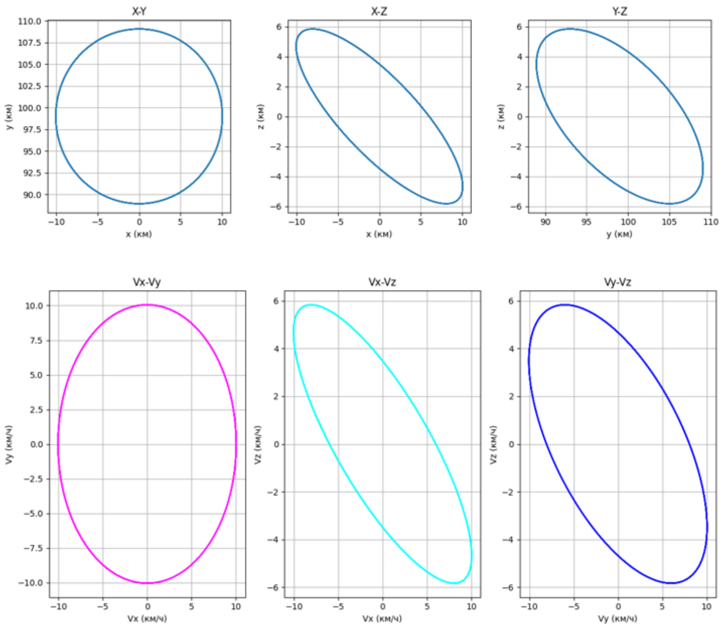

Рис. 1.4.6. Графики взаимных зависимостей между координатами и скоростями

Аналитические решения для линейного движения КА и решения, полученные путем численного интегрирования с использованием метода Рунге-Кутты 4-го порядка, при графическом сравнении показали чрезвычайно схожие результаты. Такая близость между двумя решениями предполагает, что аналитическая модель достаточно точна, чтобы описать поведение рассматриваемой системы, что подтверждает ее применимость в контекстах, где важна численная точность.

Следует отметить, что аналитическое решение, хотя и более прямое и быстрое, может быть ограничено конкретными случаями, когда уравнения движения КА имеют формы, которые можно решить точно. Вместе с тем, численное интегрирование, такое как метод Рунге-Кутты 4-го порядка, обеспечивает большую гибкость, позволяя иметь дело с более сложными системами или нелинейными силами, что может сделать его более подходящим в ситуациях, когда аналитическое решение недоступно или жизнеспособный.

Согласие между обоими подходами указывает на то, что в рассматриваемом случае упрощения, использованные в аналитической формулировке, не поставили под угрозу точность результатов, что укрепляет уверенность в теоретическом моделировании задач динамики орбит. Кроме того, небольшое расхождение, наблюдаемое между методами, можно объяснить итеративным характером численного решения, которое, в зависимости от требуемой точности, может привносить небольшие ошибки, накапливающиеся с течением времени.

Таким образом, для решения практических задач использование модели движения КА зависит от условий решаемых задач. Например, если задача требует простоты и быстроты расчетов, и отклонения невелики (КА движутся на близких круговых орбитах), уравнения HCW являются лучшим выбором. Они обеспечивают хорошие решения для большинства типичных маневров сближения и орбитального маневрирования. Однако, если задача более сложная, включает эллиптические орбиты, нелинейные возмущения или требуется высокая точность при больших отклонениях (например, в миссиях с длительным сроком службы или с большими изменениями орбит), уравнения П.Е. Эльясберга являются намного лучшим выбором.

1.5. Математические модели движения КА с применением ЭРДУ

Уравнение (1.5.1) представляет собой систему дифференциальных уравнений, описывающую движение космического аппарата в центральном гравитационном поле Ньютона, и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(\mathrm{t}), \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) = -\frac{\mu_з}{l^3}\mathbf{x} + \frac{\delta T}{m}\boldsymbol{e}_T, \\ \dot{m}(t) = -\frac{\delta T}{c}, \end{cases} \tag{1.5.1}$$

где $\mathbf{x}$ – вектор положения КА, $l = |\mathbf{x}|$, m – масса КА, T – тяга, δ - функция включения двигателя, c – скорость истечения ЭРДУ, $\boldsymbol{e}_T$- единичный вектор вдоль вектора тяги ЭРДУ.

В ходе численного интегрировании уравнений движения космических аппаратов учитываются уравнения движения в безразмерных переменных, чтобы избежать ошибок во время вычислений. Например, для круговой шкалы скорости орбитального движения примем ее равной 1 а.е., для остальных будут: $\tilde{l} = l_0$, $\tilde{t} = \tilde{l}/\tilde{V}$, $\tilde{a} = \tilde{V}/\tilde{t}$ и μ = 1.

В силу работ [10, 11], математические модели движения космических аппаратов зависят от операционных характеристик электрореактивных двигателей и ограничений управления. В целом параметры ДУ, такие как мощность, тяга и скорость истечения, могут меняться в зависимости от координат и времени. Как правило, выделяют две ключевые математические модели работы ЭРД: модель с идеально-регулируемым двигателем ограниченной мощности (ОМ-модель) и модель с двигателем ограниченной тяги и постоянной скоростью истечения (ОСИ-модель). В рамках ОМ-модели рассматривается ИРОМ-двигатель, в то время как в ОСИ-модели используется ОТСИ-двигатель.

1.5.1. Математическая модель оптимальной траектории КА с помощью ИРОМ-двигателя

В данной модели предполагается, что удельный импульс и тяга известны. В рамках этого условия значения удельного импульса и тяги ОМ-двигателя могут варьироваться произвольно.

С практической и технической точек зрения ОМ-модель не всегда эффективна по следующим причинам:

- в реальных электрореактивных двигателях мощность и тяга имеют технические пределы, которые не учитываются в модели идеально регулируемого двигателя. Это делает такую модель нереалистичной для практического применения;

- в реальных условиях работа двигателя сопровождается потерями энергии из-за теплового излучения, трения и других факторов, что не включено в идеализированную модель;

- в реальных системах управление тягой не может быть плавным и мгновенным, как предполагает идеально регулируемая модель. Например, изменение тяги требует времени для перестройки электрической или магнитной системы двигателя;

- реальные параметры двигателя могут изменяться из-за деградации компонентов, влияния внешней среды (например, изменения плотности частиц в космическом пространстве) или других факторов. Модель идеально-регулируемого двигателя не учитывает эти вариации;

- модель идеально-регулируемого двигателя предполагает математическую точность управления, что требует высокоточных датчиков, алгоритмов и вычислительных мощностей, которые не всегда доступны или экономически оправданы в реальных миссиях;

- модель не учитывает воздействия факторов, таких как давление солнечного ветра, гравитационные возмущения от небесных тел или влияние неоднородности гравитационного поля Земли.

В течение последних лет разработаны проекты ЭРД, которые имеют характеристики, аналогичные ионно-реактивным двигателям. Одним из примеров является проект магнитоплазменного двигателя, описанный в [101, 102]. Данный инновации открывают возможности для реализации автоматизированных маневров межпланетных космических аппаратов, а также пилотируемых экспедиций на Марс с использованием ионно-реактивных двигателей.

Дифференциальные уравнения (1.5.1) с учетом на ОМ-двигателя имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}, \\ \ddot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\gamma}, \end{cases} \tag{1.5.2}$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ – вектор реактивного ускорения, $\boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{\gamma} = \gamma^2;\ \gamma = |\boldsymbol{\gamma}|$, η - силовая функция ($\eta = \frac{1}{|\boldsymbol{X}|}$ для центрального ньютоновского поля в безразмерных координатах).

Ввиду, что задача оптимизации программе малой тяги $\boldsymbol{\gamma}(t)$ состоит в том, чтобы определить, как доставить полезную нагрузку из точки $r0$ с начальной скоростью V0 в точку rf с конечной скоростью Vf за заданное время, с использованием заданного источника энергии и минимальным расходом массы топлива. Это накладывает весьма сложный набор ограничений как на выбор оборудования (на то, как спроектирована ракета), так и на выбор траектории (как управлять движением ракеты).

К счастью, автор в [88] разработал элегантный метод, позволяющий разделить оптимизацию конфигурации ракеты от оптимизации программы тяги.

В модели работы ИРОМ-двигателя основным ограничивающим фактором, определяющим параметры тяги и скорости истечения, является мощность реактивной струи [17, 49, 50]:

$$q = \alpha . N_u = \frac{T.c}{2}, \tag{1.5.3}$$

где α - к. п. д. ЭРДУ, N_u- электрическая мощность ЭРДУ, q – мощность реактивной струи.

Исходя из выражения (1.5.3) следует:

$$c = \frac{2\alpha.N_u}{T}, \tag{1.5.4}$$

Дифференциальное уравнение, описывающее изменение массы КА, может быть записано в следующей форме:

$$\dot{m} = -\frac{T}{c} = -\frac{T^2}{2\alpha.N_u} = -\frac{m^2.\gamma^2}{2\alpha.N_u}, \tag{1.5.5}$$

Интегрируем уравнение (1.5.5) по времени $t \in (0, \Delta\text{t})$ и получим такую $m(t)$:

$$-\int_{m_0}^{m} m^{-2}\,dm = \int_0^{\Delta\text{t}} \frac{1}{2\alpha N_u}\gamma^2\,dt \rightarrow \; m(t) = \frac{m_0}{1 + J(t)m_0}, \tag{1.5.6}$$

где $m_0 = m(0)$ - начальная масса КА,

$$J(t) = \int_0^{\Delta\text{t}} \frac{\gamma^2}{2\alpha N_u}\,dt. \tag{1.5.7}$$

Здесь основной акцент сделан на динамическую часть задачи оптимизации траектории КА с ИРОМ-двигателем, результаты которой будут использоваться в дальнейшем как НП при оптимизации траекторий КА с помощью ОТСИ- двигателя.

Влияние фазовых координат и времени на q ДУ космических аппаратов обычно определяется типом бортовой энергосистемы и подвержено влиянию деградации характеристик энергетического оборудования и ДУ. Наиболее широко используются бортовые энергосистемы КА, работающие на солнечных или ядерных источниках энергии. Для солнечных энергосистем q зависит от расстояния КА до Солнца, тогда как для ядерных энергосистем q, как правило, считается постоянной.

При предварительном баллистическом анализе полетов КА с ЭРД часто принимается допущение о неизменности их коэффициента полезного действия ЭРД. Это означает, что q электрических ракет двигателей можно считать постоянной. При условии постоянной реактивной мощности, т.е., $\alpha.N_u = 1$, задача сводится к минимизации расхода рабочего тела и может быть осуществлена с использованием соответствующего функционала:

$$J(t) = \frac{1}{2}\int_0^{\Delta\text{t}} \gamma^2\,dt, \tag{1.5.8}$$

где $\gamma = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2}$ - величина реактивного ускорения.

Очевидно, что на первом этапе решения задачи оптимизации траектории КА необходимо математически смоделировать его динамику. Модель траектории КА представляет собой систему ОДУ, описывающих путь или временную зависимость положения и скорости КА. Уравнения движения КА, служащие в качестве модели, могут быть, как правило, записаны в форме уравнений первого порядка.

С другой стороны, поскольку в различных задачах могут встречаться различные ограничения, которые необходимо учитывать, в данной работе также будут рассмотрены следующие случаи:

а) оптимальное управление при наличии всех компонентов вектора реактивного ускорения будет обозначаться как трехканальное управление (ТКУ) - γ_x, γ_y и γ_z постоянны и отличны от нуля;

б) оптимальное управление с ограничением радиальной компоненты вектора реактивного ускорения (то есть $\gamma_x = 0$) будет обозначаться как двухканальное управление (ДКУ).

Таким образом, естественно рассмотреть систему уравнений HCW в качестве динамической модели, которую можно представить в пространстве состояний в следующем виде:

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\gamma}, \tag{1.5.9}$$

где $\mathbf{x}$ – вектор состояния; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y & z\, V_x & V_y & V_z \end{bmatrix}^T$, $\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_x & \gamma_y & \gamma_z \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{A}_l$, $\mathbf{A}_m$, $\mathbf{B}_l$, и $\mathbf{B}_m$, – Матрицы для обеих моделей при n = 1.

$$\boldsymbol{A}_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \boldsymbol{A}_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_l = \boldsymbol{B}_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ – для ТКУ и } \boldsymbol{B}_l = \boldsymbol{B}_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ - для ДКУ.}$$

Применяя ПМП к задаче оптимального управления (1.5.2), (1.5.5), (1.5.8), имеем гамильтониан, в форме:

$$H_{\text{г}} = \frac{1}{2}(-\gamma^2 + 2\mathbf{p}^T\boldsymbol{A}\mathbf{x} + 2\mathbf{p}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{\gamma}), \tag{1.5.10}$$

где $\mathbf{p}$ – вектор сопряженных переменных.

В соответствии с ПМП, оптимальное управление определяется через условие максимизации гамильтониана по переменной управления. Для данной задачи линейно-квадратичного оптимального управления максимизация гамильтониана осуществляется, когда его производная по переменной управления равна нулю. Таким образом, максимизируя выражение (1.5.11) по переменной $\boldsymbol{\gamma}$, можно получить следующую формулу для оптимального управления:

$$\frac{\partial H_г}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = -\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{B}^T \mathbf{p} = 0,\ \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{B}^T \mathbf{p}, \qquad (1.5.11)$$

После применения этого принципа система дифференциальных уравнений (1.5.12), описывающая оптимальное движение, принимает следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial H_г}{\partial \mathbf{p}} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T \mathbf{p},$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H_г}{\partial \mathbf{x}} = -\boldsymbol{A}^T \mathbf{p}. \qquad (1.5.12)$$

Очевидно, что система уравнений (1.5.13) может быть решена аналитически без особых сложностей, однако она должна соответствовать установленным граничным условиям. При выполнении перехода между двумя определенными точками фазового пространства данные граничные условия имеют вид:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(\Delta t) = \mathbf{x}_f. \qquad (1.5.13)$$

После применения ПМП задача оптимизации траекторий КА с ИРОМ-двигателем преобразуется в КЗ с соответствующими краевыми условиями, решение которой может быть получено как аналитическим, так и численным методом. Такая задача имеет значительный интерес, поскольку ее решение может служить начальным приближением для более сложных задач оптимизации траекторий КА, оснащенных двигателями с более реалистичными характеристиками регулировки. В рамках данной работы полученное решение используется для оптимизации траекторий с ОТСИ-двигателем.

1.5.2. Математическая модель оптимальной траектории КА с помощью ОТСИ-двигателя

Управление в этой модели заключается в определении направления и величины тяги, при этом направление тяги не ограничено, а ее величина имеет максимальное допустимое значение, в то время как скорость истечения задается как постоянная. Однако более реалистичной математической моделью движения космического аппарата является модель с ограниченной тягой и постоянной скоростью истечения (ОСИ-модель). В рамках этой модели дифференциальные уравнения описывают движение аппарата в окрестности круговой орбиты можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \delta \frac{T}{\mathrm{m}} \boldsymbol{B} \boldsymbol{e}_T, \\ \dot{\mathrm{m}} = -\delta \frac{T}{c}, \end{cases} \tag{1.5.14}$$

где δ - функция реле тяги, принимающая значение 1, когда двигатель включен, и 0, когда он выключен, $\mathbf{e}_T$ – единичный вектор, направленный вдоль вектора тяги.

Введем следующие обозначения:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{V} \end{pmatrix}, \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{B}_{3\times3} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_{3\times3} = \boldsymbol{E}_{3\times3} \text{ – для ТКУ и } \boldsymbol{B}_{3\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- для ДКУ,

где $\mathbf{0}_{3\times3}$, $\mathbf{E}_{3\times3}$ – нулевая, единичная матрицы размером 3×3 и $\boldsymbol{B}_l = \boldsymbol{B}_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{B}$.

Выбираемым управлением являются зависимости $\delta(t)$ и $\mathbf{e}_T(t)$. Для рассматриваемой задачи требуется найти управление, минимизирующее затраты топлива, определяемые функционалом

$$J = \int_0^{\Delta t} \delta \frac{T}{c} dt. \tag{1.5.15}$$

Применяя ПМП к задаче оптимального управления (1.5.14), (1.5.15), функция Понтрягина имеет вид:

$$H = -\delta \frac{T}{c} + \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \delta \frac{T}{m} \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{B} \boldsymbol{e}_T - \delta \frac{T}{c} \mathrm{p}_{\mathrm{m}}, \tag{1.5.16}$$

где $\mathbf{p}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{\mathbf{r}}^T & \mathbf{p}_{\mathbf{v}}^T \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_{\mathbf{r}}$, $\mathbf{p}_{\mathbf{v}}$ – векторы переменных, сопряженных к $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ соответственно, p_m – переменная, сопряженная к массе m.

Максимизация функции Понтрягина (1.5.16) по $\delta(t)$ и $\mathbf{e}_T(t)$ приводит к следующим выражениям для оптимального управления:

$$\boldsymbol{e}_T = \frac{\boldsymbol{B}^T \mathbf{p}}{|\boldsymbol{B}^T \mathbf{p}|},$$

$$\delta = \begin{cases} 1, S > 0, \\ 0, S \le 0, \end{cases} \tag{1.5.17}$$

где $S = \frac{|\boldsymbol{B}^T \mathbf{p}|}{\mathrm{m}} - \frac{\mathrm{p}_{\mathrm{m}} + 1}{c}$ - функция переключения.

Подстановка (1.5.17) в (1.5.16) приводит к следующему выражению для гамильтониана:

$$H = \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \delta T S, \tag{1.5.18}$$

и к соответствующим уравнениям оптимального движения:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \delta \frac{T}{m} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{E}_{3\times3} \end{pmatrix} \frac{\boldsymbol{B}^T \mathbf{p}}{|\boldsymbol{B}^T \mathbf{p}|},$$

$$\frac{d\mathrm{m}}{dt} = -\delta\frac{T}{c},$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\boldsymbol{A}^T\mathbf{p},$$

$$\frac{d\mathrm{p_m}}{dt} = \delta\frac{T}{\mathrm{m}^2}|\boldsymbol{B}^T\mathbf{p}|. \quad (1.5.19)$$

Для выполнения перелета между двумя конкретными точками фазового пространства с заданной начальной массой КА необходимо, чтобы уравнения (1.5.19) дополнели краевые условия в следующим виде:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathrm{m}(0) = \mathrm{m}_0, \quad (1.5.20)$$

$$\mathbf{x}(\Delta t) = \mathbf{x}_f, \mathrm{p_m}(\Delta t) = 0. \quad (1.5.21)$$

Второе условие в (1.5.21) - условие трансверсальности. Однако, рассматриваемая задача оптимального управления сводится к КЗ для системы ОДУ (1.5.19) с краевыми условиями (1.5.20), (1.5.21). Следовательно, для того чтобы решить эту задачу, требуется вычислить начальные условия $\mathbf{p}(0)$, $\mathrm{p_m}(0)$, при которых удовлетворяются конечные условия (1.5.21). Во втором главе будет рассмотрен метод ПП, а в пятом главе будет применен для решения данной КЗ.

1.6. Заключение по разделу

В разделе представлены математические модели движения КА (модели HCW и Эльясберга), позволяющие описать движения КА в окрестности круговой орбиты, системы уравнения относительного движения КА и их решение, учитывая случая, когда составляющие реактивного ускорения остаются постоянными. Представлены аналитические, численные решения уравнений относительного движения КА, а также их графическое сравнение. Результаты сравнения показали, что решения практически идентичны, иллюстрируя движение КА вблизи круговой орбиты. Разработаны математические модели движения КА, оснащенного ЭРДУ, учитывая некоторые ограничения, так как параметры ДУ могут быть функциями координат и времени. Приведены также две математические модели оптимальной траектории КА с ИРОМ и ОТСИ-двигателями и формулировка задачи минимизации функционала, аналогичной минимизация массы топлива.

ГЛАВА 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

2.1. Аналитическое решение краевой задачи

Аналитические методы являются наиболее желательными, поскольку они обычно предоставляют решения, основанные на математических представлениях, с нулевым приближением. Однако они часто недоступны из-за сложности проблемы. Такие сложности могут быть вызваны как математической моделью, так и целями задачи. Основным примером аналитического подхода является хорошо известный переход Хоумана для миссии по простой передаче орбиты. Переход Хоумана на самом деле является очень простым подходом для перемещения космического аппарата с одной орбиты на другую с минимизацией прироста скорости.

Что касается аналитического подхода в непрерывной области, то процесс достижения оптимального решения обычно включает теорию оптимального управления и основывается на принципе Понтрягина. Первый шаг заключается в установлении проблемы в математическом представлении. Это включает в себя определение уравнений движения, функции стоимости и применимых ограничений. Ограничения можно разделить на два основных типа: ограничения пути и граничные ограничения [153]. Ограничения пути представляют собой ограничения на управление или состояние в любой момент времени. Например, у двигателей есть конечное количество тяги, что определяет максимальное значение для управления. Было бы бессмысленно искать решение, которое требует тягу, превышающую максимально доступный предел. Граничные ограничения касаются либо конечных, либо начальных состояний. Они могут быть заданы как набор равенств или неравенств. Вектор состояния, не нарушающий никаких ограничений, называется допустимой траекторией. Точно так же вектор управления, не нарушающий никаких ограничений, называется допустимым управлением. Затем формируется функция стоимости, дополненная множителями Лагранжа (или сопряженными состояниями), связанными с ограничениями и дифференциальными уравнениями состояния системы. Определяется удобный гамильтониан, и пишется первая вариация функции стоимости из-за дифференциальных изменений в управлении. Далее выбираются дифференциальные уравнения сопряженных состояний и граничные условия для упрощения этого выражения. Этот процесс представления задачи через исходные переменные и множители Лагранжа (или состояния и сопряженные состояния) часто называют дуализацией, что делает задачу трудной для аналитического решения. Такие трудности хорошо описаны в [154].

Тем не менее, этот аналитический подход весьма полезен как проверка для численных методов. Как показано во многих источниках [154, 155], количество множителей Лагранжа равно количеству компонентов вектора состояния. Это означает, что даже в самом простом случае, рассматривая космический аппарат как материальную точку, игнорируя уравнения ориентации, оптимальный набор параметров Лагранжа можно искать в R^7 (шесть элементов для пространственных координат и один для массы КА). Если требуется также определить начальный момент времени для перехода, то оптимальные параметры необходимо искать в пространстве R^8. Существенное внимание уделяется аналитическим методам оптимизации траекторий КА. Например, автор в [156] разработал полный аналитический подход первого порядка для задачи оптимальных переходов с ограниченной мощностью на малой тяге в поле силы, обратной пропорциональной квадрату расстояния, между копланарными орбитами с малыми эксцентриситетами. Представленный подход устраняет сингулярность для круговых орбит и может быть применен для переходов с фиксированным временем между копланарными орбитами с малыми эксцентриситетами.

Для расчета маневров КА с ИР-двигателем необходимо решить представленную КЗ в (1.5.12) с краевыми условиями (1.5.13).

Рассмотрим связанную с (2.1.1) однородную систему (когда второй член в правой части уравнения 1.5.9 равен 0):

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \boldsymbol{A}\mathbf{X} \qquad (2.1.1)$$

Предполагается, что общий принцип решения задачи неуправляемого относительного движения для любого момента времени t выражается через уравнение (2.1):

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{\Phi}(t).\boldsymbol{a}, \qquad (2.1.2)$$

где $\mathbf{\Phi}(t) = e^{A.t}$ – фундаментальная матрица однородной системы $\dot{\mathbf{X}} = \boldsymbol{A}\mathbf{X}$, $\boldsymbol{a}$ – вектор произвольных постоянных.

Явные выражения для фундаментальных матриц могут быть получены в случае движения в плоскости орбиты (для обеих моделей движения КА) и записаться в виде:

$$\boldsymbol{\Phi}_l(t) = \begin{pmatrix} 4-3\cos t & 0 & \sin t & 2-2\cos t \\ 6\sin t - 6t & 1 & 2\cos\tau - 2 & 4\sin t - 3t \\ 3\sin t & 0 & \cos t & 2\sin t \\ 6\cos t - 6 & 0 & -2\sin t & 4\cos t - 3 \end{pmatrix}, \tag{2.1.3а}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_m(t) = \begin{pmatrix} 2-\cos t & 0 & \sin t & 2-2\cos t \\ 2\sin t - 3\tau & 1 & 2\cos t - 2 & 4\sin t - 3\tau \\ \sin t & 0 & \cos t & 2\sin t \\ \cos t - 1 & 0 & -\sin t & 2\cos t - 1 \end{pmatrix}, \tag{2.1.3б}$$

а явная форма фундаментальной матрицы для движения вдоль нормали к плоскости опорной орбиты имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{\Phi}_{0l}(t) = \boldsymbol{\Phi}_{0m}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}. \tag{2.1.4}$$

В этом случае общее решение однородной системы (1.5.12) имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{\vartheta}(t)\boldsymbol{p}_0, \tag{2.1.5}$$

где $\boldsymbol{\vartheta}(t) = e^{-\mathrm{A}^{\mathrm{T}}.t} = \boldsymbol{\Phi}^T(-t)$, $\boldsymbol{\Phi}^T(-t)$ - транспонированная фундаментальная матрица (2.1.3), (2.1.4).

Так как $\boldsymbol{\vartheta}(t) = \boldsymbol{\Phi}^T(-t)$, можно переписать уравнение (2.1.5) следующим образом:

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{\Phi}^T(-t)\boldsymbol{p}_0, \tag{2.1.6}$$

$$\boldsymbol{p_z}(t) = \boldsymbol{\Phi}_0{}^T(-t)\boldsymbol{p}_{0z}. \tag{2.1.7}$$

Подставляя (2.1.6) и (2.1.7) во вторую правую часть уравнения системы (1.5.12), получаем систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\Phi}^T(-t)\boldsymbol{p}_0, \tag{2.1.8}$$

$$\frac{d\boldsymbol{X}_z}{dt} = \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{X}_z + \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{B}_0{}^T\boldsymbol{\Phi}_0{}^T(-t)\boldsymbol{p}_{0z}. \tag{2.1.9}$$

Далее решим неоднородные линейные дифференциальные уравнения методом вариации произвольных постоянных, используя вид решения однородного уравнения (2.1.2):

$$\frac{d\boldsymbol{\Phi}}{dt}\boldsymbol{k} + \boldsymbol{\Phi}(t)\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{k} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\Phi}^T(-t)dt.\boldsymbol{p}_0,$$

$$\frac{d\boldsymbol{\Phi}_0}{dt}\boldsymbol{k}_z + \boldsymbol{\Phi}_0(t)\frac{d\boldsymbol{k}_z}{dt} = \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{\Phi}_0(t)\boldsymbol{k}_z + \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{B}_0{}^T\boldsymbol{\Phi}_0{}^T(-t)dt.\boldsymbol{p}_{0z},$$

$$\boldsymbol{\Phi}(-t)\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\Phi}^T(-t)dt.\boldsymbol{p}_0 \text{ и } \boldsymbol{\Phi}_0(-t)\frac{d\boldsymbol{k}_z}{dt} = \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{B}_0{}^T\boldsymbol{\Phi}_0{}^T(-t)dt.\boldsymbol{p}_{0z}, \tag{2.1.10}$$

$$\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \boldsymbol{\Phi}(-t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\Phi}^T(-t)dt.\boldsymbol{p}_0 \text{ и } \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \boldsymbol{\Phi}_0(-t)\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{B}_0{}^T\boldsymbol{\Phi}_0{}^T(-t)dt.\boldsymbol{p}_{0z}, \tag{2.1.11}$$

Проинтегрировав, уравнение (2.1.10) и (2.1.11) получим:

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_0 + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(-h)\,\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\Phi}^T(-h)ds.\boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{k}_0 + \boldsymbol{\psi}(t).\boldsymbol{p}_0, \qquad (2.1.12)$$

$$\boldsymbol{k}_z = \boldsymbol{k}_{0z} + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}_0(-h)\,\boldsymbol{B}_0{\boldsymbol{B}_0}^T{\boldsymbol{\Phi}_0}^T(-h)ds.\boldsymbol{p}_{0z} = \boldsymbol{k}_{0z} + \boldsymbol{\psi}_0(t).\boldsymbol{p}_{0z}. \qquad (2.1.13)$$

Тогда, можно записать выражения матрицы свертки в форме:

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(-h)\,\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\Phi}^T(-h)dh, \qquad (2.1.14)$$

$$\boldsymbol{\psi}_0(t) = \int_0^t \boldsymbol{\Phi}_0(-h)\,\boldsymbol{B}_0{\boldsymbol{B}_0}^T{\boldsymbol{\Phi}_0}^T(-h)dh, \qquad (2.1.15)$$

где $\boldsymbol{\psi}(t)$ - матрица свертки для движения в плоскости орбиты, $\boldsymbol{\psi}_0(t)$ - матрица свертки для движения вдоль нормали к плоскости опорной орбиты.

Таким образом, аналитические выражения для матриц $\boldsymbol{\psi}_3(t)$ и $\boldsymbol{\psi}_{03}(t)$ (для обеих моделей движения КА), полученные в случае ТКУ будут иметь следующий вид:

$$\boldsymbol{\psi}_{3l}(t) = \begin{pmatrix} \psi_{11l}(t) & \psi_{12l}(t) \\ \psi_{21l}(t) & \psi_{22l}(t) \end{pmatrix}, \qquad (2.1.16а)$$

$$\boldsymbol{\psi}_{3m}(t) = \begin{pmatrix} \psi_{11m}(t) & \psi_{12m}(t) \\ \psi_{21m}(t) & \psi_{22m}(t) \end{pmatrix}, \qquad (2.1.16б)$$

вводя обозначения c = cost, s = sint, получим вырожения $\psi_{11l}(t), \psi_{12l}(t), \psi_{21l}(t), \psi_{22l}(t)$ и $\psi_{11m}(t), \psi_{12m}(t), \psi_{21m}(t), \psi_{22m}(t)$ в виде:

$$\psi_{11l}(t) = \begin{pmatrix} \frac{13t + 3cs}{2} - 8\mathrm{s} & 3(t - \mathrm{s})^2 \\ 3(t - s)^2 & 14t - 32\mathrm{s} + 3t^3 + 24t\mathrm{c} - 6\mathrm{cs} \end{pmatrix},$$

$$\psi_{12l}(t) = \begin{pmatrix} \frac{(1 - \mathrm{c})(3\mathrm{c} - 5)}{2} & 14\mathrm{s} - 3\mathrm{cs} - 11t \\ 5t - 8\mathrm{s} + 6t\mathrm{c} - 3\mathrm{cs} & 4\mathrm{c} - \frac{9t^2}{2} + 6\mathrm{c}^2 + 12t\mathrm{s} - 10 \end{pmatrix},$$

$$\psi_{21l}(t) = \begin{pmatrix} \frac{(1 - \mathrm{c})(3\mathrm{c} - 5)}{2} & 5t - 8\mathrm{s} + 6t\mathrm{c} - 3\mathrm{cs} \\ 14\mathrm{s} - 3\mathrm{cs} - 11t & 4\mathrm{c} - \frac{9t^2}{2} + 6\mathrm{c}^2 + 12t\mathrm{s} - 10 \end{pmatrix},$$

$$\psi_{22l}(t) = \begin{pmatrix} \frac{5t - 3\mathrm{cs}}{2} & 3(\mathrm{c} - 1)^2 \\ 3(\mathrm{c} - 1)^2 & 19t + 6\mathrm{cs} - 24\mathrm{s} \end{pmatrix},$$

$$\psi_{11m}(t) = \psi_{11l}(t),$$

$$\psi_{12m}(t) = \begin{pmatrix} \frac{(1 - \mathrm{c})(3\mathrm{c} - 5)}{2} & 6\mathrm{s} - \frac{3\mathrm{cs} + 9\mathrm{t}}{2} \\ 5t - 8\mathrm{s} + 6t\mathrm{c} - 3\mathrm{cs} & 4\mathrm{c} - \frac{3t^2}{2} + 3\mathrm{c}^2 + 6t\mathrm{s} - 7 \end{pmatrix},$$

$$\psi_{21m}(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{(1-\mathrm{c}\,)(3\mathrm{c}-5)}{2} & 5t-8\mathrm{s}+6t\mathrm{c}-3\mathrm{cs}\\ 6\mathrm{s}-\dfrac{3\mathrm{cs}+9\mathrm{t}}{2} & 4\mathrm{c}-\dfrac{3t^2}{2}+3\mathrm{c}^2+6t\mathrm{s}-7\end{pmatrix},$$

$$\psi_{22m}(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{5t}{2}-\dfrac{6\mathrm{cs}}{4} & 3(\mathrm{c}-1)^2\\ \dfrac{(\mathrm{c}-1\,)(3\mathrm{c}-1)}{2} & \dfrac{7}{2}t+\dfrac{3\mathrm{cs}}{2}-4\mathrm{s}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\psi}_{03l}(t)=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}t-sc & -\mathrm{s}^2\\ -\mathrm{s}^2 & t+sc\end{pmatrix}. \tag{2.1.17}$$

Явные выражения для обратных матриц ${\psi_3}^{-1}(t)$ и ${\psi_{03}}^{-1}(t)$ можно записать таким образом:

$${\psi_{3l}}^{-1}(t)\;=\frac{1}{\det\left(\psi_{3l}(\mathrm{t})\right)}\begin{pmatrix}A_{11} & -A_{12} & A_{13} & -A_{14}\\ -A_{21} & A_{22} & -A_{23} & A_{24}\\ A_{31} & -A_{32} & A_{33} & -A_{34}\\ -A_{41} & A_{42} & -A_{43} & A_{44}\end{pmatrix}\text{ и}$$

$${\psi_{3m}}^{-1}(t)\;=\frac{1}{\det(\psi_{3m}(\mathrm{t}))}\begin{pmatrix}B_{11} & -B_{12} & B_{13} & -B_{14}\\ -B_{21} & B_{22} & -B_{23} & B_{24}\\ B_{31} & -B_{32} & B_{33} & -B_{34}\\ -B_{41} & B_{42} & -B_{43} & B_{44}\end{pmatrix}, \tag{2.1.18a}$$

$$\begin{aligned}\det\left(\psi_{3l}(\mathrm{t})\right)&=\det\left(\psi_{3m}(\mathrm{t})\right)\\ &=\frac{75t^6}{16}+60t^4\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2-\frac{27t^4\sin(t)^2}{16}-65t^4+72t^3\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2\sin(t)\\ &+186t^3\sin(t)-800t^2\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2+279t^2\sin(t)^2-1824t\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2\sin(t)\\ &+4096\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2-1024\sin(t)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{11}&=2304\sin(t)-1152\sin(2t)-866t+1602tcos(2t)+252t^3\cos(t)+936t^2\sin(t)\\ &+90t^4\sin(t)-\frac{1303t^3}{2}+\frac{735t^5}{8}-\frac{189t^3\cos(2t)}{2}+621t^2\sin(2t)\\ &-\frac{81t^4\sin(2t)}{16}-736t\cos(t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{12}&=\frac{75t^4}{4}+\frac{45t^3\sin(t)}{2}-240t^2\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2+\frac{27t^2\sin(t)^2}{4}-144t\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2\sin(t)\\ &+768\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2-192\sin(t)^2,\end{aligned}$$

$$A_{13} = \frac{27t^4\sin(t)^2}{8} - 30t^4\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \frac{165t^4}{2} - 108t^3\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2\sin(t) + 66t^3\sin(t)$$
$$- 400t^2\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 - \frac{585t^2\sin(t)^2}{2} + 1104t\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2\sin(t) - 512\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2$$
$$+ 128\sin(t)^2,$$
$$A_{14} = 463t + 704\sin(2t) - 1408\sin(t) - 975t\cos(2t) - 138t^3\cos(t) - 502t^2\sin(t)$$
$$- \frac{105t^4\sin(t)}{2} + \frac{1453t^3}{4} - \frac{195t^5}{4} + \frac{243t^3\cos(2t)}{4} - 387t^2\sin(2t)$$
$$+ \frac{27t^4\sin(2t)}{8} + 512t\cos(t),$$
$$A_{21} = A_{12},$$
$$A_{22} = \frac{(5t - 3\sin(t))(16\cos(t) + 5t^2 + 3t\sin(t) - 16)}{4},$$
$$A_{23} = 88\sin(t) - 44\sin(2t) - 15t^3\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 - \frac{81t\sin(t)^2}{2} - \frac{31t^2\sin(t)}{2} + \frac{55t^3}{2}$$
$$+ \frac{9t^2\sin(2t)}{4} - 80t\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2,$$
$$A_{24} = 140t^2\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 - 15t^3\sin(t) - \frac{75t^4}{8} - \frac{45t^2\sin(t)^2}{8} + 108t\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2\sin(t)$$
$$- 512\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 128\sin(t)^2,$$
$$A_{31} = A_{13},$$
$$A_{32} = A_{23},$$
$$A_{33} = 304\sin(t) - 152\sin(2t) - \frac{521t}{2} + \frac{105t\cos(2t)}{2} + 30t^3\cos(t) - 14t^2\sin(t)$$
$$+ 59t^3 + \frac{15t^5}{8} + 6t^3\cos(2t) - 12t^2\sin(2t) + \frac{9t^4\sin(2t)}{16} + 208t\cos(t),$$
$$A_{34} = 15t^4\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 - \frac{9t^4\sin(t)^2}{4} - \frac{165t^4}{4} + 66t^3\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2\sin(t) - \frac{99t^3\sin(t)}{2}$$
$$+ 240t^2\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \frac{651t^2\sin(t)^2}{4} - 528t\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2\sin(t),$$
$$A_{41} = A_{14},$$
$$A_{42} = A_{24},$$
$$A_{43} = A_{34},$$

$$A_{44} = 832\sin(t) - 416\sin(2t) - \frac{521t}{2} + \frac{1161t\cos(2t)}{2} + 72t^3\cos(t) + 280t^2\sin(t)$$
$$+ 30t^4 sin(t) - \frac{1619t^3}{8} + \frac{105t^5}{4} - \frac{309t^3\cos(2t)}{8} + 237t^2\sin(2t)$$
$$- \frac{9t^4\sin(2t)}{4} - 320t\cos(t),$$

и

$$B_{11} = 320\sin(t) - 160\sin(2t) - \frac{401t}{2} + \frac{465tcos(2t)}{2} + 48t^3\cos(t) + 212t^2\sin(t)$$
$$+ 15t^4\sin(t) - \frac{1019t^3}{8} + \frac{165t^5}{8} - \frac{93t^3\cos(2t)}{8} + 84t^2\sin(2t) - \frac{9t^4\sin(2t)}{16}$$
$$- 32t\cos(t),$$
$$B_{12} = \frac{75t^4}{8} + \frac{15t^3\sin(t)}{2} - 100t^2\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \frac{9t^2\sin(t)^2}{8} - 36t\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2\sin(t)$$
$$+ 256\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 - 64\sin(t)^2,$$
$$B_{13} = \frac{9t^4\sin(t)^2}{8} - 15t^4\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \frac{165t^4}{4} - 42t^3\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2\sin(t) + \frac{33t^3\sin(t)}{2}$$
$$- 160t^2\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 - \frac{519t^2\sin(t)^2}{4} + 576t\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2\sin(t) - 512\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2$$
$$+ 128\sin(t)^2,$$
$$B_{14} = \frac{405t}{2} + 288\sin(2t) - 576\sin(t) - \frac{789t\cos(2t)}{2} - 66t^3\cos(t) - 222t^2\sin(t)$$
$$- \frac{45t^4\sin(t)}{2} + \frac{1287t^3}{8} - \frac{45t^5}{2} + \frac{177t^3\cos(2t)}{8} - 150t^2\sin(2t)$$
$$+ \frac{9t^4\sin(2t)}{8} + 192t\cos(t),$$
$$B_{21} = B_{12},$$
$$B_{22} = \frac{(5t - 3\sin(t))(16\cos(t) + 5t^2 + 3t\sin(t) - 16)}{4},$$
$$B_{23} = 88\sin(t) - 44\sin(2t) - 15t^3\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 - \frac{81t\sin(t)^2}{2} - \frac{31t^2\sin(t)}{2} + \frac{55t^3}{2}$$
$$+ \frac{9t^2\sin(2t)}{4} - 80t\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2,$$

$$B_{24} = 140t^2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 - 15t^3 \sin(t) - \frac{75t^4}{8} - \frac{45t^2 \sin(t)^2}{8} + 108t \sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 \sin(t) - 512 \sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 128 \sin(t)^2,$$

$$B_{31} = B_{13},$$

$$B_{32} = B_{23},$$

$$B_{33} = 304 \sin(t) - 152 \sin(2t) - \frac{521t}{2} + \frac{105t \cos(2t)}{2} + 30t^3 \cos(t) - 14t^2 \sin(t) + 59t^3 + \frac{15t^5}{8} + 6t^3 \cos(2t) - 12t^2 \sin(2t) + \frac{9t^4 \sin(2t)}{16} + 208t \cos(t),$$

$$B_{34} = 15t^4 \sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 - \frac{9t^4 \sin(t)^2}{4} - \frac{165t^4}{4} + 66t^3 \sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 \sin(t) - \frac{99t^3 \sin(t)}{2} + 240t^2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \frac{651t^2 \sin(t)^2}{4} - 528t \sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 \sin(t),$$

$$B_{41} = B_{14},$$

$$B_{42} = B_{24},$$

$$B_{43} = B_{34},$$

$$B_{44} = 832 \sin(t) - 416 \sin(2t) - \frac{521t}{2} + \frac{1161t \cos(2t)}{2} + 72t^3 \cos(t) + 280t^2 \sin(t) + 30t^4 \sin(t) - \frac{1619t^3}{8} + \frac{105t^5}{4} - \frac{309t^3 \cos(2t)}{8} + 237t^2 \sin(2t) - \frac{9t^4 \sin(2t)}{4} - 320t \cos(t),$$

$$\psi_{03}{}^{-1}(t) = \frac{2}{t^2 - s^2}\begin{pmatrix} \mathrm{sc} + t & s^2 \\ s^2 & t - \mathrm{sc} \end{pmatrix}. \qquad (2.1.18б)$$

Аналитические выражения для матриц $\boldsymbol{\psi}_2(t)$ и $\boldsymbol{\psi}_{02}(t)$ (для обеих моделей движения КА), найденные в случае ДКУ, имеют таким вид:

$$\boldsymbol{\psi}_{2l}(t) = \begin{pmatrix} \xi_{11l}(t) & \xi_{12l}(t) \\ \xi_{21l}(t) & \xi_{22l}(t) \end{pmatrix}, \qquad (2.1.19а)$$

$$\boldsymbol{\psi}_{2m}(t) = \begin{pmatrix} \xi_{11m}(t) & \xi_{12m}(t) \\ \xi_{21m}(t) & \xi_{22m}(t) \end{pmatrix}, \qquad (2.1.19б)$$

вводя обозначения c = cost, s = sint, получим выrожения $\xi_{11l}(t), \xi_{12l}(t), \xi_{21l}(t), \xi_{22l}(t)$ и $\xi_{11m}(t), \xi_{12m}(t), \xi_{21m}(t)$, $\xi_{22m}(t)$ в виде:

$$\xi_{11l}(t) = \begin{pmatrix} 6t + 2\mathrm{cs} - 8\mathrm{s} & 3t^2 - 6t\mathrm{s} - 2(1 - \mathrm{c}) + 4\mathrm{s}^2 \\ 3t^2 - 6t\mathrm{s} - 2(1 - \mathrm{c}) + 4\mathrm{s}^2 & 8t - 24\mathrm{s} + 3t^3 + 24t\mathrm{c} - 8\mathrm{cs} \end{pmatrix},$$

$$\xi_{12l}(t) = \begin{pmatrix} -2(\mathrm{c} - 1)^2 & 14\mathrm{s} - 4\mathrm{cs} - 10t \\ 4t - 6\mathrm{s} + 6t\mathrm{c} - 4\mathrm{cs} & -\dfrac{(3t - 4\mathrm{s})^2}{2} \end{pmatrix},$$

$$\xi_{21l}(t)=\begin{pmatrix}-2(\mathrm{c}\ -1)^2 & 4t-6\mathrm{s}+6t\mathrm{c}-4\mathrm{cs}\\ 14\mathrm{s}-4\mathrm{cs}-10t & -\dfrac{(3t-4\mathrm{s})^2}{2}\end{pmatrix},$$

$$\xi_{22l}(t)=\begin{pmatrix}2(t-\mathrm{cs}) & 2(\mathrm{c}-1)(2\mathrm{c}-1)\\ 2(\mathrm{c}-1)(2\mathrm{c}-1) & 17t+8\mathrm{cs}-24\mathrm{s}\end{pmatrix},$$

$$\xi_{11m}(t)=\xi_{11l}(t),$$

$$\xi_{12m}(t)=\begin{pmatrix}-2(\mathrm{c}\ -1)^2 & 6\mathrm{s}-4\mathrm{cs}-4t\\ 4t-6\mathrm{s}+6t\mathrm{c}-4\mathrm{cs} & 2c-\dfrac{3t^2}{2}+4c^2+6ts-6\end{pmatrix},$$

$$\xi_{21m}(t)=\begin{pmatrix}-2(\mathrm{c}\ -1)^2 & 4t-6\mathrm{s}+6t\mathrm{c}-4\mathrm{cs}\\ 6\mathrm{s}-4\mathrm{cs}-4t & 2c-\dfrac{3t^2}{2}+4c^2+6ts-6\end{pmatrix},$$

$$\xi_{22m}(t)=\begin{pmatrix}2(t-\mathrm{cs}) & 2\mathrm{c}(2\mathrm{c}-1)\\ 2\mathrm{c}(2\mathrm{c}-1) & 3t+2\mathrm{cs}-4\mathrm{s}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\psi}_{02}(t)=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}t-sc & -\mathrm{s}^2\\ -\mathrm{s}^2 & t+sc\end{pmatrix}. \qquad (2.1.20)$$

Явные выражения для обратных матриц $\psi_2{}^{-1}(t)$ и $\psi_{02}{}^{-1}(t)$ можно записать таким образом:

$$\psi_{2l}{}^{-1}(t)\ =\frac{1}{\det(\psi_{2l}(\mathrm{t}))}\begin{pmatrix}a_{11} & -a_{12} & a_{13} & -a_{14}\\ -a_{21} & a_{22} & -a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & -a_{32} & a_{33} & -a_{34}\\ -a_{41} & a_{42} & -a_{43} & a_{44}\end{pmatrix} \text{ и}$$

$$\psi_{2m}{}^{-1}(t)\ =\frac{1}{\det(\psi_{2m}(\mathrm{t}))}\begin{pmatrix}b_{11} & -b_{12} & b_{13} & -b_{14}\\ -b_{21} & b_{22} & -b_{23} & b_{24}\\ b_{31} & -b_{32} & b_{33} & -b_{34}\\ -b_{41} & b_{42} & -b_{43} & b_{44}\end{pmatrix}, \qquad (2.1.21a)$$

$$\begin{aligned}\det(\psi_{2l}(\mathrm{t}))&=\det(\psi_{2m}(\mathrm{t}))\\ &=288\cos(2t)-1152\cos(t)+360t\sin(2t)+144t^2\cos(t)-24t^4\cos(t)\\ &+120t^3\sin(t)-\frac{99t^4}{2}+3t^6-144t^2\cos(2t)+\frac{3t^4\cos(2t)}{2}-24t^3\sin(2t)\\ &-720t\sin(t)+864\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{11}&=1152\sin(t)-576\sin(2t)-18t+1170t\cos(2t)+108t^3\cos(t)+684t^2\sin(t)\\ &+72t^4\sin(t)-618t^3+\frac{123t^5}{2}-102t^3\cos(2t)+558t^2\sin(2t)\\ &-\frac{27t^4\sin(2t)}{4}-1152t\cos(t),\end{aligned}$$

$$a_{12} = 12t^4 + 18t^3\sin(t) - 168t^2\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 6t^2\sin(t)^2 - 120t\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2\sin(t) + 576\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 - 144\sin(t)^2,$$

$$a_{13} = 168t^2\cos(t) - 210t\sin(2t) + 12t^4\cos(t) + 30t^3\sin(t) - 306t^2 + \frac{201t^4}{4} + 138t^2\cos(2t) - \frac{9t^4\cos(2t)}{4} + 30\mathrm{t}^3\sin(2t) + 420t\sin(t),$$

$$a_{14} = 360\sin(2t) - 720\sin(t) - 720t\cos(2t) - 54t^3\cos(t) - 378t^2\sin(t) - 42t^4\sin(t) + 348t^3 - 33t^5 + 66t^3\cos(2t) - 351t^2\sin(2t) + \frac{9t^4\sin(2t)}{2} + 720t\cos(t),$$

$$a_{21} = a_{12},$$

$$a_{22} = 4(t - \sin(t))(4\cos(t) + t^2 + t\sin(t) - 4),$$

$$a_{23} = 80\sin(t) - 40\sin(2t) - 12t^3\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 - 44t\sin(t)^2 - 6t^2\sin(t) + 20t^3 + 3t^2\sin(2t) - 64t\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2,$$

$$a_{24} = 96t^2\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 - 12t^3\sin(t) - 6t^4 - 6t^2\sin(t)^2 + 96t\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2\sin(t) - 384\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 96\sin(t)^2,$$

$$a_{31} = a_{13},$$

$$a_{32} = a_{23},$$

$$a_{33} = 256\sin(t) - 128\sin(2t) - 198\mathrm{t} + 62t\cos(2t) + 24t^3\cos(t) + 12t^2\sin(t) + 34t^3 + \frac{3t^5}{2} + 6t^3\cos(2t) - 6t^2\sin(2t) + \frac{3t^4\sin(2t)}{4} + 136t\cos(t),$$

$$a_{34} = 192t^2\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 12t^4\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 - 24t^3\sin(t) - 30t^4 + 48\sin(t)^2 + 150t^2\sin(t)^2 - 3t^4\sin(t)^2 - 192t\sin(t) - 192\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 96t\sin(2t) - 18t^3\sin(2t),$$

$$a_{41} = a_{14},$$

$$a_{42} = a_{24},$$

$$a_{43} = a_{34},$$

$$a_{44} = 432\sin(t) - 216\sin(2t) + 432t\cos(2t) + 24t^3\cos(t) + 216t^2\sin(t) + 24t^4 sin(t) - 198t^3 + 18t^5 - 42t^3\cos(2t) + 216t^2\sin(2t) - 3t^4\sin(2t) - 432t\cos(t),$$

и

$$b_{11} = 144\sin(t) - 72\sin(2t) - 18t + 162tcos(2t) + 24t^3\cos(t) + 144t^2\sin(t) + 12t^4\sin(t) - 120t^3 + \frac{27t^5}{2} - 12t^3\cos(2t) + 72t^2\sin(2t) - \frac{3t^4\sin(2t)}{4} - 144t\cos(t),$$

$$b_{12} = 6t^4 + 6t^3\sin(t) - 72t^2\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 - 24t\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2\sin(t) + 192\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 - 48\sin(t)^2,$$

$$b_{13} = \frac{3t^4\sin(t)^2}{2} - 12t^4\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 30t^4 - 48t^3\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2\sin(t) + 30t^3\sin(t) - 144t^2\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 - 126t^2\sin(t)^2 + 456t\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2\sin(t) - 192\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 48\sin(t)^2,$$

$$b_{14} = 144\sin(2t) - 288\sin(t) - 288t\cos(2t) - 30t^3\cos(t) - 162t^2\sin(t) - 18t^4\sin(t) + 150t^3 - 15t^5 + 24t^3\cos(2t) - 135t^2\sin(2t) + \frac{3t^4\sin(2t)}{2} + 288t\cos(t),$$

$$b_{21} = b_{12},$$

$$b_{22} = 4(t - \sin(t))(4\cos(t) + t^2 + t\sin(t) - 4),$$

$$b_{23} = 80\sin(t) - 40\sin(2t) - 12t^3\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 - 44t\sin(t)^2 - 6t^2\sin(t) + 20t^3 + 3t^2\sin(2t) - 64t\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2,$$

$$b_{24} = 96t^2\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 - 12t^3\sin(t) - 6t^4 - 6t^2\sin(t)^2 + 96t\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2\sin(t) - 384\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 96\sin(t)^2,$$

$$b_{31} = b_{13},$$

$$b_{32} = b_{23},$$

$$b_{33} = 256\sin(t) - 128\sin(2t) - 198\mathrm{t} + 62t\cos(2t) + 24t^3\cos(t) + 12t^2\sin(t) + 34t^3 + \frac{3t^5}{2} + 6t^3\cos(2t) - 6t^2\sin(2t) + \frac{3t^4\sin(2t)}{4} + 136t\cos(t),$$

$$b_{34} = 192t^2\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 12t^4\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 - 24t^3\sin(t) - 30t^4 + 48\sin(t)^2 + 150t^2\sin(t)^2 - 3t^4\sin(t)^2 - 192t\sin(t) - 192\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 96t\sin(2t) - 18t^3\sin(2t),$$

$$b_{41} = b_{14},$$

$$b_{42} = b_{24},$$

$$b_{43} = b_{34},$$

$$b_{44} = 432\sin(t) - 216\sin(2t) + 432t\cos(2t) + 24t^3\cos(t) + 216t^2\sin(t) + 24t^4\sin(t) - 198t^3 + 18t^5 - 42t^3\cos(2t) + 216t^2\sin(2t) - 3t^4\sin(2t) - 432t\cos(t),$$

$$\psi_{02}{}^{-1}(t) = \frac{2}{t^2-s^2}\begin{pmatrix} \mathrm{sc}+t & s^2 \\ s^2 & t-\mathrm{sc} \end{pmatrix}. \qquad (2.1.21б)$$

Таким образом, подставляя (2.1.12) и (2.1.13) в (2.1.2), с учетом того, $\boldsymbol{\psi}(0) = 0$ и $\boldsymbol{\psi}_0(0) = 0$, получим $\boldsymbol{a}_0 = \mathbf{X}_0$ и $\boldsymbol{a}_{0z} = \boldsymbol{X}_{0z}$. В связи с этими выражениями и с учетом времени $t_f = \Delta t$, общее решение однородной системы (1.5.12) для движения в плоскости орбиты и вдоль нормали к плоскости опорной орбиты можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{X}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)[\boldsymbol{X}_0 + \boldsymbol{\psi}(\Delta t)\boldsymbol{p}_0] \text{ и } \mathbf{X}_z(t) = \boldsymbol{\Phi}_0(t)[\mathbf{X}_{0z} + \boldsymbol{\psi}_0(\Delta t)\boldsymbol{p}_{0z}], \qquad (2.1.22)$$

Таким образом, решение КЗ представлено в виде:

$$\boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{\psi}^{-1}(t)\big[\boldsymbol{\Phi}(-\Delta t)\mathbf{X}_f - \mathbf{X}_0\big] \text{ и } \boldsymbol{p}_{0z} = \boldsymbol{\psi}_0{}^{-1}(t)\big[\boldsymbol{\Phi}(-\Delta t)\mathbf{X}_{zf} - \mathbf{X}_{0z}\big] \qquad (2.1.23)$$

где $\boldsymbol{p}_0$ – начальное значение вектора сопряженных переменных для движения в плоскости опорной орбиты и $\boldsymbol{p}_{0z}$ – начальное значение вектора сопряженных переменных для движения вдоль нормали к плоскости опорной орбиты, при $t = 0$.

Рассмотрим пример решения задачи оптимизации траектории перелета КА с ИРОМ-двигателем за заданное время $\Delta t = 13980$ с заданными точками в фазовом пространстве: координат $\mathbf{x}_0$ = (10, 100, -5) км и скорость $\mathbf{v}_0$ = (1, -10, 3) м/с. Цель задачи заключается в расчете начального значения вектора сопряженных переменных, что позволит определить оптимальное управление, найти оптимальные траектории, вычислить значение функционала на этих траекториях и решить ОСИ-задачу оптимизации траектории КА. Для решения данной задачи используется математическая постановка, приведенная выше, которая сводится к решению КЗ.

На рисунках 2.1.1 и 2.1.2 показаны зависимости начальных значений вектора сопряженных переменных (px, py, pz, pvx, pvy, pvz) от времени. Данные результаты были получены аналитическим методом с использованием модели HCW.

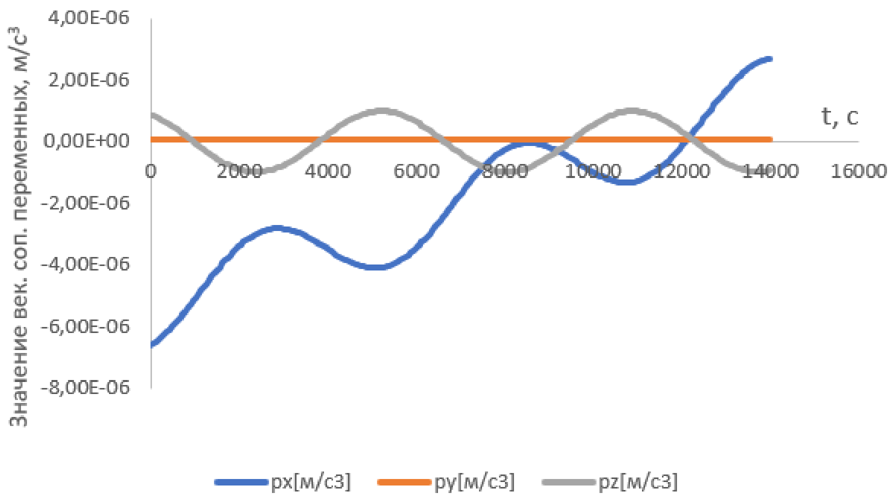

Рис. 2.1.1. Зависимость начальных значений вектора сопряженных переменных от времени

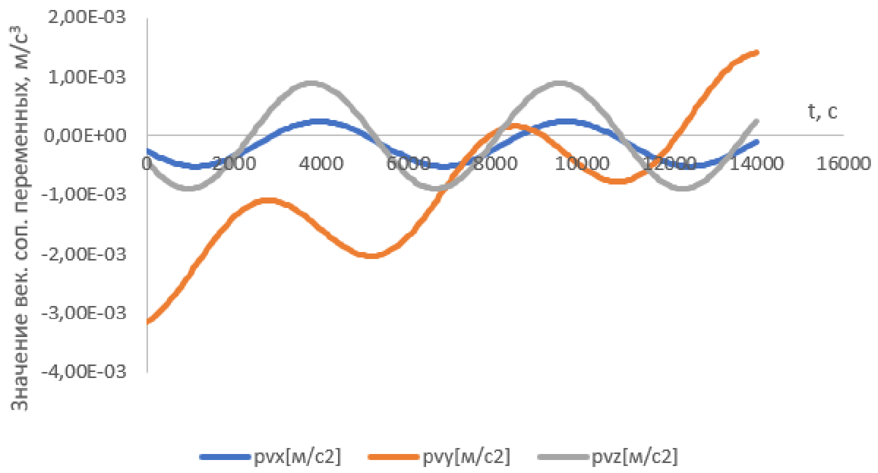

Рис. 2.1.2. Зависимость начальных значений вектора сопряженных переменных от времени

Таким образом, используя ПМП к задаче оптимального управления в случае, когда КА оснащен ИР двигателем (ОМ-задачу), была получена КЗ, которая в данном случае решалась аналитически. Однако для ОСИ-задачи найти аналитическое решение крайне сложно. По этой причине мы введем метод продолжения по параметру и применим его для решения этой КЗ. Сравнение полученных результатов будет показано в шестой главе.

2.2. Численное решение краевой задачи

В этом разделе сначала анализируются несколько популярных численных методов, после чего подробно обсуждается метод ПП, выбранный для решения КЗ оптимального управления.

С увеличением сложности модели и задачи аналитические методы утрачивают свою применимость, а численные методы становятся более предпочтительными. Возникли два различных направления численных методов, оба из которых стремятся минимизировать функции стоимости и нарушения ограничений с использованием дискретных аппроксимаций [157]. Для этого применяются методы, основанные на градиенте, или метаэвристические методы.

Первое направление представляет собой прямые методы, которые преобразуют задачу оптимального управления в оптимизационную задачу [158], используя переменные состояния и управления. Для выполнения уравнений системы используется пошаговая интеграция — либо по явным, либо по неявным правилам. В обоих случаях это приводит к образованию нелинейных уравнений-ограничений, которые должны быть выполнены параметрами, представляющими собой дискретные аппроксимации истории изменения состояния и управления. Таким образом, задача преобразуется в задачу нелинейного программирования [159]. Невзирая на то, что прямые методы менее точны по сравнению с непрямыми, их легкость в реализации, более широкий диапазон сходимости и уменьшенный размер задачи делают их весьма привлекательными.

Один из типов прямых методов заключается в интерполяции только переменных состояния, при этом переменные управления включаются в функцию стоимости. Затем для минимизации стоимости с изменением значений переменных состояния используется градиентный метод или метаэвристика. Такой подход иногда называют методом, основанным на форме, поскольку он связан с "формой" переменных состояния. Ряды Фурье очень популярны в этом методе, особенно при применении к задачам оптимизации траекторий с низкой тягой [160-163]. Траектории, определяемые методами, основанными на форме, удовлетворяют уравнениям движения, граничным условиям и даже ограничению на ускорение тяги. Кроме того, эти методы часто используются в качестве хорошей начальной догадки для других подходов или методов. Такой метод часто используется в задачах оптимизации траекторий КА с учетом различных ограничений. Так, в работе [164] авторы предложили метод формирования, для разработки новой комбинации угла возвышения и радиуса, который применяется для трехмерных траекторий с низкой тягой, используя начальную плоскость орбиты в качестве опорной. Эта новая форма позволяет избежать двух недостатков сферического метода формирования, таких как большое движение вне плоскости и управление диапазоном изменения углов состояния.

Второе направление представляют косвенные методы. Косвенные методы рассматривают дуализированную форму уравнений, включая переменные состояния и сопряженные переменные во временной дискретизации. Иными словами, при дискретизации принимаются во внимание как состояния системы, так и сопряженные переменные. Хотя непрямые методы зачастую демонстрируют более высокую точность по сравнению с прямыми, они сопровождаются тремя ключевыми сложностями. Во-первых, необходимо аналитически сформулировать необходимые условия, включающие дифференциальные уравнения для сопряженных переменных, гамильтониан, условие оптимальности и условия трансверсальности. Во-вторых, из-за дискретизации сопряженных переменных размер задачи существенно увеличивается. В-третьих, требуется угадывание начальных значений сопряженных переменных, что снижает диапазон сходимости [165].

Редко упоминаемым направлением является метод динамического программирования. Его основная идея заключается в разбиении задачи на несколько этапов, где каждый этап соответствует одной подзадаче, а подзадачи связаны рекуррентными соотношениями. Решение всей задачи достигается путем решения подзадач с использованием рекурсивных вычислений. Однако в контексте задач с непрерывными системами состояния метод динамического программирования сталкивается с проблемой "экспоненциального роста размерности", описанной Беллманом [71, 166]. Поэтому его применение в задачах оптимизации траекторий КА с большим количеством переменных сильно ограничено.

Учитывая, что решение ОСИ-задачи сопровождается рядом сложностей, в дальнейшем будет изучен способ использования метода ПП для решения этих задач.

2.2.1. Метод продолжения по параметру

В данной работе исследуется численный подход, основанный на ньютоновской гомотопии. Этот подход известен как метод продолжения по параметру, позволяющий находить решение поставленной КЗ путем её преобразования в задачу Коши с использованием специально сконструированной КЗ, имеющей известное решение.

Предложенный подход сводит задачу оптимального управления к КЗ. Применение метода продолжения по параметру к КЗ (1.5.12) и (1.5.19) с краевыми условиями (1.5.13), (1.5.20) и (1.5.21) позволяет получить ее решение.

В основе метода лежит представление конечных краевых условий в виде нелинейной системы уравнений для вектора невязок $\mathbf{g}$, зависящих от вектора неизвестных параметров $\mathbf{z}$.

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}) = 0, \tag{2.2.1}$$

где $\mathbf{g}$ - вектор невязок; $\mathbf{z}$ - вектор неизвестных параметров КЗ.

Следует подчеркнуть, что в некоторых задачах (например, с иными краевыми условиями) отдельные компоненты вектора невязок могут быть вычислены как в начальной точке, так и в некоторых промежуточных точках траектории решения.

При некотором начальном приближении для неизвестных параметров краевой задачи $\boldsymbol{z}_0$ вычислим вектор невязок (2.1.1):

Пусть $\boldsymbol{z}_0$ - некоторое начальное приближение для вектора неизвестных параметров краевой задачи. Тогда вектор невязок в этой точке (2.1.1) будет равен:

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}_0) = \mathbf{b} \tag{2.2.2}$$

Рассмотрим погружение системы уравнения (2.2.2) в однопараметрическое семейство нелинейных уравнений следующего вида:

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}) = (1 - \lambda)\mathbf{b}, \tag{2.2.3а}$$

где λ - параметр продолжения ($\lambda \in [0,1]$). Представив вектор $\boldsymbol{z}$ как функцию от параметра λ: $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\lambda)$, причем $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$ из уравнения (2.2.2), получим:

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}(\lambda)) = (1 - \lambda)\mathbf{b}. \tag{2.2.3б}$$

Условие выполнения равенства (2.2.3б) для всех значений λ в диапазоне $0 \leq \lambda \leq 1$ дает возможность сформировать непрерывное семейство решений. Очевидно, что при $\lambda = 0$ уравнение (2.2.3б) совпадает с уравнением (2.2.2), а при $\lambda = 1$ оно преобразуется в уравнение для невязок КЗ (2.1.15).

Уравнение (2.2.3б) представляет собой непрерывную деформацию системы уравнений $\mathbf{g}(\mathbf{z}) - \mathbf{b} = 0$, обладающей известным решением $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0$, в исходную систему $\mathbf{g}(\mathbf{z}) = 0$.

Дифференцируя (2.2.3б) по параметру продолжения λ и выразив d**z**/dλ, мы получаем формальное преобразование краевой задачи (2.2.1) в задачу Коши вида:

$$\frac{d\mathrm{z}}{d\lambda} = -\left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{z}}\right)^{-1} \mathbf{b}, \ \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0, \ 0 \leq \lambda \leq 1 \tag{2.2.4}$$

Система уравнений (2.2.4) представляет собой систему дифференциальных уравнений метода ПП. Интегрируя (2.2.4) по λ от 0 до 1 с учетом условий (2.2.2), (2.2.3б), мы находим решение исходной краевой задачи, т.е. искомый вектор $\mathbf{z} = \mathbf{z}(1)$.

Для успешной реализации метода продолжения необходимо, чтобы матрица частных производных $\partial\mathbf{g}/\partial\mathbf{z}$ существовала и была невырожденной на всем интервале продолжения $\lambda \in [0,1]$.

Преимущество метода продолжения заключается в возможности применения высокоточных методов численного интегрирования для решения системы (2.2.4), например, представленных в работах [59, 60, 144]. В отличие от методов Ньютона, градиентного спуска и др., обладающих порядком точности 1-2, метод продолжения не накладывает таких ограничений.

В некоторых случаях целесообразно вводить параметр продолжения λ в правую часть уравнений движения и краевых условий. В этом случае функция невязок $\mathbf{g}$ будет явно зависеть от λ, а система дифференциальных уравнений метода продолжения примет вид:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = -\left(\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{z}}\right)^{-1}\left(\mathbf{b} + \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\lambda}\right) \tag{2.2.5}$$

Для вычисления матрицы чувствительности $\partial\mathbf{g}/\partial\mathbf{z}$ или вектора $\partial\mathbf{g}/\partial\lambda$ можно использовать различные методы численного интегрирования, применяемые к элементам этой матрицы [7, 131-133]. Существуют также варианты метода продолжения с конечно-разностным вычислением матрицы чувствительности, которые оказались эффективными и позволили получить результаты с минимальными затратами на разработку математической модели.

Однако эффективность алгоритма с конечно-разностным вычислением снижается из-за низкой точности вычисления производных и наличия шума в вычисленных значениях фазового и сопряженных векторов.

Вариант метода ПП с совместным интегрированием дифференциальных уравнений для оптимальной системы и элементов матрицы $\partial\mathbf{g}/\partial\mathbf{z}$ оказался более эффективным в смысле численной устойчивости и быстродействия, несмотря на увеличение порядка системы.

Метод комплексного шага является перспективным вариантом метода продолжения, обеспечивающим простоту вычисления производных. Он был успешно применен в [131-136] для решения задач оптимизации траекторий космических аппаратов с малой тягой.

В данной работе рассматривается метод комплексного шага для численного дифференцирования функции g(x). Метод основан на разложении действительной функции g(x) в ряд Тейлора с варьированием аргумента по мнимой оси. Формула (2.2.6) показывает, что для определения производной g'(x) достаточно вычислить мнимую часть значения функции g(x+ik) при малом значении k.

$$g(x+ik) = g(x) + ikg'(x) - k^2\frac{g''(x)}{2!} + \cdots,$$

$$Im[g(x+ik)] = kg'(x) - k^3\frac{g'''(x)}{3!} + \cdots = kg'(x) + O(k^3),$$

$$g'(x) = \frac{Im[g(x+ik)]}{k} + O(k^2), \tag{2.2.6}$$

где k – шаг дифференцирования, i - мнимая единица.

Основным преимуществом метода комплексного шага является возможность использования очень малых шагов без потери точности, что особенно важно при вычислении производных функций с высокой чувствительностью к изменению аргумента.

Для иллюстрации точности метода был проведен численный эксперимент с функцией "$g(x) = \frac{e^x \sin x}{\sin^5 x + cos^5 x}$". Результаты, представленные на рисунке 2.2.1, демонстрируют высокую точность метода комплексного шага по сравнению с методами конечных разностей, особенно при малых значениях шага k.

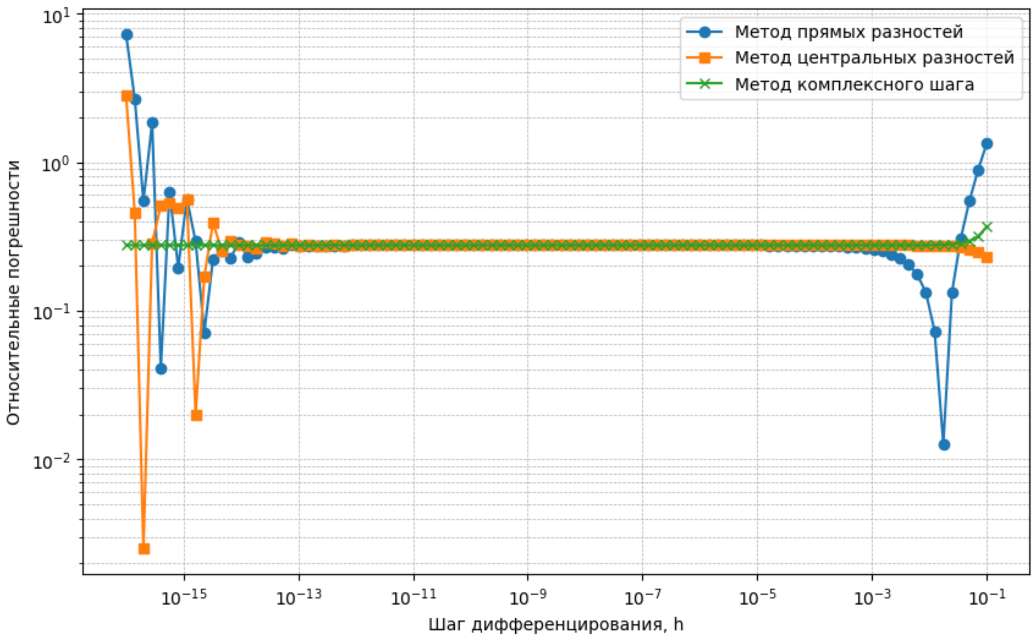

Рисунок 2.2.1. Сравнение относительной погрешности значений первой производной при x=π/6, вычисленных с использованием методов конечных разностей и комплексного шага

Важно отметить, что применение метода комплексного шага требует вычисления вектора невязок в комплексной области. Это налагает определенные требования на эффективность численного решения систем дифференциальных уравнений в комплексной области.

В работе [137] для решения задач оптимизации траекторий КА с малой тягой был предложен комплексный вариант алгоритма (2.2.7), позволяющий разделить систему дифференциальных уравнений на две части и использовать для ее интегрирования любой известный метод.

$$\frac{d(a+ib)}{dt} = \mathbf{g}(a+ib) \rightarrow \begin{cases} \frac{da}{dt} = Re[\mathbf{g}(a+ib)] \\ \frac{db}{dt} = Im[\mathbf{g}(a+ib)] \end{cases}. \qquad (2.2.7)$$

Этот алгоритм позволяет разделить систему дифференциальных уравнений для комплексных переменных на две части, а затем использовать для интегрирования этой системы любой метод без какой-либо доработки. Конечно, конкретная численной реализации метода непрерывного продолжения, особо в форме (2.2.5), во многом определяется особенностями решаемой задачи оптимизации.

Для обеспечения устойчивости решения КЗ предполагается использовать сглаженное представление релейной функции тяги, представленное в пятом главе. В этой функции вступаются некоторые параметры с различными значениями ε, позволяющими урегулировать значение параметра продолжения. Например, на рис.2.2.2 представлена зависимость $\delta(S)$ от S для разных значений τ.

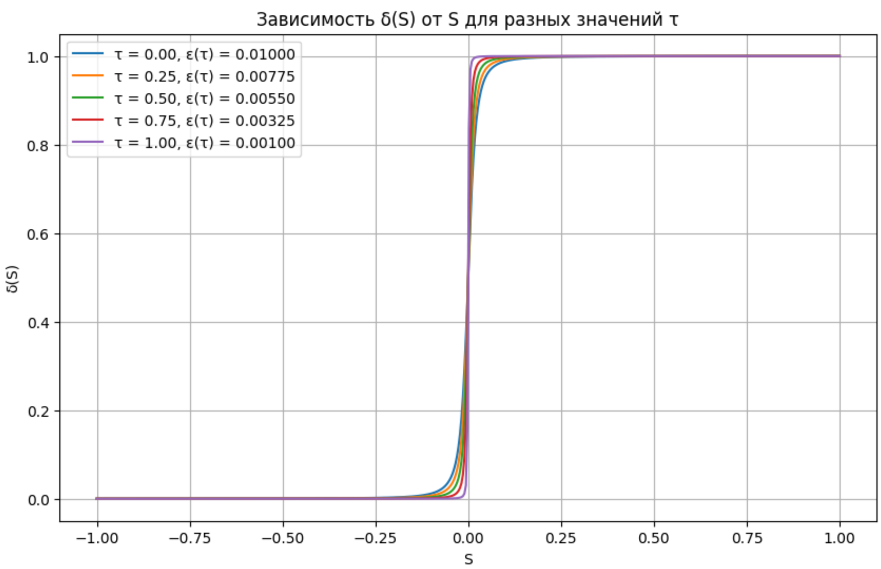

Рисунок 2.2.2. зависимость $\delta(S)$ от S для разных значений τ

В настоящее время применение метода продолжения по параметру для решения практических задач, таких как межпланетные перелеты, сталкивается с трудностями из-за многоэкстремальной природы КЗ. Это делает процесс поиска решения более сложным, особенно при оптимизации траекторий между планетами с разными периодами обращения (например, между Землей и Меркурием). Одна из ключевых проблем заключается в неоптимальном количестве витков на промежуточных траекториях, что значительно усложняет задачу. В таких условиях обычные методы могут не обеспечить поиск решения с оптимальным количеством витков вокруг притягивающего центра.

Чтобы преодолеть такие сложности удобно использовать альтернативные начальные приближения, которые обеспечат нахождение решений с необходимым количеством витков. В практическом решении данной задачи в работе [8] был предложен метод продолжения по гравитационному параметру, который позволяет контролировать изменение гравитационного параметра в процессе поиска решения и фиксировать угловую дальность перелета КА.

2.3. Заключение по разделу

В разделе представлены методы решения КЗ, введенных в первой в первой главе. Представленные методы позволяют находить решения КЗ на основе принципа максимума Понтрягина. Для решения задачи оптимизации траектории КА с малой тягой предлагаются аналитические, численные и численно-аналитические подходы. Введен аналитический метод решения краевой ОМ-задачи, а также вариант метода ПП, основанный на ньютоновской гомотопии между целевой системой нелинейных уравнений и системой с известным решением. Данный метод позволяет свести КЗ для рассматриваемой системы ОДУ к задаче Коши, требующей интегрирования вложенных систем ОДУ. Рассмотрены различные методы вычисления матрицы частных производных невязок КЗ по ее неизвестным параметрам. Среди них наиболее предпочтительным является метод комплексного шага благодаря высокой точности и простоте реализации вычислительных алгоритмов.

ГЛАВА 3. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ПАРАМЕТОВ КОМПЛАНАРНЫХ МАНЕВРОВ ПЕРЕХОДОВ И ВСТРЕЧИ В ОКРЕСТНОСТИ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ

2.1. Алгоритм решения компланарной задачи перехода

В работе [40] представлен алгоритм решения компланарной задачи перехода, который предусматривает выполнение перехода с начальной орбиты на конечную с учетом всех указанных в [1, 87] условий.

Безусловно, нашей целью здесь является представление упрощенного подхода к этому алгоритму, чтобы затем решить задачу встречи, на которой будет сосредоточено наше основное внимание. Ниже представлен небольшой алгоритм, основанный на ранее упомянутом [40], состоящий из следующих шагов:

- при оптимизации процесса коррекции вектора эксцентриситета предполагается применение импульсов скорости в точках, обеспечивающих наилучший результат [1], определяется угол:

$$\mathrm{tg}\theta_e = \frac{\Delta e_y}{\Delta e_x}, \tag{3.1.2}$$

- определяются первый и второй углы направления приложения импульсов:

$$\theta_1 = \theta_e,\ \theta_2 = \theta_1 + \pi, \tag{3.1.3}$$

- а также их величины, соответствующие оптимальному решению по формулам:

$$\Delta V_{t1} = \frac{1}{4}(\Delta a + \Delta e), \tag{3.1.4}$$

$$\Delta V_{t2} = \frac{1}{4}(\Delta a - \Delta e). \tag{3.1.5}$$

Если $|\Delta a| \leq \Delta e,$ СХС маневра имеет вид [1, 87]:

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{N} |\Delta V_{ti}| = \frac{\Delta e}{2}. \tag{3.1.6}$$

2.2. Компланарная задача встречи

Одной из сложных КМ, описанных в литературе, является встреча в космосе.

Задача относится к области орбитальной механики и заключается в организации сближения (встречи) двух КА, движущихся в одной плоскости орбиты, в заданной точке пространства или на орбите.

Встреча двух КА происходит, когда оба аппарата достигают одинаковых векторов положения и скорости в одно и то же время. Однако, к началу последовательности сближения КА могут находиться на значительном расстоянии друг от друга, при этом один из них может находиться в исходной точке.

Начальный этап последовательности сближения представляет собой фазу, включающую выполнение маневров в определенном временном порядке, чтобы два спутника подошли друг к другу. Для этого шага обычно используется модель состояния, включающая вектор положения и скорости, которая выбирается в качестве общего динамического уравнения для моделирования траектории движения КА.

Заключительный этап сближения представляет собой следующий шаг. На этом этапе выполняются маневры, которые обеспечивают необходимое относительное движение между КА для их стыковки и встречи, включая перемещение одного из КА (преследовательного КА) относительно другого (целевого КА).

Система координат привязана к одному из аппаратов (цель) на этом этапе маневра. Наиболее эффективная модель для задачи встречи КА основана на уравнениях Эльясберга, которые широко применяются для решения задачи встречи КА на орбитах.

2.2.1. Постановка задачи

В данной работе рассматривается задача определения параметров маневра перехода между двумя близкими круговыми орбитами. Решение задачи осуществляется в рамках приближенного импульсного подхода, применимого к невозмущенному кеплеровскому движению.

Предполагается, что управление осуществляется в форме импульсов скорости, которые прикладываются на N последовательных витках орбиты. На каждом витке выполняются два импульсных воздействия. В рамках линейного приближения задача перехода с начальной орбиты в определенную точку заданной компланарной орбиты (задача встречи) за фиксированное время с использованием N импульсов скорости могут быть представлены в виде [53]:

$$\sum_{i=1}^{N}(\Delta V_{ri}\sin\theta_i + 2\Delta V_{ti}\cos\theta_i) = \Delta e_x, \qquad (3.2.1а)$$

$$\sum_{i=1}^{N}(-\Delta V_{ri}\cos\theta_i + 2\Delta V_{ti}\sin\theta_i) = \Delta e_y, \qquad (3.2.1б)$$

$$\sum_{i=1}^{N} 2\Delta V_{ti} = \Delta a, \qquad (3.2.1в)$$

$$\sum_{i=1}^{N}(2\Delta V_{ri}(1-\cos\theta_i) + \Delta V_{ti}(-3\theta_i + 4\sin\theta_i)) = \Delta t, \qquad (3.2.1г)$$

где $\Delta e_x = e_f \cos\sigma_f - e_0 \cos\sigma_0$, $\Delta e_y = e_f \sin\sigma_f - e_0 \sin\sigma_0$, $\Delta a = (a_f - a_0)/r_0$, $\Delta t = n(t_f - t_0)$, $\Delta V_{ti} = \Delta\tilde{V}_{ti}/V_0$, $\Delta V_{ri} = \Delta\tilde{V}_{ri}/V_0$.

Задача определения оптимальных параметров маневра может быть сформулирована следующим образом: необходимо найти значения параметров ΔV_{ri}, ΔV_{ti}, θ_i (i=1,…,N), минимизирующие СХС маневров ΔV. СХС определяется выражением:

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{N} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\Delta V_{ri}^2 + \Delta V_{ti}^2},$$

при соблюдении ограничений, представленных в уравнениях (3.2.1а) - (3.2.1г).

2.2.2. Алгоритм решения задачи встречи

При решении задачи встречи значения импульсов скорости ΔV_{t1} и ΔV_{t2}, полученные в ходе решения задачи перехода, распределяются равномерно между N витками, разрешенными для маневра:

$$\Delta V_{1t} = \sum_{i=1}^{N} \Delta V_{1ti}, \tag{3.2.2}$$

$$\Delta V_{2t} = \sum_{i=1}^{N} \Delta V_{2ti}, \tag{3.2.3}$$

где N - количество витков, на которых разрешено маневрирование.

Для упрощения решения задачи предполагаются линейное изменение и распределение значений импульсов скорости по виткам, чтобы удовлетворить уравнение (3.2.1г):

$$\Delta V_{1ti} = \Delta V_{1t1} + (\Delta V_{1tN} - \Delta V_{1t1})(\mathrm{i} - 1)/(N - 1)\,, \tag{3.2.4}$$

$$\Delta V_{2ti} = \Delta V_{2t1} + (\Delta V_{2tN} - \Delta V_{2t1})(i - 1)/(N - 1). \tag{3.2.5}$$

Здесь ΔV_{1t1}, ΔV_{1tN} и ΔV_{2t1}, ΔV_{2tN} представляют собой значения импульсов скорости на первом и последнем витках, разрешенных для маневра, и являются частью первого и второго импульса скорости, полученных в ходе решения задачи перехода.

Подставляя значения импульсов скорости, вычисленных по формулам (3.2.4), (3.2.5) в (3.2.2) и (3.2.3), получим:

$$\Delta V_{1t} = \sum_{i=1}^{N} \Delta V_{1ti} = \frac{N(\Delta V_{1t1} + \Delta V_{1tN})}{2}, \tag{3.2.6}$$

$$\Delta V_{2t} = \sum_{i=1}^{N} \Delta V_{2ti} = \frac{N(\Delta V_{2t1} + \Delta V_{2tN})}{2}. \tag{3.2.7}$$

Используя (3.2.6) и (3.2.7), получим выражения для поиска $\Delta V_{1tN}, \Delta V_{2tN}$:

$$\Delta V_{1tN} = \frac{2\Delta V_{1t}}{N} - \Delta V_{1t1} \tag{3.2.8}$$

$$\Delta V_{2tN} = \frac{2\Delta V_{2t}}{N} - \Delta V_{2t1} \quad (3.2.9)$$

После подстановки вычисленных значений $\Delta V_{1tN}, \Delta V_{2tN}$ в формулы (3.2.4) и (3.2.5), мы получаем значения всех импульсов скорости, выраженных исключительно через ΔV_{1t1} и ΔV_{2t1}:

$$\Delta V_{1ti} = 2\Delta V_{1t}(\mathrm{i}-1)/N(N-1) + \Delta V_{1t1}\left[1 - \frac{2(\mathrm{i}-1)}{N-1}\right], \quad (3.2.10)$$

$$\Delta V_{2ti} = 2\Delta V_{2t}(\mathrm{i}-1)/N(N-1) + \Delta V_{2t1}\left[1 - \frac{2(\mathrm{i}-1)}{N-1}\right]. \quad (3.2.11)$$

Подставив эти значения в уравнение (3.2.1г), получаем линейное уравнение с двумя неизвестными $\Delta V_{1t1}, \Delta V_{2t1}$. Поскольку углы приложения импульсов скорости известны, коэффициенты при этих импульсах также определены:

$$\theta_{1i} = \theta_e + 2\pi(N_\mathrm{i} - N), \quad (3.2.12)$$

$$\theta_{2i} = \theta_e + \pi + 2\pi(N_i - N). \quad (3.2.13)$$

Перебирая в заданных пределах значение переменной ΔV_{1t1}, для каждого значения из уравнения (3.2.1г) определяется значение ΔV_{2t1}. Затем, используя формулы (3.2.10) и (3.2.11), вычисляются величины всех импульсов скорости.

Суммируя модули всех импульсов скорости, определяем СХС данного решения. Решение с минимальной СХС принимается в качестве решения компланарной задачи встречи. Если СХС найденного решения совпадает с СХС решения задачи перехода, то найдено решение с минимально возможной СХС.

На следующем шаге рассчитывается длительность каждого из обнаруженных маневров. Продолжительность каждого маневра определяется с использованием соответствующей формулы, приведенной в [1, 87]:

$$\Delta\varphi_i = \frac{\omega_c}{\omega}\Delta V_i, \quad (3.2.14)$$

где ω_c - центростремительное ускорение опорной круговой орбиты ($\omega_c = \frac{V_0^2}{r_0}$), ω – ускорение, создаваемое ДУ ($\omega = \frac{\mathrm{T}}{m}$), m - масса активного КА, T – тяга его двигателя.

Если продолжительность максимального импульса скорости составляет не более 20°, решение приближается к импульсному, и задачу можно считать решенной. В случае, когда продолжительность маневров велика, переходим к решению с использованием МТ.

2.3. Решение задачи с «малой тягой»

Для каждого витка вычисляются изменения эксцентриситета и БПО, вызванные импульсами скорости, рассчитанными для этого витка:

$$\Delta e_i = 2\Delta V_{1ti} - 2\Delta V_{2ti}, \qquad (3.3.1)$$

$$\Delta a_i = 2\Delta V_{1ti} + 2\Delta V_{2ti}. \qquad (3.3.2)$$

Затем определяется необходимая продолжительность маневров МТ, которые приведут к аналогичным изменениям этих элементов:

$$4\sin\frac{\Delta\varphi_{1i}}{2} - 4\sin\frac{\Delta\varphi_{2i}}{2} = \frac{\omega_c \Delta e_i}{\omega},$$

$$2\Delta\varphi_{1i} + 2\Delta\varphi_{2i} = \frac{\omega_c \Delta a_i}{\omega}. \qquad (3.3.3)$$

Исходя из системы (3.3.3), можно определить следующие величины $\Delta\varphi_{1i}$, $\Delta\varphi_{2i}$ [30]:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{\omega_c \Delta a}{4\omega n} + 2\arcsin\left[\frac{\omega_c \Delta e}{8wn\cos\left(\frac{\omega_c \Delta a}{8\omega n}\right)}\right],$$

$$\Delta\varphi_2 = \frac{\omega_c \Delta a}{4\omega n} - 2\arcsin\left[\frac{\omega_c \Delta e}{8wn\cos\left(\frac{\omega_c \Delta a}{8\omega n}\right)}\right]. \qquad (3.3.4)$$

Итак, виток за витком находим продолжительность всех маневров. Задача с МТ корректно решена. Подтверждено, что при значении аргумента арксинуса, превышающем единицу, решение задачи невозможно в рамках имеющихся параметров тяги и массы КА для заданного числа витков.

Найденное решение с использованием малой тяги обеспечивает идентичные изменения БПО и вектора эксцентриситета по сравнению с исходным импульсным решением.

С достаточной точностью выполняется также уравнение (3.2.1г), поскольку середины продолжительных маневров совпадают с моментами приложения импульсов скорости, что гарантирует требуемое время прилета в точку встречи.

Важно отметить, что в представленной компланарной задаче встречи используются линеаризованные уравнения движения, которые не учитывают нецентральность гравитационного поля, влияние атмосферы и другие возмущения. Это может привести к недостаточной точности выполнения терминальных условий системы (3.2.1а) - (3.2.1г). Для повышения точности решения задачи предлагается использовать итерационную схему, описанную в разделе (3.6) [30, 54].

2.4. Модифицированный алгоритм решения задачи встречи

В случае КА с двигателями малой тяги при низкой тяге, модифицированный алгоритм оказывается более эффективным [87]. Проблема связана с увеличением продолжительности некоторых крайних импульсов при уменьшении тяги. Для минимизации этой продолжительности, величины этих импульсов ограничиваются до значений, обеспечивающих максимальное изменение эксцентриситета. Вследствие этого, несколько последующих импульсов увеличиваются, что требует следующих шагов:

i) задание начальных значений параметров и переменных;

ii) решение задачи перехода между компланарными орбитами с использованием уравнений (3.1.4) и (3.1.5) для вычисления двух величин импульсов скорости;

iii) решение задачи встречи с распределением величин импульсов скорости по N виткам, удовлетворяя условиям времени с помощью уравнений (3.2.10), (3.2.11) и (3.2.1г). При необходимости пересчитываются значения импульсов на каждом витке с учетом алгебраических вычислений;

iv) определение изменения эксцентриситета и БПО путем расчета их изменения на каждом витке, аналогично предыдущему алгоритму;

v) учет продолжительности маневров с использованием уравнения (3.3.4). При недостижении решения, возврат к шагу 3; в противном случае переход к следующему шагу;

vi) расчет общих затрат с использованием уравнения (3.2.14).

Таким образом, модифицированный алгоритм позволяет эффективно решать задачу встречи КА с малой тягой при низкой тяге.

2.5. Алгоритм решения задачи встречи при фиксировании импульсов скорости

В случае пересечения начальной и конечной орбит маневр перехода на новую траекторию реализуется с помощью двух импульсных воздействий: разгонного и тормозного. Распределение величин этих импульсов по разрешенным для маневра виткам осуществляется в соответствии с требованиями задачи встречи, импульсы скорости на первом и последнем витках достигают максимальных значений по модулю.

При уменьшении тяги продолжительность первого и последнего импульсов увеличивается, что может превысить оптимальное время, необходимое для коррекции эксцентриситета. Например, чтобы выполнить заданное временное условие, значительный разгонный импульс может быть приложен в начале, а мощный тормозной импульс — в конце маневра.

Для сокращения времени выполнения этих маневров мы ограничиваем их значению так, чтобы оно оставалось в пределах, при которых эксцентриситет изменяется на максимально возможное значение (180 градусов), при этом увеличивая количество внутренних маневров. Если их не хватает для существенного влияния на время прилета в точку встречи, то можно добавить импульс на конкретном витке и т.д. Из промаха прилета без импульсов в точку встречи вычитаем влияние этих фиксированных импульсов (4-х, 5-ти или шести выбор зависит от влияния на время прилета в точку встречи).

В сформулированной задаче встречи используется алгоритм, который состоит из следующих этапов:

1. Для продолжительных маневров рассчитываем, как фиксированных (N импульсов) маневров на крайних витках меняют эксцентриситет и БПО;

2. Затем решаем задачу перехода для оставшихся промахов по эксцентриситету и БПО;

3. Рассчитываем изменение времени прилета за счет влияния N импульсов;

4. Затем распределяем два новых рассчитанных импульсов скорости между оставшимися витками, чтобы скорректировать оставшийся после фиксированных импульсов промах по времени;

5. Определяем изменение эксцентриситета и БПО на каждом витке;

6. Учитываем продолжительность маневров;

7. Если новые внутренние импульсы тоже более допустимой величины, то процедура повторяется, появляются новые фиксированные импульсы скорости;

8. Рассчитываем общие затраты.

2.6. Итерационная процедура

Поисковые методы, работающие путем итеративного улучшения решений, оказались особенно эффективными для решения крупных комбинаторных задач на принятие решений или оптимизацию. Действительно, для многих крупных задач систематические методы поиска, которые исчерпывающе исследуют пространство решений, могут не успеть найти решение за приемлемое время. В отличие от них, методы итеративного улучшения начинают с случайного набора решений, которые могут быть как согласованными, так и несогласованными, и с помощью локальных изменений стремятся достичь лучших решений, в идеале – оптимальных.

Зачастую при моделировании маневров КА, учитывающих нелинейные факторы, такие как неоднородность гравитационного поля и воздействие атмосферы, точность достижения целевых условий, обеспечиваемая линейными моделями (3.6) и (4.9), может оказаться недостаточной [1, 30]. Для повышения точности решения задачи предлагается воспользоваться итерационной процедурой, описанную в работах [1, 22, 30, 87].

Данная процедура позволяет получить решение, близкое к оптимальному. Однако гарантия строго оптимального результата отсутствует. Ниже представлена блок-схема данной итерационной процедуры [1]:

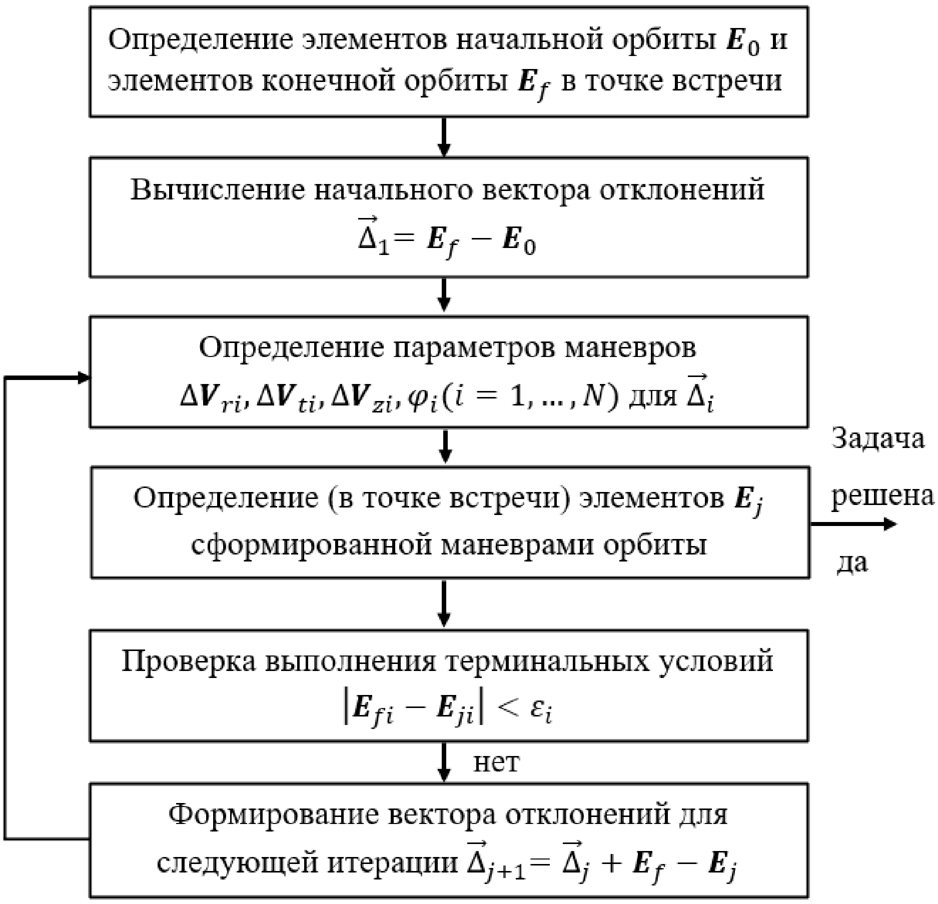

Рис. 3.6.1. блок-схема итерационной процедуры [1].

2.7. Заключение по разделу

В разделе рассмотрены алгоритмы решения задачи импульсного перехода между компланарными орбитами, импульсная задача встречи КА на компланарных орбитах и компланарной задачи встречи КА с помощью ДУ малой тяги. Введены алгоритмы расчета параметров маневров КА, которые оказались очень эффективны с учетом того, что алгоритмы позволяли получить высокую эффективность в нахождении практически оптимальных решений задачи встречи КА, при условии, что начальная фаза принадлежит оптимальному фазовому диапазону, а СХС решения задачи встречи совпадает со СХС оптимального решения задачи перехода. Данная эффективность сохраняется даже при использовании двигателей МТ. Представлен алгоритм решения задачи встречи с фиксированными импульсами скорости, который позволяет сократить продолжительность этих импульсов, ограничивая их величину пределами, до которых они оказывают максимальное воздействие на изменение эксцентриситета орбиты (180 градусов). Кроме того, представлена итерационная процедура, чтобы решить задачи встречи КА с учетом необходимости учесть реальную точность выполнения заданных терминальных условий.

ГЛАВА 4. АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕКОМПЛАНАРНЫХ МАНЕВРОВ ПЕРЕХОДОВ И ВСТРЕЧИ В ОКРЕСТНОСТИ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ

2.1. Алгоритм решения задачи перехода между некомпланарными орбитами

В рамках расчета $\Delta V_{ti}, \Delta V_{zi}$ и θ_i $(\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{N})$, используется алгоритм, аналогичный описанному в работах [1, 22]. В этом контексте считаются дополнительные ограничения, такие как: $\Delta V_{ti}, \Delta V_{zi}$ и θ_i $(\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{N})$ и другие параметры.

В частности, $\Delta V_{r1}, \ldots, \Delta V_{rn}$, как правило, считаются недопустимыми и их использование строго запрещается в большинстве задач. В данной работы это ограничение учитывается с особой тщательностью.

Чтобы решить эту задачу часто используется импульсное базовое решение, основанное на применении исключительно трансверсальных и боковых составляющих импульсов скорости. В данном подходе используется алгоритм из [1, 22], в котором угол θ_1 варьируется в заданном интервале для достижения оптимального решения.

Далее, для реализации данного алгоритма с использованием метода перебора по углу θ_1, следует выполнить следующие шаги:

1- задать диапазон угла θ_1 и шаг перебора: угол θ_1 варьируется от 0 до 2π. Шаг перебора можно выбрать в зависимости от необходимой точности.

2- для каждого значения θ_1 вычислить импульсы скорости $\Delta V_{t1}, \Delta V_{t2}$ и угол θ_2: используем уравнения (4.1.1), (4.1.2) и (4.1.3) для вычисления этих импульсов скорости и угла θ_2:

$$\Delta V_{t1} = \frac{\Delta e^2 - \Delta a^2}{4(\Delta e_y \sin\theta_{1f} + \Delta e_x \cos\theta_{1f} - \Delta a)}, \tag{4.1.1}$$

$$\Delta V_{t2} = \frac{\Delta a}{2} - \Delta V_{t1}, \tag{4.1.2}$$

$$\mathrm{tg}\theta_2 = \frac{\frac{\Delta e_y}{2} - \Delta V_{t1}\sin\theta_{1f}}{\frac{\Delta e_x}{2} - \Delta V_{t1}\cos\theta_{1f}}. \tag{4.1.3}$$

3- используем уравнения (4.1.4) и (4.1.5), чтобы определить боковые составляющие импульсов $\Delta V_{z1}, \Delta V_{z2}$ для каждого значения θ_1 и соответствующего θ_2:

$$\Delta V_{z1} = -\left(\frac{\Delta z_1 \cos\theta_2 + \Delta V_{1z}\sin\theta_2}{\sin(\theta_1 - \theta_2)}\right), \tag{4.1.4}$$

$$\Delta V_{z2} = -\left(\frac{\Delta z_1 \cos\theta_1 + \Delta V_{1z}\sin\theta_1}{\sin(\theta_1-\theta_2)}\right). \qquad (4.1.5)$$

4 - определить критерий оптимизации: необходимость нахождения параметров ΔV_{ti}, ΔV_{zi}, θ_i (i=1,...,N), при которых минимальна СХС маневров ΔV

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{N}\sqrt{\Delta V_{ti}^2 + \Delta V_{zi}^2}.$$

5 - найти оптимальный угол θ_1: перебираем значения угла θ_1 и находим то, которое минимизирует выбранный критерий (определенный в пункте 4).

Таким образом, метод перебора позволил провести оптимизацию по одной переменной – углу приложения импульсов скорости (θ_1). Для каждого значения этого угла были определены величины импульсов скорости $\Delta V_{t1}, \Delta V_{t2}$, угол θ_2 и боковые составляющие импульсы скорости $\Delta V_{z1}, \Delta V_{z2}$. Из всех полученных решений было выбрано то, которое минимизирует суммарную характеристическую скорость.

Параметры данного решения могут быть определены с использованием геометрической интерпретации, представленной в [40]. Геометрическое представление задачи позволяет определить, к примеру, угол первого импульса скорости. После этого, с использованием формул (4.1.1) - (4.1.3), (4.1.4), (4.1.5), можно вычислить остальные параметры маневра.

Несомненно, возникает потребность в разработке аналитического решения для верификации эффективности СХС универсального решения, полученного численным методом. Согласно численным исследованиям, представленным в работах [1, 40], показали, что эффективность СХС универсального решения сравнима с СХС оптимальных решений, описанных ранее. Следовательно, аналитическое решение некомпланарной задачи перехода, представленное в работе [1], может успешно использоваться для решения прикладных задач, требующих высокой скорости вычислений. При этом итерационная процедура может быть применена для получения решения с заранее заданными терминальными условиями, обеспечивая необходимую точность.

Помимо этого, в ряде случаев использование универсального решения в итерационной процедуре может привести к более низкой конечной СХС по сравнению с оптимальным решением. В сложных задачах, требующих многократного выполнения итераций для достижения заданной точности, применение универсального решения может значительно сократить количество необходимых итераций

Как показано в работе [1], порядок реализации импульсов скорости при решении задачи перехода может варьироваться. Однако это не гарантирует неизменности СХС перелета, поскольку данное утверждение верно только в рамках линейной аппроксимации. Поэтому необходимо провести сравнительный анализ двух решений. В общем случае, разделение импульсов скорости на отдельные части с их реализацией в ходе последовательных витков предоставляет важное преимущество, так как позволяет минимизировать влияние ошибок, возникающих при выполнении маневров.

Далее параметры найденного решения будут обозначены индексом «m» $\Delta V_{t1\mathrm{m}}$, $\Delta V_{z1\mathrm{m}}$, $\theta_{1\mathrm{m}}$, $\Delta V_{t2\mathrm{m}}$, $\Delta V_{z2\mathrm{m}}$, $\theta_{2\mathrm{m}}$, которые будут использованы для решения некомпланарной задачи встречи КА.

2.2. Некомпланарная задача встречи

Задача также относится к области орбитальной механики и заключается в организации сближения двух КА, движущихся по орбитам, которые находятся в разных плоскостях. Основной целью аналогичной компланарной задачи является определение параметров маневров, обеспечивающих переход активного КА с его начальной орбиты на орбиту КА-цели за заданное время с минимальными затратами топлива или энергии.

2.2.1. Постановка задачи встречи

Условиями перелета с применением N импульсов скорости за фиксированный промежуток времени с начальной орбиты на заданную точку некомпланарной конечной орбиты в линейном приближении являются следующие:

$$\sum_{i=1}^{N}(\Delta V_{ri}\sin\theta_i + 2\Delta V_{ti}\cos\theta_i) = \Delta e_x, \quad (4.2.1а)$$

$$\sum_{i=1}^{N}(-\Delta V_{ri}\cos\theta_i + 2\Delta V_{ti}\sin\theta_i) = \Delta e_y, \quad (4.2.1б)$$

$$\sum_{i=1}^{N} 2\Delta V_{ti} = \Delta a, \quad (4.\ 2.1в)$$

$$\sum_{i=1}^{N}(2\Delta V_{ri}(1-\cos\theta_i) + \Delta V_{ti}\,(-3\theta_i + 4\sin\theta_i)) = \Delta t, \quad (4.2.1г)$$

$$\sum_{i=1}^{N} -\Delta V_{zi}\sin\theta_i = \Delta z, \quad (4.\ 2.1д)$$

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta V_{zi}\cos\theta_i = \Delta V_z. \quad (4.\ 2.1е)$$

Задача нахождения параметров оптимальных маневров может быть поставлена следующим образом: необходимо определить значения ΔV_{ti}, ΔV_{zi}, θ_i (i=1,…,N), для которых минимизируется СХС маневров ΔV.

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{N} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\Delta V_{ti}^2 + \Delta V_{zi}^2},$$

при ограничениях (4.2.1). требует выполнения ряда последовательных этапов. Первый этап включает в себя непосредственное разрешение задачи

Следует отметить, что решение задачи встречи требует выполнения ряда последовательных этапов. На первоначальном этапе решается задача импульсного перехода между некомпланарными орбитами. После чего, распределение параметров задачи перехода производится среди витков, разрешенных для маневрирования, с целью обеспечения выполнения уравнения (4.2.1г). Для более точного определения параметров маневров используется итерационная процедура, учитывающая различные возмущения, такие как влияние сжатия Земли, атмосферы и другие.

2.2.2. Алгоритмы решения задачи встречи

Многоимпульсное решение задачи встречи. Исходя из всей совокупности ранее найденных решений задачи перехода выбирается то, которое обеспечивает минимальную СХС. Далее все параметры этого решения будут обозначены индексом «m»: $\Delta V_{t1\mathrm{m}}$, $\Delta V_{z1\mathrm{m}}$, $\theta_{1\mathrm{m}}$, $\Delta V_{t2\mathrm{m}}$, $\Delta V_{z2\mathrm{m}}$, $\theta_{2\mathrm{m}}$.

В процессе решения задачи встречи величины импульсов скорости $\Delta V_{t1\mathrm{m}}$, $\Delta V_{t2\mathrm{m}}$, рассчитанные при решении задачи перехода, распределяются между разрешенными для маневрирования N витками орбиты:

$$\Delta V_{1t\mathrm{m}} = \sum_{i=1}^{N} \Delta V_{1ti}, \tag{4.2.2}$$

$$\Delta V_{2t\mathrm{m}} = \sum_{i=1}^{N} \Delta V_{2ti}, \tag{4.2.3}$$

Боковые составляющие распределяются пропорционально трансверсальным:

$$\mathbf{\Delta V_{1z\mathit{i}}} = \frac{|\mathbf{\Delta V_{1ti}}|}{|\mathbf{\Delta V_{1t}}|}\mathbf{\Delta V_{1zm}} \text{ и } \mathbf{\Delta V_{2z\mathit{i}}} = \frac{|\mathbf{\Delta V_{2ti}}|}{|\mathbf{\Delta V_{2t}}|}\mathbf{\Delta V_{2zm}}. \tag{4.2.4}$$

Для упрощения решения задачи предполагается, что импульсы скорости изменяются линейно и распределяются по виткам таким образом, чтобы удовлетворять уравнению (4.2.1г).

$$\Delta V_{1ti} = \Delta V_{1t1} + (\Delta V_{1tN} - \Delta V_{1t1})(i-1)/(N-1), \tag{4.2.5}$$

$$\Delta V_{2ti} = \Delta V_{2t1} + (\Delta V_{2tN} - \Delta V_{2t1})(i-1)/(N-1). \tag{4.2.6}$$

Величинами ΔV_{1t1}, ΔV_{1tN} и ΔV_{2t1}, ΔV_{2tN} являются импульсы скорости, реализуемые на первом и последнем витках маневра. Они являются частями первого и второго импульсов скорости, использующихся для перехода.

Подставляя вычисленные импульсы скорости, полученные с использованием формул (4.2.5), (4.2.6) в (4.2.2) и (4.2.3) получим:

$$\Delta V_{1tm} = \sum_{i=1}^{N} \Delta V_{1ti} = 0.5N(\Delta V_{1t1} + \Delta V_{1tN}), \quad (4.2.7)$$

$$\Delta V_{2tm} = \sum_{i=1}^{N} \Delta V_{2ti} = 0.5N(\Delta V_{2t1} + \Delta V_{2tN}).. \quad (4.2.8)$$

Применяя выражения (4.2.7) и (4.2.8), выводим формулы для определения неизвестных переменных $\Delta V_{1tN}, \Delta V_{2tN}$:

$$\Delta V_{1tN} = \frac{\Delta V_{1t}}{0.5N} - \Delta V_{1t1}, \quad (4.2.9)$$

$$\Delta V_{2tN} = \frac{\Delta V_{2t}}{0.5N} - \Delta V_{2t1}. \quad (4.2.10)$$

После подстановки найденных значений $\Delta V_{1tN}, \Delta V_{2tN}$ в формулы (4.2.5) и (4.2.6), получаем:

$$\Delta V_{1ti} = 2\Delta V_1 (i-1)/N(N-1) + \Delta V_{1t1}\left[1 - \frac{2(i-1)}{N-1}\right], \quad (4.2.11)$$

$$\Delta V_{2ti} = 2\Delta V_2 (i-1)/N(N-1) + \Delta V_{2t1}\left[1 - \frac{2(i-1)}{N-1}\right]. \quad (4.2.12)$$

Таким образом, значения всех импульсов скорости выражены исключительно через ΔV_{1t1} и ΔV_{2t1}. Подставив их в уравнение (4.2.1в), можно сформулировать линейное уравнение с неизвестными $\Delta V_{1t1}, \Delta V_{2t1}$. Поскольку углы приложения импульсов скорости являются известными величинами, то и коэффициенты при этих импульсах также определены:

$$\theta_{1i} = \theta_{1\mathrm{m}} + 2\pi(N_i - N), \quad (4.2.13)$$

$$\theta_{2i} = \theta_{2\mathrm{m}} + \pi + 2\pi(N_i - N). \quad (4.2.14)$$

Путем перебора значений переменной ΔV_{1t1} в заданном диапазоне для каждого значения уравнение (4.2.1в) позволяет определить соответствующее значение переменной ΔV_{2t1}.

Далее, используя формулы (4.2.13) и (4.2.14), определяются значения всех импульсов скорости. Суммирование модулей всех импульсов скорости позволяет вычислить суммарную характеристическую скорость для данного решения.

В качестве оптимального решения задачи встречи выбирается то решение, у которого СХС принимает минимальное значение. При совпадении СХС найденного решения с СХС решения задачи перехода можно заключить, что найдено решение с минимально возможной СХС.

Если продолжительность максимального импульса скорости не превосходит 20°, то данное решение признается близким к импульсному, и задача считается решенной. Учет работы ДУ будет осуществлен посредством итерационной процедуры, описанной в [1]. В случае существенной продолжительности маневров рекомендуется перейти к решению с использованием ДУ малой тяги.

2.3. Решение задачи с «малой тягой»

В контексте задачи с малой тягой предполагается фиксация ориентации КА в орбитальной системе координат на протяжении маневра.

Для каждого витка маневрирования рассчитываются изменения эксцентриситета и БПО, произведенные импульсами скорости, определенными для данного витка:

$$\Delta e_{1ix}=2\Delta V_{1ti}\cos\theta_{1i}+2\Delta V_{2ti}\cos\theta_{2i}, \tag{4.3.1а}$$

$$\Delta e_{1iy}=2\Delta V_{1ti}\sin\theta_{1i}+2\Delta V_{2ti}\sin\theta_{2i}, \tag{4.3.1б}$$

$$\Delta a_{i}=2\Delta V_{1ti}+2\Delta V_{2ti}, \tag{4.3.1в}$$

Аналогично для изменения бока на витке

$$\Delta V_{iz}=\Delta V_{1zi}\cos\theta_{1i}+\Delta V_{2zi}\cos\theta_{2i}, \tag{4.3.2}$$

$$\Delta z_{i}=\Delta V_{1zi}\sin\theta_{1i}+\Delta V_{2ti}\sin\theta_{2i}, \tag{4.3.3}$$

Обеспечение переменной ориентации КА во время маневра сопряжено с существенными трудностями. Поэтому предпочтительнее использовать управление, реализуемое при фиксированной ориентации в орбитальной или инерциальной системе координат. В связи с этим, эти ограничения будут учтены при решении задачи.

Для определения необходимой продолжительности маневров малой тяги, приводящих к аналогичному изменению эксцентриситета и угла между плоскостями орбит, применяется описанный в [1] метод.

$$\Delta\varphi_{1}=2\arcsin\left(\frac{\omega_{c}\,\Delta V_{1}}{2\omega}\right), \tag{4.3.4}$$

$$\Delta\varphi_{2}=2\arcsin\left(\frac{\omega_{c}\,\Delta V_{2}}{2\omega}\right). \tag{4.3.5}$$

При этом продолжительность каждого маневра рассчитывается поочередно для каждого витка. Если аргумент арксинуса превышает 1, то решение отсутствует, что указывает на невозможность решения задачи встречи при заданной тяге и массе КА за фиксированное число витков.

Решение, полученное с применением двигателя малой тяги, обеспечивает такое же изменение вектора эксцентриситета и ориентации плоскости орбиты, как и исходное импульсное решение, поскольку середины длительных маневров совпадают с моментами выполнения импульсных воздействий на скорость.

Однако, сложность состоит в том, что изменение БПО оказывается избыточным, поскольку оно происходит более эффективно при изменении орбитальной ориентации, чем при воздействии на эксцентриситет. В результате маневров возникает отклонение от требуемого значения БПО. Для устранения этого отклонения может быть использована итерационная процедура, предложенная в работе [1]. Далее рассмотрим принцип данной процедуры:

1) пусть начальное отклонение параметров БПО обозначено как $\Delta a_0 = a_f - a_0$ (например, $\Delta a_0 > 0$), и наблюдаются отклонения, такие как $\Delta a_0, \Delta e_{x0}, \Delta e_{y0}, \Delta i_0$;

2) после расчета параметров маневров сформируется новое значение БПО a_1 ($a_1 > a_f$);

3) на следующей итерации будут использоваться отклонения $\Delta a_1 = \Delta a_0 + a_f - a_1, \Delta e_{x0}, \Delta e_{y0}, \Delta i_0$;

4) на последующих будут применяться отклонения $\Delta a_2 = \Delta a_1 + a_f - a_2$, и т. д., до тех пор, пока БПО не будет приведена к значению с заданной точностью.

Поскольку на каждом витке будет производиться такое же изменение БПО, как и в импульсном решении, задача встречи будет решена с такой же точностью.

В контексте некомпланарной задачи встречи КА, при использовании линеаризованных уравнений движения и пренебрежении факторами, такими как нецентральность гравитационного поля и влияние атмосферы, достижение требуемой точности в выполнении граничных условий (4.2.1a) - (4.2.1e) оказывается затруднительным. Для повышения точности решения задачи целесообразно применить итерационную схему, детально описанную в разделе 3.6 работы [1].

2.4. Алгоритм решения задачи встречи на некомпланарных орбитах при фиксировании импульсов скорости

Рассмотрим пример случая пересечения начальной и конечной орбит, что предполагает использование разгонного и тормозного импульсов для осуществления маневра. После определения оптимального распределения импульсов по разрешенным виткам для маневрирования, импульсы скорости на первом и последнем витках имеют по модулю максимальные величины. Когда тяга уменьшается, продолжительность первого и последнего импульсов растет и может стать больше, чем нужно для оптимальной коррекции эксцентриситета. Например, рассмотрим случай, когда чтобы выполнить условие по времени, большой разгонный импульс прилагался в начале, большой тормозной в конце.

С целью минимизации продолжительности импульсов, следует ограничить их величину, чтобы обеспечить максимальное изменение эксцентриситета (180 градусов). Оцениваем произведенные ими изменение вектора эксцентриситета, большой полуоси и времени прилета в точку встречи. Уменьшаем отклонения в системе (4.2.1) на вычисленные величины и для внутренних импульсов полностью повторяем решение. Если новые первый или последний импульс превышают максимальную величину, то максимально увеличиваем величину второго и предпоследнего импульсов, так может появиться четыре одинаковых импульса продолжительностью 180 град. Процедура заканчивается, когда продолжительность маневров на первом и последнем из оставшихся внутренних витков меньше 180 градусов.

2.5. Заключение по разделу

В разделе рассмотрены алгоритмы решения задачи импульсного перехода между некомпланарными орбитами, импульсная задача встречи КА на некомпланарных орбитах и некомпланарной задачи встречи КА с помощью ДУ малой тяги. Применен универсальный метод, чтобы решить задачу переходов между некомпланарными орбитами. Введены алгоритмы расчета параметров маневров КА, которые оказались очень эффективны, потому алгоритмы демонстрируют высокую эффективность в решении задачи встречи КА, особенно в случаях, когда начальные условия попадают в оптимальный фазовый диапазон и СХС решения задачи встречи совпадает с СХС оптимального решения задачи перехода. Это справедливо даже при использовании двигателей МТ. Представлены алгоритмы решения задач встречи для случаев малой тяги, а также алгоритмы решения задачи встречи на некомпланарных орбитах с ограничением импульсов скорости. Ограничения вызваны необходимостью последовательного выполнения нескольких маневров из-за крайне малого значения тяги.

ГЛАВА 5. ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИИ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ С ПОМОЩЬЮ ДВИГАТЕЛЕЙ МАЛОЙ ТЯГИ

5.1. Современные подходы к оптимизации траектории КА с ДУ малой тяги

В современных исследованиях по оптимизации траекторий КА с двигателем МТ применяются как аналитические, так и численные методы. Аналитические методы могут быть эффективно использованы для решения задач, характерных для определенных типов КМ с использованием более простых процессов, чем предусмотрено теорией оптимального управления. Один из таких процессов является полуаналитическим и часто используется в академических задачах. Этот подход обычно включает использование хитрых преобразований координат и других методов для обхода необходимости использования принципа Понтрягина или для снижения сложности, связанной с теорией оптимального управления. Несмотря на их полезность и значимость для анализа конкретных задач, такие подходы не могут быть обобщены для решения более широких задач оптимизации траекторий.

Что касается численных методов, они обычно классифицируются как прямые или косвенные. Прямые методы преобразуют задачу оптимизации траектории в крупномасштабные задачи, требующие большого числа итеративных вычислений, создавая последовательность точек, при которой минимизируется целевая функция. В косвенных методах процесс также включает итерации, но он сосредоточен на нахождении корня условия оптимальности, основанного на принципе Понтрягина [70]. Это означает, что в дополнение к переменным состояния и управления учитываются сопряженные переменные.

Принцип максимума Понтрягина, вопреки распространенному мнению, не является методом нахождения решения. Он представляет собой генератор задачи, который преобразует задачу оптимального управления в задачу с граничными условиями, переводя ее в двойственное пространство [154]. Также важно подчеркнуть, что нет ограничений на выбор методов и техник для решения задачи. Например, метод стрельбы или метод множественной стрельбы может быть применен как к прямым, так и к косвенным методам.

Техники коллокации также могут быть использованы как в прямых, так и в косвенных методах в соответствии с принципом отображения ковектора [166]. Этот принцип выполняется не только для псевдоспектральных методов, но и для методов Рунге-Кутты [167]. Однако при использовании косвенного подхода требуется вычисление величин функции Гамильтона. Эта операция требует хотя бы базовых знаний в области теории оптимального управления. Даже при наличии теоретической подготовки построение выражений для сложных задач может быть весьма затруднительным.

Основным недостатком косвенного подхода является его низкая устойчивость. Одной из сложностей является необходимость угадывать значения сопряженных переменных, которые не имеют физического смысла. Даже при разумной догадке численное решение сопряженных уравнений может быть плохо обусловленным.

Прямой метод, напротив, предоставляет больше гибкости в нахождении решения. Поскольку сопряженные уравнения явно не формируются, аналитические производные не требуются. Вместо этого эквивалентная информация может быть вычислена с использованием разреженных конечных разностей. Этот метод особенно удобен для пользователей с минимальными знаниями теории оптимального управления. Он позволяет легко обрабатывать новые формулировки и автоматически определять последовательность ограничений на дуги.

Метод также очень устойчив, так как пользователю необходимо угадывать только переменные задачи. Кроме того, стратегия глобализации, направленная на улучшение функции значимости, обеспечивает значительно более широкую область сходимости, чем нахождение корня градиента функции Лагранжа, используемое в косвенных методах.

Таким образом, для большинства приложений прямой метод является мощным инструментом, устраняющим недостатки косвенного подхода. Однако в некоторых случаях, например, при наличии сингулярных дуг или разрывного управления, прямые методы могут быть проблематичными. Выбор подхода во многом определяется типом задачи и ожидаемого решения. Например, подходы могут различаться в зависимости от их реализации: онлайн или офлайн [168]. В первом случае приоритет отдается скорости сходимости, возможно, в ущерб точности или оптимальности, как это бывает при задачах сближения с движущейся целью или стыковки, где требуется расчет траектории в реальном времени [169]. Во втором случае важнее оптимальность решения, а не скорость его нахождения, как, например, при долгосрочном планировании миссий с множественными пролетами [170]. Современные методы, включая генетические и эволюционные алгоритмы, а также их комбинированные варианты, подробно рассмотрены в исследованиях [140–143].

5.2. Оптимизация траектории КА с идеально-регулируемым двигателем ограниченной мощности

Необходимо перевести систему (1.3) из заданного начального состояния в момент времени t = 0:

$$\mathrm{x}(0) = \mathrm{x}_0, \mathrm{y}(0) = \mathrm{y}_0, \mathrm{z}(0) = \mathrm{z}_0, \mathrm{v}_x(0) = \mathrm{v}_{x0}, \mathrm{v}_y(0) = \mathrm{v}_{y0}, \mathrm{v}_z(0) = \mathrm{v}_{z0} \qquad (5.2.1)$$

в конечное состояние, определенное в момент времени Δt:

$$\mathrm{x}(\Delta\mathrm{t}) = \mathrm{x}_f, \mathrm{y}(\Delta\mathrm{t}) = \mathrm{y}_f, \mathrm{z}(\Delta\mathrm{t}) = \mathrm{z}_f, \mathrm{v}_x(\Delta\mathrm{t}) = \mathrm{v}_{xf}, \mathrm{v}_y(\Delta\mathrm{t}) = \mathrm{v}_{yf}, \mathrm{v}_z(\Delta\mathrm{t}) = \mathrm{v}_{zf} \qquad (5.2.2)$$

с минимальными затратами топлива.

Минимизация расхода топлива в задачах оптимального управления с ИРОМ-двигателем равносильна минимизации определенного функционала, как это показано в работах [6, 44, 67]. Для минимизации функционала используются различные методы, представленные в работах [19, 23, 45, 68, 71, 138, 139] и др.

Уравнение (1.5.9) для случаев трех- и двухканального управления можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \\ \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ \dot{a}_x \\ \dot{a}_y \\ \dot{a}_z \end{pmatrix}, \qquad (5.2.3а)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \\ \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ \dot{a}_x \\ \dot{a}_y \\ \dot{a}_z \end{pmatrix} \qquad (5.2.3б)$$

и

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \\ \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ \dot{a}_x \\ \dot{a}_y \\ \dot{a}_z \end{pmatrix}, \tag{5.2.4а}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \\ \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ \dot{a}_x \\ \dot{a}_y \\ \dot{a}_z \end{pmatrix}. \tag{5.2.4б}$$

Очевидно, что задача оптимального управления (1.1.2), (1.5.8), (5.2.1), (5.2.2) может быть разделена на две независимые подзадачи: одну, описывающую движение в плоскости орбиты (обозначенную индексом **“in”**), и другую, описывающую движение КА вдоль оси z (обозначенную индексом **“out”**).

5.1.1. Движение в плоскости орбиты

Движение КА в плоскости орбиты может быть представлено в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\boldsymbol{x}_{\text{in}}}{dt} = \boldsymbol{A}_{\text{in}}\boldsymbol{x}_{\text{in}} + \boldsymbol{B}_{\text{in}}\boldsymbol{a}_{\text{in}} \tag{5.2.5}$$

с функционалом

$$J_{\text{ом}}^{\text{in}} = \frac{1}{2}\int_0^{\Delta t} a_{\text{in}}^2\,dt \tag{5.2.6}$$

где

$$\boldsymbol{x}_{in} = \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{v_x} \\ \mathrm{v_y} \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_{\text{in}l} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_{\text{in}m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{B}_{in} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_{in} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, a_{in} = |\boldsymbol{a}_{in}|$ для 3КУ и $\boldsymbol{B}_{in} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)^T, a_{in} = a_y$ для 2КУ. Граничные условия, с учетом (5.2.1) и (5.2.2), могут быть представлены следующим образом:

$$\boldsymbol{x}_{\text{in}}(0) = \boldsymbol{x}_0^{\text{in}}, \boldsymbol{x}_{\text{in}}(\Delta t) = \boldsymbol{x}_f^{\text{in}}. \tag{5.2.7}$$

5.1.2. Движение вдоль оси z

Движение вне плоскости орбиты определяется системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_{\text{out}}}{dt} = \boldsymbol{A}_{\text{out}}\boldsymbol{x}_{\text{out}} + \boldsymbol{B}_{\text{out}}\boldsymbol{a}_z, \tag{5.2.8}$$

с функционалом-

$$J_{\text{ом}}^{\text{out}} = \frac{1}{2}\int_0^{\Delta t} a_z^2 dt, \tag{5.2.9}$$

где $\mathbf{x}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} z \\ \mathrm{v}_z \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_{\text{out}l} = \boldsymbol{A}_{\text{out}m} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, и с краевыми условиями

$$\mathbf{x}_{\text{out}}(0) = \mathbf{x}_0^{\text{out}}, \mathbf{x}_{\text{out}}(\Delta t) = \mathbf{x}_f^{\text{out}}. \tag{5.2.10}$$

Полученные матрицы $\mathbf{\Phi}$ и $\boldsymbol{\psi}$ (для обеих моделей движения КА) в разделе (2.1) легко были вычислены аналитически по формулам (2.1.16), (2.1.17) и (2.1.20), перепишем только одну из них в следующим виде:

$$\mathbf{\Phi}_{\text{in}}(t) = \begin{pmatrix} 4-3c & 0 & s & 2(1-c) \\ 6(s-1) & 1 & 2(c-1) & 4s-3t \\ 3s & 0 & c & 2s \\ 6(c-1) & 0 & -2s & 4c-3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Phi}_{\text{out}}(t) = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\psi}_{\text{in}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{13t+3sc}{2} - 8s & 3(t-s)^2 & \frac{(1-c)(3c-5)}{2} & 14s-3sc-11t \\ 3(t-s)^2 & 14t-32s+3t^3+24tc-6sc & 5t-8s+6tc-3sc & 4c-\frac{9}{2}t^2+6c^2+12ts-10 \\ \frac{(1-c)(3c-5)}{2} & 5t-8s+6tc-3sc & \frac{5t-3sc}{2} & 3(c-1)^2 \\ 14s-3sc-11t & 4c-\frac{9}{2}t^2+6c^2+12ts-10 & 3(c-1)^2 & 19t+6sc-24s \end{pmatrix}$$

для ТКУ и

$$\boldsymbol{\psi}_{\text{in}}(t) = \begin{pmatrix} 6t+2sc-8s & 3t^2-6ts-2(1-c)+4s^2 & -2(c-1)^2 & 14s-4sc-10t \\ 3t^2-6ts-2(1-c)+4s^2 & 8t-24s+3t^3+24tc-8sc & 4t-6s+6tc-4sc & -\frac{(3t-4s)^2}{2} \\ -2(c-1)^2 & 4t-6s+6tc-4sc & 2(t-sc) & 2(c-1)(2c-1) \\ 14s-4sc-10t & -\frac{(3t-4s)^2}{2} & 2(c-1)(2c-1) & 17t+8sc-24s \end{pmatrix}$$

для ДКУ,

$$\boldsymbol{\psi}_{\text{out}}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} t-sc & -s^2 \\ -s^2 & t+sc \end{pmatrix}.$$

После определения начального вектора сопряженных переменных согласно формуле (2.1.23), осуществляется вычисление оптимальной траектории посредством выражения (2.1.22) и, впоследствии, оптимальное управление – с использованием формулы (1.5.11). В силу этого, получим следующие выражения:

- оптимальное управление,

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\Phi}^T(-\Delta t)\mathbf{p}_0, \tag{5.2.11}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_z(t) = \boldsymbol{B}_0{\boldsymbol{B}_0}^T{\boldsymbol{\Phi}_0}^T(-\Delta t)\mathbf{p}_0, \tag{5.2.12}$$

- оптимальные траектории,

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)[\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\psi}(\Delta t)\mathbf{p}_0], \tag{5.2.13}$$

$$\mathbf{x}_z(t) = \boldsymbol{\Phi}_0(t)[\mathbf{x}_{0z} + \boldsymbol{\psi}_0(\Delta t)\mathbf{p}_{0z}], \tag{5.2.14}$$

- значения функционала на оптимальных траекториях

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\Delta t} \boldsymbol{\gamma}^T\, \boldsymbol{\gamma}(t)dt \to min \tag{5.2.15}$$

$$J_z = \frac{1}{2}\int_0^{\Delta t} {\boldsymbol{\gamma}_z}^T\, \boldsymbol{\gamma}_z(t)dt \to min \tag{5.2.16}$$

Для проверки полученных аналитических решений КЗ будет применен метод продолжения по параметру, который позволяет получить следующие выражения:

- Вектор невязок,

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(\Delta \mathrm{t}) - \mathbf{x}_f \\ p_m(\Delta \mathrm{t}) \end{pmatrix} = 0, \tag{5.2.17}$$

- Вектор параметров КЗ,

$$\boldsymbol{z}(0) = \boldsymbol{p}(0) = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ p_{Vx} \\ p_{Vy} \\ p_{Vz} \end{pmatrix}_{t=0}, \tag{5.2.18}$$

Уравнения (5.2.17) представляют собой систему нелинейных уравнений, которая решается методом численного интегрирования системы ОДУ (1.5.12) с помощью уравнений (5.2.18) и (1.5.20).

Таким образом успешно решили ОМ-задачу. Далее применим это решение как НП для решения ОСИ-задачу.

5.3. Оптимизация траектория КА с двигателем ограниченной тяги с постоянной скоростью истечения

Требуется перевести систему (1.5.14) из заданного начального состояния при $t = 0$ ($\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0,\ m(0) = m_0$) в заданное конечное состояние при $t = \Delta t$ ($\boldsymbol{x}(\Delta t) = \boldsymbol{x}_f, p_m(\Delta t) = 0$).

После применения ПМП, исходная задача оптимального управления, представленная уравнениями (1.5.14), (1.5.15), (1.5.19) - (1.5.21) сводится к КЗ для системы ОДУ (1.5.19) с граничными условиями (1.5.20), (1.5.21). Для решения этой КЗ принимается метод ПП, описанный в работах [44, 51, 85]. Данный численный метод, основанный на ньютоновской гомотопии между исследуемой КЗ и специально построенной КЗ с известным решением.

В [51, 52, 55-58] авторы рассмотрели модификацию метода продолжения для решения систем нелинейных уравнений и краевых задач для систем ОДУ. Применение метода продолжения к рассматриваемой задаче оптимизации траекторий КА с МТ, сведенной к КЗ с помощью ПМП, впервые было предложено в работах [129, 130].

Для НП неизвестного вектора p(0) принимаются значения сопряженных переменных, которые были получены при оптимизации ОМ-траектории с теми же краевыми условиями, при этом pm(0) для устанавливается значение равное 0. Метод продолжения основан на ньютоновской гомотопии между задачами оптимизации ОМ- и ОСИ-траекторий. Для его реализации уравнения (5.3.1) погружаются в однопараметрическое семейство, зависящее от параметра продолжения λ:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \begin{pmatrix}\mathbf{0}_{3\times3}\\ \boldsymbol{E}_{3\times3}\end{pmatrix}\frac{(1-\lambda+\lambda\delta T)\boldsymbol{B}^T\mathbf{p}}{1-\lambda+\lambda m|\boldsymbol{B}^T\mathbf{p}|},\\
&\frac{dm}{dt} = -\lambda\delta\frac{T}{c},\\
&\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\boldsymbol{A}^T\mathbf{p},\\
&\frac{d\mathrm{p}_m}{dt} = \lambda\delta\frac{T}{m^2}|\boldsymbol{B}^T\mathbf{p}|.
\end{aligned} \tag{5.3.1}$$

При начальном значении параметра продолжения λ = 0 приводит к тому, что уравнения (5.3.1) совпадают с уравнениями оптимального управления в ОМ-задаче. При конечном значении λ = 1 уравнения (5.3.1) превращаются в уравнения оптимального управления для ОСИ-задачи. Метод продолжения позволяет свести решение КЗ к интегрированию некоторой системы ОДУ по параметру λ. Для вычисления правых частей этой систем требуется интегрирование уравнений (5.3.1).

В рассматриваемой работе используется сглаженное представление релейной функции тяги δ(S), чтобы обеспечить устойчивость решения КЗ. Это необходимо, поскольку в ОСИ-задаче правые части дифференциальных уравнений содержат релейную функцию тяги δ (ступенчатую функцию включения-выключения). Такая функция вызывает разрывы в решении, что приводит к разрывам в решении. Это противоречит требованиям метода ПП, как указано в уравнении (1.5.19).

Для применения данного метода необходимо использовать сглаженное управление, поскольку разрывность системы обусловлена исключительно моментами включения и выключения двигателя. В качестве сглаженной функции тяги δ(S) можно использовать форму, предложенную в работе [7]:

$$\delta(S,\varepsilon) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{S}{\sqrt{S^2 + c_2\varepsilon^2}}\right], \tag{5.3.2}$$

где $\varepsilon(\lambda) = \varepsilon_0(1-\lambda) + \lambda\varepsilon_f$ - малый параметр, который может зависеть от λ, $c_2 = 2(\sqrt{2}+1)$. Вид функции (5.3.2) для различных значений ε представлен на рис. 5.2.1.

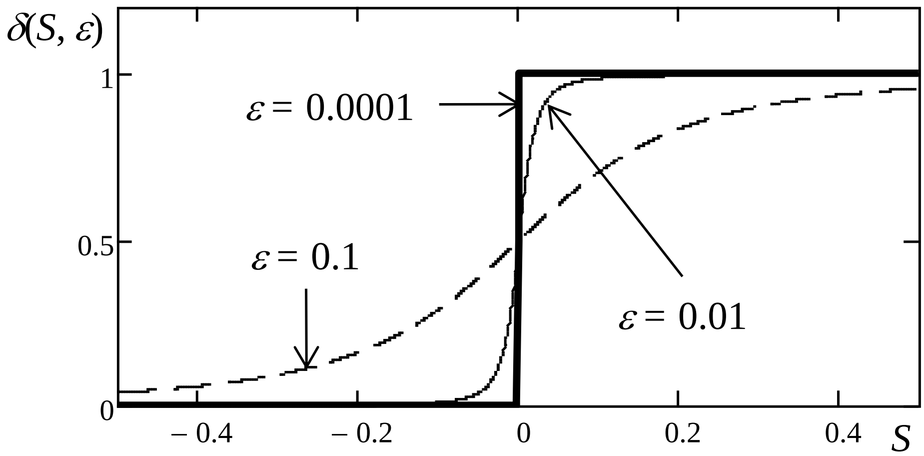

Рис.5.2.1. Сглаженное представление релейной функции δ(S).

5.4. Заключение по разделу

В разделе рассмотрена оптимизация траектории КА с использованием двигателей МТ. Анализированы современные подходы к решению задач оптимизации траекторий КА. Приведены две конкретные задача оптимизации траектории КА с ИРОМ-двигателем и задача оптимизации траектории с ОТСИ-двигателем. При этом, учитывая возможность включения или выключения двигателя и ограничения на его тягу и скорость истечения, в разных задачах могут быть различны ограничения на направление вектора тяги. В случаях, когда ориентация вектора тяги не ограничена, управление может быть реализовано с помощью трех составляющих реактивного ускорения (ТКУ). Если же ориентация вектора тяги ограничена, то угол тангажа фиксируется, что приводит к нулевому значению радиальной составляющей реактивного ускорения (ДКУ). Также получены уравнения оптимального движения и определены типовые краевые условия для задач оптимизации траекторий КА с ЭРДУ. Для численного решения использован метод непрерывного ПП, основанный на ньютоновской гомотопии с нулевым НП для неизвестных начальных значений сопряженных переменных. Этот подход позволил свести КЗ для системы ОДУ к задаче Коши, что потребовало интегрирования вложенных систем дифференциальных уравнений.

ГЛАВА 6. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

В этой главе рассматривается несколько численных примеров решения задачи оптимизации перелета КА в окрестности круговой орбиты с помощью двигателей МТ, в том числе задачи встречи КА на орбитах. Приведены две задачи определения оптимальных траекторий (ОМ-траекторий и ОСИ-траекторий), графики реактивного ускорения и алгоритмы решения задачи переходов и встреч КА. Оптимальные решения для задачи перелета КА с ИРОМ-двигателем будут использованы в качестве начального приближения при численном поиске оптимальных траекторий для КА с ОТСИ-двигателем. Полученные результаты для задач переходов между орбитами также послужат начальным приближением для решения задач встречи с использованием ДУ малой тяги.

6.1. Исходные данные

Рассматривается движение КА относительно точки О, движущейся по невозмущенной почти круговой орбите радиусом 6871 км. Гравитационный параметр Земли примем равным $3.9860044 \cdot 10^{14}$ м^3/с^2. Анализируется задача перелета КА с помощью N импульсов скорости за фиксированное время с исходной орбиты в заданную точку конечной орбиты. Начальное положение КА в фазовом пространстве задается координатами $\mathbf{r}_0$ = (10, 100, -5) км, $\mathbf{v}_0$ = (1, -10, 3) м/с, а в конечное-точкой $\mathbf{r}_f$ = (0, 0, 0) км, со скоростью $\mathbf{v}_f$ = (0, 0, 0) м/с. Отклонения в различных задачах могут быть заданы как в орбитальной, так и в цилиндрической системах координат. Начальная масса КА принимается равной 1000 кг, удельный импульс ДУ – 220 секунд (2157.463 м/с). Тяга (Т) варьируется в диапазоне от 0.362 до 100 Н.

6.2. Перелет КА с трех- и двухканальным управлением

Случай 1. Рассмотрим ОМ-задачу, учитывающую управление каналами в трех сценариях:

а) Перелет КА за 14400 с - задача оптимизации с ограниченной мощностью двигателя решается непрямым методом, основанным на принципе ПМП. Данный метод позволяет свести исходную задачу к КЗ для системы линейных ОДУ с постоянными коэффициентами (уравнение 1.19) и граничными условиями (уравнения 5.1 и 5.2). Краевую задачу возможно решить как аналитическим, так и численным методом. После применения ПМП краевая ОМ-задача оптимального управления трансформировалась в задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которая была решена аналитически. Для проверки корректности полученных результатов был использован метод ПП, значения которого приведены в таблице 6.2.1.

На рис. 6.2.1 в плоскости *x, y* представлена оптимальная ОМ-траектория для случаев ТКУ и ДКУ. На траектории отмечены начальная и конечная точки (точки встречи), достигнутые после выполнения нескольких маневров. Оказалось, что ОМ-траектории в обоих случаях совпадают. Оптимальность данной траектории обусловлена ее способностью обеспечить эффективное достижение цели с минимальными затратами топлива. Начальная и конечная точки траектории указывают на местоположение КА до и после выполнения маневров, а точка встречи представляет собой момент сближения КА. Следует подчеркнуть, что выполнение нескольких маневров в процессе движения позволяет оптимизировать траекторию и достичь желаемого положения КА в пространстве.

Рис. 6.2.1 - Оптимальная ОМ-траектория в плоскости опорной орбиты

На рис. 6.2.2 приведены результаты расчета составляющих импульсов скорости во времени от 0 до 14400 с для случаев ТКУ и ДКУ.

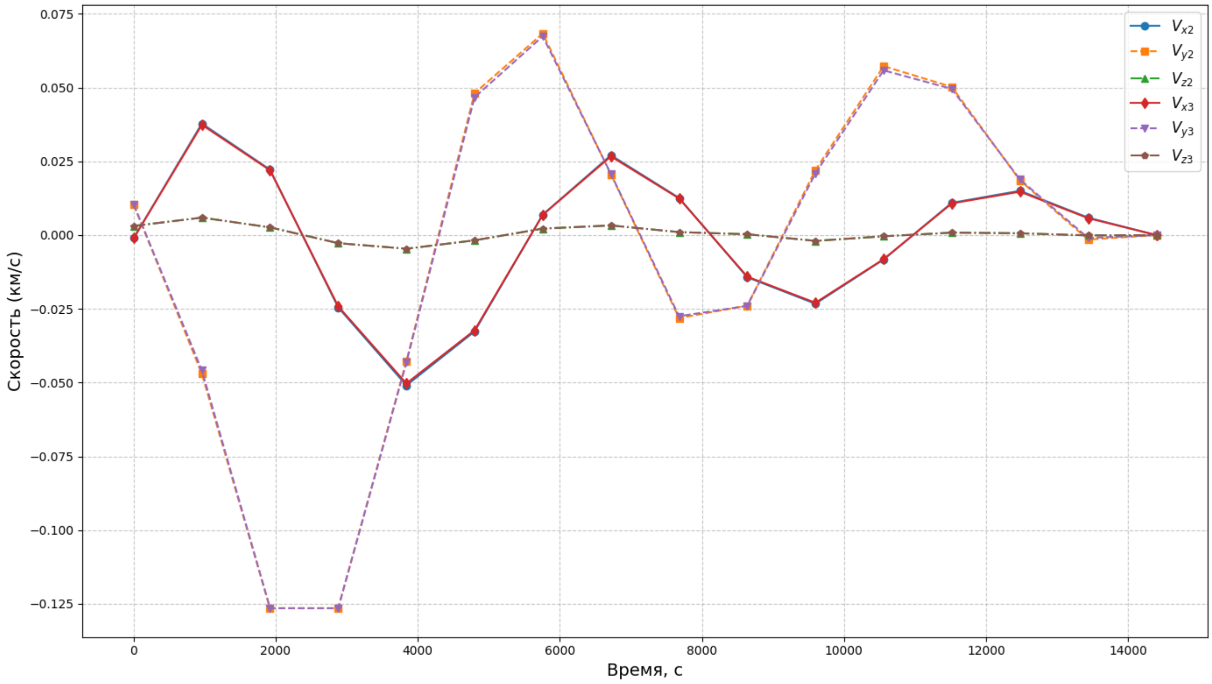

Рис. 6.2.2. Изменение составляющих импульсов скорости во времени при двух- и трехканальном управлении

На рис. 6.2.3 представлено изменение величин импульсов скорости и расхода топлива в диапазоне времени от 0 до 14400 с. Обозначаем, что V_2 и V_3 – величины импульсов скорости КА для двух- и трехканальных управлений. Эти данные позволяют оценить необходимые маневры для достижения требуемой траектории с использование топлива.

На момент времени 0 обе скорости V_2 и V_3 равны 10.488 м/с, а массы m_2 и m_3 равны 4.848 кг - начальные условия для КА. В течение первых нескольких секунд (от 0 до 2879.55 с) скорости и массы обеих случаев значительно возрастают, достигая максимальных значений около V_2=123.535 м/с и V_3=121.697 м/с. Массы также увеличиваются. После этого наблюдается снижение скорости и массы, например, в интервале времени от 2879.55 до 3839.39 с скорости и массы обоих случаев значительно падают. В течение следующих интервалов времени происходят колебания скоростей и масс. Например, от времени 5759.09 до 8638.63 с наблюдается некоторое снижение скоростей и масс с минимальными значениями. Время 14400 с показывает, что скорости КА практически равны нулю (V_2=0.0027 м/с и V_3=0.0024 м/с), а массы также почти равны нулю (m_2=0.00125 кг и m_3=0.00111кг).

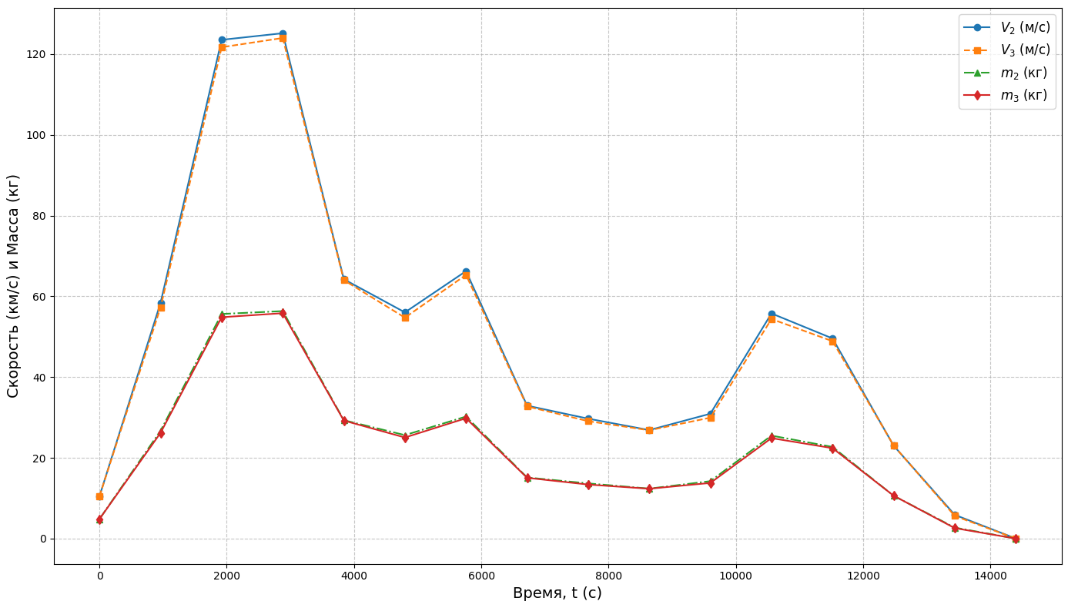

Рис. 6.2.3. Изменение величин импульсов скорости и расхода топлива

Из рисунки 6.2.3 следует, что в соответствии с требуемыми расходами топлива двухканальное управление оказалось высокоэффективным и практически неотличимым от трехканального управления. Примечательно, что при двухканальном управлении в момент времени t=0 с маневр составляет 10,488 м/с с расходом топлива 4,848 кг, при маневре с продолжительностью 14400 с, требуемый импульс снижается до 0,0027 м/с, что приводит к минимальному расходу топлива – всего 0,00125 кг. В начальный момент времени (t = 0 с) для трехканального управления маневр требует 10,488 м/с импульса с расходом топлива 4,848 кг, при t=14400 с маневр сближения уменьшается до 0,0024 м/с, а расход топлива достигает минимального значения всего 0.00111 кг.

В таблице 6.2.1 приведено сравнение аналитических и численных результатов, что в первой колонке указано время t, изменяющееся с шагом 60 с от 0 до 13980 с. В колонках $V1$ и $V2$ указаны скорости, рассчитанные аналитически и численно, соответственно. В колонках $a1{\times}10{-}3$ и $a2{\times}10{-}3$ приведены значения ускорений, также рассчитанные аналитически и численно. Они умножены на 10−3 для удобства представления малых величин.

Аналитические и численные результаты $V1$ и $V2$, а также $a1{\times}10{-}3$ и $a2{\times}10{-}3$, находятся в хорошем согласии друг с другом. Величины V в начале таблицы начинают с достаточно больших значений (около 10.488 м/с) и постепенно уменьшаются, подходя к 0 к концу наблюдения (например, V_1=0.0001 м/с при t=13980 с). Значения ускорения a, напротив, слабо варьируются, оставаясь примерно на одном уровне на протяжении всего времени. Различия между аналитическими и численными значениями становятся более заметными по мере уменьшения скорости. Например, в момент времени t=13680 с, $V1$=0.415 м/с, а V_2=0.4409 м/с.

Таблица 6.2.1 - Сравнение аналитических и численных результатов ОМ-задачи.

t,c	V_1, м/с	a_1, м/с^2 * 10^{-3}	V_2, м/с	a_2, м/с^2 * 10^{-3}
0	10.488	3.179	10.4881	3.20
60	11.055	3.187	11.0571	3.18
120	11.763	3.164	11.7693	3.16
180	12.589	3.138	12.5992	3.13
240	13.509	3.111	13.5247	3.10
300	14.507	3.08	14.5278	3.07
360	15.567	3.048	15.5938	3.04
420	16.678	3.013	16.7111	3.01
480	17.831	2.975	17.8699	2.97
...	...	...	...	...
13680	0,415	1.357	0.4409	1.35
13740	0.335	1.376	0.3617	1.36
13800	0.254	1.394	0.2809	1.38
13860	0.171	1.412	0.1984	1.40
13920	0.086	1.43	0.1143	1.42
13980	0.0001	1.447	0.0288	1.44

Для проверки точности полученного аналитического решения, результаты оптимизации траектории сравнивались с результатами численного решения КЗ оптимального управления на основе принципа максимума. Численное решение осуществлялось методом непрерывного ПП, аналогичному методу, описанному в работе [67], с нулевым начальным приближением для неизвестных начальных значений сопряженных переменных. Проведенная проверка показала полное соответствие аналитических и численных результатов с точностью до погрешности численного решения КЗ.

б) Постановка задачи этого случая полностью совпадает с постановкой задачи первого случая. Различие заключается в том, что перелет осуществляется за 14400 с из начальной точки фазового пространства $\mathbf{r}_0 = (10\text{км},\ 100\text{км},\ -5\text{км})^{\text{т}}$, $\mathbf{v}_0 = (1\text{м/с},\ -10\text{м/с},\ 3\text{м/с})^{\text{т}}$ в начало координат, то есть в точку $\mathbf{r}_f = 0$, $\mathbf{v}_f = 0$. На рисунках 6.2.4 и 6.2.5 представлены оптимальные траектории и зависимости ускорения тяги от времени для ТКУ в плоскости опорной орбиты.

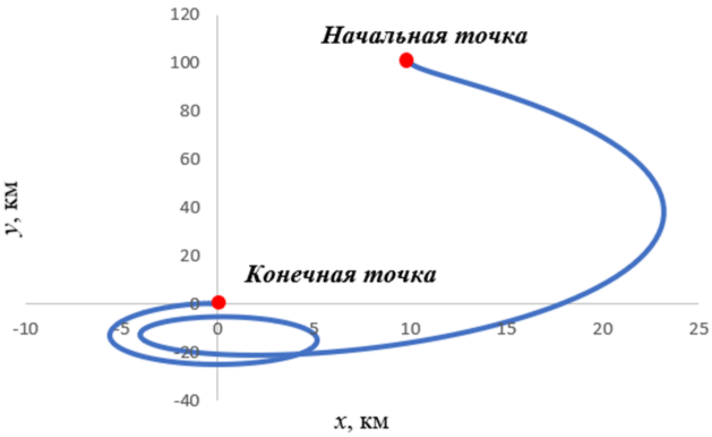

Рис. 6.2.4. Оптимальная ОМ-траектория для трехканального управления в плоскости опорной орбиты

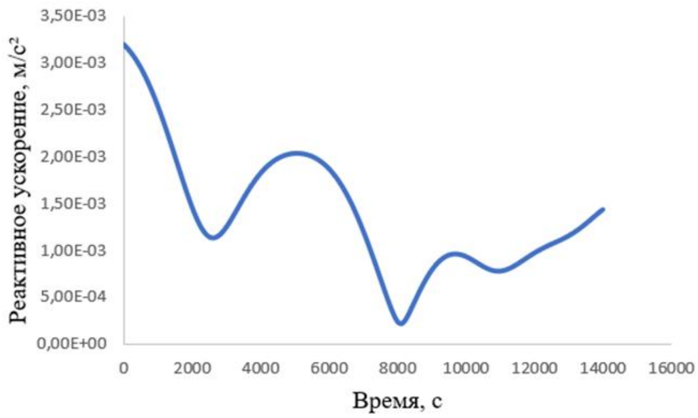

Рис. 6.2.5. Оптимальная зависимость ускорения тяги от времени для ТКУ в плоскости опорной орбиты

в) Рассмотрим третий случай ОМ-задачи с использованием двух различных уравнений движения КА, в котором перелет происходит за Δt = 86400 с. Целью этого случая является поиск оптимальных траекторий КА в плоскостях опорных орбит, а также сравнение рассчитанных параметров орбит для компланарной и некомпланарной ОМ-задачи. На рис.6.2.6 представлены оптимальные ОМ-траектории и оптимальные зависимости ускорения тяги от времени для ДКУ и ТКУ в плоскости опорной орбиты.

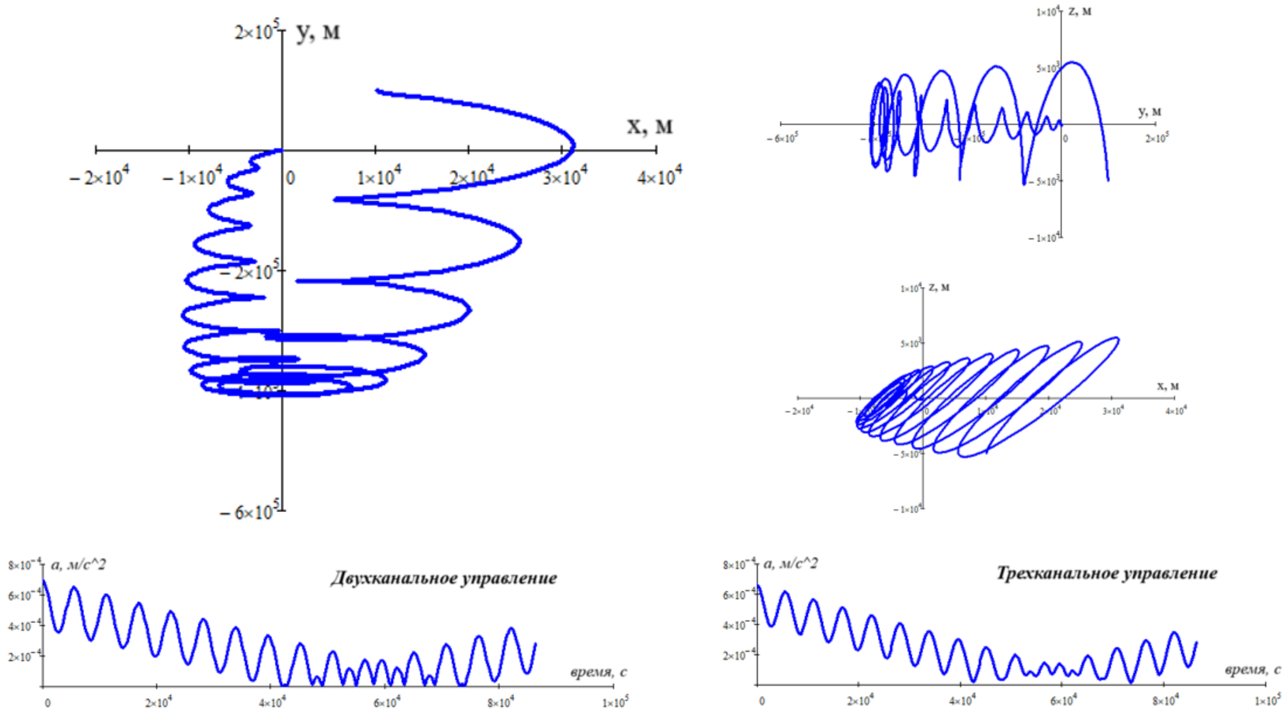

Рис. 6.2.6. Оптимальная ОМ-траектория и оптимальные зависимости ускорения тяги от времени для ДКУ и ТКУ в плоскости x-y (Модель HCW)

На основе полученных графиков оптимальные ОМ-траектории практически неразличимы для случаев ДКУ и ТКУ, поэтому можно визуализировать некоторые из них. На рис.6.2.7 представлены оптимальные ОМ-траектории и оптимальные зависимости ускорения тяги от времени для ДКУ и ТКУ в плоскости опорной орбиты.

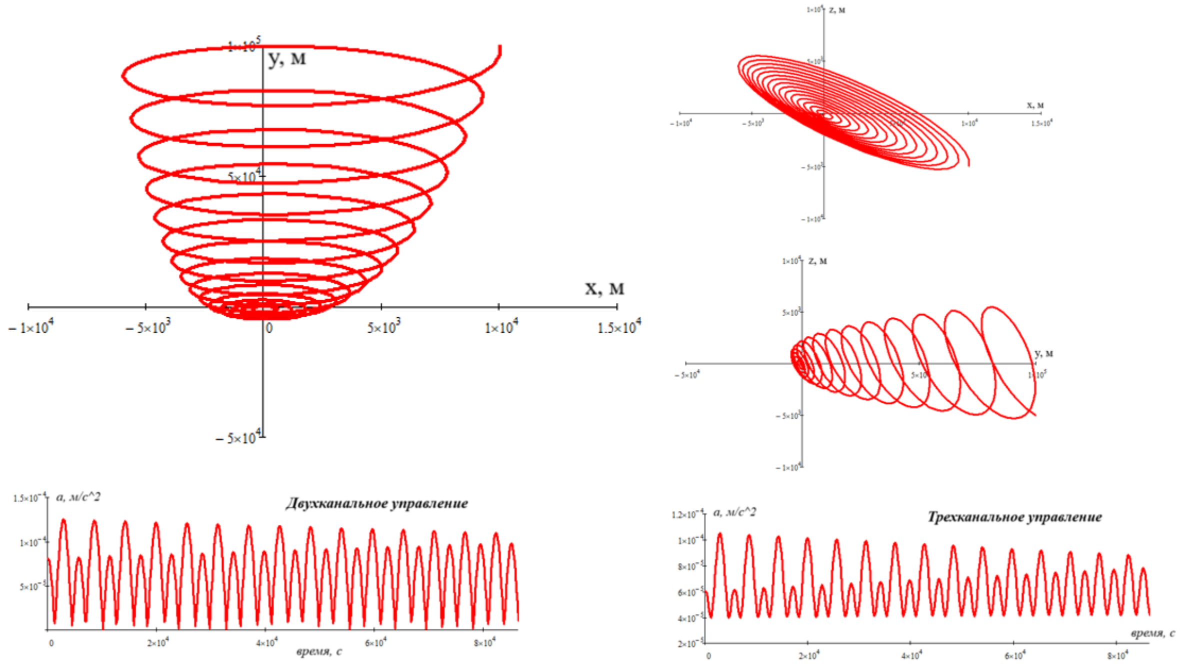

Рис. 6.2.7. Оптимальная ОМ-траектория и оптимальные зависимости ускорения тяги от времени для ДКУ и ТКУ в плоскости x-y (Модель Эльясбега).

Полученные результаты можно представить в виде общей таблицы для удобства сравнения. В таблице 6.2.2 приведены результаты решения компланарной ОМ-задачи с использованием двух различных уравнений движения КА в интервале времени от 0 до 95.775 (в безразмерных переменных). В первом столбце указано время t, а в следующих столбцах представлены величины скорости двух различных уравнений $V_{2l}, V_{3l}, V_{2m},$ и V_{3m} соответственно для случая трех- и двухканальных управлений.

Заметно, что время и величины скорости представлены в безразмерных переменных. Для введения конкретной единицы измерения необходимо умножить их на «scaleT = 902.113с», и на «scale$V$ = V_0», где V_0 – скорость движения по круговой орбите. Здесь и везде обозначим V_{2l}, V_{3l} – двух- и трехканальные величины скорости для уравнений движения HCW; V_{2m}, V_{3m} – двух- и трехканальные величины скорости для уравнений движения Эльясберга.

Таблица 6.2.2 – Сравнение полученных результатов решения компланарной ОМ-задачи с использованием двух различных уравнений движения КА.

t, с	V_{2l}, м/с * 10^{-3}	V_{3l}, м/с * 10^{-3}	V_{2m}, м/с * 10^{-3}	V_{3m}, м/с * 10^{-3}
0	1.319	1.319	1.319	1.319
6.385	0.535	0.536	1.226	1.226
12.77	0.499	0.498	1.132	1.132
19.155	1.004	1	1.038	1.038
25.54	1.447	1.442	0.945	0.945
31.925	1.782	1.776	0.852	0.852
38.31	2.007	2.001	0.76	0.7604
44.695	2.129	2.122	0.669	0.67
51.08	2.152	2.145	0.58	0.581
57.465	2.084	2.077	0.493	0.494
63.85	1.929	1.922	0.407	0.408
70.235	1.693	1.686	0.322	0.323
76.62	1.379	1.374	0.24	0.241
83.005	0.991	0.987	0.159	0.159
89.39	0.531	0.529	0.0787	0.0791
95.775	3.995* 10^{-6}	4.035* 10^{-6}	1.461* 10^{-7}	5.952* 10^{-7}

В таблице 6.2.3 приведены результаты решения некомпланарной ОМ-задачи с использованием двух различных уравнений движения КА в интервале времени от 0 до 95.775 (в безразмерных переменных).

Таблица 6.2.3 – Сравнение полученных результатов решения некомпланарной ОМ-задачи с использованием двух различных уравнений движения КА.

t, с	V_{2l}, м/с * 10^{-3}	V_{3l}, м/с * 10^{-3}	V_{2m}, м/с * 10^{-3}	V_{3m}, м/с * 10^{-3}
0	1.377	1.377	1.377	1.377
6.385	0.689	0.6904	1.301	1.301
12.77	0.68	0.6791	1.223	1.223
19.155	1.111	1.108	1.142	1.142

25.54	1.524	1.519	1.058	1.058
31.925	1.842	1.836	0.971	0.971
38.31	2.056	2.05	0.881	0.881
44.695	2.168	2.162	0.787	0.788
51.08	2.184	2.178	0.691	0.691
57.465	2.109	2.102	0.592	0.593
63.85	1.949	1.942	0.492	0.493
70.235	1.707	1.701	0.391	0.392
76.62	1.389	1.384	0.291	0.292
83.005	0.997	0.993	0.192	0.192
89.39	0.534	0.531	0.0944	0.0948
95.775	$4.407* 10^{-6}$	$4.443* 10^{-6}$	$1.87* 10^{-6}$	$1.953* 10^{-6}$

Согласно таблицам 6.2.2 и 6.2.3 понятно, что для компланарной и некомпланарной ОМ-задач получены следующие СХС: $V_{2l\text{К}} = 163{,}621\text{м/с}, V_{3l\text{К}} = 163{,}111\ \text{м/с}, V_{2m\text{К}} = 77{,}851\text{м/с}, V_{3m\text{К}} = 77{,}903\text{м/с}$ и $V_{2l\text{Н}} = 169{,}981\text{м/с}, V_{3l\text{Н}} = 163{,}497\text{м/с}, V_{2m\text{Н}} = 87{,}469\text{м/с}, V_{3m\text{Н}} = 87{,}51\text{м/с}$. Следовательно, при решении ОМ-задачи линеаризованные уравнения Эльясберга оказываются более эффективными по сравнению с уравнениями HCW, поскольку позволяют снизить затраты СХС в два раза в отличие от применения уравнений HCW. В результате, с позиций затрат топлива, двухканальное управление становится практически эквивалентным трехканальному управлению для обеих моделей движения.

Случай 2. Далее ставится ОСИ-задача, в которой перелет КА происходит за Δt = 86400 с. На рисунке 6.2.8 изображена оптимальная ОМ-траектория (траектория КА с ИРОМ-двигателем). Визуально эта траектория практически идентична для случаев использования как ТКУ, так и ДКУ. На том же рисунке представлены графики зависимости реактивного ускорения от времени для обоих режимов управления.

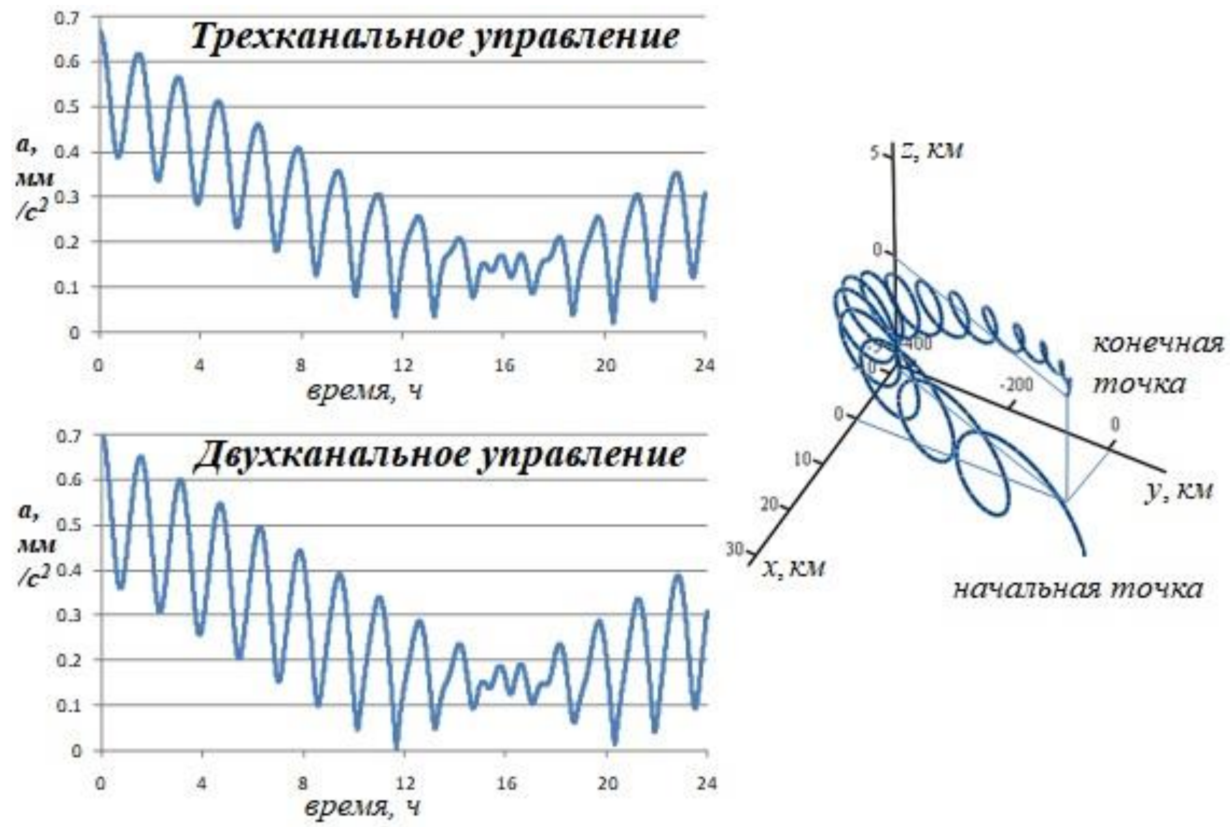

Рис. 6.2.8. Оптимальная ОМ-траектория и оптимальные зависимости ускорения тяги от времени для ТКУ и ДКУ

ОСИ-задача решалась численно с использованием метода непрерывного ПП, аналогичного методу, предложенному в работе [21]. В качестве НП для неизвестных начальных значений сопряженных переменных использовалось аналитическое решение, полученное ранее в данной работе для ОМ-задачи. Система дифференциальных уравнений оптимального движения была включена в однопараметрическое семейство, зависимость которого от искусственно введенного параметра продолжения обеспечивала совпадение уравнений движения при $\lambda = 0$ с уравнениями для КА с ИРОМ-двигателем, а при $\lambda = 1$ — с уравнениями для аппарата с ОТСИ-двигателем. Метод продолжения преобразует краевую задачу ПМП в задачу Коши, включающую интегрирование вложенных систем ОДУ: внешняя система описывает метод продолжения, для решения которой необходимо многократно интегрировать внутреннюю систему, которая моделирует оптимальное движение и вычисляет производные невязок КЗ по ее неизвестным параметрам — начальным значениям сопряженных переменных.

Результаты расчета оптимальных ОСИ-траекторий для разных значений максимальной тяги (от 0.362 Н до 100 Н) и для двух типов управления (ДКУ и ТКУ) представлены на рис.6.2.9.

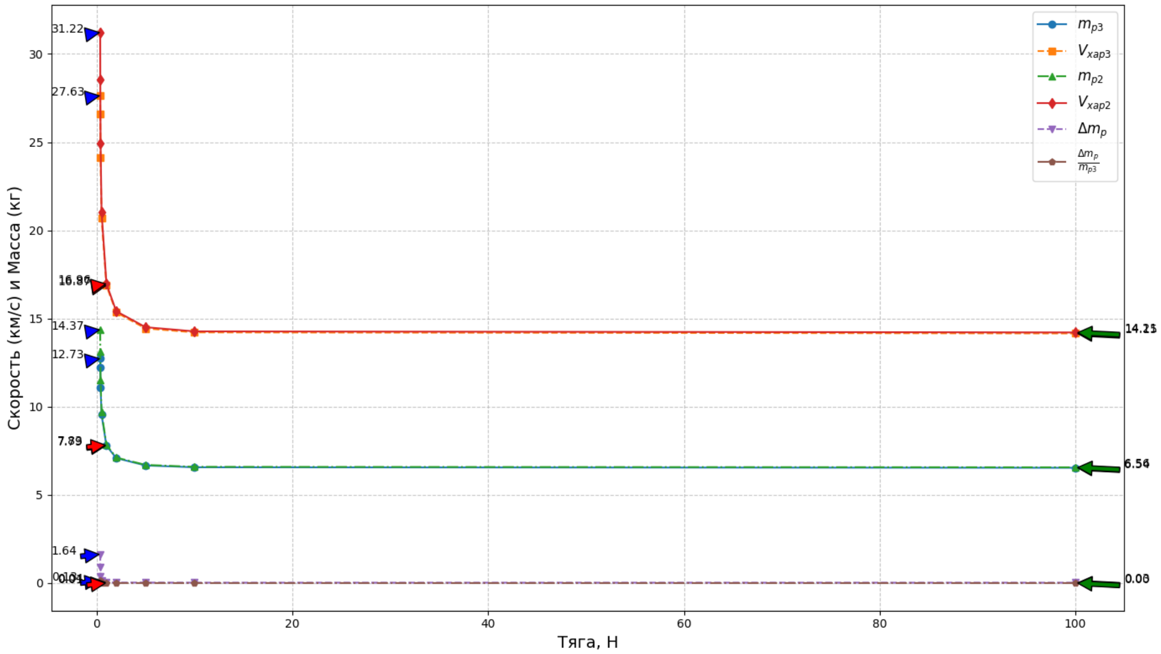

Рис. 6.2.9. Параметры оптимальных ОСИ-траекторий относительно максимальной величины тяги

На основе данных из рисунка 6.2.9 можно заметить, что при минимальной тяге (когда двигатель работает почти непрерывно) трехканальное управление позволяет снизить расход топлива почти на 13% по сравнению с двухканальным. При увеличении тяги разница в расходе топлива между двухканальным и трехканальным управлением уменьшается: при тяге 1 Н этот показатель составляет 0,573%, а при дальнейшем увеличении тяги стремится к пределу, равному примерно 0,39%. Таким образом, с точки зрения расхода топлива двухканальное управление становится почти идентичным трехканальному при ускорении более 0,001 м/с².

На рисунке 6.2.10 показана оптимальная ОСИ-траектория с трехканальным управлением и соответствующее оптимальное управление. Траектория отображена в виде проекции на плоскость орбиты, где пассивные участки представлены тонкой линией, а участки с работающим двигателем – толстой. Двигатель включается 10 раз. В начале траектории угол тангажа колеблется около 180 градусов, что способствует разгону космического аппарата, а в конце – около 0 градусов, что обеспечивает его торможение. В промежуточный период (с 14 по 17 часов) угол тангажа меняется от -180 до 180 градусов. Угол рысканья также варьируется, при этом амплитуда его колебаний достигает 60 градусов на интервале с 13 до 20 часов.

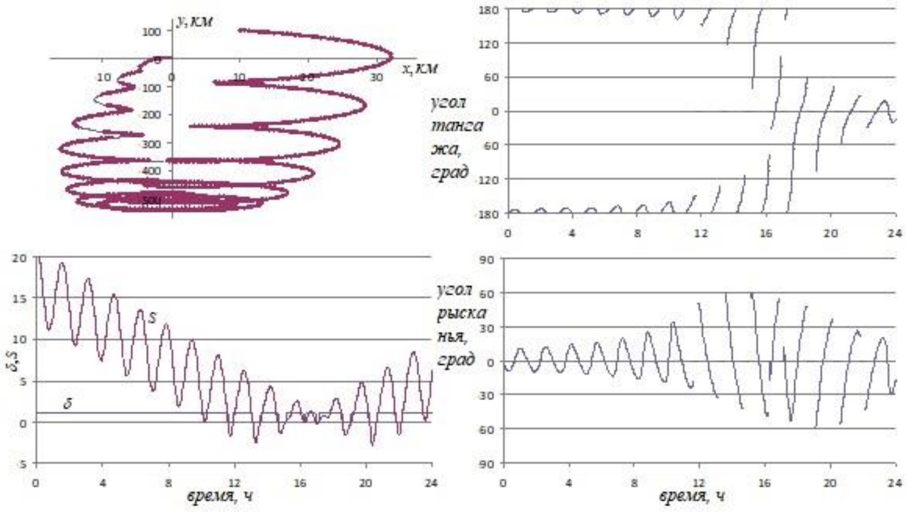

Рис. 6.2.10. Оптимальная ОСИ-траектория с ТКУ и оптимальное ТКУ при T = 0.362 N

На рис.6.2.11 показана траектория с двухканальным управлением. В данном случае двигатель включается только дважды, а период пассивного полета длится менее 15 минут. При двухканальном управлении радиальное реактивное ускорение равно нулю, поэтому угол тангажа изменяется между 0 и 180 градусами.

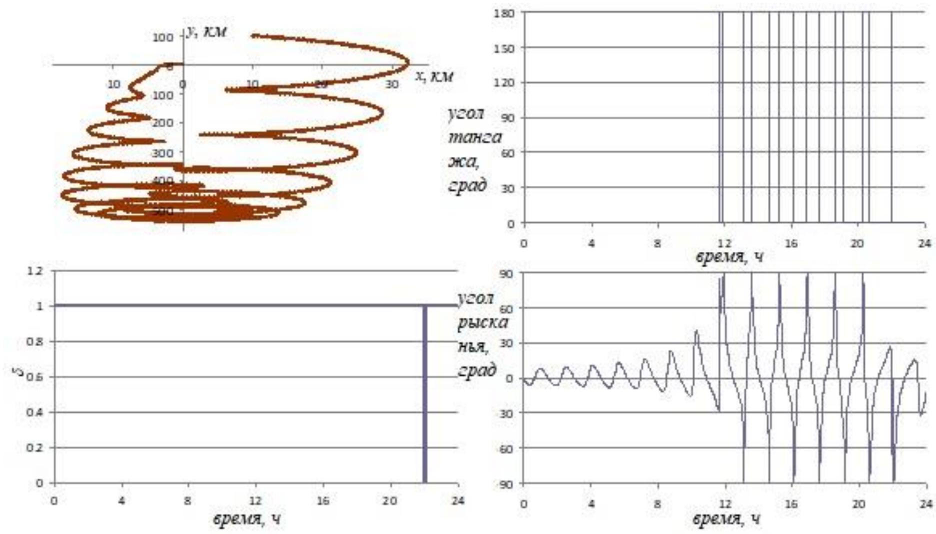

Рис. 6.2.11. Оптимальная ОСИ-траектория с ДКУ и Оптимальное ДКУ управление при T = 0.362 N

Согласно данным, приведенным на рисунках 6.2.9, 6.2.10 и 6.2.11, структура оптимальной траектории может существенно варьироваться в зависимости от выбранного режима управления. Ярким примером является различие в трех- и двухканальном управлении при высокой тяге (100 Н). На рисунке 6.2.12 показаны зависимости функций δ(t) и S(t) от времени для трех- и двухканального управления. Для трехканального управления достаточно всего трех включений двигателя, и конечная точка достигается за менее чем 2 часа. В то время как при двухканальном управлении требуется 31 включение двигателя и полное время перелета (24 часа).

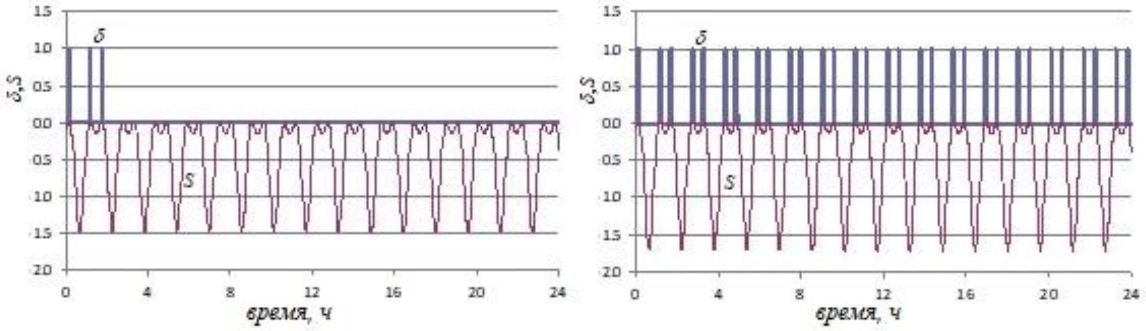

Рис. 6.2.12. Оптимальная тяга и функции переключения для ТКУ (слева) и ДКУ управления при T = 1000 N

6.3. Расчет параметров маневров встречи на компланарных орбитах

Далее рассмотрим задачу встречи КА на компланарных орбитах с помощью N импульсов скорости за фиксированное время Δt = 86400 с.

В рассматриваемой задаче необходимо найти требуется компоненты импульсов скорости ΔVri, ΔVti, ΔVzi, θ_i (i=1, …, N), при которых СХС компланарных маневров ΔV минимальна. Задача решается численно-аналитическими методами с использованием линеаризованных уравнений движения, при этом влияние нецентральности гравитационного поля Земли и сопротивления атмосферы не учитывается.

Решение задачи проводится поэтапно: на первом этапе решается задача оптимального компланарного перехода между начальной и заданной конечной орбитой. Основной целью на этом этапе является определение величин двухимпульсов скорости, обеспечивающих переход на заданную орбиту с минимальными затратами СХС.

На втором этапе решенные импульсы скорости распределяются между интервалами маневрирования таким образом, чтобы обеспечить решение задачи встречи КА. Для этого перебираются возможные начальные значения импульсов скорости на первом витке маневрирования, а на последующих витках значения изменяются линейно, таким образом, чтобы СХС всех маневров соответствовала решениям, полученным на первом этапе для перехода на целевую орбиту. В качестве оптимального решения выбирается тот вариант, при котором СХС минимальна.

На третьем этапе проводится переход от импульсного решения к решению с малой тягой, что представляет собой более реалистичное моделирование для двигательных установок МКА. Особое внимание уделяется исследованию зависимости СХС решения задачи встречи от количества витков перелета и величины тяги ДУ.

Двухимпульсный переход-1. В таблице 6.3.1 представлены результаты вычислений параметров двухимпульсного перехода между компланарными орбитами, включая значения трансверсальных составляющих импульсов скорости, а также углы приложения первого и второго импульсов. Из данных следует, что минимальная величина СХС, необходимая для выполнения маневра перехода, составляет 4,485 м/с.

Таблица 6.3.1 – Результаты расчета параметров задачи компланарного перехода

$\Delta V_1, \frac{м}{с}$	$\Delta V_2, \frac{м}{с}$	$\lvert\Delta V\rvert, \frac{м}{с}$	θ_e °	θ_1°	θ_2 °
-2,785	1. 7	4,485	6.4	186.4	366.4

Многоимпульсное решение. Значение первого импульса скорости варьируется в диапазоне от -2.785м/с до 0.5 м/с с шагом 0.024 м/с.

Параметры оптимальных решений. В таблицах 6.3.2, 6.3.3, 6.3.4, 6.3.5 и 6.3.6 приведены параметры оптимального решения, то есть, значения величин импульсов скорости на витках для случаев, когда N=4, 10, 13, 15 и 22.

Таблица 6.3.2 – Параметры оптимального решения при N=4

N	$\Delta V_{1i}, м/с$ *10^{-2}	$\Delta V_{2i}, м/с$ *10^{-2}	$\lvert\Delta V\rvert, м/с$ *10^{-2}
1	-2.4	84.8	87.2
2	-47.2	56.6	103.8
3	-92	28.4	120.4
4	-136.9	0.2	137.1
$\sum$	-278.5	170	448.5

Таблица 6.3.3 – Параметры оптимального решения при N=10

N	$\Delta V_{1i}, м/с$	$\Delta V_{2i}, м/с$	$\lvert\Delta V\rvert, м/с$
1	-1.302*10-4	0.209	0.209
2	-0.062	0.2	0.262
3	-0.124	0.192	0.316
…	…	…	…
8	-0.433	0.148	0.581
9	-0.495	0.14	0.635
10	-0.557	0.131	0.688
$\sum$	-2.785	1.7	4.485

Таблица 6.3.4 – Параметры оптимального решения при N=13

N	$\Delta V_{1i}, м/с$ *10^{-2}	$\Delta V_{2i}, м/с$ *10^{-2}	$\lvert\Delta V\rvert, м/с$ *10^{-2}
1	-0.1	19.9	20
2	-3.7	18.7	22.4
…	…	…	…
12	-39.2	7.4	46.6
13	-42.7	0.63	49
$\sum$	-278.5	170	448.5

Таблица 6.3.5 – Параметры оптимального решения при N=15

N	ΔV_{1i}, м/с	ΔV_{2i}, м/с	$\lvert\Delta V\rvert$, м/с
1	-0.022	0.172	0.194
2	-0.045	0.163	0.208
3	-0.069	0.155	0.224
…	…	…	…
13	-0.303	0.072	0.375
14	-0.326	0.063	0.389
15	-0.349	0.055	0.404
∑	-2.785	1.7	4.485

Таблица 6.3.6 - Параметры оптимального решения при N=22.

N	ΔV_{1i}, м/с	ΔV_{2i}, м/с	$\lvert\Delta V\rvert$, м/с
1	-0.0001	0.155	0.155
2	-0.012	0.148	0.16
3	-0.024	0.14	0.164
…	…	…	…
20	-0.229	0.014	0.243
21	-0.241	0.007	0.248
22	-0.253	-0.000631	0.254
∑	-2.785	1.7	4.485

Решение задачи с использованием ДУ малой тягой. В таблицах 6.3.7, 6.3.8,..., 6.3.16 представлены результаты вычислений для задачи с малыми тягами, включая значения импульсов скорости и продолжительности маневров на орбитах для случаев, когда N равны 4, 10, 13, 15 и 22.

В некоторых случаях решений нет из-за того, что значения аргумента арксинуса находятся вне диапазона (-1; 1). При увеличении тяги продолжительности маневров уменьшаются, затраты СХС решения с малой тягой при увлечении тяги совпадают с затратами СХС импульсного решения.

Таблица 6.3.7 – Результаты расчета задачи с малой тягой, при N=4

T, Н	0.362	0.37	0.4	0.5	1	2	5	10	100
Δφ°	-	-	-	-	300.137	144.199	57.082	28.499	2.849
$\Delta V, \frac{м}{с}$	-	-	-	-	4.725	4.541	4.494	4.487	4.485

Таблица 6.3.8 – Результаты расчета задачи с малой тягой «Тяга= 1 Н», при N=4

N	ΔV_{1i}, м/с $*10^{-2}$	ΔV_{2i}, м/с $*10^{-2}$	$\lvert\Delta V\rvert$, м/с $*10^{-2}$	$\Delta\varphi_{1i}{}^\circ*10^{-2}$	$\Delta\varphi_{2i}{}^\circ*10^{-2}$	$(\lvert\Delta\varphi\rvert)^\circ*10^{-2}$
1	-4	86.4	90.4	-256.1	5487	5743.1
2	-48	57.3	105.3	-3047.3	3642.4	6689.7
3	-94.2	30.6	124.8	-5984.1	1943.4	7927.5
4	-144.3	7.7	152	-9165	488.4	9653.4
∑	-290.5	182	472.5	-18452.5	11561.2	30013.7

Таблица 6.3.9 – Результаты расчета задачи с малой тягой, при N=10

T, H	0.362	0.37	0.4	0.5	1	2	5	10	100
$\Delta\varphi°*10^{-2}$	82842.1	80852.3	74211.5	584457	28661.2	14264.5	5698.5	2848.7	284.9
$\Delta V, \frac{м}{с}*10^{-2}$	472.1	471	467.4	460.1	451.3	449.2	448.6	448.5	448.5

Таблица 6.3.10 – Результаты расчета задачи с малой тяги «Тяга= 0.362 Н». при N=10

N	ΔV_{1i}, м/с	ΔV_{2i}, м/с	$\lvert\Delta V\rvert$, м/с	$\Delta\varphi_{1i}°$	$\Delta\varphi_{2i}°$	$(\lvert\Delta\varphi\rvert)°$
1	-0.002	0.211	0.213	-0.342	36.991	37.333
2	-0.064	0.202	0.266	-11.166	35.44	46.606
3	-0.126	0.193	0.319	-22.044	33.944	55.988
…	…	…	…	…	…	…
8	-0.452	0.167	0.619	-79.237	29.265	108.502
9	-0.523	0.168	0.691	-91.758	29.412	121.17
10	-0.598	0.172	0.77	-104.902	30.181	135.083
∑	-2.903	1.818	4.721	-509.392	319.029	828.421

Таблица 6.3.11 – Результаты расчета задачи с малой тягой, при N=13

T, H	0.362	0.37	0.4	0.5	1	2	5	10	100
$\Delta\varphi°*10^{-2}$	80986.5	79132.9	72895.2	57815	28588.4	14255.5	5697.9	2848.7	284.9
$\Delta V, \frac{м}{с}*10^{-2}$	461.6	461	459.1	455.1	450.1	448.9	448.6	448.5	448.5

Таблица 6.3.12 – Результаты расчета задачи с малой тягой «Тяга= 0.362 Н», при N=13

N	ΔV_{1i}, м/с $*10^{-2}$	ΔV_{2i}, м/с $*10^{-2}$	$\lvert\Delta V\rvert$, м/с $*10^{-2}$	$\Delta\varphi_{1i}°*10^{-2}$	$\Delta\varphi_{2i}°*10^{-2}$	$(\lvert\Delta\varphi\rvert)°*10^{-2}$
1	-0.3	20	20.3	-45	3514.9	3559.9
2	-3.8	18.9	22.7	-664.2	3311.7	3975.9
…	…	…	…	…	…	…
12	-40.5	8.7	49.2	-7101.5	1525.3	8626.8
13	-44.4	8	52.4	-7795.3	1396.7	9192
∑	-2.85	176.5	461.5	-50011.4	30975.1	80986.5

Таблица 6.3.13 – Результаты расчета задачи с малой тягой, при N=15

T, H	0.362	0.37	0.4	0.5	1	2	5	10	100
$\Delta\varphi°*10^{-2}$	84795.9	82897	76485.7	60863.8	30221.7	15085.1	6031.2	3015.4	301.5
$\Delta V, \frac{м}{с}*10^{-2}$	457.1	456.7	455.4	452.9	449.6	448.8	448.5	448.5	448.5

Таблица 6.3.14 – Результаты расчета задачи с малой тягой «Тяга= 0.362 Н», при N=15

N	ΔV_{1i}, м/с	ΔV_{2i}, м/с	$\lvert\Delta V\rvert$, м/с	$\Delta\varphi_{1i}°$	$\Delta\varphi_{2i}°$	$(\lvert\Delta\varphi\rvert)°$
1	-0.023	0.173	0.196	-4.054	30.303	34.357
2	-0.046	0.164	0.21	-8.132	28.818	36.95
3	-0.07	0.156	0.226	-12.218	27.341	39.559
…	…	…	…	…	…	…
13	-0.308	0.077	0.385	-54.082	13.577	67.659
14	-0.333	0.07	0.403	-58.435	12.367	70.802
15	-0.358	0.064	0.422	-62.833	11.201	74.034
∑	-2.828	1.743	4.571	-496.127	351. 832	847.959

Таблица 6.3.15 – Результаты расчета задачи с малой тягой, при N=22

T, H	0.362	0.37	0.4	0.5	1	2	5	10	100
$\Delta\varphi°*10^{-2}$	794927	777397	71807.1	57273	285257	14250.8	5699	2849.4	284.9

$\Delta V, \frac{м}{с}$*10-2	453.1	452.9	452.2	450.9	449.1	448.6	448.5	448.5	448.5

Таблица 6.3.16 – Результаты расчета задачи с малой тягой «Тяга= 0.362 Н», при N=22

N	$\Delta V_{1i}, м/с$	$\Delta V_{2i}, м/с$	$\|\Delta V\|, м/с$	$\Delta\varphi_{1i}$°	$\Delta\varphi_{2i}$°	$(\|\Delta\varphi\|)$°
1	-0.00084	0.156	0.157	-0.147	27.355	27.516
2	-0.013	0.148	0.161	-2.243	26.036	28.291
3	-0.025	0.141	0.166	-4.341	24.718	29.07
…	…	…	…	…	…	…
20	-0.231	0.017	0.248	-40.598	2.915	43.513
21	-0.244	0.01	0.254	-42.783	1.685	44.468
22	-0.256	0.003	0.259	-44.976	0.462	45.438
∑	-2.808	1.723	4.531	-492.645	302.282	794.927

Двухимпульсный переход-2. Как показывают результаты, при снижении тяги (и короткой продолжительности встречи) продолжительность нескольких импульсов становится больше, чем нужно для корректировки эксцентриситета. Для ограничения времени этих импульсов мы устанавливаем их амплитуду так, чтобы они все еще оказывали значительное влияние на эксцентриситет, но количество импульсов минимизируется. Этот метод демонстрируется на рисунках 6.3.1 (до применения алгоритма) и 6.3.1 (после его применения), где изменения амплитуды импульсов имеют гибкую форму, обеспечивая точную коррекцию эксцентриситета и позволяя определить оптимальную продолжительность этих импульсов.

На рисунке 6.3.1 показаны параметры оптимального решения, полученные с использованием предыдущего алгоритма для задачи компланарной встречи.

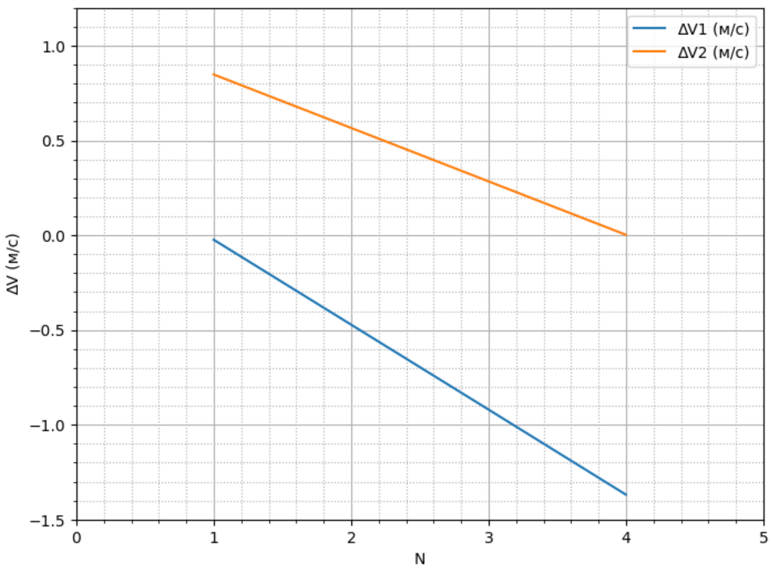

Рис. 6.3.1 - Параметры оптимального решения при N=4.

На рисунке 6.3.2 представлены параметры оптимального решения, вычисленные с помощью модификационного алгоритма для задачи компланарной встречи.

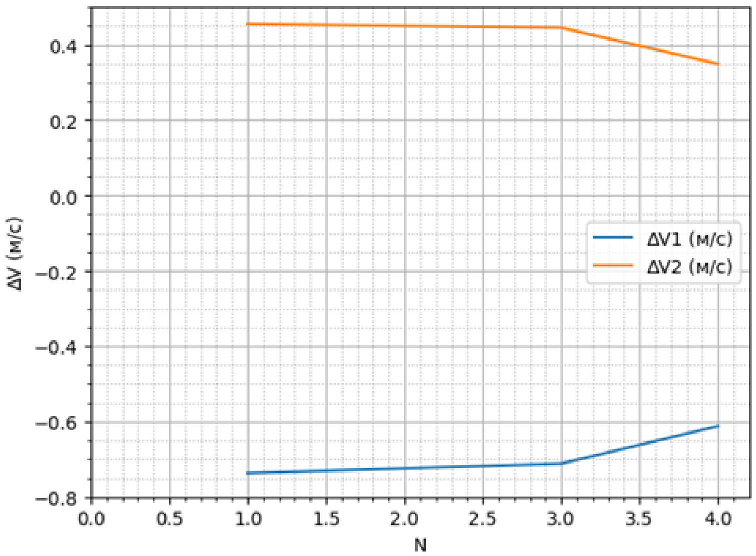

Рис. 6.3.2. Параметры оптимального решения при N=4

Затем рассмотрим решение задачи с использованием малой тяги. Результаты расчетов задачи встречи с малой тягой при значении "Тяга = 0.362 Н" и при N=4 приведены в таблицах 6.3.17 и 6.3.18.

Таблица 6.3.17 – Результаты расчета задачи с малой тягой

T, Н	0.362	0.37	0.4	0.5	1	2	5	10	100
$\Delta\varphi°*10^{-2}$	99751.9	95721.5	84224.2	62468.5	29061	14312.1	5701.5	28.491	284.9
$\Delta V, \frac{м}{с}*10^{-2}$	568.5	557.6	530.4	491.8	457.6	450.7	448.8	448.6	448.5

В таблице 6.3.18 представлены результаты расчета задачи с малой тяги, в которой, в свою очередь, решения имеются на всех 4-х витках.

Таблица 6.3.18 – Результаты расчета задачи с малой тягой «Тяга=0,362 Н»

N	$\Delta V_{1i}, м/с$ $*10^{-2}$	$\Delta V_{2i}, м/с$ $*10^{-2}$	$\|\Delta V\|, м/с$ $*10^{-2}$	$\Delta\varphi_{1i}°*10^{-2}$	$\Delta\varphi_{2i}°*10^{-2}$	$(\|\Delta\varphi\|)°*10^{-2}$
1	-92.9	64.7	157.6	-16292.9	11353.9	27646.7
2	-89.9	62.5	152.4	-1577	10962.7	26732.8
3	-87.1	60.5	147.6	-15288.1	10612.5	25900.6
4	-68.6	42.3	110.9	-12043.1	7428.7	19471.8
$\sum$	-338.5	23	568.5	-59394.1	40357.8	99751.9

6.4. Определение параметров маневров встречи на компланарных орбитах при заданных импульсов скорости

Многоимпульсное решение задачи встречи. В таблицах 6.4.6, 6.4.7,…, 6.4.3 приведены результаты расчета параметров многоимпульсных маневров встречи для компланарных орбит при N=10, включая значения трансверсальных составляющих импульсов скорости. Однако минимальная характеристическая скорость, необходимая для осуществления перехода КА, составляет 4,485 м/с. Как видно, в рамках полученных результатов предыдущего алгоритма при тяге, которая находится в интервале от 0.25 до 100 Н задача решается оптимально и фиксировать импульсы не требуется.

Для перехода к новому алгоритму требуется решить задачу с такой низкой тягой, которая приведет к появлению импульсов, превышающих допустимые значения. Однако нас интересуют решения при значениях тяги 0.24, 0.22, 0.21, 0.2 и 0.19 Н, в то время как тяги ниже 0.19 Н не рассматриваются. Результаты расчетов задачи с малыми тягами приведены в таблицах 6.4.1,…, 6.4.5.

Таблица 6.4.1 – Результаты расчета задачи с малой тяги «Тяга= 0.24 Н», при N=10

N	$\Delta V_{1i}, м/с$	$\Delta V_{2i}, м/с$	$\lvert\Delta V\rvert, м/с$	$\Delta\varphi_{1i}°$	$\Delta\varphi_{2i}°$	$(\lvert\Delta\varphi\rvert)°$
1	-0.004	0.213	0.217	-1.162	56.439	57.601
2	-0.066	0.204	0.27	-17.429	54.042	71.471
3	-0.128	0.196	0.324	-33.897	51.845	85.742
4	-0.192	0.189	0.381	-50.755	50.039	100.794
5	-0.258	0.185	0.443	-68.229	48.849	117.078
6	-0.327	0.184	0.511	-86.615	48.569	135.184
7	-0.402	0.188	0.59	-106.333	49.623	155.956
8	-0.484	0.199	0.683	-128.068	52.694	188.762
9	-0.579	0.223	0.802	-153.125	59.085	212.21
10	-0.699	0.273	0.972	-184.942	72.238	257.18
∑	-3.139	2.054	5.193	-830.555	543.424	1373.979

Таблица 6.4.2 – Результаты расчета задачи с малой тяги «Тяга= 0.22 Н», при N=10

N	$\Delta V_{1i}, м/с$	$\Delta V_{2i}, м/с$	$\lvert\Delta V\rvert, м/с$	$\Delta\varphi_{1i}°$	$\Delta\varphi_{2i}°$	$(\lvert\Delta\varphi\rvert)°$
1	-0.005	0.214	0.219	-1.515	61.818	63.333
2	-0.067	0.205	0.272	-19.239	59.181	78.42
3	-0.129	0.197	0.326	-37.23	56.81	94.04
4	-0.193	0.19	0.383	-55.741	54.96	110.701
5	-0.26	0.187	0.447	-75.087	53.944	129.031
6	-0.331	0.188	0.519	-95.702	54.197	149.899
7	-0.41	0.195	0.605	-118.267	56.402	174.669
8	-0.499	0.214	0.713	-144.053	61.826	205.879
9	-0.611	0.255	0.866	-176.253	73.665	249.918
10	-	-	-	-	-	-
∑	-	-	-	-	-	-

Таблица 6.4.3 – Результаты расчета задачи с малой тяги «Тяга=0.21 Н», при N=10

N	$\Delta V_{1i}, м/с$	$\Delta V_{2i}, м/с$	$\lvert\Delta V\rvert, м/с$	$\Delta\varphi_{1i}°$	$\Delta\varphi_{2i}°$	$(\lvert\Delta\varphi\rvert)°$
1	-0.006	0.215	0.221	-1.748	64.923	66.671
2	-0.067	0.205	0.272	-20.302	62.146	82.448
3	-0.13	0.197	0.327	-39.167	59.68	98.847
4	-0.194	0.191	0.385	-58.641	57.823	116.464
5	-0.262	0.188	0.45	-79.1	56.951	136.051

6	-0.334	0.19	0.524	-101.088	57.607	158.695
7	-0.415	0.201	0.616	-125.508	60.697	186.205
8	-0.51	0.225	0.735	-154.235	68.093	222.328
9	-0.64	0.284	0.924	-193.471	85.998	279.469
10	-	-	-	-	-	-
$\sum$	-	-	-	-	-	-

Таблица 6.4.4 – Результаты расчета задачи с малой тяги «Тяга= 0.2 Н», при N=10

N	$\Delta V_{1i}, м/с$	$\Delta V_{2i}, м/с$	$\lvert\Delta V\rvert, м/с$	$\Delta\varphi_{1i}{}^\circ$	$\Delta\varphi_{2i}{}^\circ$	$(\lvert\Delta\varphi\rvert)^\circ$
1	-0.006	0.214	0.22	-2.034	68.367	70.401
2	-0.068	0.206	0.274	-21.498	65.434	86.932
3	-0.13	0.198	0.328	-41.329	62.867	104.196
4	-0.195	0.192	0.387	-61.878	61.019	122.897
5	-0.263	0.19	0.453	-83.606	60.349	143.955
6	-0.338	0.194	0.542	-107.207	61.553	168.76
7	-0.422	0.207	0.629	-133.931	65.879	199.81
8	-0.525	0.24	0.765	-166.799	76.349	243.148
9	-0.721	0.366	1.087	-229.121	116.274	345.395
10	-	-	-	-	-	-
$\sum$	-	-	-	-	-	-

Таблица 6.4.5 – Результаты расчета задачи с малой тяги «Тяга=0.19 Н», при N=10

N	$\Delta V_{1i}, м/с$	$\Delta V_{2i}, м/с$	$\lvert\Delta V\rvert, м/с$	$\Delta\varphi_{1i}{}^\circ$	$\Delta\varphi_{2i}{}^\circ$	$(\lvert\Delta\varphi\rvert)^\circ$
1	-0.007	0.216	0.223	-2.386	72.211	74.597
2	-0.068	0.207	0.275	-22.854	69.102	91.956
3	-0.131	0.199	0.33	-43.758	66.429	110.187
4	-0.196	0.193	0.389	-65.52	64.615	130.135
5	-0.265	0.192	0.457	-88.713	64.232	152.945
6	-0.342	0.198	0.54	-114.251	66.193	180.444
7	-0.431	0.216	0.647	-143.964	72.331	216.295
8	-0.549	0.264	0.813	-183.539	88.329	271.868
9	-	-	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-	-
$\sum$	-	-	-	-	-	-

Далее, берем решения, представленные в таблице 6.4.1, и превращаем их в решение с фиксированными импульсами. Фиксируем импульсы на последнем витке орбиты. Продолжительность первого импульса на витке составляет -180 градусов, а продолжительность второго импульса — 72 градусов. Необходимо вычислить, представить в таблице влияние этих импульсов на разность элементов орбиты, сравните значения элементов орбиты до выполнения маневров и после их выполнения. После этого можно применить стандартный алгоритм для первых 9 витков, представленный в [87]. В таблице 6.4.6 представлены изменения элементов орбит (ЭО) до и после применения этих фиксированных импульсов в безразмерных переменных.

Таблица 6.4.6 – Изменение эксцентриситета и большой полуоси

Элементы орбиты	ЭО$_1$	ЭО$_2$	Разность ЭО
$\Delta \boldsymbol{e_i} * \mathbf{10^{-4}}$	-1.806	-1.655	-0.151
$\Delta \boldsymbol{a_{0i}} * \mathbf{10^{-4}}$	-1.118	-0.9823	-0.1357
$\Delta \mathbf{t}_i * \mathbf{10^{-3}}$	-12	-1.51	-0.1049

Важно отметит, что для расчета параметров маневров компланарного перехода нужно вычислить новые значения ЭО из начальных ЭО. После того, определим их в таблице 6.4.7 и т.д.

Таблица 6.4.7 – Результаты расчета параметров маневров компланарного перехода для оставшихся промахов по эксцнтриситету и БПО

$\Delta V_1, \frac{\text{м}}{\text{с}}$	$\Delta V_2, \frac{\text{м}}{\text{с}}$	$\lvert\Delta V\rvert, \frac{\text{м}}{\text{с}}$
-2.283	1.572	3.855

Таблица 6.4.8 - Распределение двухимпульсов, чтобы скорректировать оставшийся после фиксированного импульса промах по времени.

N	ΔV_{1i}, м/с	ΔV_{2i}, м/с	$\lvert\Delta V\rvert$, м/с
1	$-1.302*10^{-4}$	0.19	0.19
2	-0.064	0.186	0.25
3	-0.127	0.182	0.309
4	-0.19	0.178	0.368
5	-0.254	0.175	0.429
6	-0.317	0.171	0.488
7	-0.38	0.167	0.547
8	-0.444	0.163	0.607
9	-0.507	0.16	0.667
10	-0.502	0.128	0.630

Далее определяем изменение эксцентриситета и БПО на каждом витке, чтобы выполнить условие по времени перелета КА.

Таблица 6.4.9 – Изменение эксцентриситета и большой полуоси

N	$\Delta \boldsymbol{e_i} * \mathbf{10^{-4}}$	$\Delta \boldsymbol{a_{0i}} * \mathbf{10^{-4}}$
1	-0.499	0.4983
2	-0.6554	0.3219
3	-0.8119	0.1454
4	-0.9683	-0.0311
5	-1.125	-0.2074
6	-1.281	-0.3838
7	-1.438	-0.5603
8	-1.594	-0.7368
9	-1.75	-0.9132
10	-1.655	-0.9821

Таблица 6.4.10 – Результаты расчета задачи с малой тяги «Тяга=0.22 Н», при N=10

N	ΔV_{1i}, м/c	ΔV_{2i}, м/c	$\lvert\Delta V\rvert$, м/с	$\Delta\varphi_{1i}°$	$\Delta\varphi_{2i}°$	$(\lvert\Delta\varphi\rvert)°$
1	-0.004	0.194	0.198	-1.133	55.898	57.031

2	-0.067	0.19	0.257	-19.414	54.786	74.2
3	-0.132	0.187	0.319	-37.966	53.945	91.911
4	-0.198	0.186	0.384	-57.068	53.654	110.722
5	-0.267	0.188	0.455	-77.076	54.269	131.345
6	-0.341	0.195	0.536	-98.493	56.293	154.786
7	-0.423	0.21	0.633	-122.144	60.551	182.695
8	-0.519	0.238	0.757	-149.693	68.707	218.4
9	-0.645	0.297	0.942	-186.245	85.866	272.111
10	-0.623	0.249	0.872	-180	72	252
∑	-3.219	2.134	5.353	-929.232	615.97	1545.202

Исходя из Таблице 6.4.2, разумеется, что на десятом витке решения нет, так как продолжительности маневров превысили допустимое значение. Однако после реализации нового алгоритма, результаты которого представлены в Таблице 6.4.10, теперь существует решение для десятого витка.

6.5. Расчет параметров маневров встречи на некомпланарных орбитах

Далее рассмотрим задачу встречи КА на некомпланарных орбитах с помощью N импульсов скорости за фиксированное время Δt = 86400 с.

В этой задаче требуется также найти компоненты импульсов скорости ΔVri, ΔVti, ΔVzi, θ_i (i=1, …, N), при которых СХС некомпланарных маневров ΔV минимальна. Задача решается численно-аналитическими методами, при которых применяется упрощенная модель движения, исключая влияние нецентральности гравитационного поля Земли и атмосферного сопротивления. Процесс расчета параметров маневров разделен на три основных этапа. На первом и третьем этапах параметры импульсных переходов и маневров с использованием двигателей МТ определяются аналитически. Второй этап включает распределение маневров по орбитальным виткам, обеспечивающее выполнение задачи встречи, и выполняется методом перебора одной переменной. Такой подход выделяется простотой и высокой устойчивостью вычислений, что делает его особенно подходящим для реализации на борту КА в реальном времени.

В исследовании также проведен анализ зависимости общей характеристики скорости маневра от величины тяги двигателя. Для улучшения точности параметров маневров может быть использована итерационная процедура, которая учитывает возмущения, вызванные, например, нецентральностью гравитационного поля Земли или атмосферными эффектами.

Двухимпульсный переход. В таблице 6.5.1 представлены результаты расчетов параметров оптимального двухимпульсного маневра перехода между некомпланарными орбитами, включая значения трансверсальных и боковых составляющих импульсов скорости, а также углы приложения первого и второго импульсов. Угол приложения первого импульса варьировался от 0 до 360° с шагом 0,75°. Из полученных данных видно, что минимальное значение характеристической скорости, необходимое для выполнения маневра перехода, составляет 10,308 м/с.

Таблица 6.5.1 – Результаты поиска параметров задачи оптимального некомпланарного импульсного перехода

θ_1°	θ_2 °	ΔV_{t1}, м/с	ΔV_{t2}, м/с	ΔV_{z1}, м/с	ΔV_{z2}, м/с	ΔV_t, м/с	ΔV_z, м/с	ΔV_1, м/с	ΔV_2, м/с	ΔV, м/с
155	55.851	-3.452	2.367	0.637	6.372	5.819	7.01	3.51	6.798	10.308

Многоимпульсное решение задачи встречи. Для получения импульсного решения задачи встречи импульсы скорости двухимпульсного решения распределяются между 15 витками, так чтобы было выполнено условие по времени (4.9г). Для этого используется алгоритм, описанный в работе [22]. Величина первого импульса скорости перебирается в границах от -3.452м/с до 0.5 м/с с шагом 0.023 м/с.

На рис. 6.5.1 показано распределение двухимпульсного решения по 15 виткам для выполнения условия встречи.

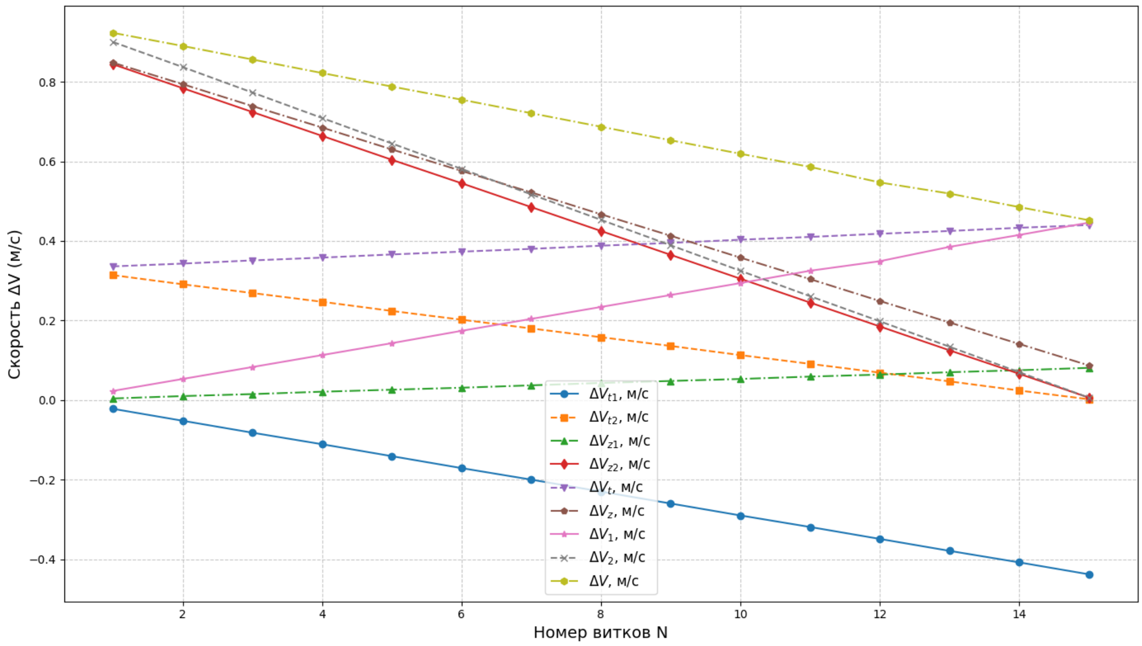

Рис. 6.5.1. Распределение двухимпульсного решения по 15 виткам

В таблице 6.5.2 приведены отклонения элементов орбиты по виткам, соответствующие влиянию распределенных импульсов скорости.

Таблица 6.5.2 – Результаты отклонений элементов орбиты по виткам

N	$\Delta e_{1ix} * 10^{-4}$	$\Delta e_{1iy} * 10^{-4}$	$\Delta e_i * 10^{-4}$	θ_{ei} °	$\Delta a_{0i} * 10^{-4}$	$\Delta V_{zi} * 10^{-4}$	$\Delta z_i * 10^{-4}$	θ_{zi} °
1	-0.41	-0.71	0.816	59.877	0.765	-0.627	0.915	55.578
2	-0.306	-0.691	0.755	66.096	0.629	-0.589	0.847	55.163
3	-0.203	-0.675	0.705	73.302	0.492	-0.552	0.779	54.68
…	…	…	…	…	…	…	…	…
13	0.833	-0.521	0.983	-32.057	-0.872	-0.176	0.097	29.028
14	0.936	-0.506	1.064	-28.395	-1.009	-0.138	0.029	11.991
15	1.04	-0.491	1.15	-25.267	-1.145	-0.1	-0.039	-21.159

Далее вычисляются продолжительности маневров, которые для реальной малой тяги 1Н обеспечивают вычисленные изменения элементов орбиты на каждом витке, представленные на рис.6.5.2.

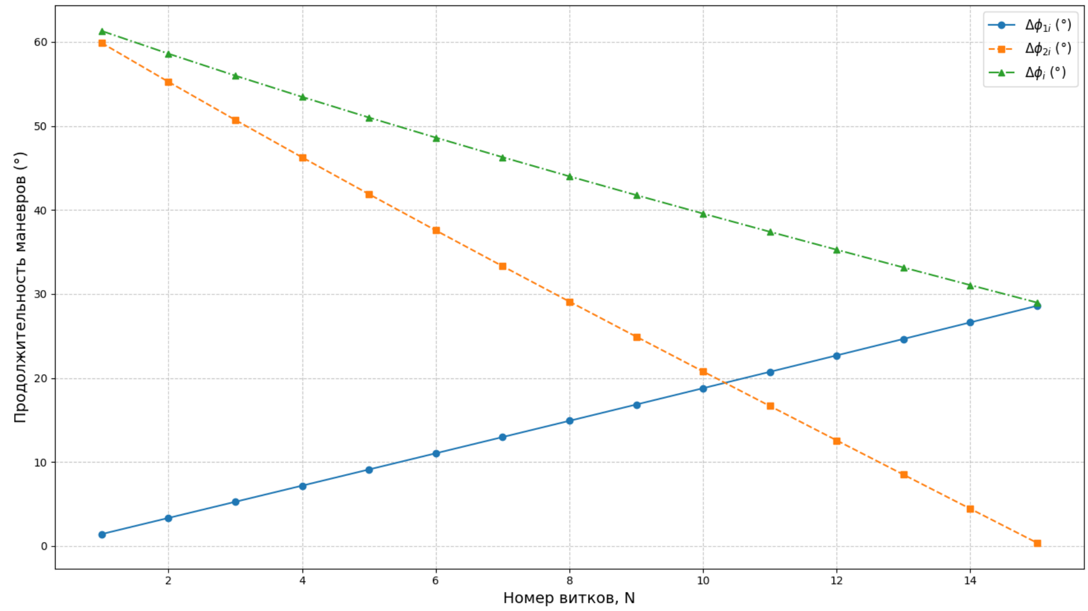

Рис. 6.5.2. Продолжительность маневров при N=15

Для обеспечения требуемых изменений орбитальных элементов, каждый маневр рассчитан так, чтобы сформировать необходимые изменения, аналогичные тем, что достигаются в импульсных маневрах. Задача усложняется тем, что изменение БПО происходит в большем объеме, чем необходимо, так как оно оказывается более эффективным при корректировке ориентации орбиты, чем при изменении эксцентриситета. В итоге, несмотря на успешное выполнение маневров, направленных на корректировку вектора эксцентриситета и ориентации плоскости относительно начальной и целевой орбит, возникает ошибка при достижении необходимого значения БПО. Для устранения этой ошибки целесообразно применять итерационную процедуру, предложенную в разделе 2.2, которая позволит корректировать параметры орбиты до достижения необходимых условий с заданной точностью (см. приложение 2).

Таблица 6.5.3 – Произведенное изменение БПО под действием МТ и ошибки в коррекции БПО

N	$\Delta a_{0i} * 10^{-4}$	$\Delta a_i * 10^{-4}$	$\delta a_i * 10^{-4}$	$\Delta a_{2i} * 10^{-4}$
1	0.765	0.804	-0.039	0.727
2	0.629	0.659	-0.0304	0.598
3	0.492	0.516	-0.0235	0.469
…	…	…	…	…
13	-0.872	-0.88	0.0076	-0.865
14	-1.009	-1.018	0.0097	-0.999
15	-1.145	-1.157	0.01203	-1.133

1-я итерация: первая итерация представлена на рисунках 6.5.4 - 6.5.7.

Таблица 6.5.4 – Параметры нового импульсного решения при N=15

N	ΔV_{t1}, м/с	ΔV_{t2}, м/с	ΔV_{z1}, м/с	ΔV_{z2}, м/с	ΔV_t, м/с	ΔV_z, м/с	ΔV_1, м/с	ΔV_2, м/с	ΔV, м/с
1	-0.04	0.317	-0.045	-0.843	0.357	0.888	0.060	0.901	0.961
2	-0.066	0.294	-0.029	-0.791	0.36	0.82	0.072	0.844	0.916
3	-0.092	0.271	-0.014	-0.73	0.363	0.744	0.093	0.779	0.872
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
13	-0.375	0.046	0.079	-0.124	0.421	0.203	0.383	0.132	0.515
14	-0.404	0.024	0.086	-0.065	0.428	0.151	0.413	0.069	0.482
15	-0.435	0.003	0.089	0.009	0.438	0.098	0.444	0.009	0.453
$\sum$	-3.501	2.378	0.501	-5.402	5.879	7.073	3.585	6.82	10.405

Таблица 6.5.5 – Продолжительность маневра при N=15

N	$\Delta\varphi_{1i}$ °	$\Delta\varphi_{2i}$ °	$\Delta\varphi_i$ °
1	3.82	60.588	64.408
2	4.57	55.777	60.347
3	5.944	51.103	57.047
…	…	…	…
13	24.551	8.425	32.976
14	26.499	4.379	30.878
15	28.498	0.636	29.134
$\sum$	228.554	444.563	673.117

Таблица 6.5.6 – Параметры решения с МТ при N=15

N	ΔV_{t1}, м/с	ΔV_{t2}, м/с	ΔV_{z1}, м/с	ΔV_{z2}, м/с	ΔV_t, м/с	ΔV_z, м/с	ΔV_1, м/с	ΔV_2, м/с	ΔV, м/с
1	0.059	0.332	-0.011	0.894	0.391	0.905	0.060	0.954	1.014
2	0.071	0.306	-0.013	0.823	0.377	0.836	0.072	0.878	0.950
3	0.092	0.28	-0.017	0.754	0.372	0.771	0.094	0.804	0.898
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
13	0.38	0.046	-0.07	0.124	0.426	0.194	0.386	0.132	0.519
14	0.41	0.024	-0.076	0.065	0.434	0.141	0.417	0.069	0.486
15	0.441	0.003	-0.081	0.009	0.444	0.09	0.448	0.009	0.458
$\sum$	3.537	2.438	-0.653	6.56	5.975	7.213	3.597	6.998	10.595

Таблица 6.5.7 – Произведенное изменение БПО под действием МТ и ошибки в коррекции БПО

N	$\Delta a_{0i} * 10^{-4}$	$\Delta a_i * 10^{-4}$	$\delta a_i * 10^{-4}$	$\Delta a_{2i} * 10^{-4}$
1	0.765	0.717	0.00483	0.775
2	0.629	0.617	0.0116	0.61
3	0.492	0.494	-0.0017	0.467
…	…	…	…	…
13	-0.872	-0.869	0.00466	-0.867
14	-1.009	-1.014	0.00566	-0.993
15	-1.145	-1.15	0.00437	-1.129

2-я итерация: вторая итерация показана на рисунках 6.5.8 - 6.5.11.

Таблица 6.5.8 – Параметры очередного импульсного решения при N=15

N	ΔV_{t1}, м/с	ΔV_{t2}, м/с	ΔV_{z1}, м/с	ΔV_{z2}, м/с	ΔV_t, м/с	ΔV_z, м/с	ΔV_1, м/с	ΔV_2, м/с	ΔV, м/с
1	-0.018	0.313	0.016	-0.842	0.331	0.858	0.024	0.898	0.922
2	-0.061	0.293	-0.014	-0.788	0.354	0.802	0.063	0.841	0.904
3	-0.093	0.271	-0.016	-0.73	0.364	0.746	0.094	0.779	0.873
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
13	-0.374	0.046	0.084	-0.124	0.42	0.208	0.383	0.132	0.515
14	-0.402	0.024	0.092	-0.065	0.426	0.157	0.412	0.069	0.481
15	-0.434	0.004	0.092	0.0114	0.438	0.1034	0.444	0.012	0.456
$\sum$	-3.079	2.38	0.543	-5.406	5.867	7.023	3.550	6.830	10.38

Таблица 6.5.9 – Продолжительность маневров при N=15

N	$\Delta\varphi_{1i}$ °	$\Delta\varphi_{2i}$ °	$\Delta\varphi_i$ °
1	1.507	59.736	61.243
2	3.942	55.554	59.496
3	6.017	51.136	57.153
…	…	…	…
13	24.32	8.401	32.721
14	26.446	4.397	30.843
15	28.473	0.775	29.248
$\sum$	226.272	444.306	670.578

Таблица 6.5.10 – Параметры решения с МТ при N=15

N	ΔV_{t1}, м/с	ΔV_{t2}, м/с	ΔV_{z1}, м/с	ΔV_{z2}, м/с	ΔV_t, м/с	ΔV_z, м/с	ΔV_1, м/с	ΔV_2, м/с	ΔV, м/с
1	0.023	0.328	-0.004	0.882	0.351	0.886	0.023	0.941	0.964
2	0.061	0.305	-0.011	0.82	0.366	0.831	0.062	0.875	0.937
3	0.093	0.28	-0.017	0.755	0.373	0.772	0.095	0.805	0.900
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
13	0.377	0.046	-0.069	0.124	0.423	0.193	0.383	0.132	0.515
14	0.409	0.024	-0.076	0.065	0.433	0.141	0.416	0.069	0.485
15	0.441	0.004	-0.081	0.011	0.445	0.092	0.448	0.012	0.460
$\sum$	3.503	2.437	-0.644	6.557	5.939	7.201	3.561	6.995	10.556

Таблица 6.5.11 – Произведенное изменение БПО под действием МТ и ошибки в коррекции БПО

N	$\Delta a_{0i} * 10^{-4}$	$\Delta a_i * 10^{-4}$	$\delta a_i * 10^{-4}$	$\Delta a_{2i} * 10^{-4}$
1	0.765	0.799	-0.0335	0.741
2	0.629	0.639	-0.0107	0.599
3	0.492	0.4915	0.00082	0.468
…	…	…	…	…
13	-0.872	-0.868	-0.00438	-0.864
14	-1.009	-1.012	0.00323	-0.99
15	-1.145	-1.146	0.00133	-1.127

3-я итерация: третья итерация представлена на рисунках 6.5.12 - 6.5.15.

Таблица 6.5.12 – Параметры очередного импульсного решения при N=15

N	ΔV_{t1}, м/с	ΔV_{t2}, м/с	ΔV_{z1}, м/с	ΔV_{z2}, м/с	ΔV_t, м/с	ΔV_z, м/с	ΔV_1, м/с	ΔV_2, м/с	ΔV, м/с
1	-0.033	0.315	-0.026	-0.849	0.348	0.875	0.042	0.906	0.948
2	-0.066	0.294	-0.027	-0.791	0.36	0.818	0.071	0.844	0.915
3	-0.093	0.271	-0.015	-0.73	0.364	0.745	0.094	0.779	0.873
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
13	-0.375	0.046	0.079	-0.126	0.421	0.205	0.383	0.134	0.517
14	-0.401	0.024	0.095	-0.065	0.425	0.16	0.412	0.069	0.481
15	-0.434	0.004	0.093	0.012	0.438	0.105	0.444	0.013	0.457
$\sum$	-3.506	2.381	0.494	-6.388	5.887	7.058	3.577	6.840	10.417

Таблица 6.5.13 – Продолжительность маневра при N=15

N	$\Delta\varphi_{1i}$ °	$\Delta\varphi_{2i}$ °	$\Delta\varphi_i$ °
1	2.659	60.283	62.942
2	4.516	55.759	60.275
3	5.982	51.12	57.102
…	…	…	…
13	24.548	8.423	32.971
14	26.42	4.42	30.84
15	28.466	0.819	29.285
$\sum$	228.22	445.039	673.259

Таблица 6.5.14. Параметры решения с МТ при N=15

N	ΔV_{t1}, м/с	ΔV_{t2}, м/с	ΔV_{z1}, м/с	ΔV_{z2}, м/с	ΔV_t, м/с	ΔV_z, м/с	ΔV_1, м/с	ΔV_2, м/с	ΔV, м/с
1	0.041	0.331	-0.008	0.89	0.372	0.898	0.042	0.950	0.992
2	0.07	0.306	-0.013	0.823	0.376	0.836	0.071	0.878	0.949
3	0.093	0.28	-0.017	0.755	0.373	0.772	0.095	0.805	0.900
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
13	0.38	0.046	-0.07	0.124	0.426	0.194	0.386	0.132	0.518
14	0.409	0.024	-0.075	0.065	0.433	0.14	0.416	0.069	0.485
15	0.441	0.004	-0.081	0.012	0.445	0.093	0.448	0.013	0.461
$\sum$	3.534	2.44	-0.652	6.569	5.974	7.221	3.594	7.008	10.601

Таблица 6.5.15 – Произведенное изменение БПО под действием МТ и ошибки в коррекции БПО

N	$\Delta a_{0i} * 10^{-4}$	$\Delta a_i * 10^{-4}$	$\delta a_i * 10^{-4}$	$\Delta a_{2i} * 10^{-4}$
1	0.765	0.76	0.0055	0.747
2	0.629	0.619	0.00969	0.609
3	0.492	0.493	-0.000405	0.467
…	…	…	…	…
13	-0.872	-0.877	0.00455	-0.86
14	-1.009	-1.011	0.00183	-0.99
15	-1.145	-1.146	0.000407	-1.127

4-я итерация: четвертая итерация показана на рисунках 6.5.16 - 6.5.19.

Таблица 6.5.16 – Параметры очередного импульсного решения при N=15

N	ΔV_{t1}, м/с	ΔV_{t2}, м/с	ΔV_{z1}, м/с	ΔV_{z2}, м/с	ΔV_t, м/с	ΔV_z, м/с	ΔV_1, м/с	ΔV_2, м/с	ΔV, м/с
1	-0.031	0.315	-0.019	-0.848	0.346	0.867	0.036	0.905	0.941
2	-0.061	0.293	-0.015	-0.788	0.354	0.803	0.063	0.841	0.904
3	-0.093	0.271	-0.016	-0.73	0.364	0.746	0.094	0.779	0.873
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
13	-0.373	0.046	0.084	-0.124	0.419	0.208	0.382	0.132	0.514
14	-0.401	0.024	0.096	-0.065	0.425	0.161	0.412	0.069	0.481
15	-0.434	0.005	0.093	0.012	0.439	0.105	0.444	0.013	0.457
$\sum$	-3.496	2.381	0.517	-6.382	5.877	7.039	3.562	6.834	10.396

Таблица 6.5.17 – Продолжительность маневра при N=15

N	$\Delta\varphi_{1i}$ °	$\Delta\varphi_{2i}$ °	$\Delta\varphi_i$ °
1	2.273	60.18	62.453
2	3.991	55.573	59.564
3	5.999	51.128	57.127
…	…	…	…
13	24.499	8.401	32.9
14	26.406	4.437	30.843
15	28.463	0.832	29.295
$\sum$	227.192	444.773	671.965

Таблица 6.5.18 – Параметры решения с МТ при N=15

N	ΔV_{t1}, м/с	ΔV_{t2}, м/с	ΔV_{z1}, м/с	ΔV_{z2}, м/с	ΔV_t, м/с	ΔV_z, м/с	ΔV_1, м/с	ΔV_2, м/с	ΔV, м/с
1	0.035	0.33	-0.006	0.888	0.365	0.894	0.036	0.947	0.983
2	0.062	0.305	-0.011	0.82	0.367	0.831	0.063	0.875	0.938
3	0.093	0.28	-0.017	0.755	0.373	0.772	0.095	0.805	0.900
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
13	0.379	0.046	-0.07	0.124	0.425	0.194	0.385	0.132	0.518
14	0.409	0.024	-0.075	0.065	0.433	0.14	0.416	0.069	0.485
15	0.441	0.005	-0.081	0.012	0.446	0.093	0.448	0.013	0.461
$\sum$	3.518	2.44	-0.647	6.564	5.958	7.211	3.577	7.003	10.580

Таблица 6.5.19 – Произведенное изменение БПО под действием МТ и ошибки в коррекции БПО

N	$\Delta a_{0i} * 10^{-4}$	$\Delta a_i * 10^{-4}$	$\delta a_i * 10^{-4}$	$\Delta a_{2i} * 10^{-4}$
1	0.765	0.774	-0.00872	0.738
2	0.629	0.638	-0.009	0.6
3	0.492	0.492	0.000198	0.468
…	…	…	…	…
13	-0.872	-0.875	0.0029	-0.857
14	-1.009	-1.01	0.001031	-0.987
15	-1.145	-1.145	0.000124	-1.127

Получена необходимая точность формирования БПО, поэтому итерационная процедура закончена. Рассчитываются затраты СХС соответствующей найденным продолжительностям маневров, они представлены на рисунках 6.5.3.

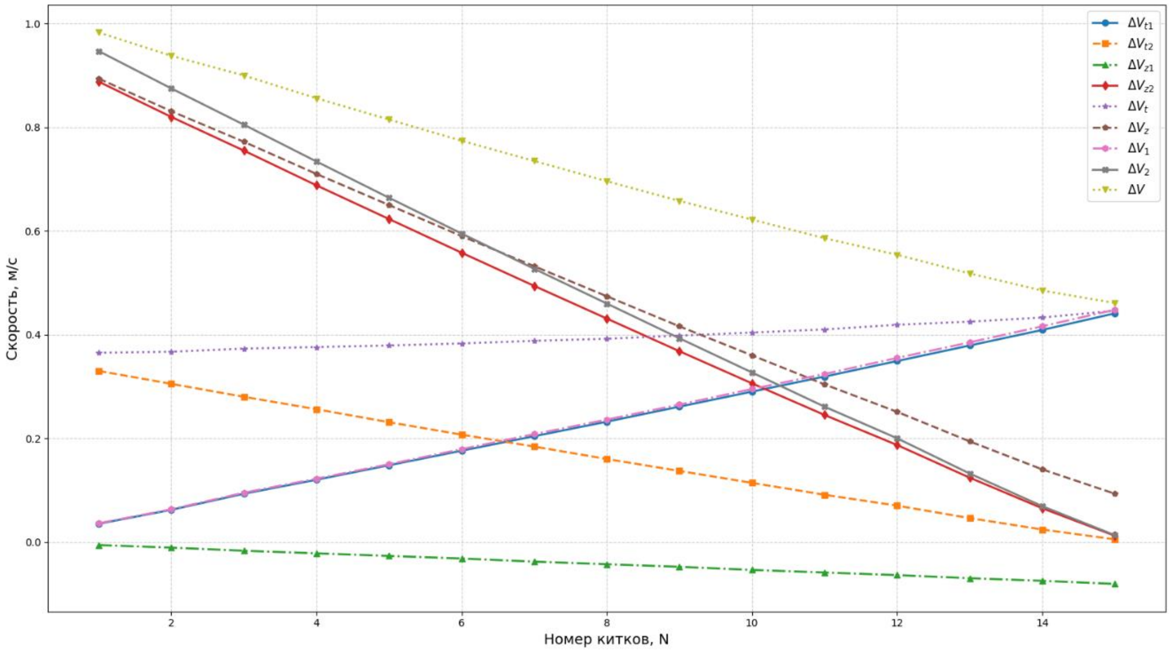

Рис. 6.5.3. Расчет затраты СХС решения с помощью малой тяги при N=15

Аналогичным образом рассчитываются маневры для различных значений тяг. Результаты приведены в сводной таблице 6.5.20.

Таблица 6.5.20 – Параметры решения относительно максимальной величины тяги

T, Н	1	2	5	10	100
ΔV, м/с	10.580	10.377	10.32	10.318	10.308
M, кг	4.892	4.798	4.772	4.771	4.766

Таким образом, было получено решение некомпланарной задачи встречи КА, оснащенного двигателями малой тяги. Однако при тяге от 0.362 до 0.6 Н численно-аналитический метод не дает решения из-за ограничений на аргумент арксинуса, что указывает на неразрешимость задачи при малой тяге и массе КА.

6.6. Заключение по разделу

В разделе были проведены численные примеры решения задачи перелета различных вариантов. Для численного решения задачи оптимизации траектории КА с ИРОМ-двигателем и ОТСИ-двигателем был использован метода ПП, основанный на ньютоновской гомотопии. Этот подход позволил преобразовать краевую задачу для системы ОДУ в задачу Коши, требующую численного интегрирования вложенных систем уравнений. Также проведены примеры решения задачи переходов между орбитами и встречи КА с помощью ДУ малой тяги. Для решения задачи некомпланарного перехода был применен численно-аналитический метод, обеспечивающий заданную точность формирования БПО с помощью итерационного процесса. Линеаризованные уравнения Эльясберга оказались более эффективными для решения задачи встречи с некоторыми ограничениями, чем уравнения HCW. Полученные аналитические и численно-аналитические решения можно использовать как начальные приближенные для решения практических задач, так как результаты намного лучше сходятся.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе рассмотрены аналитические, численно-аналитические и численные методы к решению задачи встречи КА, оснащенных ДУ малой тяги.

Основные результаты исследования работы включают:

1. Разработка аналитических методов для решения КЗ оптимального управления КА, оснащенным ИРОМ-двигателем. Рассмотрены два варианта управления: ТКУ (управление без ограничений на ориентацию вектора тяги) и ДКУ (управление с нулевой радиальной составляющей тяги). Установлено, что для исследуемых примеров траектории с двух- и трехканальным управлением близки друг к другу. Переход к двухканальному управлению может быть обусловлен ограничениями системы управления, необходимостью обеспечения радиосвязи или видимости аппаратов.

2. Вариант метода ПП (ньютоновская гомотопия), который использует нулевое НП для неизвестных сопряженных переменных. Этот метод позволил преобразовать КЗ к задаче Коши, решаемой численным интегрированием вложенных систем ОДУ.

3. Вариант численного метода ПП, примененный для проверки аналитических решений. Сравнение аналитических и численных результатов оптимизации траектории продемонстрировало их совпадение с точностью до ошибки численного решения (до 8 значащих цифр).

4. Анализ двухканального управления при ограниченной тяге двигателя. Установлено, что при работе двигателя не более 20% от общего времени перелета разница в затратах топлива между двух- и трехканальным управлением составляет десятые доли процента. Однако, если двигатель работает большую часть времени, топливные затраты при двухканальном управлении могут превышать затраты для трехканального более чем на 10%.

5. Разработка численно-аналитических методов для расчета параметров маневров:

- многоимпульсных встреч на компланарных орбитах;
- многовитковых встреч на компланарных орбитах с использованием двигателей малой тяги;
- многоимпульсных встреч на некомпланарных орбитах;
- многовитковых встреч на некомпланарных орбитах с двигателями малой тяги.

Главным достоинством предложенных численно-аналитических методов решения задач встречи является их простота в расчетах и надежность, что позволяет использовать их не только в наземных центрах управления, но и на борту КА.

ОСНОВНЫЕ СОКРАЩЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

МКА – малый космический аппарат;

КА – космический аппарат;

КМ – космическая миссия;

ДУ – двигательная установка;

БПО – большая полуось;

МТ – малая тяга;

ЭРД – электрический ракетный двигатель;

ЭРДУ – электроракетная двигательная установка;

ПМП – принцип максимума Понтрягина;

НП – начальное приближение;

КЗ – краевая задача;

ДКЗ – двухточечная краевая задача;

НОО – низкая околоземная орбита;

ГСО – геостационарная орбита;

ПП – продолжение по параметру;

ИРОМ – идеально-регулируемый с ограниченной мощностью;

ОТСИ – ограниченная тяга с постоянной скоростью истечения;

ОДУ – Обыкновенное дифференциальное уравнение;

ОМ – ограниченная мощность;

ОСИ – ограниченная скорость истечения;

СХС – суммарная характеристическая скорость;

ИР – идеально-регулируемый;

КПД – коэффициент полезного действия;

ТКУ – трехканальное управление;

ДКУ – двухканальное управление;

HCW – Hill-Clohessy-Wiltshire;

а.е. – астрономическая единица;

$\mathbf{T}$ – вектор тяги (T – модуль вектора тяги);

$\mu_З$ – гравитационный параметр Земли;

t – время;

n	– среднее движение КА;
c	– скорость истечения;
Isp	– удельный импульс тяги;
q	– реактивная мощность двигательной установки;
g_0	– стандартное ускорение свободного падения (9.80665 м/с2);
$\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$	– векторы положения и скорости;
m	– масса;
Ω	– силовая функция гравитационного поля;
$\delta, \boldsymbol{e}_T$	– функция включения двигателя и единичный вектор вдоль вектора тяги;
$\mathbf{p}$	– вектор сопряженных переменных;
ω	– ускорение, создаваемое двигательной установки.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Баранов А.А. Маневрирование в окрестности круговой орбиты. Издательство «Спутник+». Москва. 2016. 512с.
2. Циолковский К.Э. Исследование мировых пространств реактивными приборами. Рукопись статьи, законченной в 1903 г., Архив РАН, фонд №555, рукопись 1, дело 35.
3. Циолковский К. Э. Исследование мировых пространств реактивными приборами. Научное обозрение, 1903, №5, с. 45-75; Вестник воздухоплавания, 1911, №19, 20-22; 1912, №3, 5,6, 7, 9.
4. Глушко В.П. Развитие ракетостроения в СССР. М., Машиностроение, 1987.
5. Прассинг Ж.Е. Оптимальная четырехимпульсная встреча в фиксированный момент времени в окрестности круговой орбиты // Ракетная техника и космонавтика. 1969. Т. 7. № 5. С. 163-172.
6. Прассинг Ж.Е. Оптимальные двух- и трехимпульсные встречи в окрестности круговой орбиты при фиксированном времени перехода// Ракетная техника и космонавтика. 1970. Т. 8. № 7. С. 46-56.
7. Петухов В.Г. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения // Космич. исслед. 2008. 46, № 3. С. 224-237.
8. Петухов В.Г. Оптимизация траекторий и эволюция движения космических аппаратов с двигательными установками малой тяги. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.07.09 «Динамика, баллистика и управление движением летательных аппаратов», М., МАИ, 1996, 132 с.
9. Петухов В.Г. Оптимизация траекторий космических аппаратов с электроракетными двигательными установками методом продолжения. дис. доктор тех. наук М. 2013. 243 с.
10. Петухов В.Г. Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой // Космич. исслед. 2012. 50, № 3. С. 258–270.
11. Петухов В.Г. Метод продолжения для оптимизации траекторий с малой тягой. Тезисы Пятого международного аэрокосмического конгресса IAC06. Москва, 27-31 августа 2006 г.

12. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета с малой тягой. М. Наука, 1969.
13. Лоуден Д.Ф. (Lawden D.F.), Оптимальные траектории для космической навигации. М. Мир, 1966, 152 с.
14. Ахметшин Р.З. Плоская задача оптимального перелета космического аппарата с малой тягой с высокоэллиптической орбиты на геостационар// Космические исследования, т. 42, № 3, с. 248-259, 2004.
15. Салмин В. В. Оптимизация космических перелетов с малой тягой М. Машиностроение, 1987.
16. Холодниок М., Клич А., Кубичек М. и др. Методы анализа нелинейных динамических моделей. М.: Мир, 1991.
17. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М., Наука, 1975.
18. Константинов М.С. Методы математического программирования в проектировании летательных аппаратов. М., Машиностроение, 1975.
19. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г. Гамкрелидзе Р.В. Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
20. Петухов В.Г. Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами // Космические исследования. 2004. Т. 42. № 3. С. 260-279.
21. Петухов В.Г. Робастное квазиоптимальное управление с обратной связью для перелета с малой тягой между некомпланарными эллиптической и круговой орбитами // Вестник Московского авиационного института. 2010. Т. 17, № 3. С. 50-58.
22. Баранов А.А., Оливио А.П. Некомпланарная встреча на околокруговой орбите с помощь двигателя малой тяги // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2024. Т. 25. № 1. С. 7–20. https://doi.org/10.22363/2312-8143-2024-25-1-7-20.
23. Баранов А.А. Перелеты между околокруговыми орбитами // Энциклопедия «Машиностроение», Том IV-22, “Ракетно-космическая техника”. Книга 1, Глава 2.3, п.2.3.7, с.141-151. ISBN 978-5-94275-589-8. М.: Машиностроение, 2012.
24. Лебедев В.Н. Расчет движения космического аппарата с малой тягой. Москва: Изд.

ВЦ АН СССР, 1968. 108 с.

25. Константинов М.С., Петухов В.Г., Тейн М. Оптимизация траекторий гелиоцентрических перелетов. 2 изд. М.: Изд-во МАИ, 2015. 260 с.

26. Булынин Ю.Л. Баллистическое обеспечение управления орбитальным движением геостационарных КА на различных этапах эксплуатации, 13 Международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация», тезисы докладов, Крым, Евпатория, 29 июня-06 июля 2008, с. 73-74.

27. Рылов Ю.П. Управление космическим аппаратом, входящим в спутниковую систему при помощи электроракетных двигателей, Космические исследования, 1985, Т. 23, №. 5. С. 691-700.

28. Бажинов И.К., Ястребов В.Д. Навигация в совместном полете космических кораблей «Союз» и «Аполлон», М., Наука, 1978, 224 с.

29. Петрова Б.Н., Бажинова И.К. Навигационное обеспечение полета орбитального комплекса «Салют–6» - «Союз» - «Прогресс». М.: Наука, 1985.

30. Баранов А.А. Алгоритм расчета параметров четырех-импульсных переходов между близкими околокруговыми орбитам // Космические исследования. 1986. Т. 24. № 3. С. 400-403 (324-327).

31. Малышев В.В., Бобронников В.Т., Красильщиков М.Н. и др. Программный комплекс для анализа, синтеза и управления космическими системами // Международная космическая конференция – 2001 «Космос без оружия – арена мирного сотрудничества в XXI веке». Тезисы докладов. 2001. С. 43-45.

32. Лидов М.Л. Математическая аналогия между некоторыми оптимальными задачами коррекции траекторий и выбора состава измерений и алгоритмы их решения // Космические исследования. 1971. Т.9. № 5. С. 687-706.

33. Лидов М.Л., Тесленко Н.М. Оптимизация решения некоторых задач управления полетом космических аппаратов методом спуска по параметру. В сборнике. Математическое обеспечение космических экспериментов. М.: Наука, 1978. С. 112-141.

34. Гаврилов А.В. Поиск глобального минимума функционала при решении задачи линейного маневра КА // РК техника, научно - технический сборник. Серия IX. Вып.1. 1995.

35. Гаврилов В.П., Обухов Е.В. Задача коррекции с ограничением на число импульсов

// Космические исследования. 1980. Т.18. № 2. С. 163-172.

36. Колегов Г.А. Избранные разделы космической баллистики искусственных спутников Земли. ЦНИИмаш, 2007.
37. Бахшиян Б.Ц., Назиров Р.Р., Эльясберг П.Е. Определение и коррекция движения. М.: Наука, 1980.
38. Лайон М., Хенделсмен М. Базис-вектор для импульсных траекторий с заданным временем перелёта // Ракетная техника и космонавтика. 1968. Т.6. № 1. С. 153-160.
39. Ежевски, Розендаал (Jezewski D.J., Rozendaal H.L.). Эффективный метод расчета оптимальных N–импульсных траекторий полета в космическом пространстве // Ракетная техника и космонавтика. 1968. Т.6. № 11. С. 138-145.
40. Баранов А.А. Численно-аналитическое определение параметров маневров многовитковой встречи КА на близких околокруговых некомпланарных орбитах // Космические исследования. 2008. Т. 46. № 5. С. 430-439.
41. Кузмак Г.Е., Брауде А.З. Приближенное построение оптимальных перелетов в малой окрестности круговой орбиты // Космические исследования. 1969. Т. 7. № 3. С. 323-338.
42. Лебедев В.Н. Расчет движения космического аппарата с малой тягой. Москва: Изд. ВЦ АН СССР, 1968. 108 с.
43. Константинов М.С., Каменков Е.Ф., Перелыгин Б.П., Безвербый В.К. Механика космического полета с малой тягой. под ред. В.П. Мишина. М.: Машиностроение, 1989. 408 с.
44. Петухов В.Г. Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой// Космические исследования. 2012. Т. 50. № 3. С. 258-270.
45. Улыбышев Ю.П. Оптимизация межорбитальных перелетов с малой тягой при ограничениях // Космические исследования. 2012. Т. 50. № 5. С. 403-418.
46. Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. Москва: Наука, 1965. 540 с.
47. Баранов А.А., Каратунов М.О., Разумный Ю.Н., Вихрачев В.О. Геометрический метод оценки околокруговой орбиты после однократной коррекции. // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2017. № 1. стр. 141-149.
48. Gobetz F.W., Doll J.R. Обзор импульсных траекторий, Ракетнаятехника и космонавтика, 1969, т. 7, № 5, с. 3-46.

49. Белецкий В.В., Егоров В.А. Межпланетные полеты с двигателями постоянной мощности // Космич. исслед. 1964. Т. 2. № 3. (Cosmic Research. P. 303-330).
50. Ирвинг Д. Полеты с малой тягой в гравитационных полях при переменной скорости истечения // Космическая техника / Под ред. Г. Сейферта. М.: Наука, 1964.
51. Петухов В.Г. Использование методов продолжения по параметру для оптимизации траекторий космических аппаратов с малой тягой. Тезисы докладов XXXII Научных Чтений, посвященных разработке творческого наследия К.Э. Циолковского. М., ИИЕТ РАН, 1997.
52. Петухов В.Г. Оптимизация траекторий космических аппаратов с малой тягой. Семинар ИКИ РАН по динамике и управлению, Москва, ИКИ РАН, 2000 (URL: http://arc.iki.rssi.ru/seminar/200006/OLTTR2.ppt).
53. Баранов А.А., Ролдугин Д.С. Шестиимпульсные маневры встречи КА на околокруговых некомпланарных орбитах // Космические исследования. 2012. Т. 50. № 6. С. 472-480 (441-449).
54. Петрова Б.Н., Бажинова И.К. Навигационное обеспечение полета орбитального комплекса «Салют – 6» - «Союз» - «Прогресс». М.: Наука, 1985.
55. Гавурин М.К. Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов. Известия вузов. Математика. 1958. № 5, с. 18-31.
56. Давиденко Д.Ф. Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений. ДАН СССР. 1953, т. 88, № 4, с. 601-602.
57. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. М.: Мир, 1982.
58. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.
59. Курбатова Е.А. Самоучитель Matlab 7. Издательство “Диалектика”, 2006.
60. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.
61. Goddard R.H. A method of reaching extreme altitudes. Washington: Smithsonian Inst. Publ. Misc., 1919, Collect 71(2).
62. Hohmann W. Die erreichbarkeit der himmelskorper. Munique: Oldenbourg, 1925.
63. Hoelker R.F., Silber R. The bi-elliptic transfer between circular coplanar orbits. Alabama, Army Ballistic Missile Agency, Redstone Arsenal, Jan. 1959 (DA Tech Memo 2-59).

64. Tsien H.S. Take-off from satellite orbit. Journal of the American Rocket Society, 23(4)233-236, July/Aug. 1953.
65. Lawden D.F. Optimal programming of rocket thrust direction. Astronautica Acta: v. 1, № 1, p. 41-56, Jan-fev, 1955.
66. Marec J.P. Optimal Space Trajectories, Studies in Astronautics; V.1. Elsevier Sci. Pub.Co. Amsterdam-Oxford-New York, 1979. 329 p.
67. Petukhov V.G., Olívio A.P. Optimization of the Finite-Thrust Trajectory in the Vicinity of a Circular Orbit. Advances in the Astronautical Sciences, 2021, Vol. 174, pp. 5-15.
68. Shen H.J., Tsiotras P. Optimal Two-Impulse Rendezvous Using Multiple-Revolution Lambert Solutions // Journal of Guidance, Control and Dynamics. 2003. Vol. 26. No. 1, pp. 50–61. DOI: 10.2514/2.5014.
69. Olivio A.P. Optimizing the trajectory of a spacecraft using an ideally regulated engine in the vicinity of a circular orbit // International Research Journal. 2024. № 6 (144). P.1-10. https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.144.24.
70. Pontryagin L.S. et al. The Mathematical Theory of Optimal Process. New York: John Wiley & Sons, 1962.
71. Bellman R. The Theory of Dynamic Programming. Laramie: American Mathematical Society. 1954.
72. Bryson A.E., HO Y.-C. Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control. Washington: John Wiley & Sons, 1975.
73. Topputo F. On optimal two-impulse Earth-Moon transfers in a four-body model. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, vol. 117, no. 3, pp. 279–313, 2013.
74. Mingotti G., Topputo F., Bernelli-Zazzera F. “Efficient invariant-manifold, low-thrust planar trajectories to the Moon”. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 17, no. 2, pp. 817–831, 2012.
75. Berts J.T., Erb S.O. Optimal Low Thrust Trajectories to Moon (URL: http://www.boeing.com/phantom/socs/extra/smrtppr.pdf).
76. Lantoine G. A Methodology for Robust Optimization of Low-Thrust Trajectories in MultiBody Environments. PhD Thesis, Georgia Institute of Technology. 2010, 327 p.
77. Lantoine G.A., Russel R.P. A Hybrid Differential Dynamic Programming Algorithm for Constrained Optimal Control Problems. Part 1: Theory. J Optim Theory Appl (2012) 154:382- 417, DOI 10.1007/sl0957-012-0039-0, 36 p.

78. Patel P.L. Automating Interplanetary Trajectory Generation for Electric Propulsion Trade Studies. PhD Thesis, The University of Michigan. 2008, 147 p.

79. Whiffen G.J. Application of a Novel Optimal Control Algorithm to Low Thrust Trajectory Optimization. In AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, 2001.

80. Whiffen G.J., Sims J.A. Application of the SDC optimal control algorithm to low thrust escape and capture including fourth body effects. In 2nd International Symposium on Low Thrust Trajectories, Toulouse, France, June 18-20 2002.

81. Olympio J.T. Optimization and Optimal Control Methods for Planet Sequence Design of Low-Thrust Interplanetary Transfer Problems with Gravity-Assists. PhD Thesis, l'Ecole des Mines de Paris, 169 p., 2008.

82. Owens J.K. NASA Marshall Engineering Thermosphere Model-Version 2.0. NASA / TM-2002-211786, June 2002, Marshall Space Flight Center, Alabama, 41 pp.

83. Gao Y., Kluever C. Low-Thrust interplanetary orbit transfers using hybrid trajectory optimization method with multiple shooting. AIAA/AAS Astrodyn. Spec. Conf. Exhib. 1–22 (2004). doi:10.2514/6.2004-5088

84. Kluever C.A., Pierson B.L. Optimal low-thrust three-dimensional Earth-moon trajectories. J. Guid.Control. Dyn. 18, 830–837 (1995). doi:10.2514/3.21466.

85. Petukhov V.G. Method of continuation for optimization of interplanetary low-thrust trajectories// Cosmic Re-search. Vol. 50, No. 3, 2012, pp. 249-260.

86. Petukhov V.G. Application of the Angular Independent Variable and Its Regularizing Transformation in the Problems of Optimizing Low-Thrust Trajectories// Cosmic Research. Vol. 57, No. 5, 2019, pp. 351-363.

87. Baranov A.A., Olivio A.P. Coplanar multi-turn rendezvous in near-circular orbit using a low-thrust engine // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2022. Т. 23. № 4. С. 283–292. http://doi.org/10.22363/2312-8143-2022-23-4-283-292.

88. Irving J. H. Low-Thrust Flight: Variable Exhaust Velocity in Gravitational Fields// In Space Technology, H. Sei-fert (Ed.), John Wiley and Sons, Inc., New York, 1959.

89. Fehse W. Automated Rendezvous and Docking of Spacecraft, Cambridge Univ. Press, London, 2003, pp.12-13, 441-449.

90. Ya-Zhong L., Guo-Jin T., Yong-Jun L. et al. Optimization of Multiple-Impulse, Multiple-Revolution, Rendezvous-Phasing Maneuvers // Journal of Guidance, Control, and

Dynamics. 2007. V. 30. No.4. P .946-952.

91. Edelbaum T.N. Minimum Impulse Transfer in the Vicinity of a Circular Orbit, Journal of the Astronautical Sciences, 1967, v. XIV, № 2, pp. 66-73.
92. Petukhov V.G., Ivanyukhin A., Popov G., Testoyedov N., Yoon S.W. Optimization of finite-thrust trajectories with fixed angular distance. Acta Astronautica. Volume 197, August 2022, Pages 354-367. https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.03.012.
93. Clohessy W.H., Wiltshire R.S. Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous// Journal of Aerospace Sciences. Vol. 27, No. 9, 1960, pp. 653-658.
94. Hill G.W. Researches in Lunar Theory // American Journal of Mathematics. 1878. Vol. 1. Pp. 5-26.
95. Kaplan M. Modern Spacecraft Dynamics and Control, Wileyand Sons, New York, 1976.
96. Roy A. Orbital Motion, Hilger, 1988.
97. Renner U., Nauck J., Balteas N. Satelliten-Technik, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
98. Wertz J.R., Larson W.J., eds. Space Mission Analysis and Design, Microcosm and Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
99. Carrou J.-P. Spaceflight Dynamics. Cepadues-Editions, Toulouse, 1995.
100. Sidi M. Spacecraft Dynamics and Control, Cambridge University Press, 1997.
101. Chang D.F., Hsu M., Braden E. et al. Rapid Mars Transits with Exhaust-Modulated Plasma Propulsion. NASA TP-1995- 3539. Johnson Space Center, Houston, Texas, 1995.
102. Chang D.F., Squire J., Bengston R. et al. The Physics and Engineering of the VASIMR Engine. AIAA-00-3756, 2000.
103. Alfriend K., Vadali S.R., Gurfil P., How J. P., Breger L. Spacecraft Formation Flying: Dynamics, control and navigation, 1st ed., ser. Elsevier Astrodynamics. Butterworth-Heinemann, 2009.
104. Breger L., Inalhan G., Tillerson M., How J. P. 8 - cooperative spacecraft formation flying: Model predictive control with openand closed-loop robustness,” in Modern Astrodynamics, ser. Elsevier Astrodynamics Series, P. Gurfil, Ed. Butterworth-Heinemann, 2006, vol. 1, pp. 237-277.
105. Gim D.-W., Alfriend K. State transition matrix of relative motion for the perturbed noncircular reference orbit. Journal of Guidance Control and Dynamics, 2003, vol. 26, pp. 956-971.
106. Lawden D. Optimal Trajectories for Space Navigation, ser. Butterworths mathematical

texts. Butterworths, 1963.

107. Inalhan G., Tillerson M., How, J. P. Relative dynamics and control of spacecraft formations in eccentric orbits// Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 25, № 1, pp. 48-59, 2002.
108. Karlgaard C.D. Second-order relative motion equations// Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 26, № 1, 2001.
109. Mitchell J.W., Richardson D.A third-order analytical solution for relative motion with a circular reference orbit//Journal of The Astronautical Sciences, vol. 51, pp. 1-12, 2002.
110. Alfriend K.T., Yan H. Evaluation and comparison of relative motion theories// Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 28, № 2, pp. 254-261, 2005.
111. 111.Vaddi S.S., Vadali S.R., Alfriend K.T. Formation flying: Accommodating nonlinearity and eccentricity perturbations// Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 26, № 2, pp. 214-223, 2003.
112. Battin R. An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics, 1987.
113. Breger L. How J. J2-modified gve-based mpc for formation flying spacecraft// AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, 2012.
114. Schweighart S. Development and analysis of a high fidelity linearized J2 model for satellite formation flying// AIAA Space 2001 Conference and Exposition, 2001.
115. Prussing J.E. Simple Proof of the Global Optimality of the Hohmann Transfer, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 15, 1037-1038, 1991.
116. Barrar R.B. An Analytic Proof that the Hohmann-Type Transfer is the True Minimum Two-Impulse Transfer, Astronautica Acta, 9, 1-11, 1963.
117. Enright P.J., Conway, B.A. Discrete Approximations to Optimal Trajectories Using Direct Transcription and Nonlinear Programming, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 15, 994-1002, 1992.
118. Herman A.L. Improved Collocation Methods Used for Direct Trajectory Optimization, Ph.D. Thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1995.
119. Jezewski D.J., Rozendaal H.L. An Efficient Method for Calculating Optimal Free-Space N-Impulse Trajectories, AIAA Journal, 6, 2160-2165, 1968.
120. Petropoulos A.E., Sims J.A. A Review of Some Exact Solutions to the Planar Equations of Motion of a Thrusting Spacecraft, DSpace at JPL, http://hdl.handle.net/2014/8673, 2004.
121. Kechichian J.A. Minimum-Time Constant Acceleration Orbit Transfer with First-Order

Oblateness Effect, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 23, 595-603, 2000.

122. Breakwell J.V., Redding D.C. Optimal Low-Thrust Transfers to Syn-chronous Orbit, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 7, 148-155, 1984.
123. Fox L. The Numerical Solution of Two-Point Boundary Problems, Oxford Press, New York, 1957.
124. Keller H.B. Numerical Methods for Two-Point Boundary Value Problems, Blaisdell, New York, 1968.
125. Hargraves C.R., Paris S.W. Direct Trajectory Optimization Using Non-linear Programming and Collocation, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 10, 338-342, 1987.
126. Herman A.L., Conway B.A. Direct Optimization Using Collocation Based on High-Order Gauss-Lobatto Quadrature Rules, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 19, 592-599, 1996.
127. Whiffen G. Mystic: Implementation of the Static Dynamic Optimal Control Algorithm for High-Fidelity, Low-Thrust Trajectory Design, 2006. http://trs-new.jpl.nasa.gov/dspace/bitstream/2014/40782/1/06-2356.pdf.
128. Eneev T.M., Egorov V.A., Efimov G.B., Konstantinov M.S., Petukhov V.G., Akhmetshin R.Z., Fedotov G.G. Some Methodical Problems of Low-Thrust Trajectory Optimization. Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russia Academy of Sciences, preprint 110, 1996, pp. 1-24
129. Petukhov V.G. One Numerical Method to Calculate Optimal Power-Limited Trajectories. International Electric Propulsion Conference. IEPC-95-221, Russia, Moscow, 1995, 8 pp.
130. Petukhov V.G. Optimal Multirevolutional Transfers between Non-Coplanar Orbits. Proceedings of International Symposium on Low-Thrust Trajectories Optimization (LOTUS2), Toulouse, 2002.
131. Lyness J.N., Moller C.B. Numerical differentiation of analytic functions, SIAM J. Numer. Anal., 4, 1967, pp. 202-210.
132. Lyness J.N. Numerical algorithms based on the theory of complex variables, Proc. ACM 22nd Nat. Conf, Thompson Book Co., Washington, DC, 1967, pp. 124- 134.
133. Squire W., Trapp G. Using complex variables to estimate derivatives of real functions. SIAM Rev., 40(1), 1998, pp. 110-112.
134. Dargent T. Automatic Minimum Principal Formulation for Low Thrust Optimal Control in

Orbit Transfers using Complex Numbers. Sept. 2009. International symposium on space flights dynamics, Toulouse, France, 9 p.

135. Lantoine G.A, Russel R.P., Dargent T. Using Multicomplex Variables for Automatic Computation of High-Order Derivatives. AAS 10-218, 2010, 18 p.

136. Petukhov V.G. Homotopic Approach to Low-Thrust Trajectory Optimization: Numerical Technique and Tools. 4th International Conference on Astrodynamics Tools and Techniques, 3-6 May 2010, ESA/ESAC, Madrid, Spain. ESA Proceedings WPP-308, 8 pp.

137. Brown P. N., Byrne G.D., Hindmarsh A.C. VODE: A Variable Coefficient ODE Solver. SIAM J. Sci. Stat. Comput., 10 (1989), pp. 1038-1051.

138. Hughes S.P., Mailhe L.M., Guzman J.J. A Comparison of Trajectory Optimization Methods for the Impulsive Minimum Fuel Rendezvous Problem // 26th Annual Guidance and Control Conference (Breckenridge, CO). 2003. Vol. 113, pp. 85-104. URL: https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20030025254/downloads/20030025254.pdf.

139. Kluever C.A. Low-Thrust Trajectory Optimization Using Orbital Averaging and Control Parameterization // Spacecraft Trajectory Optimization. - Cambridge University Press, 2010, pp. 112–138. DOI: 10.1017/CBO978051177802- ifvgbymjys5.006.

140. Luo Y.Z., Li H.Y., Tang G.J. Hybrid approach to optimize a rendezvous phasing strategy // Journal of Guidance, Control and Dynamics. 2007. Vol. 30. No. 2, pp. 185-191. DOI: 10.2514/1.20232

141. Luo Y.Z., Tang G.J., Li H.Y. Optimization of multi-impulse minimum-time rendezvous using a hybrid genetic algorithm // Aerospace Science and Technology. 2006. Vol. 10. № 6, pp. 534-540. DOI: 10.1016/j.ast.2005.12.007

142. Zhang J., Wang X., Ma X.B. et al. Spacecraft long-duration phasing maneuver optimization using hybrid approach // Acta Astronautica. 2012. Vol. 72, pp. 132-142. DOI: 10.1016/j.actaastro.2011.09.008.

143. Luo Y.Z., Zhang J., Li H.Y., Tang G.J. Interactive optimization approach for optimal impulsive rendezvous using primer vector and evolutionary algorithms // Acta Astronautica. 2010. Vol. 67. No. 3-4, pp. 396-405. DOI: 10.1016/j. actaastro.2010.02.014.

144. Everhart E. Implicit Single Sequence Methods for Integrating Orbits. Celestial Mechanics, v.10, p.35, 1974.

145. Enright J., Conway B.A. Discrete approximations to optimal trajectories using direct transcription and nonlinear programming. Control, and Dynamics, 15(4):994-1002, 1992.

146. Enright P.J., Conway B.A. Optimal finite-thrust spacecraft trajectories using collocation and nonlinear programming. and. Dynamics, 14(5):981-985, 1991.
147. Betts J.T. Very low-thrust trajectory optimization using a direct SQP method. Journal of Computational and Applied Mathematics, (120):27-40, 2000.
148. Betts J.T. Journal of Guidance, Control, using sparse nonlinear programming to compute low thrust orbit transfers. Journal of the Astronautical Sciences, 41(3):349-371, 1993.
149. Scheel W.A., Conway B.A. Optimization of very-low-thrust, many- revolution spacecraft trajectories. Journal of Guidance, Control, And Dynamics, 17(6):1185-1192, 1994.
150. Herman A.L., Spencer D.L. Optimal, low-thrust earth-orbit transfers using higher-order collocation methods. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 25(1):40-47, 2002.
151. Kluever C.A., Oleson S.R. Direct approach for computing near-optimal low-thrust earth-orbit transfers. Journal of Spacecraft and Rockets, 35(4):509- 515, J. 1998.
152. Luo Y., Zhang J., Tang G. Survey of orbital dynamics and control of space rendezvous, Chinese Journal of Aeronautics 27 (1). 2014. 1-11.
153. Lewis F.L., Vrabie D.L., Syrmos V.L., Optimal Control, John Wiley & Sons, Inc., 2012.
154. Ross I.M., A primer on Pontryagin’s principle in optimal control, 2nd Edition, Collegiate publishers, 2015.
155. Conway B.A. Spacecraft trajectory optimization, Vol. 29, Cambridge University Press, 2010.
156. Fernandes S.da S., Carvalho F.das C., de Moraes R. V. Optimal low-thrust transfers between coplanar orbits with small eccentricities, Computational and Applied Mathematics 35 (3). 2015. 803-816.
157. Rao A.V. A survey of numerical methods for optimal control, Advances in the Astronautical Sciences 135. 2009. 497-528.
158. Ben-Asher J.Z. Optimal Control Theory with Aerospace Applications, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2010.
159. Gondelach D.J., Noomen R. Hodographic-shaping method for low-thrust interplanetary trajectory design, Journal of Spacecraft and Rockets 52 (3). 2015. 728-738.
160. Taheri E., Abdelkhalik O. Initial three-dimensional low-thrust trajectory design, Advances in Space Research 57 (3). 2016. 889-903.
161. Vasile M., Pascale P.D., Casotto S. On the optimality of a shape-based approach based on pseudo-equinoctial elements, Acta Astronautica 61 (1-6). 2007. 286-297.

162. Abdelkhalik O., Taheri E. Shape based approximation of constrained low-thrust space trajectories using fourier series, Journal of Spacecraft and Rockets 49 (3) (2012) 535-546.
163. Xie C., Zhang G., Zhang Y. Shaping approximation for low-thrust trajectories with large out-of-plane motion, Journal of Guidance, Control, and Dynamics 39 (12) (2016) 2780-2789.
164. Betts J.T. Practical methods for optimal control and estimation using nonlinear programming, SIAM, 2010.
165. Huang G., Lu Y., Nan Y. A survey of numerical algorithms for trajectory optimization of flight vehicles, Science China Technological Sciences 55 (9) (2012) 2538–2560.
166. Huntington G., Benson D., Rao A. A comparison of accuracy and computational efficiency of three pseudospectral methods, AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit.
167. Engelsone A., Campbell S.L. Adjoint estimation using direct transcription multipliers: compressed trapezoidal method, Optimization and Engineering 9 (3) (2008) 291–305.
168. Miele A., Salvetti A. Applied Mathematics in Aerospace Science and Engineering, Springer, 2014.
169. Breger L.S., How J.P. Safe trajectories for autonomous rendezvous of spacecraft, Journal of Guidance, Control, and Dynamics 31 (5) (2008) 1478–1489.
170. Campagnola S., Skerritt P., Russell R.P. Flybys in the planar, circular, restricted, three-body problem, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 113 (3) (2012) 343–368.
171. Betts J.T. Survey of numerical methods for trajectory optimization, Journal of Guidance, Control, and Dynamics 21 (2) (1998) 193–207.
172. Conway B.A. A survey of methods available for the numerical optimization of continuous dynamic systems, Journal of Optimization Theory and Applications 152 (2) (2012) 271-306.
173. Ross I. M., Fahroo F. A pseudospectral transformation of the convectors of optimal control systems, IFAC Proceedings Volumes 34 (13) (2001) 543–548.
174. Curtis H.D. Orbital mechanics for engineering students, Butterworth-Heinemann, 2014.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МЕТОДАМИ С ПЕРЕБОРОМ ПЕРВОГО УГЛА ПРИЛОЖЕНИЯ ИМПУЛЬСА СКОРОСТИ ОТ 0 ДО 360 ГРАД С ШАГОМ 2.5 ГРАД

1. Перебор начинается с 2.5^0.

θ_1	θ_2	ΔV_{t1}, м/с	ΔV_{t2}, м/с	ΔV_{z1}, м/с	ΔV_{z2}, м/с	ΔV_t, м/с	ΔV_z, м/с	ΔV_1, м/с	ΔV_2, м/с	ΔV, м/с
0	10.31	1.709	-2.794	27.47	-30.97	4.503	58.440	27.523	31.096	58.619
2.5	8.782	1.703	-2.788	45.877	-49.412	4.491	95.289	45.908	49.491	95.399
5	7.255	1.701	-2.786	130.11	-133.686	4.487	263.796	130.121	133.715	263.836
5.5	6.95	1.7	-2.785	203.12	-206.703	4.485	409.823	203.127	206.722	409.849
10	4.202	1.703	-2.788	-52.545	48.878	4.491	101.423	52.573	48.957	101.530
12.5	2.675	1.708	-2.793	-31.624	27.905	4.501	59.529	31.67	28.044	59.714
15	1.145	1.716	-2.801	-22.89	19.114	4.517	42.004	22.954	19.318	42.272
17.5	-0.389	1.726	-2.811	-18.11	14.272	4.537	32.382	18.192	14.546	32.738
20	-1.926	1.739	-2.825	-15.105	11.2	4.564	26.305	15.205	11.551	26.756
22.5	-3.468	1.756	-2.841	-13.049	9.073	4.597	22.122	13.167	9.507	22.674
25	-5.016	1.775	-2.86	-11.562	7.507	4.635	19.069	11.697	8.033	19.730
27.5	-6.571	1.797	-2.882	-10.441	6.303	4.679	16.744	10.595	6.931	17.525
30	-8.134	1.823	-2.908	-9.573	5.344	4.731	14.917	9.745	6.084	15.829
32.5	-9.706	1.852	-2.937	-8.885	4.559	4.789	13.444	9.076	5.423	14.499
35	-11.288	1.885	-2.97	-8.332	3.901	4.855	12.233	8.543	4.903	13.446
37.5	-12.88	1.923	-3.008	-7.883	3.338	4.931	11.221	8.114	4.493	12.607
40	-14.484	1.964	-3.05	-7.515	2.847	5.014	10.362	7.767	4.172	11.939
42.5	-16.101	2.011	-3.096	-7.213	2.413	5.107	9.626	7.489	3.925	11.414
45	-17.732	2.063	-3.148	-6.967	2.023	5.211	8.990	7.266	3.742	11.008
47.5	-19.378	2.121	-3.206	-6.768	1.667	5.327	8.434	7.092	3.613	10.705
50	-21.04	2.186	-3.271	-6.609	1.337	5.457	7.946	6.961	3.534	10.495
52.5	-22.72	2.257	-3.343	-6.486	1.028	5.6	7.514	6.867	3.497	10.364
55	-24.418	2.338	-3.423	-6.396	0.734	5.761	7.130	6.810	3.501	10.311
57.5	-26.135	2.427	-3.512	-6.336	0.451	5.939	6.787	6.785	3.541	10.326
60	-27.873	2.528	-3.613	-6.306	0.173	6.141	6.479	6.794	3.617	10.411
62.5	-29.634	2.64	-3.726	-6.305	-0.102	6.366	6.407	6.836	3.727	10.563
65	-31.417	2.768	-3.853	-6.333	-0.379	6.621	6.712	6.911	3.872	10.783
67.5	-33.226	2.912	-3.997	-6.392	-0.662	6.909	7.054	7.024	4.051	11.075
70	-35.06	3.075	-4.161	-6.483	-0.956	7.236	7.439	7.175	4.269	11.444
75	-38.813	3.48	-4.565	-6.776	-1.599	8.045	8.375	7.617	4.837	12.454
80	-42.687	4.028	-5.113	-7.257	-2.367	9.141	9.624	8.300	5.634	13.934
85	-46.695	4.803	-5.888	-8.015	-3.355	10.691	11.370	9.344	6.777	16.121
90	-50.849	5.975	-7.06	-9.227	-4.752	13.035	13.979	10.993	8.510	19.503
95	-55.163	7.927	-9.012	-11.313	-6.978	16.939	18.291	13.814	11.398	25.212
100	-59.65	11.788	-12.873	-15.498	-11.263	24.661	26.761	19.472	17.105	36.577
115	-74.294	-27.407	26.321	-27.171	-31.338	53.728	58.509	38.593	40.925	79.518
120	-79.618	-13.327	12.242	-11.764	-15.992	25.569	27.756	17.776	20.140	37.916
125	-85.185	-8.918	7.832	-6.871	-11.21	16.75	18.081	11.258	13.675	24.933
130	88.993	-6.779	5.694	4.423	-8.932	12.473	13.355	8.094	10.593	18.687
135	82.907	-5.528	4.443	2.906	-7.656	9.971	10.562	6.245	8.852	15.097
140	76.549	-4.716	3.631	1.82	-6.902	8.347	8.722	5.055	7.799	12.854
145	69.918	-4.155	3.07	0.946	-6.479	7.225	7.425	4.261	7.170	11.431
150	63.016	-3.751	2.665	0.159	-6.309	6.416	6.468	3.754	6.849	10.603
152.5	59.466	-3.59	2.505	-0.232	-6.31	6.096	6.543	3.598	6.789	10.387

155	55.851	-3.452	2.367	-0.637	-6.372	5.819	7.009	3.510	6.798	10.308
157.5	52.174	-3.333	2.248	-1.067	-6.5	5.58	7.567	3.499	6.877	10.376
160	48.438	-3.23	2.144	-1.54	-6.703	5.374	8.243	3.578	7.038	10.616
165	40.8	-3.064	1.979	-2.703	-7.412	5.043	10.115	4.086	7.672	11.758
170	32.966	-2.943	1.858	-4.428	-8.773	4.801	13.201	5.317	8.968	14.285
175	24.974	-2.86	1.775	-7.521	-11.575	4.635	19.096	8.046	11.710	19.756
180	16.867	-2.808	1.723	-15.281	-19.102	4.531	34.383	15.537	19.180	34.717
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
350	16.454	1.758	-2.843	10.025	-13.422	4.601	23.447	10.178	13.720	23.898
355	13.374	1.728	-2.813	14.905	-18.346	4.541	33.251	15.005	18.560	33.565
360	10.31	1.709	-2.794	27.47	-30.97	4.503	58.44	27.523	31.096	58.619

2. Перебор начинается с 0.075^0, чтобы точнее попасть на угол 61.575^0

θ_1	θ_2	ΔV_{t1}, м/с	ΔV_{t2}, м/с	ΔV_{z1}, м/с	ΔV_{z2}, м/с	ΔV_t, м/с	ΔV_z, м/с	ΔV_1, м/с	ΔV_2, м/с	ΔV, м/с
0	10.31	1.709	-2.794	27.47	-30.97	4.503	58.440	27.523	31.096	58.619
0.075	10.264	1.709	-2.794	27.81	-31.311	4.503	59.121	27.862	31.435	59.297
0.15	10.218	1.708	-2.793	28.158	-31.66	4.501	59.818	36.88	40.458	77.338
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
61.425	-28.874	2.59	-3.675	-6.302	0.016	6.265	6.318	6.814	3.675	10.489
61,5	-28.927	2.594	-3.679	-6.302	0.008	6.273	6.311	6.815	3.679	10.494
61.575	-28.98	2.597	-3.682	-6.302	0	6.279	6.302	6.817	3.682	10.499
63.65	-30.095	2.672	-3.757	-6.31	-0.174	6.429	6.484	6.852	3.761	10.613
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
155	55.851	-3.452	2.367	-0.637	-6.372	5.819	7.009	3.510	6.798	10.308
156.075	54.278	-3.399	2.314	-0.818	-6.419	5.713	7.237	3.496	6.823	10.319
157.65	51.952	-3.326	2.241	-1.094	-6.51	5.567	7.604	3.502	6.885	10.387
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
350	16.454	1.758	-2.843	10.025	-13.422	4.601	23.447	10.178	13.720	23.898
355	13.374	1.728	-2.813	14.905	-18.346	4.541	33.251	15.005	18.560	33.565
360	10.31	1.709	-2.794	27.47	-30.97	4.503	58.44	27.523	31.096	58.619

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ НЕКОМПЛАНАРНОЙ ЗАДАЧИ ВСТРЕЧИ С ПОМОЩЬЮ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ

1-я итерация:

Таблица 6.5.4 – Параметры нового импульсного решения при N=15

N	ΔV_{t1}, м/с	ΔV_{t2}, м/с	ΔV_{z1}, м/с	ΔV_{z2}, м/с	ΔV_t, м/с	ΔV_z, м/с	ΔV_1, м/с	ΔV_2, м/с	ΔV, м/с
1	-0.04	0.317	-0.045	-0.843	0.357	0.888	0.060	0.901	0.961
2	-0.066	0.294	-0.029	-0.791	0.36	0.82	0.072	0.844	0.916
3	-0.092	0.271	-0.014	-0.73	0.363	0.744	0.093	0.779	0.872
4	-0.119	0.248	-0.002	-0.668	0.367	0.67	0.119	0.713	0.832
5	-0.147	0.226	0.01	-0.607	0.373	0.617	0.147	0.648	0.795
6	-0.175	0.203	0.02	-0.546	0.378	0.566	0.176	0.583	0.759
7	-0.203	0.18	0.03	0.486	0.383	0.516	0.205	0.518	0.723
8	-0.231	0.158	0.039	-0.425	0.389	0.464	0.234	0.453	0.688
9	-0.26	0.136	0.048	-0.365	0.396	0.413	0.264	0.39	0.654
10	-0.289	0.113	0.056	-0.305	0.402	0.361	0.294	0.325	0.62
11	-0.318	0.091	0.063	-0.244	0.409	0.307	0.324	0.26	0.584
12	-0.347	0.068	0.071	-0.184	0.415	0.255	0.354	0.196	0.55
13	-0.375	0.046	0.079	-0.124	0.421	0.203	0.383	0.132	0.515
14	-0.404	0.024	0.086	-0.065	0.428	0.151	0.413	0.069	0.482
15	-0.435	0.003	0.089	0.009	0.438	0.098	0.444	0.009	0.453
∑	-3.501	2.378	0.501	-5.402	5.879	7.073	3.585	6.82	10.405

Таблица 6.5.5 – Продолжительность маневра при N=15

N	$\Delta\varphi_{1i}$ °	$\Delta\varphi_{2i}$ °	$\Delta\varphi_i$ °
1	3.82	60.588	64.408
2	4.57	55.777	60.347
3	5.944	51.103	57.047
4	7.593	46.544	54.137
5	9.364	42.081	51.445
6	11.195	37.7	48.895
7	13.06	33.387	46.447
8	14.947	29.132	44.079
9	16.848	24.925	41.773
10	18.761	20.756	39.517
11	20.683	16.62	37.303
12	22.221	12.51	34.731
13	24.551	8.425	32.976
14	26.499	4.379	30.878
15	28.498	0.636	29.134
∑	228.554	444.563	673.117

Таблица 6.5.6 – Параметры решения с MT при N=15

N	ΔV_{t1}, м/с	ΔV_{t2}, м/с	ΔV_{z1}, м/с	ΔV_{z2}, м/с	ΔV_t, м/с	ΔV_z, м/с	ΔV_1, м/с	ΔV_2, м/с	ΔV, м/с
1	0.059	0.332	-0.011	0.894	0.391	0.905	0.060	0.954	1.014
2	0.071	0.306	-0.013	0.823	0.377	0.836	0.072	0.878	0.950
3	0.092	0.28	-0.017	0.754	0.372	0.771	0.094	0.804	0.898
4	0.118	0.255	-0.022	0.687	0.373	0.709	0.120	0.733	0.853
5	0.145	0.231	-0.027	0.621	0.376	0.648	0.147	0.663	0.810
6	0.173	0.207	-0.032	0.556	0.38	0.588	0.176	0.593	0.769
7	0.202	0.183	-0.037	0.493	0.385	0.53	0.205	0.526	0.731
8	0.231	0.16	-0.043	0.43	0.391	0.473	0.235	0.459	0.694

9	0.261	0.137	-0.048	0.368	0.398	0.416	0.265	0.393	0.658
10	0.29	0.114	-0.054	0.306	0.404	0.36	0.295	0.327	0.622
11	0.32	0.091	-0.059	0.245	0.411	0.304	0.325	0.261	0.587
12	0.344	0.069	-0.063	0.185	0.413	0.248	0.350	0.197	0.547
13	0.38	0.046	-0.07	0.124	0.426	0.194	0.386	0.132	0.519
14	0.41	0.024	-0.076	0.065	0.434	0.141	0.417	0.069	0.486
15	0.441	0.003	-0.081	0.009	0.444	0.09	0.448	0.009	0.458
∑	3.537	2.438	-0.653	6.56	5.975	7.213	3.597	6.998	10.595

Таблица 6.5.7 – Произведенное изменение БПО под действием МТ и ошибки в коррекции БПО

N	$\Delta a_{0i} * 10^{-4}$	$\Delta a_i * 10^{-4}$	$\delta a_i * 10^{-4}$	$\Delta a_{2i} * 10^{-4}$
1	0.765	0.717	0.00483	0.775
2	0.629	0.617	0.0116	0.61
3	0.492	0.494	-0.0017	0.467
4	0.356	0.3614	-0.0055	0.333
5	0.219	0.225	-0.00569	0.201
6	0.083	0.0876	-0.00461	0.0694
7	-0.053	-0.0503	-0.00314	-0.0622
8	-0.19	-0.188	-0.00164	-0.194
9	-0.326	-0.326	-0.00022	-0.327
10	-0.463	-0.454	0.0011	-0.46
11	-0.599	-0.602	0.00233	-0.593
12	-0.736	-0.723	-0.0124	-0.7425
13	-0.872	-0.869	0.00466	-0.867
14	-1.009	-1.014	0.00566	-0.993
15	-1.145	-1.15	0.00437	-1.129

2-я итерация:

Таблица 6.5.8 – Параметры очередного импульсного решения при N=15

N	ΔV_{t1}, м/с	ΔV_{t2}, м/с	ΔV_{z1}, м/с	ΔV_{z2}, м/с	ΔV_t, м/с	ΔV_z, м/с	ΔV_1, м/с	ΔV_2, м/с	ΔV, м/с
1	-0.018	0.313	0.016	-0.842	0.331	0.858	0.024	0.898	0.922
2	-0.061	0.293	-0.014	-0.788	0.354	0.802	0.063	0.841	0.904
3	-0.093	0.271	-0.016	-0.73	0.364	0.746	0.094	0.779	0.873
4	-0.122	0.249	-0.009	-0.67	0.371	0.679	0.122	0.715	0.837
5	-0.15	0.226	0.003	-0.609	0.376	0.612	0.150	0.650	0.800
6	-0.177	0.203	0.015	-0.548	0.38	0.563	0.178	0.584	0.762
7	0.204	0.181	0.026	0.487	0.385	0.513	0.206	0.520	0.726
8	-0.232	0.158	0.037	-0.426	0.39	0.463	0.235	0.454	0.689
9	-0.26	0.136	0.047	-0.365	0.396	0.412	0.264	0.390	0.654
10	-0.288	0.113	0.057	-0.304	0.401	0.361	0.294	0.324	0.618
11	-0.32	0.094	0.057	-0.246	0.414	0.303	0.325	0.263	0.588
12	-0.352	0.069	0.056	-0.187	0.421	0.243	0.356	0.199	0.555
13	-0.374	0.046	0.084	-0.124	0.42	0.208	0.383	0.132	0.515
14	-0.402	0.024	0.092	-0.065	0.426	0.157	0.412	0.069	0.481
15	-0.434	0.004	0.092	0.0114	0.438	0.1034	0.444	0.012	0.456
∑	-3.079	2.38	0.543	-5.406	5.867	7.023	3.550	6.830	10.38

Таблица 6.5.9 – Продолжительность маневров при N=15

N	$\Delta\varphi_{1i}$ °	$\Delta\varphi_{2i}$ °	$\Delta\varphi_i$ °
1	1.507	59.736	61.243
2	3.942	55.554	59.496
3	6.017	51.136	57.153
4	7.776	46.645	54.421

5	9.514	42.181	51.695
6	11.295	37.776	49.071
7	13.118	33.436	46.554
8	14.973	29.156	44.129
9	16.852	24.927	41.779
10	18.746	20.743	39.489
11	20.764	16.763	37.527
12	22.529	12.68	35.209
13	24.32	8.401	32.721
14	26.446	4.397	30.843
15	28.473	0.775	29.248
$\sum$	226.272	444.306	670.578

Таблица 6.5.10 – Параметры решения с МТ при N=15

N	ΔV_{t1}, м/с	ΔV_{t2}, м/с	ΔV_{z1}, м/с	ΔV_{z2}, м/с	ΔV_{t}, м/с	ΔV_{z}, м/с	ΔV_{1}, м/с	ΔV_{2}, м/с	ΔV, м/с
1	0.023	0.328	-0.004	0.882	0.351	0.886	0.023	0.941	0.964
2	0.061	0.305	-0.011	0.82	0.366	0.831	0.062	0.875	0.937
3	0.093	0.28	-0.017	0.755	0.373	0.772	0.095	0.805	0.900
4	0.12	0.256	-0.022	0.688	0.376	0.71	0.122	0.734	0.856
5	0.147	0.231	-0.027	0.623	0.378	0.650	0.149	0.664	0.813
6	0.175	0.207	-0.032	0.558	0.382	0.59	0.178	0.595	0.773
7	0.203	0.183	-0.037	0.493	0.386	0.53	0.206	0.526	0.732
8	0.232	0.16	-0.043	0.43	0.392	0.473	0.236	0.459	0.695
9	0.261	0.137	-0.048	0.368	0.398	0.416	0.265	0.393	0.658
10	0.29	0.114	-0.054	0.306	0.404	0.36	0.295	0.327	0.622
11	0.321	0.092	-0.059	0.247	0.413	0.306	0.326	0.264	0.590
12	0.349	0.07	-0.064	0.187	0.419	0.251	0.355	0.200	0.555
13	0.377	0.046	-0.069	0.124	0.423	0.193	0.383	0.132	0.515
14	0.409	0.024	-0.076	0.065	0.433	0.141	0.416	0.069	0.485
15	0.441	0.004	-0.081	0.011	0.445	0.092	0.448	0.012	0.460
$\sum$	3.503	2.437	-0.644	6.557	5.939	7.201	3.561	6.995	10.556

Таблица 6.5.11 – Произведенное изменение БПО под действием МТ и ошибки в коррекции БПО

N	$\Delta a_{0i} * 10^{-4}$	$\Delta a_{i} * 10^{-4}$	$\delta a_{i} * 10^{-4}$	$\Delta a_{2i} * 10^{-4}$
1	0.765	0.799	-0.0335	0.741
2	0.629	0.639	-0.0107	0.599
3	0.492	0.4915	0.00082	0.468
4	0.356	0.355	0.00053	0.333
5	0.219	0.2204	-0.001001	0.2
6	0.083	0.0846	-0.00165	0.068
7	-0.053	-0.052	-0.0015	-0.064
8	-0.19	-0.189	-0.000905	-0.195
9	-0.326	-0.326	-0.000131	-0.327
10	-0.463	-0.4635	0.000694	-0.459
11	-0.599	-0.603	0.003545	-0.59
12	-0.736	-0.733	-0.00237	-0.745
13	-0.872	-0.868	-0.00438	-0.864
14	-1.009	-1.012	0.00323	-0.99
15	-1.145	-1.146	0.00133	-1.127

3-я итерация:

Таблица 6.5.12 – Параметры очередного импульсного решения при N=15

N	ΔV_{t1}, м/с	ΔV_{t2}, м/с	ΔV_{z1}, м/с	ΔV_{z2}, м/с	ΔV_{t}, м/с	ΔV_{z}, м/с	ΔV_{1}, м/с	ΔV_{2}, м/с	ΔV, м/с
1	-0.033	0.315	-0.026	-0.849	0.348	0.875	0.042	0.906	0.948

2	-0.066	0.294	-0.027	-0.791	0.36	0.818	0.071	0.844	0.915
3	-0.093	0.271	-0.015	-0.73	0.364	0.745	0.094	0.779	0.873
4	-0.122	0.249	-0.008	-0.669	0.371	0.677	0.122	0.714	0.836
5	-0.15	0.226	0.002	-0.609	0.376	0.611	0.150	0.650	0.800
6	-0.178	0.204	0.013	-0.548	0.382	0.561	0.178	0.585	0.763
7	-0.205	0.181	0.024	-0.487	0.386	0.511	0.206	0.520	0.726
8	-0.233	0.158	0.036	-0.426	0.391	0.462	0.236	0.454	0.690
9	-0.26	0.136	0.047	-0.365	0.396	0.412	0.264	0.390	0.654
10	-0.288	0.113	0.058	-0.304	0.401	0.362	0.294	0.324	0.618
11	-0.315	0.09	0.07	-0.244	0.405	0.314	0.323	0.260	0.583
12	-0.353	0.07	0.053	-0.187	0.423	0.24	0.357	0.200	0.557
13	-0.375	0.046	0.079	-0.126	0.421	0.205	0.383	0.134	0.517
14	-0.401	0.024	0.095	-0.065	0.425	0.16	0.412	0.069	0.481
15	-0.434	0.004	0.093	0.012	0.438	0.105	0.444	0.013	0.457
∑	-3.506	2.381	0.494	-6.388	5.887	7.058	3.577	6.840	10.417

Таблица 6.5.13 – Продолжительность маневра при N=15

N	$\Delta\varphi_{1i}$ °	$\Delta\varphi_{2i}$ °	$\Delta\varphi_{i}$ °
1	2.659	60.283	62.942
2	4.516	55.759	60.275
3	5.982	51.12	57.102
4	7.758	46.635	54.393
5	9.543	42.199	51.742
6	11.334	37.805	49.139
7	13.148	33.46	46.608
8	14.989	29.169	44.158
9	16.853	24.929	41.782
10	18.737	20.734	39.471
11	20.613	16.56	37.173
12	22.654	12.724	35.378
13	24.548	8.423	32.971
14	26.42	4.42	30.84
15	28.466	0.819	29.285
∑	228.22	445.039	673.259

Таблица 6.5.14 – Параметры решения с МТ при N=15

N	ΔV_{t1}, м/с	ΔV_{t2}, м/с	ΔV_{z1}, м/с	ΔV_{z2}, м/с	ΔV_{t}, м/с	ΔV_{z}, м/с	ΔV_{1}, м/с	ΔV_{2}, м/с	ΔV, м/с
1	0.041	0.331	-0.008	0.89	0.372	0.898	0.042	0.950	0.992
2	0.07	0.306	-0.013	0.823	0.376	0.836	0.071	0.878	0.949
3	0.093	0.28	-0.017	0.755	0.373	0.772	0.095	0.805	0.900
4	0.12	0.256	-0.022	0.688	0.376	0.71	0.122	0.734	0.856
5	0.148	0.231	-0.027	0.623	0.379	0.650	0.150	0.664	0.814
6	0.175	0.207	-0.032	0.558	0.382	0.59	0.178	0.595	0.773
7	0.204	0.183	-0.038	0.494	0.387	0.532	0.208	0.527	0.735
8	0.232	0.16	-0.043	0.431	0.392	0.474	0.236	0.460	0.696
9	0.261	0.137	-0.048	0.368	0.398	0.416	0.265	0.393	0.658
10	0.29	0.114	-0.054	0.306	0.404	0.36	0.295	0.327	0.622
11	0.319	0.091	-0.059	0.244	0.41	0.303	0.324	0.260	0.584
12	0.351	0.07	-0.065	0.188	0.421	0.253	0.357	0.201	0.558
13	0.38	0.046	-0.07	0.124	0.426	0.194	0.386	0.132	0.518
14	0.409	0.024	-0.075	0.065	0.433	0.14	0.416	0.069	0.485
15	0.441	0.004	-0.081	0.012	0.445	0.093	0.448	0.013	0.461
∑	3.534	2.44	-0.652	6.569	5.974	7.221	3.594	7.008	10.601

Таблица 6.5.15 - Произведенное изменение БПО под действием МТ и ошибки в коррекции БПО

N	$\Delta a_{0i} * 10^{-4}$	$\Delta a_i * 10^{-4}$	$\delta a_i * 10^{-4}$	$\Delta a_{2i} * 10^{-4}$
1	0.765	0.76	0.0055	0.747
2	0.629	0.619	0.00969	0.609
3	0.492	0.493	-0.000405	0.467
4	0.356	0.356	-0.000094	0.333
5	0.219	0.219	-0.000082	0.2
6	0.083	0.0834	-0.00047	0.068
7	-0.053	-0.0528	-0.000644	-0.064
8	-0.19	-0.189	-0.000481	-0.196
9	-0.326	-0.326	-0.000078	-0.327
10	-0.463	-0.463	0.000446	-0.459
11	-0.599	-0.6	0.000356	-0.59
12	-0.736	-0.738	0.002098	-0.743
13	-0.872	-0.877	0.00455	-0.86
14	-1.009	-1.011	0.00183	-0.99
15	-1.145	-1.146	0.000407	-1.127

4-я итерация:

Таблица 6.5.16 – Параметры очередного импульсного решения при N=15

N	ΔV_{t1}, м/с	ΔV_{t2}, м/с	ΔV_{z1}, м/с	ΔV_{z2}, м/с	ΔV_t, м/с	ΔV_z, м/с	ΔV_1, м/с	ΔV_2, м/с	ΔV, м/с
1	-0.031	0.315	-0.019	-0.848	0.346	0.867	0.036	0.905	0.941
2	-0.061	0.293	-0.015	-0.788	0.354	0.803	0.063	0.841	0.904
3	-0.093	0.271	-0.016	-0.73	0.364	0.746	0.094	0.779	0.873
4	-0.122	0.249	-0.008	-0.669	0.371	0.677	0.122	0.714	0.836
5	-0.15	0.226	0.001	-0.609	0.376	0.610	0.150	0.650	0.800
6	-0.178	0.204	0.012	-0.548	0.382	0.56	0.178	0.585	0.763
7	-0.205	0.181	0.024	-0.487	0.386	0.511	0.206	0.520	0.726
8	-0.233	0.158	0.035	-0.426	0.391	0.461	0.236	0.454	0.690
9	-0.26	0.136	0.047	-0.365	0.396	0.412	0.264	0.390	0.654
10	-0.288	0.113	0.058	-0.304	0.401	0.362	0.294	0.324	0.618
11	-0.315	0.091	0.069	-0.244	0.406	0.313	0.322	0.260	0.582
12	-0.352	0.069	0.056	-0.187	0.421	0.243	0.356	0.199	0.555
13	-0.373	0.046	0.084	-0.124	0.419	0.208	0.382	0.132	0.514
14	-0.401	0.024	0.096	-0.065	0.425	0.161	0.412	0.069	0.481
15	-0.434	0.005	0.093	0.012	0.439	0.105	0.444	0.013	0.457
$\sum$	-3.496	2.381	0.517	-6.382	5.877	7.039	3.562	6.834	10.396

Таблица 6.5.17 – Продолжительность маневра при N=15

N	$\Delta\varphi_{1i}$ °	$\Delta\varphi_{2i}$ °	$\Delta\varphi_i$ °
1	2.273	60.18	62.453
2	3.991	55.573	59.564
3	5.999	51.128	57.127
4	7.761	46.637	54.398
5	9.546	42.201	51.747
6	11.346	37.813	49.159
7	13.161	33.471	46.632
8	14.997	29.177	44.174
9	16.855	24.93	41.785
10	18.732	20.729	39.461
11	20.623	16.579	37.202
12	22.54	12.685	35.225

13	24.499	8.401	32.9
14	26.406	4.437	30.843
15	28.463	0.832	29.295
∑	227.192	444.773	671.965

Таблица 6.5.18 – Параметры решения с МТ при N=15

N	ΔV_{t1}, м/с	ΔV_{t2}, м/с	ΔV_{z1}, м/с	ΔV_{z2}, м/с	ΔV_t, м/с	ΔV_z, м/с	ΔV_1, м/с	ΔV_2, м/с	ΔV, м/с
1	0.035	0.33	-0.006	0.888	0.365	0.894	0.036	0.947	0.983
2	0.062	0.305	-0.011	0.82	0.367	0.831	0.063	0.875	0.938
3	0.093	0.28	-0.017	0.755	0.373	0.772	0.095	0.805	0.900
4	0.12	0.256	-0.022	0.688	0.376	0.71	0.122	0.734	0.856
5	0.148	0.231	-0.027	0.623	0.379	0.650	0.150	0.664	0.815
6	0.176	0.207	-0.032	0.558	0.383	0.59	0.179	0.595	0.774
7	0.204	0.184	-0.038	0.494	0.388	0.532	0.208	0.527	0.735
8	0.232	0.16	-0.043	0.431	0.392	0.474	0.236	0.460	0.696
9	0.261	0.137	-0.048	0.368	0.398	0.416	0.265	0.393	0.658
10	0.29	0.114	-0.054	0.306	0.404	0.36	0.295	0.327	0.622
11	0.319	0.091	-0.059	0.245	0.41	0.304	0.324	0.261	0.586
12	0.349	0.07	-0.064	0.187	0.419	0.251	0.355	0.200	0.554
13	0.379	0.046	-0.07	0.124	0.425	0.194	0.385	0.132	0.518
14	0.409	0.024	-0.075	0.065	0.433	0.14	0.416	0.069	0.485
15	0.441	0.005	-0.081	0.012	0.446	0.093	0.448	0.013	0.461
∑	3.518	2.44	-0.647	6.564	5.958	7.211	3.577	7.003	10.580

Таблица 6.5.19 – Произведенное изменение БПО под действием МТ и ошибки в коррекции БПО

N	$\Delta a_{0i} * 10^{-4}$	$\Delta a_i * 10^{-4}$	$\delta a_i * 10^{-4}$	$\Delta a_{2i} * 10^{-4}$
1	0.765	0.774	-0.00872	0.738
2	0.629	0.638	-0.009	0.6
3	0.492	0.492	0.000198	0.468
4	0.356	0.356	0.0000162	0.333
5	0.219	0.219	-0.0000054	0.2
6	0.083	0.0831	-0.000121	0.0672
7	-0.053	-0.0532	-0.000263	-0.0646
8	-0.19	-0.19	-0.0002505	-0.385
9	-0.326	-0.326	-0.0000469	-0.327
10	-0.463	-0.463	0.000289	-0.458
11	-0.599	-0.6	0.000481	-0.589
12	-0.736	-0.734	-0.00196	-0.745
13	-0.872	-0.875	0.0029	-0.857
14	-1.009	-1.01	0.001031	-0.987
15	-1.145	-1.145	0.000124	-1.127

Таблица 6.5.20 - Затраты СХС решения с МТ при N=15

N	ΔV_{t1}, м/с	ΔV_{t2}, м/с	ΔV_{z1}, м/с	ΔV_{z2}, м/с	ΔV_t, м/с	ΔV_z, м/с	ΔV_1, м/с	ΔV_2, м/с	ΔV, м/с
1	0.035	0.33	-0.006	0.888	0.365	0.894	0.036	0.947	0.983
2	0.062	0.305	-0.011	0.82	0.367	0.831	0.063	0.875	0.938
3	0.093	0.28	-0.017	0.755	0.373	0.772	0.095	0.805	0.900
4	0.12	0.256	-0.022	0.688	0.376	0.71	0.122	0.734	0.856
5	0.148	0.231	-0.027	0.623	0.379	0.650	0.150	0.664	0.815
6	0.176	0.207	-0.032	0.558	0.383	0.59	0.179	0.595	0.774
7	0.204	0.184	-0.038	0.494	0.388	0.532	0.208	0.527	0.735
8	0.232	0.16	-0.043	0.431	0.392	0.474	0.236	0.460	0.696
9	0.261	0.137	-0.048	0.368	0.398	0.416	0.265	0.393	0.658
10	0.29	0.114	-0.054	0.306	0.404	0.36	0.295	0.327	0.622
11	0.319	0.091	-0.059	0.245	0.41	0.304	0.324	0.261	0.586

12	0.349	0.07	-0.064	0.187	0.419	0.251	0.355	0.200	0.554
13	0.379	0.046	-0.07	0.124	0.425	0.194	0.385	0.132	0.518
14	0.409	0.024	-0.075	0.065	0.433	0.14	0.416	0.069	0.485
15	0.441	0.005	-0.081	0.012	0.446	0.093	0.448	0.013	0.461
∑	3.518	2.44	-0.647	6.564	5.958	7.211	3.577	7.003	10.580

Затраты СХС решения с помощью МТ «T=1 Н»

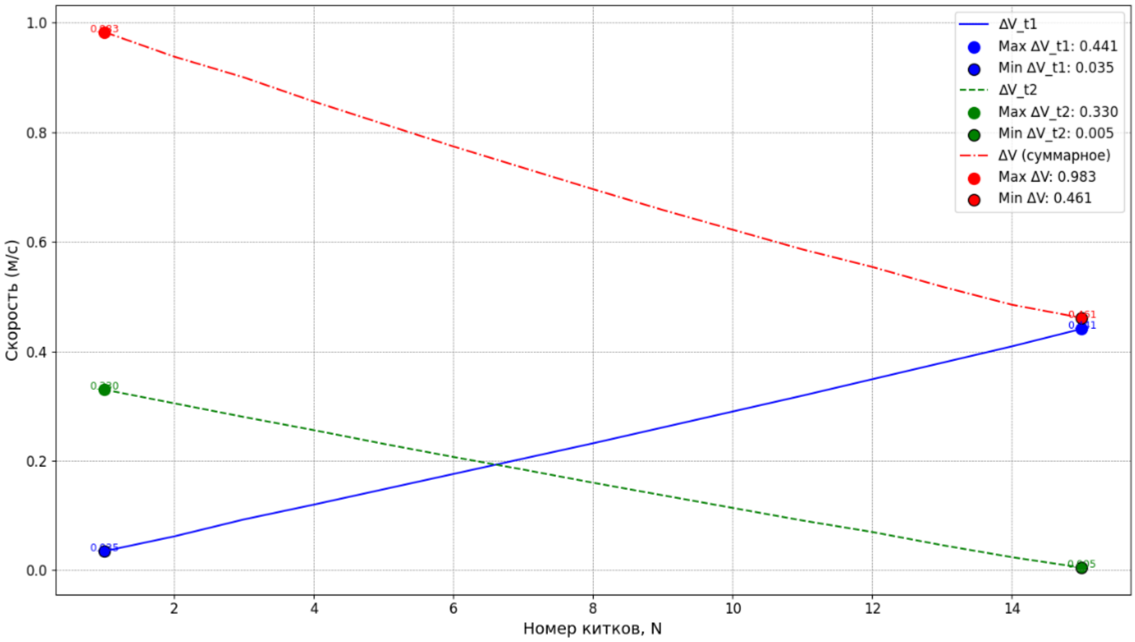

Рис. 6.5.4. Затраты СХС решения с помощью МТ при N=15

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КА С ПОМОЩЬЮ ИРОМ-ДВИГАТЕЛЯ

t[c]	x[м]	y[м]	z[м]	vx[м/с]	vy[м/с]	vz[м/с]	ax[м/с2]	ay[м/с2]	az[м/с2]	acc[м/с2]	px[м/с3]	py[м/с3]	pz[м/с3]	pvx[м/с2]	pvy[м/с2]	pvz[м/с2]
0,00E+00	1,00E+04	1,00E+05	-5,00E+03	1,00E+00	-1,00E+01	3,00E+00	-2,51E-04	-3,16E-03	-4,32E-04	3,20E-03	-6,61E-06	7,38E-08	8,66E-07	-2,51E-04	-3,16E-03	-4,32E-04
6,00E+01	1,01E+04	9,94E+04	-4,81E+03	1,85E+00	-1,04E+01	3,33E+00	-2,75E-04	-3,13E-03	-4,83E-04	3,18E-03	-6,55E-06	7,38E-08	8,33E-07	-2,75E-04	-3,13E-03	-4,83E-04
1,20E+02	1,02E+04	9,88E+04	-4,60E+03	2,67E+00	-1,09E+01	3,65E+00	-2,98E-04	-3,10E-03	-5,32E-04	3,16E-03	-6,49E-06	7,38E-08	7,95E-07	-2,98E-04	-3,10E-03	-5,32E-04
1,80E+02	1,04E+04	9,81E+04	-4,37E+03	3,44E+00	-1,15E+01	3,95E+00	-3,20E-04	-3,06E-03	-5,78E-04	3,13E-03	-6,42E-06	7,38E-08	7,54E-07	-3,20E-04	-3,06E-03	-5,78E-04
2,40E+02	1,06E+04	9,74E+04	-4,13E+03	4,18E+00	-1,21E+01	4,23E+00	-3,42E-04	-3,02E-03	-6,22E-04	3,10E-03	-6,35E-06	7,38E-08	7,10E-07	-3,42E-04	-3,02E-03	-6,22E-04
3,00E+02	1,09E+04	9,66E+04	-3,87E+03	4,87E+00	-1,29E+01	4,48E+00	-3,62E-04	-2,98E-03	-6,63E-04	3,07E-03	-6,27E-06	7,38E-08	6,63E-07	-3,62E-04	-2,98E-03	-6,63E-04
3,60E+02	1,12E+04	9,58E+04	-3,59E+03	5,52E+00	-1,38E+01	4,72E+00	-3,82E-04	-2,93E-03	-7,02E-04	3,04E-03	-6,19E-06	7,38E-08	6,12E-07	-3,82E-04	-2,93E-03	-7,02E-04
4,20E+02	1,16E+04	9,50E+04	-3,30E+03	6,12E+00	-1,47E+01	4,93E+00	-4,01E-04	-2,89E-03	-7,37E-04	3,01E-03	-6,10E-06	7,38E-08	5,59E-07	-4,01E-04	-2,89E-03	-7,37E-04
4,80E+02	1,20E+04	9,41E+04	-3,00E+03	6,67E+00	-1,58E+01	5,11E+00	-4,18E-04	-2,84E-03	-7,69E-04	2,97E-03	-6,01E-06	7,38E-08	5,04E-07	-4,18E-04	-2,84E-03	-7,69E-04
5,40E+02	1,24E+04	9,31E+04	-2,69E+03	7,16E+00	-1,69E+01	5,28E+00	-4,34E-04	-2,78E-03	-7,97E-04	2,93E-03	-5,91E-06	7,38E-08	4,46E-07	-4,34E-04	-2,78E-03	-7,97E-04
6,00E+02	1,28E+04	9,20E+04	-2,37E+03	7,60E+00	-1,80E+01	5,41E+00	-4,49E-04	-2,73E-03	-8,22E-04	2,89E-03	-5,82E-06	7,38E-08	3,86E-07	-4,49E-04	-2,73E-03	-8,22E-04
6,60E+02	1,33E+04	9,09E+04	-2,04E+03	7,98E+00	-1,92E+01	5,53E+00	-4,62E-04	-2,67E-03	-8,44E-04	2,84E-03	-5,72E-06	7,38E-08	3,25E-07	-4,62E-04	-2,67E-03	-8,44E-04
7,20E+02	1,38E+04	8,97E+04	-1,70E+03	8,30E+00	-2,04E+01	5,61E+00	-4,74E-04	-2,62E-03	-8,61E-04	2,79E-03	-5,61E-06	7,38E-08	2,62E-07	-4,74E-04	-2,62E-03	-8,61E-04
7,80E+02	1,43E+04	8,85E+04	-1,36E+03	8,57E+00	-2,17E+01	5,67E+00	-4,84E-04	-2,56E-03	-8,75E-04	2,74E-03	-5,51E-06	7,38E-08	1,98E-07	-4,84E-04	-2,56E-03	-8,75E-04
8,40E+02	1,48E+04	8,71E+04	-1,02E+03	8,78E+00	-2,30E+01	5,71E+00	-4,93E-04	-2,50E-03	-8,85E-04	2,69E-03	-5,40E-06	7,38E-08	1,33E-07	-4,93E-04	-2,50E-03	-8,85E-04
9,00E+02	1,53E+04	8,57E+04	-6,80E+02	8,93E+00	-2,44E+01	5,72E+00	-5,00E-04	-2,43E-03	-8,91E-04	2,64E-03	-5,29E-06	7,38E-08	6,75E-08	-5,00E-04	-2,43E-03	-8,91E-04
9,60E+02	1,59E+04	8,42E+04	-3,37E+02	9,02E+00	-2,57E+01	5,70E+00	-5,06E-04	-2,37E-03	-8,93E-04	2,58E-03	-5,18E-06	7,38E-08	1,72E-09	-5,06E-04	-2,37E-03	-8,93E-04
1,02E+03	1,64E+04	8,26E+04	3,91E+00	9,05E+00	-2,70E+01	5,66E+00	-5,10E-04	-2,31E-03	-8,91E-04	2,53E-03	-5,07E-06	7,38E-08	-6,41E-08	-5,10E-04	-2,31E-03	-8,91E-04
1,08E+03	1,69E+04	8,09E+04	3,42E+02	9,02E+00	-2,84E+01	5,60E+00	-5,12E-04	-2,24E-03	-8,85E-04	2,47E-03	-4,95E-06	7,38E-08	-1,30E-07	-5,12E-04	-2,24E-03	-8,85E-04
1,14E+03	1,75E+04	7,92E+04	6,75E+02	8,93E+00	-2,97E+01	5,51E+00	-5,13E-04	-2,18E-03	-8,76E-04	2,41E-03	-4,84E-06	7,38E-08	-1,95E-07	-5,13E-04	-2,18E-03	-8,76E-04
1,20E+03	1,80E+04	7,74E+04	1,00E+03	8,79E+00	-3,10E+01	5,39E+00	-5,12E-04	-2,12E-03	-8,62E-04	2,34E-03	-4,73E-06	7,38E-08	-2,59E-07	-5,12E-04	-2,12E-03	-8,62E-04
1,26E+03	1,85E+04	7,55E+04	1,32E+03	8,59E+00	-3,23E+01	5,25E+00	-5,09E-04	-2,05E-03	-8,45E-04	2,28E-03	-4,61E-06	7,38E-08	-3,22E-07	-5,09E-04	-2,05E-03	-8,45E-04
1,32E+03	1,90E+04	7,35E+04	1,63E+03	8,34E+00	-3,35E+01	5,10E+00	-5,04E-04	-1,99E-03	-8,23E-04	2,21E-03	-4,50E-06	7,38E-08	-3,83E-07	-5,04E-04	-1,99E-03	-8,23E-04
1,38E+03	1,95E+04	7,15E+04	1,93E+03	8,03E+00	-3,48E+01	4,92E+00	-4,98E-04	-1,93E-03	-7,99E-04	2,15E-03	-4,39E-06	7,38E-08	-4,43E-07	-4,98E-04	-1,93E-03	-7,99E-04
1,44E+03	2,00E+04	6,93E+04	2,22E+03	7,68E+00	-3,59E+01	4,72E+00	-4,91E-04	-1,87E-03	-7,70E-04	2,08E-03	-4,28E-06	7,38E-08	-5,01E-07	-4,91E-04	-1,87E-03	-7,70E-04
1,50E+03	2,05E+04	6,71E+04	2,50E+03	7,27E+00	-3,70E+01	4,50E+00	-4,81E-04	-1,81E-03	-7,39E-04	2,01E-03	-4,17E-06	7,38E-08	-5,56E-07	-4,81E-04	-1,81E-03	-7,39E-04
1,56E+03	2,09E+04	6,49E+04	2,76E+03	6,82E+00	-3,81E+01	4,26E+00	-4,71E-04	-1,75E-03	-7,04E-04	1,94E-03	-4,07E-06	7,38E-08	-6,10E-07	-4,71E-04	-1,75E-03	-7,04E-04
1,62E+03	2,13E+04	6,26E+04	3,01E+03	6,33E+00	-3,90E+01	4,00E+00	-4,58E-04	-1,69E-03	-6,65E-04	1,87E-03	-3,96E-06	7,38E-08	-6,60E-07	-4,58E-04	-1,69E-03	-6,65E-04
1,68E+03	2,16E+04	6,02E+04	3,24E+03	5,80E+00	-3,99E+01	3,74E+00	-4,45E-04	-1,63E-03	-6,24E-04	1,81E-03	-3,86E-06	7,38E-08	-7,08E-07	-4,45E-04	-1,63E-03	-6,24E-04
1,74E+03	2,20E+04	5,78E+04	3,46E+03	5,22E+00	-4,08E+01	3,45E+00	-4,30E-04	-1,58E-03	-5,81E-04	1,74E-03	-3,77E-06	7,38E-08	-7,52E-07	-4,30E-04	-1,58E-03	-5,81E-04
1,80E+03	2,23E+04	5,53E+04	3,65E+03	4,62E+00	-4,15E+01	3,16E+00	-4,13E-04	-1,53E-03	-5,34E-04	1,67E-03	-3,68E-06	7,38E-08	-7,93E-07	-4,13E-04	-1,53E-03	-5,34E-04
1,86E+03	2,25E+04	5,28E+04	3,84E+03	3,98E+00	-4,22E+01	2,85E+00	-3,95E-04	-1,48E-03	-4,86E-04	1,61E-03	-3,59E-06	7,38E-08	-8,31E-07	-3,95E-04	-1,48E-03	-4,86E-04
1,92E+03	2,27E+04	5,03E+04	4,00E+03	3,31E+00	-4,28E+01	2,53E+00	-3,77E-04	-1,43E-03	-4,35E-04	1,54E-03	-3,50E-06	7,38E-08	-8,65E-07	-3,77E-04	-1,43E-03	-4,35E-04
1,98E+03	2,29E+04	4,77E+04	4,14E+03	2,62E+00	-4,32E+01	2,21E+00	-3,57E-04	-1,39E-03	-3,82E-04	1,48E-03	-3,42E-06	7,38E-08	-8,95E-07	-3,57E-04	-1,39E-03	-3,82E-04
2,04E+03	2,31E+04	4,51E+04	4,26E+03	1,91E+00	-4,36E+01	1,88E+00	-3,36E-04	-1,35E-03	-3,27E-04	1,43E-03	-3,34E-06	7,38E-08	-9,21E-07	-3,36E-04	-1,35E-03	-3,27E-04
2,10E+03	2,32E+04	4,24E+04	4,36E+03	1,18E+00	-4,39E+01	1,54E+00	-3,14E-04	-1,31E-03	-2,71E-04	1,37E-03	-3,27E-06	7,38E-08	-9,43E-07	-3,14E-04	-1,31E-03	-2,71E-04
2,16E+03	2,32E+04	3,98E+04	4,45E+03	4,31E-01	-4,41E+01	1,20E+00	-2,92E-04	-1,27E-03	-2,14E-04	1,32E-03	-3,20E-06	7,38E-08	-9,61E-07	-2,92E-04	-1,27E-03	-2,14E-04
2,22E+03	2,32E+04	3,72E+04	4,51E+03	-3,25E-01	-4,42E+01	8,61E-01	-2,68E-04	-1,24E-03	-1,56E-04	1,28E-03	-3,14E-06	7,38E-08	-9,75E-07	-2,68E-04	-1,24E-03	-1,56E-04

2,28E+03	2,32E+04	3,45E+04	4,55E+03	-1,09E+00	-4,42E+01	5,19E-01	-2,44E-04	-1,21E-03	-9,74E-05	1,24E-03	-3,08E-06	7,38E-08	-9,84E-07	-2,44E-04	-1,21E-03	-9,74E-05
2,34E+03	2,31E+04	3,19E+04	4,57E+03	-1,85E+00	-4,40E+01	1,79E-01	-2,20E-04	-1,18E-03	-3,82E-05	1,20E-03	-3,03E-06	7,38E-08	-9,89E-07	-2,20E-04	-1,18E-03	-3,82E-05
2,40E+03	2,29E+04	2,92E+04	4,57E+03	-2,62E+00	-4,38E+01	-1,59E-01	-1,95E-04	-1,16E-03	2,12E-05	1,18E-03	-2,99E-06	7,38E-08	-9,90E-07	-1,95E-04	-1,16E-03	2,12E-05
2,46E+03	2,28E+04	2,66E+04	4,55E+03	-3,38E+00	-4,35E+01	-4,92E-01	-1,70E-04	-1,14E-03	8,05E-05	1,16E-03	-2,95E-06	7,38E-08	-9,86E-07	-1,70E-04	-1,14E-03	8,05E-05
2,52E+03	2,25E+04	2,40E+04	4,51E+03	-4,14E+00	-4,30E+01	-8,20E-01	-1,45E-04	-1,12E-03	1,39E-04	1,14E-03	-2,91E-06	7,38E-08	-9,78E-07	-1,45E-04	-1,12E-03	1,39E-04
2,58E+03	2,23E+04	2,14E+04	4,45E+03	-4,88E+00	-4,25E+01	-1,14E+00	-1,20E-04	-1,11E-03	1,98E-04	1,13E-03	-2,88E-06	7,38E-08	-9,65E-07	-1,20E-04	-1,11E-03	1,98E-04
2,64E+03	2,19E+04	1,89E+04	4,38E+03	-5,61E+00	-4,19E+01	-1,45E+00	-9,48E-05	-1,10E-03	2,55E-04	1,13E-03	-2,86E-06	7,38E-08	-9,49E-07	-9,48E-05	-1,10E-03	2,55E-04
2,70E+03	2,16E+04	1,64E+04	4,28E+03	-6,32E+00	-4,11E+01	-1,75E+00	-6,98E-05	-1,09E-03	3,11E-04	1,14E-03	-2,84E-06	7,38E-08	-9,28E-07	-6,98E-05	-1,09E-03	3,11E-04
2,76E+03	2,12E+04	1,40E+04	4,17E+03	-7,02E+00	-4,03E+01	-2,05E+00	-4,50E-05	-1,09E-03	3,66E-04	1,15E-03	-2,83E-06	7,38E-08	-9,03E-07	-4,50E-05	-1,09E-03	3,66E-04
2,82E+03	2,07E+04	1,16E+04	4,03E+03	-7,68E+00	-3,94E+01	-2,32E+00	-2,07E-05	-1,09E-03	4,20E-04	1,17E-03	-2,82E-06	7,38E-08	-8,74E-07	-2,07E-05	-1,09E-03	4,20E-04
2,88E+03	2,03E+04	9,25E+03	3,89E+03	-8,33E+00	-3,84E+01	-2,59E+00	3,15E-06	-1,09E-03	4,71E-04	1,19E-03	-2,82E-06	7,38E-08	-8,41E-07	3,15E-06	-1,09E-03	4,71E-04
2,94E+03	1,97E+04	6,97E+03	3,72E+03	-8,94E+00	-3,73E+01	-2,84E+00	2,64E-05	-1,10E-03	5,21E-04	1,22E-03	-2,82E-06	7,38E-08	-8,04E-07	2,64E-05	-1,10E-03	5,21E-04
3,00E+03	1,92E+04	4,77E+03	3,55E+03	-9,52E+00	-3,62E+01	-3,08E+00	4,89E-05	-1,11E-03	5,68E-04	1,25E-03	-2,83E-06	7,38E-08	-7,64E-07	4,89E-05	-1,11E-03	5,68E-04
3,06E+03	1,86E+04	2,63E+03	3,35E+03	-1,01E+01	-3,49E+01	-3,30E+00	7,06E-05	-1,12E-03	6,12E-04	1,28E-03	-2,84E-06	7,38E-08	-7,21E-07	7,06E-05	-1,12E-03	6,12E-04
3,12E+03	1,80E+04	5,78E+02	3,15E+03	-1,06E+01	-3,36E+01	-3,50E+00	9,15E-05	-1,14E-03	6,54E-04	1,32E-03	-2,86E-06	7,38E-08	-6,74E-07	9,15E-05	-1,14E-03	6,54E-04
3,18E+03	1,73E+04	-1,40E+03	2,94E+03	-1,10E+01	-3,23E+01	-3,68E+00	1,11E-04	-1,16E-03	6,93E-04	1,35E-03	-2,88E-06	7,38E-08	-6,24E-07	1,11E-04	-1,16E-03	6,93E-04
3,24E+03	1,67E+04	-3,29E+03	2,71E+03	-1,15E+01	-3,08E+01	-3,85E+00	1,30E-04	-1,18E-03	7,29E-04	1,39E-03	-2,91E-06	7,38E-08	-5,72E-07	1,30E-04	-1,18E-03	7,29E-04
3,30E+03	1,60E+04	-5,10E+03	2,47E+03	-1,19E+01	-2,94E+01	-3,99E+00	1,48E-04	-1,20E-03	7,62E-04	1,43E-03	-2,94E-06	7,38E-08	-5,17E-07	1,48E-04	-1,20E-03	7,62E-04
3,36E+03	1,52E+04	-6,81E+03	2,23E+03	-1,22E+01	-2,78E+01	-4,12E+00	1,64E-04	-1,22E-03	7,91E-04	1,47E-03	-2,98E-06	7,38E-08	-4,60E-07	1,64E-04	-1,22E-03	7,91E-04
3,42E+03	1,45E+04	-8,44E+03	1,98E+03	-1,25E+01	-2,63E+01	-4,23E+00	1,79E-04	-1,25E-03	8,17E-04	1,51E-03	-3,01E-06	7,38E-08	-4,00E-07	1,79E-04	-1,25E-03	8,17E-04
3,48E+03	1,37E+04	-9,96E+03	1,72E+03	-1,27E+01	-2,47E+01	-4,31E+00	1,93E-04	-1,28E-03	8,39E-04	1,54E-03	-3,06E-06	7,38E-08	-3,39E-07	1,93E-04	-1,28E-03	8,39E-04
3,54E+03	1,30E+04	-1,14E+04	1,46E+03	-1,29E+01	-2,30E+01	-4,38E+00	2,05E-04	-1,31E-03	8,57E-04	1,58E-03	-3,10E-06	7,38E-08	-2,77E-07	2,05E-04	-1,31E-03	8,57E-04
3,60E+03	1,22E+04	-1,27E+04	1,20E+03	-1,31E+01	-2,14E+01	-4,43E+00	2,16E-04	-1,34E-03	8,72E-04	1,62E-03	-3,15E-06	7,38E-08	-2,13E-07	2,16E-04	-1,34E-03	8,72E-04
3,66E+03	1,14E+04	-1,40E+04	9,32E+02	-1,32E+01	-1,97E+01	-4,45E+00	2,25E-04	-1,38E-03	8,83E-04	1,65E-03	-3,19E-06	7,38E-08	-1,48E-07	2,25E-04	-1,38E-03	8,83E-04
3,72E+03	1,06E+04	-1,51E+04	6,65E+02	-1,33E+01	-1,80E+01	-4,46E+00	2,32E-04	-1,41E-03	8,90E-04	1,69E-03	-3,25E-06	7,38E-08	-8,29E-08	2,32E-04	-1,41E-03	8,90E-04
3,78E+03	9,81E+03	-1,61E+04	3,98E+02	-1,33E+01	-1,63E+01	-4,44E+00	2,38E-04	-1,45E-03	8,93E-04	1,72E-03	-3,30E-06	7,38E-08	-1,72E-08	2,38E-04	-1,45E-03	8,93E-04
3,84E+03	9,01E+03	-1,71E+04	1,32E+02	-1,33E+01	-1,47E+01	-4,41E+00	2,43E-04	-1,48E-03	8,92E-04	1,75E-03	-3,35E-06	7,38E-08	4,87E-08	2,43E-04	-1,48E-03	8,92E-04
3,90E+03	8,22E+03	-1,79E+04	-1,31E+02	-1,32E+01	-1,30E+01	-4,36E+00	2,45E-04	-1,52E-03	8,87E-04	1,78E-03	-3,40E-06	7,38E-08	1,14E-07	2,45E-04	-1,52E-03	8,87E-04
3,96E+03	7,43E+03	-1,86E+04	-3,90E+02	-1,30E+01	-1,13E+01	-4,28E+00	2,46E-04	-1,56E-03	8,78E-04	1,81E-03	-3,46E-06	7,38E-08	1,79E-07	2,46E-04	-1,56E-03	8,78E-04
4,02E+03	6,66E+03	-1,92E+04	-6,45E+02	-1,29E+01	-9,71E+00	-4,19E+00	2,46E-04	-1,60E-03	8,65E-04	1,83E-03	-3,51E-06	7,38E-08	2,44E-07	2,46E-04	-1,60E-03	8,65E-04
4,08E+03	5,89E+03	-1,98E+04	-8,93E+02	-1,27E+01	-8,11E+00	-4,09E+00	2,43E-04	-1,63E-03	8,49E-04	1,86E-03	-3,57E-06	7,38E-08	3,07E-07	2,43E-04	-1,63E-03	8,49E-04
4,14E+03	5,14E+03	-2,02E+04	-1,13E+03	-1,24E+01	-6,54E+00	-3,96E+00	2,39E-04	-1,67E-03	8,29E-04	1,88E-03	-3,62E-06	7,38E-08	3,69E-07	2,39E-04	-1,67E-03	8,29E-04
4,20E+03	4,40E+03	-2,06E+04	-1,37E+03	-1,21E+01	-5,01E+00	-3,82E+00	2,34E-04	-1,71E-03	8,05E-04	1,90E-03	-3,67E-06	7,38E-08	4,29E-07	2,34E-04	-1,71E-03	8,05E-04
4,26E+03	3,69E+03	-2,08E+04	-1,59E+03	-1,18E+01	-3,53E+00	-3,66E+00	2,26E-04	-1,74E-03	7,77E-04	1,92E-03	-3,72E-06	7,38E-08	4,87E-07	2,26E-04	-1,74E-03	7,77E-04
4,32E+03	2,99E+03	-2,10E+04	-1,81E+03	-1,14E+01	-2,10E+00	-3,49E+00	2,17E-04	-1,77E-03	7,46E-04	1,94E-03	-3,77E-06	7,38E-08	5,43E-07	2,17E-04	-1,77E-03	7,46E-04
4,38E+03	2,32E+03	-2,11E+04	-2,01E+03	-1,10E+01	-7,18E-01	-3,31E+00	2,07E-04	-1,81E-03	7,12E-04	1,95E-03	-3,82E-06	7,38E-08	5,97E-07	2,07E-04	-1,81E-03	7,12E-04
4,44E+03	1,68E+03	-2,11E+04	-2,20E+03	-1,05E+01	6,01E-01	-3,11E+00	1,95E-04	-1,84E-03	6,75E-04	1,97E-03	-3,86E-06	7,38E-08	6,48E-07	1,95E-04	-1,84E-03	6,75E-04
4,50E+03	1,06E+03	-2,10E+04	-2,38E+03	-1,00E+01	1,86E+00	-2,90E+00	1,82E-04	-1,87E-03	6,34E-04	1,98E-03	-3,91E-06	7,38E-08	6,97E-07	1,82E-04	-1,87E-03	6,34E-04
4,56E+03	4,75E+02	-2,09E+04	-2,55E+03	-9,53E+00	3,05E+00	-2,68E+00	1,67E-04	-1,90E-03	5,91E-04	1,99E-03	-3,94E-06	7,38E-08	7,42E-07	1,67E-04	-1,90E-03	5,91E-04
4,62E+03	-8,15E+01	-2,06E+04	-2,71E+03	-9,00E+00	4,16E+00	-2,45E+00	1,51E-04	-1,92E-03	5,45E-04	2,00E-03	-3,98E-06	7,38E-08	7,84E-07	1,51E-04	-1,92E-03	5,45E-04
4,68E+03	-6,05E+02	-2,04E+04	-2,85E+03	-8,44E+00	5,21E+00	-2,22E+00	1,33E-04	-1,94E-03	4,97E-04	2,01E-03	-4,01E-06	7,38E-08	8,22E-07	1,33E-04	-1,94E-03	4,97E-04
4,74E+03	-1,09E+03	-2,00E+04	-2,97E+03	-7,86E+00	6,18E+00	-1,98E+00	1,15E-04	-1,97E-03	4,47E-04	2,02E-03	-4,04E-06	7,38E-08	8,57E-07	1,15E-04	-1,97E-03	4,47E-04
4,80E+03	-1,55E+03	-1,96E+04	-3,08E+03	-7,27E+00	7,06E+00	-1,73E+00	9,53E-05	-1,98E-03	3,94E-04	2,02E-03	-4,06E-06	7,38E-08	8,88E-07	9,53E-05	-1,98E-03	3,94E-04
4,86E+03	-1,97E+03	-1,92E+04	-3,18E+03	-6,66E+00	7,87E+00	-1,47E+00	7,46E-05	-2,00E-03	3,40E-04	2,03E-03	-4,08E-06	7,38E-08	9,15E-07	7,46E-05	-2,00E-03	3,40E-04
4,92E+03	-2,35E+03	-1,87E+04	-3,26E+03	-6,04E+00	8,60E+00	-1,22E+00	5,31E-05	-2,01E-03	2,85E-04	2,03E-03	-4,10E-06	7,38E-08	9,38E-07	5,31E-05	-2,01E-03	2,85E-04

4,98E+03	-2,69E+03	-1,81E+04	-3,33E+03	-5,41E+00	9,24E+00	-9,59E-01	3,07E-05	-2,02E-03	2,28E-04	2,04E-03	-4,10E-06	7,38E-08	9,57E-07	3,07E-05	-2,02E-03	2,28E-04
5,04E+03	-3,00E+03	-1,76E+04	-3,38E+03	-4,77E+00	9,79E+00	-7,00E-01	7,57E-06	-2,03E-03	1,70E-04	2,04E-03	-4,11E-06	7,38E-08	9,72E-07	7,57E-06	-2,03E-03	1,70E-04
5,10E+03	-3,26E+03	-1,70E+04	-3,41E+03	-4,13E+00	1,03E+01	-4,42E-01	-1,62E-05	-2,03E-03	1,11E-04	2,04E-03	-4,11E-06	7,38E-08	9,82E-07	-1,62E-05	-2,03E-03	1,11E-04
5,16E+03	-3,49E+03	-1,63E+04	-3,43E+03	-3,48E+00	1,06E+01	-1,85E-01	-4,04E-05	-2,03E-03	5,21E-05	2,04E-03	-4,10E-06	7,38E-08	9,88E-07	-4,04E-05	-2,03E-03	5,21E-05
5,22E+03	-3,68E+03	-1,57E+04	-3,43E+03	-2,84E+00	1,09E+01	6,98E-02	-6,51E-05	-2,03E-03	-7,25E-06	2,03E-03	-4,09E-06	7,38E-08	9,90E-07	-6,51E-05	-2,03E-03	-7,25E-06
5,28E+03	-3,83E+03	-1,50E+04	-3,42E+03	-2,21E+00	1,12E+01	3,20E-01	-9,00E-05	-2,03E-03	-6,66E-05	2,03E-03	-4,07E-06	7,38E-08	9,87E-07	-9,00E-05	-2,03E-03	-6,66E-05
5,34E+03	-3,95E+03	-1,43E+04	-3,39E+03	-1,58E+00	1,13E+01	5,66E-01	-1,15E-04	-2,02E-03	-1,26E-04	2,02E-03	-4,05E-06	7,38E-08	9,80E-07	-1,15E-04	-2,02E-03	-1,26E-04
5,40E+03	-4,02E+03	-1,37E+04	-3,35E+03	-9,67E-01	1,13E+01	8,05E-01	-1,40E-04	-2,00E-03	-1,84E-04	2,02E-03	-4,02E-06	7,38E-08	9,69E-07	-1,40E-04	-2,00E-03	-1,84E-04
5,46E+03	-4,06E+03	-1,30E+04	-3,30E+03	-3,64E-01	1,13E+01	1,04E+00	-1,66E-04	-1,99E-03	-2,42E-04	2,01E-03	-3,99E-06	7,38E-08	9,53E-07	-1,66E-04	-1,99E-03	-2,42E-04
5,52E+03	-4,07E+03	-1,23E+04	-3,23E+03	2,23E-01	1,12E+01	1,26E+00	-1,91E-04	-1,97E-03	-2,98E-04	2,00E-03	-3,95E-06	7,38E-08	9,33E-07	-1,91E-04	-1,97E-03	-2,98E-04
5,58E+03	-4,04E+03	-1,16E+04	-3,15E+03	7,92E-01	1,10E+01	1,48E+00	-2,15E-04	-1,95E-03	-3,54E-04	1,99E-03	-3,90E-06	7,38E-08	9,09E-07	-2,15E-04	-1,95E-03	-3,54E-04
5,64E+03	-3,97E+03	-1,10E+04	-3,05E+03	1,34E+00	1,08E+01	1,68E+00	-2,40E-04	-1,92E-03	-4,07E-04	1,98E-03	-3,85E-06	7,38E-08	8,81E-07	-2,40E-04	-1,92E-03	-4,07E-04
5,70E+03	-3,88E+03	-1,04E+04	-2,94E+03	1,87E+00	1,04E+01	1,88E+00	-2,64E-04	-1,89E-03	-4,59E-04	1,96E-03	-3,80E-06	7,38E-08	8,49E-07	-2,64E-04	-1,89E-03	-4,59E-04
5,76E+03	-3,75E+03	-9,75E+03	-2,83E+03	2,37E+00	1,00E+01	2,06E+00	-2,87E-04	-1,86E-03	-5,09E-04	1,95E-03	-3,74E-06	7,38E-08	8,13E-07	-2,87E-04	-1,86E-03	-5,09E-04
5,82E+03	-3,59E+03	-9,16E+03	-2,70E+03	2,84E+00	9,57E+00	2,23E+00	-3,10E-04	-1,82E-03	-5,57E-04	1,93E-03	-3,67E-06	7,38E-08	7,74E-07	-3,10E-04	-1,82E-03	-5,57E-04
5,88E+03	-3,41E+03	-8,60E+03	-2,56E+03	3,29E+00	9,06E+00	2,39E+00	-3,32E-04	-1,79E-03	-6,02E-04	1,91E-03	-3,60E-06	7,38E-08	7,31E-07	-3,32E-04	-1,79E-03	-6,02E-04
5,94E+03	-3,20E+03	-8,07E+03	-2,41E+03	3,70E+00	8,49E+00	2,54E+00	-3,53E-04	-1,74E-03	-6,44E-04	1,89E-03	-3,52E-06	7,38E-08	6,85E-07	-3,53E-04	-1,74E-03	-6,44E-04
6,00E+03	-2,96E+03	-7,58E+03	-2,25E+03	4,09E+00	7,86E+00	2,67E+00	-3,73E-04	-1,70E-03	-6,84E-04	1,87E-03	-3,44E-06	7,38E-08	6,36E-07	-3,73E-04	-1,70E-03	-6,84E-04
6,06E+03	-2,71E+03	-7,13E+03	-2,09E+03	4,44E+00	7,20E+00	2,79E+00	-3,92E-04	-1,65E-03	-7,21E-04	1,85E-03	-3,36E-06	7,38E-08	5,84E-07	-3,92E-04	-1,65E-03	-7,21E-04
6,12E+03	-2,43E+03	-6,72E+03	-1,92E+03	4,76E+00	6,49E+00	2,89E+00	-4,10E-04	-1,60E-03	-7,54E-04	1,82E-03	-3,27E-06	7,38E-08	5,30E-07	-4,10E-04	-1,60E-03	-7,54E-04
6,18E+03	-2,14E+03	-6,35E+03	-1,74E+03	5,04E+00	5,74E+00	2,98E+00	-4,27E-04	-1,55E-03	-7,84E-04	1,79E-03	-3,18E-06	7,38E-08	4,73E-07	-4,27E-04	-1,55E-03	-7,84E-04
6,24E+03	-1,83E+03	-6,03E+03	-1,56E+03	5,29E+00	4,96E+00	3,05E+00	-4,42E-04	-1,50E-03	-8,11E-04	1,76E-03	-3,08E-06	7,38E-08	4,14E-07	-4,42E-04	-1,50E-03	-8,11E-04
6,30E+03	-1,50E+03	-5,76E+03	-1,38E+03	5,50E+00	4,15E+00	3,11E+00	-4,56E-04	-1,44E-03	-8,34E-04	1,73E-03	-2,98E-06	7,38E-08	3,54E-07	-4,56E-04	-1,44E-03	-8,34E-04
6,36E+03	-1,17E+03	-5,53E+03	-1,19E+03	5,67E+00	3,33E+00	3,16E+00	-4,68E-04	-1,39E-03	-8,53E-04	1,70E-03	-2,88E-06	7,38E-08	2,92E-07	-4,68E-04	-1,39E-03	-8,53E-04
6,42E+03	-8,24E+02	-5,36E+03	-9,98E+02	5,81E+00	2,48E+00	3,19E+00	-4,79E-04	-1,33E-03	-8,69E-04	1,66E-03	-2,78E-06	7,38E-08	2,28E-07	-4,79E-04	-1,33E-03	-8,69E-04
6,48E+03	-4,72E+02	-5,23E+03	-8,06E+02	5,91E+00	1,62E+00	3,20E+00	-4,89E-04	-1,27E-03	-8,81E-04	1,62E-03	-2,67E-06	7,38E-08	1,64E-07	-4,89E-04	-1,27E-03	-8,81E-04
6,54E+03	-1,15E+02	-5,16E+03	-6,14E+02	5,97E+00	7,57E-01	3,20E+00	-4,97E-04	-1,21E-03	-8,89E-04	1,58E-03	-2,56E-06	7,38E-08	9,83E-08	-4,97E-04	-1,21E-03	-8,89E-04
6,60E+03	2,44E+02	-5,14E+03	-4,23E+02	6,00E+00	-1,11E-01	3,18E+00	-5,03E-04	-1,15E-03	-8,92E-04	1,54E-03	-2,45E-06	7,38E-08	3,26E-08	-5,03E-04	-1,15E-03	-8,92E-04
6,66E+03	6,04E+02	-5,18E+03	-2,32E+02	5,99E+00	-9,76E-01	3,16E+00	-5,08E-04	-1,08E-03	-8,92E-04	1,49E-03	-2,34E-06	7,38E-08	-3,32E-08	-5,08E-04	-1,08E-03	-8,92E-04
6,72E+03	9,62E+02	-5,26E+03	-4,43E+01	5,95E+00	-1,83E+00	3,11E+00	-5,11E-04	-1,02E-03	-8,88E-04	1,45E-03	-2,22E-06	7,38E-08	-9,89E-08	-5,11E-04	-1,02E-03	-8,88E-04
6,78E+03	1,32E+03	-5,40E+03	1,41E+02	5,87E+00	-2,68E+00	3,06E+00	-5,13E-04	-9,56E-04	-8,81E-04	1,40E-03	-2,11E-06	7,38E-08	-1,64E-07	-5,13E-04	-9,56E-04	-8,81E-04
6,84E+03	1,67E+03	-5,58E+03	3,22E+02	5,76E+00	-3,51E+00	2,99E+00	-5,12E-04	-8,92E-04	-8,69E-04	1,35E-03	-2,00E-06	7,38E-08	-2,29E-07	-5,12E-04	-8,92E-04	-8,69E-04
6,90E+03	2,01E+03	-5,82E+03	4,99E+02	5,61E+00	-4,32E+00	2,90E+00	-5,10E-04	-8,29E-04	-8,53E-04	1,29E-03	-1,88E-06	7,38E-08	-2,92E-07	-5,10E-04	-8,29E-04	-8,53E-04
6,96E+03	2,34E+03	-6,10E+03	6,70E+02	5,44E+00	-5,10E+00	2,81E+00	-5,07E-04	-7,65E-04	-8,34E-04	1,24E-03	-1,77E-06	7,38E-08	-3,54E-07	-5,07E-04	-7,65E-04	-8,34E-04
7,02E+03	2,66E+03	-6,43E+03	8,36E+02	5,23E+00	-5,85E+00	2,70E+00	-5,01E-04	-7,03E-04	-8,11E-04	1,18E-03	-1,66E-06	7,38E-08	-4,15E-07	-5,01E-04	-7,03E-04	-8,11E-04
7,08E+03	2,97E+03	-6,80E+03	9,95E+02	5,00E+00	-6,57E+00	2,59E+00	-4,94E-04	-6,41E-04	-7,84E-04	1,13E-03	-1,55E-06	7,38E-08	-4,74E-07	-4,94E-04	-6,41E-04	-7,84E-04
7,14E+03	3,26E+03	-7,22E+03	1,15E+03	4,73E+00	-7,26E+00	2,46E+00	-4,86E-04	-5,80E-04	-7,54E-04	1,07E-03	-1,44E-06	7,38E-08	-5,31E-07	-4,86E-04	-5,80E-04	-7,54E-04
7,20E+03	3,53E+03	-7,67E+03	1,29E+03	4,45E+00	-7,90E+00	2,33E+00	-4,76E-04	-5,21E-04	-7,20E-04	1,01E-03	-1,33E-06	7,38E-08	-5,85E-07	-4,76E-04	-5,21E-04	-7,20E-04
7,26E+03	3,79E+03	-8,16E+03	1,43E+03	4,14E+00	-8,50E+00	2,19E+00	-4,64E-04	-4,63E-04	-6,84E-04	9,47E-04	-1,23E-06	7,38E-08	-6,37E-07	-4,64E-04	-4,63E-04	-6,84E-04
7,32E+03	4,03E+03	-8,69E+03	1,55E+03	3,81E+00	-9,06E+00	2,04E+00	-4,51E-04	-4,06E-04	-6,44E-04	8,85E-04	-1,13E-06	7,38E-08	-6,86E-07	-4,51E-04	-4,06E-04	-6,44E-04
7,38E+03	4,25E+03	-9,25E+03	1,67E+03	3,46E+00	-9,56E+00	1,88E+00	-4,37E-04	-3,51E-04	-6,02E-04	8,22E-04	-1,03E-06	7,38E-08	-7,32E-07	-4,37E-04	-3,51E-04	-6,02E-04
7,44E+03	4,44E+03	-9,84E+03	1,78E+03	3,09E+00	-1,00E+01	1,72E+00	-4,21E-04	-2,99E-04	-5,56E-04	7,59E-04	-9,37E-07	7,38E-08	-7,74E-07	-4,21E-04	-2,99E-04	-5,56E-04
7,50E+03	4,62E+03	-1,05E+04	1,88E+03	2,71E+00	-1,04E+01	1,55E+00	-4,04E-04	-2,48E-04	-5,09E-04	6,95E-04	-8,45E-07	7,38E-08	-8,14E-07	-4,04E-04	-2,48E-04	-5,09E-04
7,56E+03	4,77E+03	-1,11E+04	1,96E+03	2,31E+00	-1,08E+01	1,38E+00	-3,86E-04	-2,00E-04	-4,59E-04	6,32E-04	-7,58E-07	7,38E-08	-8,49E-07	-3,86E-04	-2,00E-04	-4,59E-04
7,62E+03	4,90E+03	-1,17E+04	2,04E+03	1,91E+00	-1,11E+01	1,21E+00	-3,66E-04	-1,55E-04	-4,07E-04	5,69E-04	-6,75E-07	7,38E-08	-8,81E-07	-3,66E-04	-1,55E-04	-4,07E-04

7,68E+03	5,00E+03	-1,24E+04	2,11E+03	1,49E+00	-1,13E+01	1,03E+00	-3,46E-04	-1,12E-04	-3,53E-04	5,07E-04	-5,96E-07	7,38E-08	-9,09E-07	-3,46E-04	-1,12E-04	-3,53E-04
7,74E+03	5,08E+03	-1,31E+04	2,17E+03	1,07E+00	-1,15E+01	8,56E-01	-3,24E-04	-7,15E-05	-2,98E-04	4,46E-04	-5,22E-07	7,38E-08	-9,33E-07	-3,24E-04	-7,15E-05	-2,98E-04
7,80E+03	5,13E+03	-1,38E+04	2,21E+03	6,49E-01	-1,16E+01	6,78E-01	-3,02E-04	-3,43E-05	-2,41E-04	3,88E-04	-4,53E-07	7,38E-08	-9,53E-07	-3,02E-04	-3,43E-05	-2,41E-04
7,86E+03	5,15E+03	-1,45E+04	2,25E+03	2,23E-01	-1,16E+01	5,01E-01	-2,79E-04	-1,08E-08	-1,84E-04	3,34E-04	-3,88E-07	7,38E-08	-9,69E-07	-2,79E-04	-1,08E-08	-1,84E-04
7,92E+03	5,15E+03	-1,52E+04	2,27E+03	-2,03E-01	-1,16E+01	3,25E-01	-2,56E-04	3,12E-05	-1,25E-04	2,86E-04	-3,29E-07	7,38E-08	-9,80E-07	-2,56E-04	3,12E-05	-1,25E-04
7,98E+03	5,13E+03	-1,59E+04	2,29E+03	-6,26E-01	-1,16E+01	1,51E-01	-2,32E-04	5,91E-05	-6,60E-05	2,48E-04	-2,75E-07	7,38E-08	-9,87E-07	-2,32E-04	5,91E-05	-6,60E-05
8,04E+03	5,08E+03	-1,66E+04	2,29E+03	-1,04E+00	-1,15E+01	-1,99E-02	-2,07E-04	8,39E-05	-6,68E-06	2,23E-04	-2,27E-07	7,38E-08	-9,90E-07	-2,07E-04	8,39E-05	-6,68E-06
8,10E+03	5,00E+03	-1,73E+04	2,28E+03	-1,46E+00	-1,13E+01	-1,87E-01	-1,82E-04	1,05E-04	5,27E-05	2,17E-04	-1,84E-07	7,38E-08	-9,88E-07	-1,82E-04	1,05E-04	5,27E-05
8,16E+03	4,90E+03	-1,79E+04	2,27E+03	-1,86E+00	-1,11E+01	-3,50E-01	-1,57E-04	1,23E-04	1,12E-04	2,29E-04	-1,46E-07	7,38E-08	-9,82E-07	-1,57E-04	1,23E-04	1,12E-04
8,22E+03	4,78E+03	-1,86E+04	2,24E+03	-2,25E+00	-1,08E+01	-5,08E-01	-1,32E-04	1,38E-04	1,70E-04	2,56E-04	-1,14E-07	7,38E-08	-9,72E-07	-1,32E-04	1,38E-04	1,70E-04
8,28E+03	4,63E+03	-1,92E+04	2,21E+03	-2,63E+00	-1,05E+01	-6,60E-01	-1,07E-04	1,50E-04	2,28E-04	2,93E-04	-8,78E-08	7,38E-08	-9,57E-07	-1,07E-04	1,50E-04	2,28E-04
8,34E+03	4,47E+03	-1,98E+04	2,16E+03	-3,00E+00	-1,01E+01	-8,06E-01	-8,15E-05	1,58E-04	2,85E-04	3,36E-04	-6,70E-08	7,38E-08	-9,38E-07	-8,15E-05	1,58E-04	2,85E-04
8,40E+03	4,27E+03	-2,04E+04	2,11E+03	-3,35E+00	-9,64E+00	-9,45E-01	-5,66E-05	1,63E-04	3,41E-04	3,82E-04	-5,17E-08	7,38E-08	-9,15E-07	-5,66E-05	1,63E-04	3,41E-04
8,46E+03	4,06E+03	-2,10E+04	2,05E+03	-3,68E+00	-9,17E+00	-1,08E+00	-3,21E-05	1,64E-04	3,95E-04	4,29E-04	-4,19E-08	7,38E-08	-8,88E-07	-3,21E-05	1,64E-04	3,95E-04
8,52E+03	3,83E+03	-2,15E+04	1,98E+03	-3,99E+00	-8,65E+00	-1,20E+00	-7,97E-06	1,62E-04	4,47E-04	4,76E-04	-3,75E-08	7,38E-08	-8,57E-07	-7,97E-06	1,62E-04	4,47E-04
8,58E+03	3,59E+03	-2,20E+04	1,91E+03	-4,28E+00	-8,09E+00	-1,31E+00	1,56E-05	1,57E-04	4,98E-04	5,22E-04	-3,84E-08	7,38E-08	-8,22E-07	1,56E-05	1,57E-04	4,98E-04
8,64E+03	3,32E+03	-2,25E+04	1,82E+03	-4,55E+00	-7,49E+00	-1,42E+00	3,84E-05	1,49E-04	5,46E-04	5,67E-04	-4,43E-08	7,38E-08	-7,83E-07	3,84E-05	1,49E-04	5,46E-04
8,70E+03	3,04E+03	-2,29E+04	1,74E+03	-4,80E+00	-6,86E+00	-1,52E+00	6,06E-05	1,38E-04	5,92E-04	6,11E-04	-5,53E-08	7,38E-08	-7,41E-07	6,06E-05	1,38E-04	5,92E-04
8,76E+03	2,74E+03	-2,33E+04	1,64E+03	-5,03E+00	-6,20E+00	-1,61E+00	8,18E-05	1,24E-04	6,35E-04	6,52E-04	-7,11E-08	7,38E-08	-6,96E-07	8,18E-05	1,24E-04	6,35E-04
8,82E+03	2,44E+03	-2,37E+04	1,54E+03	-5,23E+00	-5,51E+00	-1,68E+00	1,02E-04	1,08E-04	6,75E-04	6,91E-04	-9,14E-08	7,38E-08	-6,48E-07	1,02E-04	1,08E-04	6,75E-04
8,88E+03	2,12E+03	-2,40E+04	1,44E+03	-5,40E+00	-4,79E+00	-1,75E+00	1,21E-04	8,83E-05	7,12E-04	7,28E-04	-1,16E-07	7,38E-08	-5,97E-07	1,21E-04	8,83E-05	7,12E-04
8,94E+03	1,79E+03	-2,42E+04	1,33E+03	-5,55E+00	-4,06E+00	-1,81E+00	1,40E-04	6,65E-05	7,47E-04	7,62E-04	-1,45E-07	7,38E-08	-5,43E-07	1,40E-04	6,65E-05	7,47E-04
9,00E+03	1,45E+03	-2,45E+04	1,22E+03	-5,67E+00	-3,31E+00	-1,86E+00	1,56E-04	4,24E-05	7,78E-04	7,94E-04	-1,78E-07	7,38E-08	-4,87E-07	1,56E-04	4,24E-05	7,78E-04
9,06E+03	1,11E+03	-2,46E+04	1,11E+03	-5,77E+00	-2,55E+00	-1,90E+00	1,72E-04	1,61E-05	8,05E-04	8,23E-04	-2,14E-07	7,38E-08	-4,28E-07	1,72E-04	1,61E-05	8,05E-04
9,12E+03	7,60E+02	-2,48E+04	9,96E+02	-5,84E+00	-1,78E+00	-1,93E+00	1,86E-04	-1,22E-05	8,29E-04	8,50E-04	-2,54E-07	7,38E-08	-3,68E-07	1,86E-04	-1,22E-05	8,29E-04
9,18E+03	4,08E+02	-2,49E+04	8,80E+02	-5,88E+00	-9,97E-01	-1,95E+00	1,99E-04	-4,23E-05	8,49E-04	8,73E-04	-2,97E-07	7,38E-08	-3,06E-07	1,99E-04	-4,23E-05	8,49E-04
9,24E+03	5,47E+01	-2,49E+04	7,63E+02	-5,90E+00	-2,16E-01	-1,95E+00	2,11E-04	-7,40E-05	8,66E-04	8,94E-04	-3,42E-07	7,38E-08	-2,43E-07	2,11E-04	-7,40E-05	8,66E-04
9,30E+03	-2,99E+02	-2,49E+04	6,45E+02	-5,89E+00	5,63E-01	-1,95E+00	2,21E-04	-1,07E-04	8,78E-04	9,12E-04	-3,90E-07	7,38E-08	-1,79E-07	2,21E-04	-1,07E-04	8,78E-04
9,36E+03	-6,52E+02	-2,48E+04	5,28E+02	-5,86E+00	1,34E+00	-1,94E+00	2,29E-04	-1,41E-04	8,87E-04	9,27E-04	-4,39E-07	7,38E-08	-1,14E-07	2,29E-04	-1,41E-04	8,87E-04
9,42E+03	-1,00E+03	-2,47E+04	4,12E+02	-5,80E+00	2,10E+00	-1,93E+00	2,36E-04	-1,77E-04	8,92E-04	9,39E-04	-4,91E-07	7,38E-08	-4,80E-08	2,36E-04	-1,77E-04	8,92E-04
9,48E+03	-1,35E+03	-2,46E+04	2,97E+02	-5,71E+00	2,86E+00	-1,90E+00	2,41E-04	-2,13E-04	8,93E-04	9,49E-04	-5,44E-07	7,38E-08	1,78E-08	2,41E-04	-2,13E-04	8,93E-04
9,54E+03	-1,69E+03	-2,44E+04	1,85E+02	-5,60E+00	3,60E+00	-1,86E+00	2,44E-04	-2,50E-04	8,90E-04	9,56E-04	-5,97E-07	7,38E-08	8,35E-08	2,44E-04	-2,50E-04	8,90E-04
9,60E+03	-2,02E+03	-2,41E+04	7,41E+01	-5,47E+00	4,32E+00	-1,82E+00	2,46E-04	-2,87E-04	8,83E-04	9,60E-04	-6,51E-07	7,38E-08	1,49E-07	2,46E-04	-2,87E-04	8,83E-04
9,66E+03	-2,34E+03	-2,39E+04	-3,35E+01	-5,32E+00	5,02E+00	-1,77E+00	2,46E-04	-3,24E-04	8,72E-04	9,62E-04	-7,06E-07	7,38E-08	2,14E-07	2,46E-04	-3,24E-04	8,72E-04
9,72E+03	-2,66E+03	-2,35E+04	-1,38E+02	-5,15E+00	5,69E+00	-1,71E+00	2,45E-04	-3,61E-04	8,57E-04	9,62E-04	-7,60E-07	7,38E-08	2,77E-07	2,45E-04	-3,61E-04	8,57E-04
9,78E+03	-2,96E+03	-2,32E+04	-2,39E+02	-4,95E+00	6,34E+00	-1,64E+00	2,41E-04	-3,98E-04	8,39E-04	9,59E-04	-8,14E-07	7,38E-08	3,40E-07	2,41E-04	-3,98E-04	8,39E-04
9,84E+03	-3,25E+03	-2,28E+04	-3,35E+02	-4,74E+00	6,96E+00	-1,57E+00	2,36E-04	-4,34E-04	8,16E-04	9,54E-04	-8,67E-07	7,38E-08	4,01E-07	2,36E-04	-4,34E-04	8,16E-04
9,90E+03	-3,53E+03	-2,23E+04	-4,27E+02	-4,51E+00	7,55E+00	-1,50E+00	2,30E-04	-4,69E-04	7,91E-04	9,48E-04	-9,19E-07	7,38E-08	4,60E-07	2,30E-04	-4,69E-04	7,91E-04
9,96E+03	-3,79E+03	-2,19E+04	-5,15E+02	-4,26E+00	8,10E+00	-1,42E+00	2,22E-04	-5,04E-04	7,61E-04	9,39E-04	-9,68E-07	7,38E-08	5,17E-07	2,22E-04	-5,04E-04	7,61E-04
1,00E+04	-4,04E+03	-2,14E+04	-5,97E+02	-4,01E+00	8,62E+00	-1,33E+00	2,12E-04	-5,37E-04	7,29E-04	9,30E-04	-1,02E-06	7,38E-08	5,72E-07	2,12E-04	-5,37E-04	7,29E-04
1,01E+04	-4,27E+03	-2,08E+04	-6,74E+02	-3,73E+00	9,11E+00	-1,24E+00	2,01E-04	-5,69E-04	6,93E-04	9,19E-04	-1,06E-06	7,38E-08	6,25E-07	2,01E-04	-5,69E-04	6,93E-04
1,01E+04	-4,49E+03	-2,03E+04	-7,46E+02	-3,45E+00	9,55E+00	-1,15E+00	1,88E-04	-5,99E-04	6,54E-04	9,07E-04	-1,11E-06	7,38E-08	6,74E-07	1,88E-04	-5,99E-04	6,54E-04
1,02E+04	-4,69E+03	-1,97E+04	-8,12E+02	-3,16E+00	9,95E+00	-1,05E+00	1,74E-04	-6,28E-04	6,12E-04	8,94E-04	-1,15E-06	7,38E-08	7,21E-07	1,74E-04	-6,28E-04	6,12E-04
1,03E+04	-4,87E+03	-1,91E+04	-8,72E+02	-2,85E+00	1,03E+01	-9,55E-01	1,59E-04	-6,55E-04	5,67E-04	8,80E-04	-1,18E-06	7,38E-08	7,65E-07	1,59E-04	-6,55E-04	5,67E-04
1,03E+04	-5,03E+03	-1,85E+04	-9,26E+02	-2,55E+00	1,06E+01	-8,56E-01	1,42E-04	-6,79E-04	5,20E-04	8,67E-04	-1,22E-06	7,38E-08	8,05E-07	1,42E-04	-6,79E-04	5,20E-04

1,04E+04	-5,17E+03	-1,78E+04	-9,75E+02	-2,23E+00	1,09E+01	-7,56E-01	1,24E-04	-7,01E-04	4,71E-04	8,53E-04	-1,24E-06	7,38E-08	8,41E-07	1,24E-04	-7,01E-04	4,71E-04
1,04E+04	-5,30E+03	-1,72E+04	-1,02E+03	-1,92E+00	1,11E+01	-6,56E-01	1,05E-04	-7,21E-04	4,19E-04	8,40E-04	-1,27E-06	7,38E-08	8,74E-07	1,05E-04	-7,21E-04	4,19E-04
1,05E+04	-5,40E+03	-1,65E+04	-1,05E+03	-1,60E+00	1,13E+01	-5,56E-01	8,44E-05	-7,38E-04	3,66E-04	8,28E-04	-1,29E-06	7,38E-08	9,03E-07	8,44E-05	-7,38E-04	3,66E-04
1,06E+04	-5,49E+03	-1,58E+04	-1,08E+03	-1,28E+00	1,15E+01	-4,57E-01	6,33E-05	-7,52E-04	3,11E-04	8,16E-04	-1,31E-06	7,38E-08	9,28E-07	6,33E-05	-7,52E-04	3,11E-04
1,06E+04	-5,56E+03	-1,51E+04	-1,11E+03	-9,68E-01	1,16E+01	-3,59E-01	4,13E-05	-7,63E-04	2,55E-04	8,06E-04	-1,32E-06	7,38E-08	9,49E-07	4,13E-05	-7,63E-04	2,55E-04
1,07E+04	-5,60E+03	-1,44E+04	-1,13E+03	-6,55E-01	1,16E+01	-2,63E-01	1,85E-05	-7,72E-04	1,97E-04	7,97E-04	-1,33E-06	7,38E-08	9,65E-07	1,85E-05	-7,72E-04	1,97E-04
1,07E+04	-5,63E+03	-1,37E+04	-1,14E+03	-3,47E-01	1,17E+01	-1,69E-01	-4,96E-06	-7,77E-04	1,39E-04	7,89E-04	-1,33E-06	7,38E-08	9,78E-07	-4,96E-06	-7,77E-04	1,39E-04
1,08E+04	-5,65E+03	-1,30E+04	-1,15E+03	-4,56E-02	1,16E+01	-7,84E-02	-2,90E-05	-7,79E-04	7,99E-05	7,84E-04	-1,32E-06	7,38E-08	9,86E-07	-2,90E-05	-7,79E-04	7,99E-05
1,09E+04	-5,64E+03	-1,23E+04	-1,15E+03	2,49E-01	1,16E+01	9,30E-03	-5,35E-05	-7,78E-04	2,06E-05	7,80E-04	-1,31E-06	7,38E-08	9,90E-07	-5,35E-05	-7,78E-04	2,06E-05
1,09E+04	-5,62E+03	-1,16E+04	-1,15E+03	5,34E-01	1,15E+01	9,34E-02	-7,83E-05	-7,74E-04	-3,88E-05	7,79E-04	-1,30E-06	7,38E-08	9,89E-07	-7,83E-05	-7,74E-04	-3,88E-05
1,10E+04	-5,58E+03	-1,09E+04	-1,14E+03	8,10E-01	1,13E+01	1,74E-01	-1,03E-04	-7,66E-04	-9,80E-05	7,79E-04	-1,28E-06	7,38E-08	9,84E-07	-1,03E-04	-7,66E-04	-9,80E-05
1,10E+04	-5,52E+03	-1,03E+04	-1,13E+03	1,07E+00	1,12E+01	2,49E-01	-1,29E-04	-7,55E-04	-1,57E-04	7,82E-04	-1,25E-06	7,38E-08	9,74E-07	-1,29E-04	-7,55E-04	-1,57E-04
1,11E+04	-5,45E+03	-9,59E+03	-1,11E+03	1,33E+00	1,10E+01	3,21E-01	-1,54E-04	-7,41E-04	-2,15E-04	7,87E-04	-1,22E-06	7,38E-08	9,61E-07	-1,54E-04	-7,41E-04	-2,15E-04
1,12E+04	-5,36E+03	-8,94E+03	-1,09E+03	1,56E+00	1,07E+01	3,87E-01	-1,79E-04	-7,23E-04	-2,72E-04	7,93E-04	-1,19E-06	7,38E-08	9,43E-07	-1,79E-04	-7,23E-04	-2,72E-04
1,12E+04	-5,26E+03	-8,30E+03	-1,06E+03	1,79E+00	1,05E+01	4,48E-01	-2,04E-04	-7,02E-04	-3,28E-04	8,01E-04	-1,14E-06	7,38E-08	9,21E-07	-2,04E-04	-7,02E-04	-3,28E-04
1,13E+04	-5,15E+03	-7,68E+03	-1,03E+03	2,00E+00	1,02E+01	5,04E-01	-2,29E-04	-6,78E-04	-3,82E-04	8,11E-04	-1,10E-06	7,38E-08	8,94E-07	-2,29E-04	-6,78E-04	-3,82E-04
1,13E+04	-5,02E+03	-7,08E+03	-1,00E+03	2,19E+00	9,86E+00	5,55E-01	-2,53E-04	-6,50E-04	-4,35E-04	8,22E-04	-1,04E-06	7,38E-08	8,64E-07	-2,53E-04	-6,50E-04	-4,35E-04
1,14E+04	-4,88E+03	-6,50E+03	-9,67E+02	2,37E+00	9,52E+00	6,00E-01	-2,76E-04	-6,19E-04	-4,86E-04	8,34E-04	-9,84E-07	7,38E-08	8,30E-07	-2,76E-04	-6,19E-04	-4,86E-04
1,15E+04	-4,74E+03	-5,94E+03	-9,30E+02	2,53E+00	9,15E+00	6,39E-01	-2,99E-04	-5,86E-04	-5,35E-04	8,48E-04	-9,20E-07	7,38E-08	7,93E-07	-2,99E-04	-5,86E-04	-5,35E-04
1,15E+04	-4,58E+03	-5,40E+03	-8,91E+02	2,67E+00	8,77E+00	6,73E-01	-3,22E-04	-5,49E-04	-5,81E-04	8,62E-04	-8,51E-07	7,38E-08	7,52E-07	-3,22E-04	-5,49E-04	-5,81E-04
1,16E+04	-4,42E+03	-4,89E+03	-8,49E+02	2,80E+00	8,38E+00	7,01E-01	-3,43E-04	-5,09E-04	-6,25E-04	8,76E-04	-7,78E-07	7,38E-08	7,07E-07	-3,43E-04	-5,09E-04	-6,25E-04
1,16E+04	-4,24E+03	-4,40E+03	-8,07E+02	2,91E+00	7,97E+00	7,23E-01	-3,64E-04	-4,66E-04	-6,66E-04	8,91E-04	-7,00E-07	7,38E-08	6,60E-07	-3,64E-04	-4,66E-04	-6,66E-04
1,17E+04	-4,07E+03	-3,93E+03	-7,63E+02	3,00E+00	7,55E+00	7,40E-01	-3,83E-04	-4,21E-04	-7,04E-04	9,05E-04	-6,17E-07	7,38E-08	6,09E-07	-3,83E-04	-4,21E-04	-7,04E-04
1,18E+04	-3,89E+03	-3,49E+03	-7,18E+02	3,07E+00	7,12E+00	7,51E-01	-4,02E-04	-3,73E-04	-7,39E-04	9,20E-04	-5,30E-07	7,38E-08	5,56E-07	-4,02E-04	-3,73E-04	-7,39E-04
1,18E+04	-3,70E+03	-3,08E+03	-6,73E+02	3,13E+00	6,69E+00	7,57E-01	-4,19E-04	-3,23E-04	-7,71E-04	9,35E-04	-4,40E-07	7,38E-08	5,00E-07	-4,19E-04	-3,23E-04	-7,71E-04
1,19E+04	-3,51E+03	-2,69E+03	-6,27E+02	3,16E+00	6,25E+00	7,58E-01	-4,35E-04	-2,71E-04	-7,99E-04	9,49E-04	-3,45E-07	7,38E-08	4,42E-07	-4,35E-04	-2,71E-04	-7,99E-04
1,19E+04	-3,32E+03	-2,33E+03	-5,82E+02	3,19E+00	5,81E+00	7,54E-01	-4,49E-04	-2,16E-04	-8,24E-04	9,63E-04	-2,47E-07	7,38E-08	3,82E-07	-4,49E-04	-2,16E-04	-8,24E-04
1,20E+04	-3,13E+03	-1,99E+03	-5,37E+02	3,19E+00	5,38E+00	7,45E-01	-4,63E-04	-1,60E-04	-8,45E-04	9,76E-04	-1,46E-07	7,38E-08	3,21E-07	-4,63E-04	-1,60E-04	-8,45E-04
1,21E+04	-2,94E+03	-1,68E+03	-4,93E+02	3,18E+00	4,95E+00	7,31E-01	-4,74E-04	-1,02E-04	-8,62E-04	9,89E-04	-4,27E-08	7,38E-08	2,58E-07	-4,74E-04	-1,02E-04	-8,62E-04
1,21E+04	-2,75E+03	-1,40E+03	-4,49E+02	3,15E+00	4,52E+00	7,14E-01	-4,85E-04	-4,28E-05	-8,76E-04	1,00E-03	6,34E-08	7,38E-08	1,94E-07	-4,85E-04	-4,28E-05	-8,76E-04
1,22E+04	-2,56E+03	-1,14E+03	-4,07E+02	3,11E+00	4,11E+00	6,93E-01	-4,93E-04	1,79E-05	-8,85E-04	1,01E-03	1,72E-07	7,38E-08	1,29E-07	-4,93E-04	1,79E-05	-8,85E-04
1,22E+04	-2,37E+03	-9,05E+02	-3,66E+02	3,05E+00	3,70E+00	6,68E-01	-5,01E-04	7,96E-05	-8,91E-04	1,03E-03	2,82E-07	7,38E-08	6,34E-08	-5,01E-04	7,96E-05	-8,91E-04
1,23E+04	-2,19E+03	-6,95E+02	-3,27E+02	2,98E+00	3,30E+00	6,40E-01	-5,06E-04	1,42E-04	-8,93E-04	1,04E-03	3,93E-07	7,38E-08	-2,36E-09	-5,06E-04	1,42E-04	-8,93E-04
1,24E+04	-2,02E+03	-5,08E+02	-2,89E+02	2,90E+00	2,92E+00	6,09E-01	-5,10E-04	2,05E-04	-8,91E-04	1,05E-03	5,05E-07	7,38E-08	-6,81E-08	-5,10E-04	2,05E-04	-8,91E-04
1,24E+04	-1,85E+03	-3,44E+02	-2,54E+02	2,80E+00	2,56E+00	5,76E-01	-5,12E-04	2,69E-04	-8,85E-04	1,06E-03	6,18E-07	7,38E-08	-1,34E-07	-5,12E-04	2,69E-04	-8,85E-04
1,25E+04	-1,68E+03	-2,01E+02	-2,20E+02	2,70E+00	2,21E+00	5,40E-01	-5,13E-04	3,33E-04	-8,75E-04	1,07E-03	7,32E-07	7,38E-08	-1,99E-07	-5,13E-04	3,33E-04	-8,75E-04
1,25E+04	-1,52E+03	-7,83E+01	-1,89E+02	2,59E+00	1,88E+00	5,03E-01	-5,11E-04	3,96E-04	-8,61E-04	1,08E-03	8,45E-07	7,38E-08	-2,63E-07	-5,11E-04	3,96E-04	-8,61E-04
1,26E+04	-1,37E+03	2,51E+01	-1,60E+02	2,47E+00	1,57E+00	4,65E-01	-5,09E-04	4,60E-04	-8,43E-04	1,09E-03	9,58E-07	7,38E-08	-3,25E-07	-5,09E-04	4,60E-04	-8,43E-04
1,27E+04	-1,23E+03	1,10E+02	-1,33E+02	2,34E+00	1,28E+00	4,26E-01	-5,04E-04	5,23E-04	-8,22E-04	1,10E-03	1,07E-06	7,38E-08	-3,87E-07	-5,04E-04	5,23E-04	-8,22E-04
1,27E+04	-1,09E+03	1,79E+02	-1,09E+02	2,20E+00	1,01E+00	3,86E-01	-4,98E-04	5,85E-04	-7,97E-04	1,11E-03	1,18E-06	7,38E-08	-4,46E-07	-4,98E-04	5,85E-04	-7,97E-04
1,28E+04	-9,62E+02	2,32E+02	-8,68E+01	2,07E+00	7,63E-01	3,47E-01	-4,90E-04	6,46E-04	-7,68E-04	1,12E-03	1,29E-06	7,38E-08	-5,04E-07	-4,90E-04	6,46E-04	-7,68E-04
1,28E+04	-8,43E+02	2,71E+02	-6,72E+01	1,92E+00	5,38E-01	3,07E-01	-4,81E-04	7,06E-04	-7,36E-04	1,13E-03	1,40E-06	7,38E-08	-5,60E-07	-4,81E-04	7,06E-04	-7,36E-04
1,29E+04	-7,31E+02	2,97E+02	-5,00E+01	1,78E+00	3,36E-01	2,68E-01	-4,70E-04	7,65E-04	-7,01E-04	1,14E-03	1,50E-06	7,38E-08	-6,13E-07	-4,70E-04	7,65E-04	-7,01E-04
1,30E+04	-6,29E+02	3,12E+02	-3,50E+01	1,63E+00	1,57E-01	2,30E-01	-4,58E-04	8,22E-04	-6,63E-04	1,15E-03	1,61E-06	7,38E-08	-6,63E-07	-4,58E-04	8,22E-04	-6,63E-04
1,30E+04	-5,35E+02	3,16E+02	-2,23E+01	1,49E+00	3,28E-04	1,94E-01	-4,44E-04	8,78E-04	-6,22E-04	1,16E-03	1,70E-06	7,38E-08	-7,10E-07	-4,44E-04	8,78E-04	-6,22E-04

1,31E+04	-4,51E+02	3,12E+02	-1,17E+01	1,34E+00	-1,34E-01	1,59E-01	-4,29E-04	9,32E-04	-5,78E-04	1,18E-03	1,80E-06	7,38E-08	-7,55E-07	-4,29E-04	9,32E-04	-5,78E-04
1,31E+04	-3,74E+02	3,01E+02	-3,18E+00	1,20E+00	-2,45E-01	1,26E-01	-4,12E-04	9,83E-04	-5,31E-04	1,19E-03	1,89E-06	7,38E-08	-7,96E-07	-4,12E-04	9,83E-04	-5,31E-04
1,32E+04	-3,06E+02	2,83E+02	3,48E+00	1,06E+00	-3,36E-01	9,59E-02	-3,94E-04	1,03E-03	-4,82E-04	1,21E-03	1,98E-06	7,38E-08	-8,33E-07	-3,94E-04	1,03E-03	-4,82E-04
1,33E+04	-2,47E+02	2,61E+02	8,38E+00	9,30E-01	-4,05E-01	6,81E-02	-3,75E-04	1,08E-03	-4,31E-04	1,22E-03	2,07E-06	7,38E-08	-8,67E-07	-3,75E-04	1,08E-03	-4,31E-04
1,33E+04	-1,95E+02	2,35E+02	1,17E+01	8,02E-01	-4,54E-01	4,30E-02	-3,56E-04	1,12E-03	-3,79E-04	1,24E-03	2,15E-06	7,38E-08	-8,97E-07	-3,56E-04	1,12E-03	-3,79E-04
1,34E+04	-1,50E+02	2,07E+02	1,36E+01	6,81E-01	-4,84E-01	2,10E-02	-3,35E-04	1,16E-03	-3,24E-04	1,25E-03	2,23E-06	7,38E-08	-9,22E-07	-3,35E-04	1,16E-03	-3,24E-04
1,34E+04	-1,13E+02	1,77E+02	1,43E+01	5,67E-01	-4,96E-01	2,20E-03	-3,13E-04	1,20E-03	-2,68E-04	1,27E-03	2,30E-06	7,38E-08	-9,44E-07	-3,13E-04	1,20E-03	-2,68E-04
1,35E+04	-8,19E+01	1,48E+02	1,39E+01	4,62E-01	-4,91E-01	-1,32E-02	-2,90E-04	1,24E-03	-2,11E-04	1,29E-03	2,36E-06	7,38E-08	-9,62E-07	-2,90E-04	1,24E-03	-2,11E-04
1,36E+04	-5,72E+01	1,19E+02	1,28E+01	3,66E-01	-4,70E-01	-2,51E-02	-2,67E-04	1,27E-03	-1,53E-04	1,31E-03	2,43E-06	7,38E-08	-9,75E-07	-2,67E-04	1,27E-03	-1,53E-04
1,36E+04	-3,78E+01	9,16E+01	1,10E+01	2,80E-01	-4,36E-01	-3,34E-02	-2,43E-04	1,30E-03	-9,38E-05	1,33E-03	2,48E-06	7,38E-08	-9,84E-07	-2,43E-04	1,30E-03	-9,38E-05
1,37E+04	-2,34E+01	6,68E+01	8,84E+00	2,04E-01	-3,89E-01	-3,80E-02	-2,19E-04	1,33E-03	-3,45E-05	1,35E-03	2,53E-06	7,38E-08	-9,89E-07	-2,19E-04	1,33E-03	-3,45E-05
1,37E+04	-1,31E+01	4,52E+01	6,52E+00	1,40E-01	-3,31E-01	-3,88E-02	-1,94E-04	1,35E-03	2,49E-05	1,36E-03	2,58E-06	7,38E-08	-9,89E-07	-1,94E-04	1,35E-03	2,49E-05
1,38E+04	-6,39E+00	2,72E+01	4,26E+00	8,70E-02	-2,65E-01	-3,59E-02	-1,69E-04	1,37E-03	8,41E-05	1,38E-03	2,62E-06	7,38E-08	-9,85E-07	-1,69E-04	1,37E-03	8,41E-05
1,39E+04	-2,45E+00	1,36E+01	2,28E+00	4,64E-02	-1,91E-01	-2,94E-02	-1,44E-04	1,39E-03	1,43E-04	1,40E-03	2,65E-06	7,38E-08	-9,77E-07	-1,44E-04	1,39E-03	1,43E-04
1,39E+04	-5,73E-01	4,48E+00	8,07E-01	1,81E-02	-1,11E-01	-1,91E-02	-1,18E-04	1,40E-03	2,01E-04	1,42E-03	2,68E-06	7,38E-08	-9,64E-07	-1,18E-04	1,40E-03	2,01E-04
1,40E+04	-2,17E-02	2,82E-01	5,42E-02	2,41E-03	-2,82E-02	-5,36E-03	-9,32E-05	1,41E-03	2,59E-04	1,44E-03	2,71E-06	7,38E-08	-9,47E-07	-9,32E-05	1,41E-03	2,59E-04