ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ
ИМЕНИ ПАТРИСА ЛУМУМБЫ"

На правах рукописи

УДК 531.011

Будочкина С.А.

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин

Диссертация
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор физико-математических наук,
профессор Савчин В.М.

Москва - 2023

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования. Известный в классической механике принцип Остроградского выделяет действительное движение системы из всех кинематически возможных движений при более широких предположениях относительно сил по сравнению с принципом Гамильтона[1]. В случае принципа Остроградского силы, действующие на систему, предполагаются произвольными, в случае принципа Гамильтона – потенциальными.

Уравнениями движения системы, к которым приводит принцип Остроградского, являются уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{\partial \mathsf{T}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathsf{T}}{\partial \dot{q}_i}\right) + \mathcal{Q}_i = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

где $\mathsf{T} = \mathsf{T}(q, \dot{q}, t)$ – кинетическая энергия системы, $\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}_i(q, \dot{q}, t)$ – обобщенная сила, отнесенная к координате q_i $(i = \overline{1, n})$.

Если на систему одновременно действуют потенциальные и непотенциальные активные силы, то обобщенная сила $\mathcal{Q}_i$ может быть представлена в виде

$$\mathcal{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_i} + \mathcal{P}_i,$$

где $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i(q, \dot{q}, t)$ – обобщенная непотенциальная сила, отнесенная к координате q_i, $\mathcal{U}(q)$ – силовая функция. В связи с этим

[1] В данном случае используется терминология [27]. Отметим, что в литературе не существует общепринятого названия указанных вариационных принципов. Например, в монографии [113] более общий принцип, как и его частный случай, называется принципом Гамильтона.

получаем следующие уравнения движения:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \mathcal{P}_i = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

где $L(q, \dot{q}, t) = \mathsf{T}(q, \dot{q}, t) + \mathcal{U}(q)$ – лагранжиан системы.

Следуя [92], аналогичные уравнения в механике систем с бесконечным числом степеней свободы, то есть уравнения вида

$$\frac{\delta L}{\delta u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta u_t}\right) + \Lambda(u) = 0,$$

где через $\delta/\delta u$ и $\delta/\delta u_t$ обозначены функциональные производные по u и u_t соответственно, будем называть уравнениями Лагранжа с непотенциальными плотностями сил, а бесконечномерные системы, движения которых описываются этими уравнениями, – бесконечномерными лагранжевыми системами с непотенциальными силами.

В классической механике известны теоремы Томсона-Тета-Четаева о влиянии различных сил на устойчивость движения [63], поэтому обратная задача о представлении уравнений движения в указанном виде является актуальной даже для систем с конечным числом степеней свободы. Она представляет теоретический интерес и также имеет практическую ценность. В случае систем с бесконечным числом степеней свободы, для которых вопрос исследования устойчивости движения по структуре действующих сил остается пока мало изученным, результаты диссертационной работы могут оказаться весьма полезными для качественной оценки различных факторов, влияющих на устойчивость движения.

Одной из прямых задач механики систем с бесконечным числом степеней свободы является задача нахождения интегралов уравнений движения. Следует отметить, что интегралы уравнений движения имеют многочисленные применения. В частности, они могут использоваться для доказательства существования и единственности классических решений дифференциальных уравнений в частных производных (см., например, [53, 112]), для исследования устойчивости движения [23, 54, 157]. В работе [166] законы сохранения применены для доказательства существования волновых решений уравнения Кортевега-де Фриза.

Задача нахождения интегралов уравнений движения тесно связана, в частности, с задачей представления уравнений движения в форме канонических уравнений Гамильтона. Для решения последней необходимо предварительно построить функционал действия, из условия стационарности которого получались бы соответствующие уравнения движения рассматриваемой системы, или, другими словами, построить гамильтониан, позволяющий представить уравнения движения в виде канонических уравнений Гамильтона. Обобщение канонического гамильтонова формализма на случай систем с бесконечным числом степеней свободы привело к неклассическому гамильтонову формализму, в основе которого лежит понятие неканонической скобки Пуассона [5, 32, 38, 42, 76, 154, 172]. Теория гамильтоновых систем располагает весьма действенными методами интегрирования и качественного исследования уравнений движения [48, 49], поэтому задача представления уравнений движения непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы в форме канонических и неканонических уравнений Гамильтона также является актуальной.

К прямым задачам механики бесконечномерных систем относится также задача определения качественных показателей, характеризующих свойства их движения. Такими качественными показателями являются, например, интегральные инварианты. Теория интегральных инвариантов, разработанная А. Пуанкаре для конечномерных систем [87], получила дальнейшее развитие в работе [45]. Взаимосвязь интегральных инвариантов с интегралами уравнений движения систем с бесконечным числом степеней свободы была установлена в работе [92].

Таким образом, многочисленные практические задачи приводят к необходимости исследования движения непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы, поэтому требуются эффективные способы анализа их состояния. В связи с этим представляет значительный интерес распространение методов классической механики на системы различной физической природы, движение которых описывается различными типами уравнений (обыкновенными дифференциальными, дифференциальными уравнениями в частных производных, интегро-дифференциальными уравнениями, дифференциально-разностными уравнениями и др.), с привлечением новых классов функционалов для построения интегральных вариационных формулировок уравнений движения.

Изложенное выше определяет актуальность решения прямых и обратных задач механики непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы в рассмотренных в диссертационной работе постановках.

В настоящей диссертационной работе получил развитие операторный подход к исследованию движения непотенциальных систем, что позволило расширить область применения методов классической механики и получить новые результаты для бесконечномерных, а также и для конечномерных систем. Это связано с тем, что операторный подход дает возможность исследовать одновременно разнообразные типы уравнений и их систем. В этом заключается новизна операторного подхода и его отличие от координатных методов. Кроме того, некоторые известные в классической механике результаты могут быть получены как следствия из результатов диссертационной работы.

Отметим, что основы операторного подхода в механике систем с бесконечным числом степеней свободы заложены в работах [92, 191].

Степень разработанности темы исследования.

Основные методы классической механики изложены в работах [3, 4, 27, 33, 55, 57, 58, 113] и др. Многие из этих методов были распространены на исследование движения систем различной физической природы и структуры [9, 34, 37, 56, 66–68, 71, 78, 81, 82, 91, 110, 111, 125, 127, 149, 164, 165, 167, 177, 184, 195, 204]. Для применения методов классической механики может потребоваться, чтобы соответствующие уравнения движения были представлены в форме уравнений Лагранжа или Гамильтона [69, 70, 72, 156]. Исследованию вопросов прямой и косвенной представимости уравнений движения систем с конечным и бесконечным числом степеней свободы в указанном виде посвящены как классические, так и современные работы, авторами которых являются В.Л. Бердичевский [7, 8], А.С. Галиуллин [29], Г. Гельмгольц [31], В.Г. Задорожний [39], В.И. Заплатный [41], А.М. Попов [84–86], И.М. Рапопорт [88], В.М. Савчин [92–95, 97, 162, 163, 190, 191], Г.К. Суслов [109], В.М. Филиппов [116, 119, 120], F. Bampi, A. Morro [131], J. Douglas [150, 151], A. Mayer [173], R.M. Santilli [187, 189], E. Tonti [196–200] и др. Отметим, что в работах V. Volterra [202, 203] были получены условия потенциальности операторов и формула для построения функционала. Этим самым были заложены основы теории потенциальных операторов, что, начиная с работы [196], и привело в дальнейшем к возможности получения аналога условий Гельмгольца для различных классов дифференциальных уравнений.

Вариационные методы исследования уравнений движения изложены, например, в монографиях [21, 22, 62, 77, 89]. В развитии вариационных формулировок различных уравнений движения с непотенциальными операторами с целью применения вариационных методов важную роль сыграли работы [36, 59, 61, 114–116, 121, 123, 124, 186]. Разработке численных методов решения вариационных задач посвящены, в частности, работы [122, 129, 130].

В монографии А.С. Галиуллина [26] наряду с задачами представления уравнений движения систем с конечным числом степеней свободы в форме уравнений Лагранжа и Гамильтона ставятся задачи построения лагранжиана и гамильтониана систем по заданным свойствам движения. Кроме того, приводятся решения поставленных задач в том числе и методом симметрии с использованием условий инвариантности действий по Гамильтону при бесконечно малых преобразованиях. Отметим, что эти задачи являются исходными задачами теории построения систем программного движения [25, 28, 30, 65, 73, 74].

Вопросы представимости уравнений движения конечномерных систем в форме уравнений Лагранжа с диссипативными или гироскопическими силами исследованы в работах [126, 148, 160, 161, 175, 176].

В настоящее время большое внимание уделяется разработке способов построения интегралов различных типов уравнений, основанных на исследовании инвариантности как действий по Гамильтону, так и самих уравнений движения, в том числе и с непотенциальными операторами [2, 90, 128, 132–135, 144, 146, 152, 153, 155, 158, 159, 168–171, 174, 178–183, 185, 201, 205–208]. После работы Э. Нетер [75] широкий интерес к рассматриваемой проблеме во многом связан с фундаментальными монографиями Л.В. Овсянникова [79] и Н.Х. Ибрагимова [44]. Отметим, что инвариантный подход позволяет находить решения уравнений движения [35, 52, 158].

Известна также взаимосвязь алгебраических структур с уравнениями механики [10, 50, 80, 92, 96, 147, 188].

Несмотря на то, что к изложенным проблемам было привлечено внимание многих исследователей, некоторые задачи остались нерешенными. Это прежде всего относится к целенаправленному распространению математических методов механики на исследование движения непотенциальных систем в случаях, когда их уравнения движения не могут быть приведены напрямую или косвенно к уравнениям, получаемым из принципа Гамильтона, а также к разработке единого подхода к исследованию движения как конечномерных, так и бесконечномерных систем.

Настоящая диссертация направлена на то, чтобы в какой-то степени восполнить эти пробелы.

Интерес к изложенным в диссертационной работе проблемам вызван возможностью дальнейшего развития некоторых известных методов механики потенциальных и непотенциальных систем для исследования более широкого класса уравнений движения и функционалов действия.

В работе автор, в основном, ограничился рассмотрением уравнений движения со второй производной по времени, что связано со стремлением сосредоточиться на получении исчерпывающих результатов для этого конкретного случая. С некоторыми видоизменениями результаты диссертации могут быть распространены и на уравнения движения с производными высших порядков по времени.

Цели и задачи исследования. Диссертационная работа посвящена разработке математических методов исследования движения непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы, что, с одной стороны, является дальнейшим развитием классической механики и теории динамических систем, а с другой - позволяет как весьма специальный частный случай исследовать движение и систем с конечным числом степеней свободы. В связи с этим цель работы заключается также в построении единой теории конечномерных и бесконечномерных систем. Связующим звеном в этом направлении служит операторный подход, на основе которого разработаны общие методы исследования различных классов уравнений движения.

Достижение указанных целей осуществляется путем решения следующих основных задач:

1. построение действий по Гамильтону для уравнений движения непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы с использованием эйлеровых и неэйлеровых классов функционалов,

2. приведение уравнений движения непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы к виду классических и неклассических уравнений Гамильтона,

3. получение формул для нахождения интегралов уравнений движения непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы, в том числе на основе свойств инвариантности как самих уравнений движения, так и соответствующих действий по Гамильтону.

Следуя установившейся для механики конечномерных систем терминологии [26–29, 195], первые две задачи будем называть обратными задачами механики бесконечномерных систем, а последнюю – прямой задачей.

Научная новизна. Все представленные в диссертационной работе результаты являются новыми.

Среди полученных результатов выделим следующие:

1. получены необходимые и достаточные условия представимости уравнений движения систем с бесконечным числом

степеней свободы в форме уравнений Лагранжа с не-B_u-потенциальными плотностями сил,

2. разработан конструктивный прием построения действий по Гамильтону, в общем случае не принадлежащих классу функционалов Эйлера-Лагранжа,
3. в терминах необходимых и достаточных условий определена структура уравнений движения квази-B_u-потенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы,
4. используя подходы, в том числе основанные на применении теории преобразований переменных для установления инвариантности уравнений движения, получены формулы для нахождения интегралов уравнений движения квази-B_u-потенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы,
5. получено условие инвариантности до дивергенции действий по Гамильтону и дан общий вид интегралов уравнений движения систем с бесконечным числом степеней свободы,
6. установлена связь симметрий уравнений движения и действий по Гамильтону с алгебраическими структурами,
7. исследованы вопросы представимости рассматриваемых уравнений движения в форме B_u-гамильтоновых уравнений, уравнений Гамильтона, Гамильтона-допустимых уравнений.

Теоретическая и практическая значимость работы. Диссертация носит теоретический характер и относится к области фундаментальных исследований. Полученные результаты имеют существенное значение для аналитической механики при исследовании потенциальных и непотенциальных взаимодействий различной физической природы, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, дифференциальными уравнениями с частными производными, интегро-дифференциальными уравнениями, дифференциально-разностными уравнениями и др. типами уравнений, а также их систем. Частично они получены в результате исследований автора по грантам РФФИ и выполняемым в РУДН НИР.

Часть результатов диссертационной работы была внедрена в учебный процесс на кафедре математического анализа и теории функций, а затем в Математическом институте имени академика С.М. Никольского РУДН: использовалась при чтении курсов "Теория потенциальных операторов" и "Симметрийный анализ уравнений и функционалов", предназначенных для студентов магистратуры направления 01.04.01 "Математика", специализация "Функциональные методы в дифференциальных уравнениях и междисциплинарных исследованиях". Кроме того, результаты диссертационной работы служат основой постановок задач для выпускных квалификационных работ студентов бакалавриата и магистерских диссертаций по направлениям "Математика" и "Прикладная математика и информатика", а также для кандидатских диссертаций по специальности 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин.

Результаты диссертации могут быть также использованы при создании специальных курсов, в том числе электронных, по механике систем с бесконечным числом степеней свободы для аспирантов, обучающихся по направлению 1.1 "Математика и механика".

Методология и методы исследования. В исследованиях, проведенных в диссертационной работе, применяются методы аналитической динамики, современные методы решения обратных задач вариационного исчисления и нелинейного функционального анализа.

Положения, выносимые на защиту.

1. Критерий представимости достаточно общих уравнений движения непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы со второй производной по времени в форме уравнений Лагранжа с не-B_u-потенциальными плотностями сил и следствия из него,

2. общая структура уравнений движения квази-B_u-потенциальных (квазипотенциальных, B_u-потенциальных, потенциальных) систем с бесконечным числом степеней свободы со второй производной по времени и формулы для построения соответствующих действий по Гамильтону,

3. общий вид интегралов уравнений движения квази-B_u-потенциальных (квазипотенциальных, B_u-потенциальных, потенциальных) систем с бесконечным числом степеней свободы со второй производной по времени, в том числе при наличии симметрий уравнений движения,

4. связь между симметриями уравнений движения и алгебраическими структурами,

5. условие инвариантности до дивергенции действия по Гамильтону и общий вид интегралов уравнений движения квази-B_u-потенциальных (квазипотенциальных, B_u-потенциальных, потенциальных) систем с бесконечным числом степеней свободы со второй производной по времени,

6. связь между вариационными симметриями и алгебраическими структурами,

7. связь между рассматриваемыми типами симметрий,

8. теоремы о представлении уравнений движения непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы в форме B_u-гамильтоновых уравнений, уравнений Гамильтона, Гамильтона-допустимых уравнений,

9. иллюстративные примеры.

Степень достоверности и апробация результатов.

Основные результаты работы опубликованы в рецензируемых научных журналах. В диссертации они сформулированы в виде теорем и строго доказаны.

Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на семинаре "Функциональные пространства" под руководством проф. Х. Трибеля и проф. Х.-Ю. Шмайссера (университет им. Ф. Шиллера, Йена, Германия, 2010); на XLVI Всероссийской конференции по проблемам математики, информатики, физики и химии (Москва, 2010); на Международной научной конференции "Современные проблемы анализа и преподавания математики", посвященной 105-летию академика С.М. Никольского (Москва, 2010); на 8-ом Международном Конгрессе ISAAC (Москва, 2011); на четвертой Международной конференции "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования", посвященной 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева (Москва, 2013); на семинаре "Математическое моделирование процессов динамики" под руководством д.ф.-м.н., профессора Р.Г. Мухарлямова (Москва, РУДН, 2014); на семинаре кафедры теоретической физики РУДН под руководством д.ф.-м.н., профессора Ю.П. Рыбакова (Москва, РУДН, 2014); на семинаре "Динамические системы и механика" под руководством д.ф.-

м.н., профессора П.С. Красильникова и д.ф.-м.н., доцента Б.С. Бардина (Москва, МАИ, 2014, 2019); на семинаре "Математическое моделирование процессов динамики", посвященном 95-летию со дня рождения профессора А.С. Галиуллина, под руководством д.ф.-м.н., профессора Р.Г. Мухарлямова (Москва, РУДН, 2014); на Международной научной конференции "Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы" (Москва, 2014); на Всероссийской конференции с международным участием "Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем" (Москва, 2015); на Третьей Международной научно-практической конференции "Системы управления, технические системы: устойчивость, стабилизация, пути и методы исследования" (Елец, 2017, пленарный доклад); на семинаре "Гамильтоновы системы и статистическая механика" под руководством д.ф.-м.н., профессора, члена-корреспондента РАН С.В. Болотина, д.ф.-м.н., профессора, академика РАН В.В. Козлова, д.ф.-м.н., профессора, академика РАН Д.В. Трещева (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2017); на пятой Международной конференции "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования", посвященной 95-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева (Москва, 2018); на сорок третьем Межвузовском научном семинаре "Геометрия и расчет тонких оболочек неканонической формы" (Москва, РУДН, 2019); на Международной научной конференции "Бесконечномерный анализ и математическая физика", посвященной памяти С.В. Фомина (Москва, 2019); на научном семинаре Математического института им. С.М. Никольского РУДН по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям под руководством д.ф.-м.н., профессора А.Л. Скубачевского (Москва, РУДН, 2019, 2023); на Международной конференции "Современные проблемы математики и механики", посвященной 80-летию академика РАН В.А. Садовничего (Москва, 2019); на семинаре "Математическое моделирование процессов динамики", посвященном 100-летию со дня рождения профессора А.С. Галиуллина, под руководством д.ф.-м.н., профессора Р.Г. Мухарлямова (Москва, РУДН, 2019); на Международной конференции "Математическая физика, динамические системы и бесконечномерный анализ 2021" (Долгопрудный, МФТИ, 2021, онлайн); на онлайн-конференции "Yarmouk Mathematics Conference on Differential Equations: Analysis, Modeling and Numerical Computations DEAMN-2021" (Yarmouk University, Irbid, Jordan, 2021, online); на семинаре "Обратные задачи математической физики" под руководством д.ф.-м.н., профессора А.Б. Бакушинского, д.ф.-м.н., профессора А.В. Тихонравова, д.ф.-м.н., профессора А.Г. Яголы (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2023, онлайн); на XXXVI Международной Воронежской весенней математической школе "Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения" (Воронеж, ВГУ, 2023, онлайн); на семинаре "Непотенциальные динамические системы и нейросетевые технологии" под руководством д.ф.-м.н., профессора В.М. Савчина, к.ф.-м.н., доцента С.Г. Шорохова (Москва, РУДН, 2023, онлайн).

Публикации.

За последние 10 лет по теме диссертации опубликовано 15 работ в журналах из БД Web of Science, Scopus [11,15,18–20,104–106,117, 138,139,143,192–194] и 1 работа в другом рецензируемом издании [118]. Тезисы докладов не учитываются.

Поставленные цели и задачи исследования определили содержание и структуру диссертационной работы, основная часть которой состоит из шести глав, разбитых на параграфы.

Отметим, что в номере параграфа М.К первое число (М) означает номер главы, второе (К) - номер этого параграфа в главе М.

Аналогично "формула (М.К)" ("теорема М.К", "определение М.К", "замечание М.К" и т.д.) означает, что это - формула (теорема, определение, замечание и т.д.) с порядковым номером К из главы М.

В первой главе разработаны конструктивные приемы распознавания принадлежности систем с бесконечным числом степеней свободы к лагранжевым системам с непотенциальными силами, основанные на общих методах решения обратных задач вариационного исчисления (ОЗВИ) для уравнений с непотенциальными операторами.

С целью полноты излагаемого материала в параграфе 1.1 данной главы сочтено целесообразным привести необходимые сведения об основах вариационного исчисления в операторной форме: об абстрактных функциях, дифференцируемых по Гато операторах, билинейных формах, B_u-потенциалах операторов и B_u-градиентах функционалов.

В параграфе 1.2 получены критерии прямой и косвенной представимости уравнений движения систем с бесконечным числом степеней свободы в форме уравнений Лагранжа с непотенциальными плотностями сил (в том числе в форме уравнений Лагранжа). Как частный случай они содержат необходимые и достаточные условия прямого и косвенного представления системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка в форме классических уравнений Биркгофа, что устанавливает связь с механикой конечномерных систем.

В параграфе 1.3 на основе критерия представимости уравнений движения бесконечномерных систем в форме уравнений Лагранжа с непотенциальными плотностями сил получены необходимые и достаточные условия квазипотенциальности для достаточно общего интегро-дифференциального уравнения с отклоняющимися аргументами.

В параграфе 1.4 в случае выполнения условий квази-B_u-потенциальности (квазипотенциальности, B_u-потенциальности, потенциальности) для операторного уравнения движения со второй производной по времени построены действия по Гамильтону, в общем случае не принадлежащие классу функционалов Эйлера-Лагранжа.

В параграфе 1.5 в терминах необходимых и достаточных условий определена структура уравнений движения квази-B_u-потенциальных (квазипотенциальных, B_u-потенциальных, потенциальных) систем с бесконечным числом степеней свободы со второй производной по времени, откуда в частном случае получена структура классических уравнений Биркгофа, а из формулы для построения действия по Гамильтону – известный функционал Пфаффа.

Во второй главе теория групп преобразований переменных применена для исследования инвариантности уравнений движения бесконечномерных систем, нахождения их интегралов и выявления взаимосвязи с алгебраическими структурами.

В параграфе 2.1 определена структура интегралов уравнений движения бесконечномерных непотенциальных систем при исследовании на инвариантность относительно группы однопараметрических бесконечно малых преобразований.

В параграфе 2.2 доказано, что при выполнении определенных условий симметрии уравнений движения образуют Ли-допустимую алгебру относительно $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-произведения, а также алгебру Ли относительно $\mathcal{G}$-коммутатора и коммутатора их генераторов.

В третьей главе исследованы симметрийные свойства построенных действий по Гамильтону, получены формулы для нахождения интегралов уравнений движения бесконечномерных лагранжевых систем с непотенциальными силами, установлена связь вариационных симметрий с симметриями уравнений и алгебраическими структурами.

В параграфе 3.1 разработан способ отыскания интегралов уравнений движения квази-B_u-потенциальных (квазипотенциальных, B_u-потенциальных, потенциальных) систем с бесконечным числом степеней свободы со второй производной по времени, основанный на исследовании инвариантности действий по Гамильтону, связанных с этими уравнениями.

В параграфе 3.2 доказано, что при выполнении определенных условий симметрии функционалов образуют Ли-допустимую алгебру относительно $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-произведения, а также алгебру Ли относительно $\mathcal{G}$-коммутатора и коммутатора их генераторов.

В параграфе 3.3 установлена связь вариационных симметрий с симметриями уравнений движения непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы.

В четвертой главе получил развитие неклассический гамильтонов формализм для уравнений движения бесконечномерных непотенциальных систем, в том числе и с использованием найденных в первой главе решений ОЗВИ.

В параграфе 4.1 разработан аналог метода Пуассона для бесконечномерных систем и исследована взаимосвязь Гамильтона-допустимых уравнений (в том числе неклассических уравнений Гамильтона) с Ли-допустимыми алгебрами (в том числе алгебрами Ли). Выявлено значение Гамильтона-допустимых уравнений в механике непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы.

В параграфе 4.2 исследован вопрос о распознавании гамильтоновой структуры уравнений движения систем с бесконечным числом степеней свободы с первой производной по времени, допускающих первый интеграл указанного вида.

В параграфе 4.3 разработан метод приведения уравнений движения бесконечномерных лагранжевых систем с первой производной по времени к виду неклассических уравнений Гамильтона.

В параграфе 4.4 известное в классической механике преобразование Лежандра распространено на случай бесконечномерных систем, и на его основе разработан конструктивный прием сведения уравнений движения бесконечномерных лагранжевых систем с непотенциальными силами со второй производной по времени к Гамильтона-допустимым уравнениям (в том числе уравнениям Гамильтона).

В главе 5 предложен еще один способ нахождения интегралов уравнений движения бесконечномерных непотенциальных систем, а также установлена связь между интегралами эволюционных уравнений и их абсолютными интегральными инвариантами первого порядка.

В параграфе 5.1 разработан метод нахождения первых интегралов уравнений движения бесконечномерных лагранжевых систем с непотенциальными силами, являющийся обобщением метода симметрий, изложенного в параграфе 3.1.

В параграфе 5.2 получено необходимое и достаточное условие существования абсолютного интегрального инварианта первого порядка эволюционного уравнения, представленного в операторном виде, и дана формула для его построения в случае наличия интеграла рассматриваемого уравнения движения.

В главе 6 теоретические результаты предыдущих глав применены для исследования движения шарнирно-опертого на обоих концах призматического стержня, причем рассматриваются уравнения движения как с потенциальным, так и с квазипотенциальным операторами. Отметим, что квазипотенциальный оператор получается из потенциального в результате дополнения исходного уравнения движения членом, учитывающим демпфирование, пропорциональное скорости u_t.

Теоретические результаты диссертационной работы проиллюстрированы рядом примеров.

Глава 1

Уравнения Лагранжа с не-B_u-потенциальными плотностями сил в механике систем с бесконечным числом степеней свободы

В настоящей главе исследован вопрос о распознавании принадлежности систем с бесконечным числом степеней свободы к лагранжевым системам с не-B_u-потенциальными силами.

Получены необходимые и достаточные условия представимости операторного уравнения со второй производной по времени в форме уравнения Лагранжа с не-B_u-потенциальной плотностью силы. В частности, операторный подход применен для исследования квазипотенциальности оператора достаточно общего интегро-дифференциального уравнения с отклоняющимися аргументами.

Разработан конструктивный прием построения обобщенного лагранжиана, в общем случае не принадлежащего классу функционалов Эйлера-Лагранжа.

В терминах необходимых и достаточных условий определена структура операторного уравнения движения с квази-B_u-потенциальным оператором.

Теоретические результаты иллюстрируются конкретными примерами.

1.1 Необходимые сведения об основах вариационного исчисления в операторной форме

В этом параграфе приведены некоторые сведения об абстрактных функциях, производной Гато, билинейных формах, B_u-потенциальных операторах из монографий [24,92], которые будут использоваться в дальнейшем.

Абстрактные функции

Операторы, определенные на множествах числовой прямой, называются абстрактными функциями.

Пусть $u(t)$ $(t_0 \leq t \leq t_1)$ - абстрактная функция со значениями в линейном нормированном пространстве U_1. Функция $u(t)$ называется непрерывной в точке $\bar{t} \in (t_0, t_1)$, если

$$\lim_{t \to \bar{t}} (u(t) - u(\bar{t})) = 0.$$

Предел здесь понимается в смысле сходимости по норме пространства U_1.

Множество всех непрерывных на отрезке $[t_0, t_1]$ функций со значениями в линейном нормированном пространстве U_1 образует линейное пространство, которое обозначается $C([t_0, t_1]; U_1)$.

Теорема 1.1. [24] *Формула* $u(t) \equiv v(\cdot, t) \in C(\overline{\Omega})$ $\forall t \in [t_0, t_1]$ *устанавливает биективное отображение* $v \to u$ *между функциями* $v \in C(\overline{\Omega} \times [t_0, t_1])$ *и* $u \in C([t_0, t_1]; C(\overline{\Omega}))$. *Кроме того, функция* $v \in C^1(\overline{\Omega} \times [t_0, t_1])$ *имеет частную производную* $\frac{\partial v}{\partial t} \in C(\overline{\Omega} \times [t_0, t_1])$, *когда ей соответствует функция* $u(t) \in C^1([t_0, t_1]; C(\overline{\Omega}))$. *При этом* $\frac{\partial v}{\partial t}(\cdot, t) = u'(t)$ $\forall t \in [t_0, t_1]$.

Дифференцируемые по Гато операторы

Пусть N - оператор, заданный в области $D(N)$ линейного нормированного пространства U над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, а область значений $R(N)$ принадлежит линейному нормированному пространству V над полем $\mathbb{R}$, то есть

$$N(u) = v, \qquad u \in U, \qquad v \in V.$$

Через $\tilde{U}$ обозначим множество, состоящее из таких элементов $h \in U$, что $(u + \varepsilon h) \in D(N) \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$.

Определение 1.1. [92] Оператор $N : D(N) \subset U \to V$ называется дифференцируемым по Гато в точке $u \in D(N)$, если существует линейный оператор $N'_u : \tilde{U} \subset U \to V$ такой, что

$$N'_u h = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{N(u + \varepsilon h) - N(u)}{\varepsilon} \quad \forall h \in \tilde{U}. \tag{1.1}$$

При этом, вообще говоря, нелинейный по $u \in D(N)$ оператор N'_u называется производной Гато оператора N в точке $u \in D(N)$.

Предел в (1.1) понимается в смысле сходимости по норме пространства V.

В дальнейшем множество $\tilde{U}$ будем обозначать через $D(N'_u)$. Элемент $h \in D(N'_u)$ будем называть допустимым элементом. Отметим, что в общем случае $D(N) \neq D(N'_u)$.

Если N - линейный оператор, то $N'_u h = Nh$, то есть производная Гато линейного оператора есть сам линейный оператор.

Введем V-значную функцию

$$\varphi(\varepsilon) = N(u + \varepsilon h)$$

для всех $u \in D(N)$, $h \in D(N'_u)$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Тогда (см. [51])

$$N'_u h = \left. \frac{d\varphi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = 0}.$$

Отметим, что если $N = (N^1, N^2, ..., N^n)^T$ и $u = (u^1, u^2, ..., u^n)^T$, то

$$N'_u = \begin{pmatrix} (N^1)'_{u^1} & (N^1)'_{u^2} & \dots & (N^1)'_{u^n} \\ (N^2)'_{u^1} & (N^2)'_{u^2} & \dots & (N^2)'_{u^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (N^n)'_{u^1} & (N^n)'_{u^2} & \dots & (N^n)'_{u^n} \end{pmatrix}. \qquad (1.2)$$

В дальнейшем будем предполагать, что для всякого рассматриваемого оператора $N : D(N) \subset U \to V$ в любой точке $u \in D(N)$ существует N'_u.

При существовании производной Гато оператора N имеет место равенство

$$N(u + \varepsilon h) = N(u) + \varepsilon N'_u h + r(u, \varepsilon h), \qquad u \in D(N), \qquad (1.3)$$

где для любого фиксированного элемента $h \in D(N'_u)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{r(u, \varepsilon h)}{\varepsilon} = 0.$$

Если известна производная Гато оператора N, то [60]

$$N(u) = \int\limits_0^1 N'_{tu} u dt + N(0), \qquad (1.4)$$

то есть при $0 \in D(N)$ (1.4) - формула восстановления оператора по его производной Гато.

Отметим, что если $\tilde{N}_u$ - некоторый линейный оператор, произвольным образом зависящий от u, то производная Гато находится по формуле

$$\tilde{N}'_u(g; h) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\tilde{N}_{u+\varepsilon h} g - \tilde{N}_u g}{\varepsilon}. \qquad (1.5)$$

Вторая производная Гато оператора N вычисляется следующим образом:

$$N''_u(h_1, h_2) = \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_2} N(u + \varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2)\Big|_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0}.$$

Предполагается также, что

$$N''_u(h_1, h_2) = N''_u(h_2, h_1) \quad \forall u \in D(N),\ \forall h_1, h_2 \in D(N'_u). \qquad (1.6)$$

Билинейные формы

С целью полноты изложения и ясности употребляемой терминологии приведем некоторые сведения о билинейных формах, которые будут использоваться для определения квази-B_u-потенциальных операторов.

Определение 1.2. [92] Отображение $\Phi : V \times U \to \mathbb{R}$, линейное по каждому аргументу, называется билинейной формой.

Определение 1.3. [92] Билинейная форма $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ называется симметрической, если

$$\Phi(v, g) = \Phi(g, v) \quad \forall g, v \in V.$$

Определение 1.4. [92] Билинейная форма $\Phi : V \times U \to \mathbb{R}$ называется невырожденной, если

1) из условия $\Phi(v, h) = 0 \quad \forall v \in V$ следует, что $h = 0_U$,
2) из условия $\Phi(v, h) = 0 \quad \forall h \in U$ следует, что $v = 0_V$.

Будем предполагать, что билинейная форма [99, 100]

$$\Phi(\cdot, \cdot) \equiv \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle \cdot, \cdot \rangle \, dt : V \times V \to \mathbb{R} \qquad (1.7)$$

такова, что билинейное отображение $\Phi_1(\cdot, \cdot) \equiv \langle \cdot, \cdot \rangle$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\langle v_1(t), v_2(t) \rangle \ = \ \langle v_2(t), v_1(t) \rangle \qquad \forall\, v_1(t), v_2(t) \in V_1, \qquad (1.8)$$

$$D_t \langle v(t), g(t)\rangle \; = \; \langle D_t v(t), g(t)\rangle + \langle v(t), D_t g(t)\rangle \qquad (1.9)$$
$$\forall\, v, g \in C^1([t_0, t_1]; U_1).$$

Если $v = v(x,t),\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ t \in (t_0, t_1),\ U_1 = V_1 = C(\overline{\Omega})$, то можно, например, рассмотреть

$$\langle v, g\rangle \; = \int\limits_{\Omega} v(x,t) g(x,t)\, dx. \qquad (1.10)$$

Замечание 1.1. Билинейное отображение Φ_1, определяемое формулой

$$\Phi_1(v,g) = \int\limits_{\Omega} v(x,t)c(t)g(x, t_0 + t_1 - t)\, dx \qquad (c(t) \neq 0),$$

не удовлетворяет условию (1.9).

B_u-потенциальные операторы

Приведем условия B_u-потенциальности операторов и дадим формулу для построения соответствующего интегрального функционала.

Определение 1.5. [92] Оператор $N : D(N) \subset U \to V$ называется B_u-потенциальным на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы вида (1.7), если существуют линейный оператор $B_u : D(B_u) \subset V \to V$ и дифференцируемый по Гато функционал (действие по Гамильтону) $F_N : D(F_N) = D(N) \to \mathbb{R}$ такие, что

$$\delta F_N[u, h] = \Phi(N(u), B_u h) \qquad \forall u \in D(N), \quad \forall h \in D(N'_u, B_u),$$

где $D(N'_u, B_u) = D(N'_u) \cap D(B_u)$.

Функционал F_N называется B_u-потенциалом оператора N, а N – B_u-градиентом функционала F_N. Записывают $N =$

$(B_u\text{-}grad)_\Phi F_N$. Если $B_u \equiv I$ – тождественный оператор, то N называется потенциальным на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы Φ оператором.

Необходимое и достаточное условие B_u-потенциальности оператора N на множестве $D(N)$ относительно Φ сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1.2. [92] *Пусть дифференцируемый по Гато оператор* $N : D(N) \subset U \to V$ *и билинейная форма* $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ *такие, что для любых фиксированных элементов* $u \in D(N)$, $\quad g, h \in D(N'_u, B_u)$ *функция* $\varepsilon \to \Phi(N(u + \varepsilon h), B_u g)$ *является непрерывно дифференцируемой на отрезке [0,1]. Тогда для* B_u*-потенциальности оператора* N *на выпуклом множестве* $D(N)$ *относительно рассматриваемой билинейной формы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\Phi(N'_u h, B_u g) + \Phi(N(u), B'_u(g; h)) = \Phi(N'_u g, B_u h) + \Phi(N(u), B'_u(h; g)) \tag{1.11}$$

$$\forall u \in D(N), \quad \forall g, h \in D(N'_u, B_u).$$

При этом B_u-потенциал F_N определяется формулой

$$F_N[u] = \int\limits_0^1 \Phi(N(\tilde{u}(\lambda)), B_{\tilde{u}(\lambda)}(u - u_0))\, d\lambda + F_N[u_0], \tag{1.12}$$

где $\tilde{u}(\lambda) = u_0 + \lambda(u - u_0)$, u_0 - фиксированный элемент из $D(N)$.

1.2 Необходимые и достаточные условия квази-B_u-потенциальности для уравнения движения, представленного в операторном виде

В этом параграфе получены необходимые и достаточные условия представимости операторного уравнения со второй производной по времени в форме уравнения Лагранжа с не-B_u-потенциальной плотностью силы.

Пусть уравнения движения материальной системы представлены в операторном виде

$$N(u) \equiv P_{2u,t}u_{tt} + P_{1u,t}u_t + P_{3u,t}u_t^2 + Q(t,u) = 0, \tag{1.13}$$

$$u \in D(N) \subseteq U \subseteq V, \quad t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R},$$

$$u_t \equiv D_t u \equiv \frac{d}{dt}u, \qquad u_{tt} \equiv \frac{d^2}{dt^2}u.$$

Здесь $\forall t \in [t_0, t_1]$, $\forall u \in U_1$ операторы $P_{iu,t} : U_1 \to V_1$ $(i = \overline{1,3})$ являются линейными; $Q : [t_0, t_1] \times U_1 \to V_1$ – произвольный оператор, вообще говоря, нелинейный; $D(N)$ – область определения оператора N, $U = C^2([t_0, t_1]; U_1)$, $V = C([t_0, t_1]; V_1)$, U_1, V_1 - действительные линейные нормированные пространства, $U_1 \subseteq V_1$.

Будем предполагать, что при каждых $t \in [t_0, t_1]$ и $g(t), u(t) \in U_1$ функции $P_{1u,t}g(t)$ и $P_{3u,t}g(t)$ со значениями в V_1 непрерывно дифференцируемы, а $P_{2u,t}g(t)$ - дважды непрерывно дифференцируема на $[t_0, t_1]$.

Под решением уравнения (1.13) понимается функция $u \in D(N)$, удовлетворяющая (1.13).

В дальнейшем для упрощения обозначений будем записывать (1.13) также в виде

$$N(u) \equiv P_{2u}u_{tt} + P_{1u}u_t + P_{3u}u_t^2 + Q(u) = 0,$$

считая, что операторы P_{iu} $(i = \overline{1,3})$ и Q могут зависеть и от t.

Операторное уравнение движения (1.13) может быть обыкновенным дифференциальным, дифференциальным уравнением в частных производных, интегро-дифференциальным уравнением, дифференциально-разностным уравнением и др., а при $P_{3u} \equiv 0$ – системой таких уравнений [18].

Получим условия, при которых уравнение движения (1.13) допускает представление в виде уравнения Лагранжа с не-B_u-потенциальной плотностью силы.

Определение 1.6. Не-B_u-потенциальная сила с плотностью $\Lambda(u)$ называется существенно не-B_u-потенциальной, если

$$\Lambda(u) = \sum_{i=1}^{k} \Lambda^i(u), \tag{1.14}$$

и каждое слагаемое в правой части (1.14), а также всевозможные их суммы, состоящие из двух, трех и т.д. слагаемых, являются плотностями не-B_u-потенциальных сил.

В этом случае плотность $\Lambda(u)$ будем называть плотностью существенно не-B_u-потенциальной силы.

Определение 1.7. Оператор $N : D(N) \subset U \to V$ называется квази-B_u-потенциальным на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы (1.7), если существуют линейный оператор $B_u : D(B_u) \subset V \to V$, дифференцируемый по Гато функционал $F : D(F) = D(N) \to \mathbb{R}$ и плотность существенно не-B_u-потенциальной силы $\Lambda(u)$ такие, что

$$\delta F[u,h] + \Phi\left(\Lambda(u), B_u h\right) = \Phi(N(u), B_u h) \tag{1.15}$$
$$\forall u \in D(N),\ \forall h \in D(N'_u, B_u).$$

Если $B_u = I$ - тождественный оператор, то оператор N называется квазипотенциальным.

Предположим, что $\Lambda(u)$ имеет вид

$$\Lambda(u) = \Lambda_{2u} u_{tt} + \Lambda_{1u} u_t + \Lambda_{3u} u_t^2 + \Lambda_4(u),$$

причем операторы Λ_{iu} $(i = \overline{1,3})$ и Λ_4 могут зависеть также и от t.

Теорема 1.3. [18] *Пусть* $D_t^* = -D_t$ *на* $D(N_u', B_u)$. *Оператор* N *(1.13) является квази-*B_u*-потенциальным на множестве* $D(N)$ *относительно билинейной формы (1.7)* $\Longleftrightarrow$ $\forall u \in D(N)$, $\forall t \in [t_0, t_1]$, $\forall h \in D(N_u', B_u)$ *выполняются следующие условия на* $D(N_u', B_u)$:

$$B_u^* \tilde{P}_{2u} - \tilde{P}_{2u}^* B_u = 0, \tag{1.16}$$

$$u_t \tilde{P}_{3u}^* B_u - \tilde{P}_{2u}^{*\prime}(B_u(\cdot); u_t) - \tilde{P}_{2u}^* B_u'(\cdot; u_t) + B_u^* \tilde{P}_{3u}(u_t(\cdot)) = 0, \tag{1.17}$$

$$-2\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}_{2u}^* B_u) + \tilde{P}_{1u}^* B_u + B_u^* \tilde{P}_{1u} = 0, \tag{1.18}$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\tilde{P}_{2u}^* B_u)h + [B_u'(\cdot; h)]^* \tilde{Q}(u) - [B_u'(h; \cdot)]^* \tilde{Q}(u) + \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}_{1u}^* B_u)h +$$
$$+ B_u^* \tilde{Q}_u' h - \tilde{Q}_u'^* B_u h = 0, \tag{1.19}$$

$$\tilde{P}_{1u}^{*\prime}(B_u h; u_t) + B_u^* \tilde{P}_{1u}'(u_t; h) - [\tilde{P}_{1u}'(u_t; \cdot)]^* B_u h + 2u_t \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}_{3u}^* B_u)h +$$
$$+ \tilde{P}_{1u}^* B_u'(h; u_t) - 2\frac{\partial}{\partial t}\tilde{P}_{2u}^{*\prime}(B_u h; u_t) + [B_u'(\cdot; h)]^* \tilde{P}_{1u} u_t -$$
$$-2\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}_{2u}^* B_u'(h; u_t)) - [B_u'(h; \cdot)]^* \tilde{P}_{1u} u_t = 0, \tag{1.20}$$

$$B_u^* \tilde{P}_{2u}'(u_{tt}; h) - \tilde{P}_{2u}^{*\prime}(B_u h; u_{tt}) - [\tilde{P}_{2u}'(u_{tt}; \cdot)]^* B_u h + 2u_{tt} \tilde{P}_{3u}^* B_u h +$$
$$+ [B_u'(\cdot; h)]^* \tilde{P}_{2u} u_{tt} - \tilde{P}_{2u}^* B_u'(h; u_{tt}) - [B_u'(h; \cdot)]^* \tilde{P}_{2u} u_{tt} = 0, \tag{1.21}$$

$$-\tilde{P}_{2u}^{*\prime\prime}(B_u h; u_t; u_t) + B_u^* \tilde{P}_{3u}'(u_t^2; h) - [\tilde{P}_{3u}'(u_t^2; \cdot)]^* B_u h +$$

$$+2u_t\tilde{P}^{*\prime}_{3u}(B_uh;u_t)+[B'_u(\cdot;h)]^*\tilde{P}_{3u}u_t^2-2\tilde{P}^{*\prime}_{2u}(B'_u(h;u_t);u_t)-$$

$$-\tilde{P}^*_{2u}B''_u(h;u_t;u_t)+2u_t\tilde{P}^*_{3u}B'_u(h;u_t)-[B'_u(h;\cdot)]^*\tilde{P}_{3u}u_t^2=0, \quad (1.22)$$

где

$$\tilde{P}_{iu}=P_{iu}-\Lambda_{iu}\ (i=\overline{1,3}),\quad \tilde{Q}(u)=Q(u)-\Lambda_4(u).$$

Доказательство. Используя (1.13) и (1.5), получаем

$$\tilde{N}'_uh=2\tilde{P}_{3u}(u_th_t)+\tilde{P}'_{3u}(u_t^2;h)+\tilde{P}_{2u}h_{tt}+\tilde{P}'_{2u}(u_{tt};h)+$$
$$+\tilde{P}_{1u}h_t+\tilde{P}'_{1u}(u_t;h)+\tilde{Q}'_uh.$$

Критерий (1.11) в данном случае записывается в виде

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big(\Big\langle 2\tilde{P}_{3u}(u_th_t)+\tilde{P}'_{3u}(u_t^2;h)+\tilde{P}_{2u}h_{tt}+\tilde{P}'_{2u}(u_{tt};h)+\tilde{P}_{1u}h_t+$$

$$+\tilde{P}'_{1u}(u_t;h)+\tilde{Q}'_uh,B_ug\Big\rangle+\Big\langle\tilde{P}_{2u}u_{tt}+\tilde{P}_{1u}u_t+\tilde{P}_{3u}u_t^2+$$

$$+\tilde{Q}(u),B'_u(g;h)\Big\rangle\Big)\,dt=\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big(\Big\langle 2\tilde{P}_{3u}(u_tg_t)+\tilde{P}'_{3u}(u_t^2;g)+\tilde{P}_{2u}g_{tt}+$$

$$+\tilde{P}'_{2u}(u_{tt};g)+\tilde{P}_{1u}g_t+\tilde{Q}'_ug+\tilde{P}'_{1u}(u_t;g),B_uh\Big\rangle+$$
$$+\Big\langle\tilde{P}_{2u}u_{tt}+\tilde{P}_{1u}u_t+\tilde{P}_{3u}u_t^2+\tilde{Q}(u),B'_u(h;g)\Big\rangle\Big)\,dt,$$

или

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big\{\Big\langle 2B^*_u\tilde{P}_{3u}(u_th_t)+B^*_u\tilde{P}'_{3u}(u_t^2;h)+B^*_u\tilde{P}_{2u}h_{tt}+B^*_u\tilde{P}'_{2u}(u_{tt};h)+$$

$$+B^*_u\tilde{P}_{1u}h_t+B^*_u\tilde{P}'_{1u}(u_t;h)+B^*_u\tilde{Q}'_uh,g\Big\rangle+$$
$$+\Big\langle[B'_u(\cdot;h)]^*(\tilde{P}_{2u}u_{tt}+\tilde{P}_{1u}u_t+\tilde{P}_{3u}u_t^2+\tilde{Q}(u)),g\Big\rangle-$$
$$-\Big\langle-2D_t(u_t\tilde{P}^*_{3u}B_uh)+[\tilde{P}'_{3u}(u_t^2;\cdot)]^*B_uh+D_t^2(\tilde{P}^*_{2u}B_uh)+$$
$$+[\tilde{P}'_{2u}(u_{tt};\cdot)]^*B_uh-D_t(\tilde{P}^*_{1u}B_uh)+[\tilde{P}'_{1u}(u_t;\cdot)]^*B_uh+\tilde{Q}'^*_uB_uh,g\Big\rangle-$$

$$- \left\langle [B'_u(h;\cdot)]^*(\tilde{P}_{2u}u_{tt} + \tilde{P}_{1u}u_t + \tilde{P}_{3u}u_t^2 + \tilde{Q}(u)), g \right\rangle \Big\} \, dt = 0 \qquad (1.23)$$
$$\forall u \in D(N), \quad \forall g, h \in D(N'_u, B_u).$$

С учетом производной Гато второго порядка имеем

$$D_t^2(\tilde{P}_{2u}^* B_u h) = D_t[D_t(\tilde{P}_{2u}^* B_u h)] =$$
$$= D_t \left[\tilde{P}_{2u}^* B_u h_t + \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}_{2u}^* B_u)h + \tilde{P}_{2u}^{*\prime}(B_u h; u_t) + \tilde{P}_{2u}^* B'_u(h; u_t) \right] =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\tilde{P}_{2u}^* B_u)h + 2\frac{\partial}{\partial t}\tilde{P}_{2u}^{*\prime}(B_u h; u_t) + 2\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}_{2u}^* B'_u(h; u_t)) +$$
$$+ 2\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}_{2u}^* B_u)h_t + \tilde{P}_{2u}^{*\prime\prime}(B_u h; u_t; u_t) + 2\tilde{P}_{2u}^{*\prime}(B'_u(h; u_t); u_t) +$$
$$+ 2\tilde{P}_{2u}^{*\prime}(B_u h_t; u_t) + \tilde{P}_{2u}^{*\prime}(B_u h; u_{tt}) + \tilde{P}_{2u}^* B''_u(h; u_t; u_t) +$$
$$+ 2\tilde{P}_{2u}^* B'_u(h_t; u_t) + \tilde{P}_{2u}^* B'_u(h; u_{tt}) + \tilde{P}_{2u}^* B_u h_{tt}. \qquad (1.24)$$

Далее,

$$D_t[\tilde{P}_{1u}^* B_u h] = \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}_{1u}^* B_u)h + \tilde{P}_{1u}^{*\prime}(B_u h; u_t) + \tilde{P}_{1u}^* B'_u(h; u_t) + \tilde{P}_{1u}^* B_u h_t, \qquad (1.25)$$

$$D_t[u_t \tilde{P}_{3u}^* B_u h] = u_{tt}\tilde{P}_{3u}^* B_u h + u_t \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}_{3u}^* B_u)h + u_t \tilde{P}_{3u}^{*\prime}(B_u h; u_t) +$$
$$+ u_t \tilde{P}_{3u}^* B'_u(h; u_t) + u_t \tilde{P}_{3u}^* B_u h_t. \qquad (1.26)$$

Принимая во внимание (1.24) - (1.26), из (1.23) получаем

$$\int_{t_0}^{t_1} \Big\langle 2B_u^* \tilde{P}_{3u}(u_t h_t) + B_u^* \tilde{P}'_{3u}(u_t^2; h) + B_u^* \tilde{P}_{2u} h_{tt} + B_u^* \tilde{P}'_{2u}(u_{tt}; h) +$$
$$+ B_u^* \tilde{P}_{1u} h_t B_u^* \tilde{P}'_{1u}(u_t; h) + B_u^* \tilde{Q}'_u h + [B'_u(\cdot; h)]^*(\tilde{P}_{2u}u_{tt} + \tilde{P}_{1u}u_t + \tilde{P}_{3u}u_t^2 +$$
$$+ \tilde{Q}(u)) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\tilde{P}_{2u}^* B_u)h - 2\frac{\partial}{\partial t}\tilde{P}_{2u}^{*\prime}(B_u h; u_t) - 2\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}_{2u}^* B'_u(h; u_t)) -$$
$$- 2\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}_{2u}^* B_u)h_t - \tilde{P}_{2u}^{*\prime\prime}(B_u h; u_t; u_t) - 2\tilde{P}_{2u}^{*\prime}(B'_u(h; u_t); u_t) -$$

$$-2\tilde{P}^{*\prime}_{2u}(B_u h_t; u_t) - \tilde{P}^{*\prime}_{2u}(B_u h; u_{tt}) - \tilde{P}^{*}_{2u}B''_u(h; u_t; u_t) - 2\tilde{P}^{*}_{2u}B'_u(h_t; u_t) -$$
$$-\tilde{P}^{*}_{2u}B'_u(h; u_{tt}) - \tilde{P}^{*}_{2u}B_u h_{tt} - [\tilde{P}'_{2u}(u_{tt}; \cdot)]^* B_u h + 2u_{tt}\tilde{P}^{*}_{3u}B_u h +$$
$$+2u_t\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}^{*}_{3u}B_u)h + 2u_t\tilde{P}^{*\prime}_{3u}(B_u h; u_t) + 2u_t\tilde{P}^{*}_{3u}B'_u(h; u_t) + 2u_t\tilde{P}^{*}_{3u}B_u h_t -$$
$$-[\tilde{P}'_{3u}(u_t^2; \cdot)]^* B_u h + \tilde{P}^{*}_{1u}B_u h_t + \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}^{*}_{1u}B_u)h + \tilde{P}^{*\prime}_{1u}(B_u h; u_t) +$$
$$+\tilde{P}^{*}_{1u}B'_u(h; u_t) - [\tilde{P}'_{1u}(u_t; \cdot)]^* B_u h - \tilde{Q}'^{*}_u B_u h -$$
$$-[B'_u(h; \cdot)]^*(\tilde{P}_{2u}u_{tt} + \tilde{P}_{1u}u_t + \tilde{P}_{3u}u_t^2 + \tilde{Q}(u)), g\Big\rangle\, dt = 0.$$

Таким образом, условие (1.23) приводится к виду

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \Big\langle \big(B^*_u\tilde{P}_{2u} - \tilde{P}^*_{2u}B_u\big)\, h_{tt} + \big(2B^*_u\tilde{P}_{3u}(u_t(\cdot)) + B^*_u\tilde{P}_{1u} + 2u_t\tilde{P}^*_{3u}B_u -$$
$$-2\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}^*_{2u}B_u) - 2\tilde{P}^{*\prime}_{2u}(B_u(\cdot); u_t) - 2\tilde{P}^*_{2u}B'_u(\cdot; u_t) + \tilde{P}^*_{1u}B_u\big)\, h_t +$$
$$+B^*_u\tilde{P}'_{3u}(u_t^2; h) + B^*_u\tilde{P}'_{2u}(u_{tt}; h) + B^*_u\tilde{P}'_{1u}(u_t; h) + B^*_u\tilde{Q}'_u h +$$
$$+[B'_u(\cdot; h)]^*\tilde{P}_{2u}u_{tt} + [B'_u(\cdot; h)]^*\tilde{P}_{1u}u_t + [B'_u(\cdot; h)]^*\tilde{P}_{3u}u_t^2 +$$
$$+[B'_u(\cdot; h)]^*\tilde{Q}(u) + 2u_{tt}\tilde{P}^*_{3u}B_u h + 2u_t\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}^*_{3u}B_u)h + 2u_t\tilde{P}^{*\prime}_{3u}(B_u h; u_t) +$$
$$+2u_t\tilde{P}^*_{3u}B'_u(h; u_t) - [\tilde{P}'_{3u}(u_t^2; \cdot)]^* B_u h - \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\tilde{P}^*_{2u}B_u)h -$$
$$-2\frac{\partial}{\partial t}\tilde{P}^{*\prime}_{2u}(B_u h; u_t) - 2\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}^*_{2u}B'_u(h; u_t)) - \tilde{P}^{*\prime\prime}_{2u}(B_u h; u_t; u_t) -$$
$$-2\tilde{P}^{*\prime}_{2u}(B'_u(h; u_t); u_t) - \tilde{P}^{*\prime}_{2u}(B_u h; u_{tt}) - \tilde{P}^*_{2u}B''_u(h; u_t; u_t) -$$
$$-\tilde{P}^*_{2u}B'_u(h; u_{tt}) - [\tilde{P}'_{2u}(u_{tt}; \cdot)]^* B_u h + \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}^*_{1u}B_u)h + \tilde{P}^{*\prime}_{1u}(B_u h; u_t) +$$
$$+\tilde{P}^*_{1u}B'_u(h; u_t) - [\tilde{P}'_{1u}(u_t; \cdot)]^* B_u h - \tilde{Q}'^{*}_u B_u h - [B'_u(h; \cdot)]^*\tilde{P}_{2u}u_{tt} -$$
$$-[B'_u(h; \cdot)]^*\tilde{P}_{1u}u_t - [B'_u(h; \cdot)]^*\tilde{P}_{3u}u_t^2 - [B'_u(h; \cdot)]^*\tilde{Q}(u), g\Big\rangle\, dt = 0$$
$$\forall u \in D(N), \quad \forall g, h \in D(N'_u, B_u).$$

Это тождественно выполняется тогда и только тогда, когда

$$\Big(B_u^*\tilde{P}_{2u} - \tilde{P}_{2u}^* B_u\Big)\, h_{tt} + \Big(2B_u^*\tilde{P}_{3u}(u_t(\cdot)) + B_u^*\tilde{P}_{1u} + 2u_t\tilde{P}_{3u}^* B_u -$$

$$-2\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}_{2u}^* B_u) - 2\tilde{P}_{2u}^{*\prime}(B_u(\cdot); u_t) - 2\tilde{P}_{2u}^* B_u'(\cdot; u_t) + \tilde{P}_{1u}^* B_u\Big)\, h_t +$$

$$+B_u^*\tilde{P}_{3u}'(u_t^2; h) + B_u^*\tilde{P}_{2u}'(u_{tt}; h) + B_u^*\tilde{P}_{1u}'(u_t; h) + B_u^*\tilde{Q}_u' h +$$

$$+[B_u'(\cdot; h)]^*\tilde{P}_{2u}u_{tt} + [B_u'(\cdot; h)]^*\tilde{P}_{1u}u_t + [B_u'(\cdot; h)]^*\tilde{P}_{3u}u_t^2 +$$

$$+[B_u'(\cdot; h)]^*\tilde{Q}(u) + 2u_{tt}\tilde{P}_{3u}^* B_u h + 2u_t\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}_{3u}^* B_u)h + 2u_t\tilde{P}_{3u}^{*\prime}(B_u h; u_t) +$$

$$+2u_t\tilde{P}_{3u}^* B_u'(h; u_t) - [\tilde{P}_{3u}'(u_t^2; \cdot)]^* B_u h - \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\tilde{P}_{2u}^* B_u)h -$$

$$-2\frac{\partial}{\partial t}\tilde{P}_{2u}^{*\prime}(B_u h; u_t) - 2\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}_{2u}^* B_u'(h; u_t)) - \tilde{P}_{2u}^{*\prime\prime}(B_u h; u_t; u_t) -$$

$$-2\tilde{P}_{2u}^{*\prime}(B_u'(h; u_t); u_t) - \tilde{P}_{2u}^{*\prime}(B_u h; u_{tt}) - \tilde{P}_{2u}^* B_u''(h; u_t; u_t) -$$

$$-\tilde{P}_{2u}^* B_u'(h; u_{tt}) - [\tilde{P}_{2u}'(u_{tt}; \cdot)]^* B_u h + \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}_{1u}^* B_u)h + \tilde{P}_{1u}^{*\prime}(B_u h; u_t) +$$

$$+\tilde{P}_{1u}^* B_u'(h; u_t) - [\tilde{P}_{1u}'(u_t; \cdot)]^* B_u h - \tilde{Q}_u'^* B_u h - [B_u'(h; \cdot)]^*\tilde{P}_{2u}u_{tt} -$$

$$-[B_u'(h; \cdot)]^*\tilde{P}_{1u}u_t - [B_u'(h; \cdot)]^*\tilde{P}_{3u}u_t^2 - [B_u'(h; \cdot)]^*\tilde{Q}(u) = 0$$

$$\forall u \in D(N), \quad \forall h \in D(N_u', B_u),$$

а для справедливости этого равенства необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (1.16) - (1.22). □

Замечание 1.2. Может оказаться, что найденная из условий (1.16)-(1.22) плотность не-B_u-потенциальной силы $\Lambda(u)$ не будет являться плотностью существенно не-B_u-потенциальной силы. Это значит, что $\Lambda(u)$ может быть представлена в виде

$$\Lambda(u) = \Lambda_{\text{п}}(u) + \Lambda_{\text{сн}}(u), \tag{1.27}$$

где $\Lambda_{\text{П}}(u)$ – плотность B_u-потенциальной силы, $\Lambda_{\text{СН}}(u)$ – плотность существенно не-B_u-потенциальной силы.

Поскольку наша цель – представить уравнение движения (1.13) в виде

$$N(u) \equiv \frac{\delta L}{\delta u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta u_t}\right) + \Lambda(u) = 0, \tag{1.28}$$

где $\Lambda(u)$ – плотность существенно не-B_u-потенциальной силы, то, подставляя в (1.28) вместо $\Lambda(u)$ правую часть (1.27), получаем

$$N(u) \equiv \frac{\delta L}{\delta u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta u_t}\right) + \Lambda_{\text{П}}(u) + \Lambda_{\text{СН}}(u) = 0,$$

или

$$N(u) \equiv \frac{\delta L_1}{\delta u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L_1}{\delta u_t}\right) + \Lambda_{\text{СН}}(u) = 0,$$

то есть заданное уравнение движения однозначно представимо в виде (1.28).

В дальнейшем плотность существенно не-B_u-потенциальной силы также будем обозначать через $\Lambda(u)$.

Замечание 1.3. Если $B_u \equiv I$ - тождественный оператор, то условия (1.16) - (1.22) записываются в виде

$$\tilde{P}_{2u} - \tilde{P}^*_{2u} = 0, \tag{1.29}$$

$$u_t\tilde{P}^*_{3u} - \tilde{P}^{*\prime}_{2u}(\cdot; u_t) + \tilde{P}_{3u}(u_t(\cdot)) = 0, \tag{1.30}$$

$$-2\frac{\partial \tilde{P}^*_{2u}}{\partial t} + \tilde{P}^*_{1u} + \tilde{P}_{1u} = 0, \tag{1.31}$$

$$-\frac{\partial^2 \tilde{P}^*_{2u}}{\partial t^2} + \frac{\partial \tilde{P}^*_{1u}}{\partial t} + \tilde{Q}'_u - \tilde{Q}'^*_u = 0, \tag{1.32}$$

$$\tilde{P}^{*\prime}_{1u}(\cdot; u_t) + \tilde{P}'_{1u}(u_t; \cdot) - [\tilde{P}'_{1u}(u_t; \cdot)]^* + 2u_t\frac{\partial \tilde{P}^*_{3u}}{\partial t} - 2\frac{\partial}{\partial t}\tilde{P}^{*\prime}_{2u}(\cdot; u_t) = 0, \tag{1.33}$$

$$\tilde{P}'_{2u}(u_{tt};\cdot)-\tilde{P}^{*\prime}_{2u}(\cdot;u_{tt})-[\tilde{P}'_{2u}(u_{tt};\cdot)]^*+2u_{tt}\tilde{P}^*_{3u}=0, \tag{1.34}$$

$$-\tilde{P}^{*\prime\prime}_{2u}(\cdot;u_t;u_t)+\tilde{P}'_{3u}(u_t^2;\cdot)-[\tilde{P}'_{3u}(u_t^2;\cdot)]^*+2u_t\tilde{P}^{*\prime}_{3u}(\cdot;u_t)=0, \tag{1.35}$$

которые эквивалентны следующим:

$$\tilde{P}_{2u}-\tilde{P}^*_{2u}=0, \tag{1.36}$$

$$u_t\tilde{P}^*_{3u}-\tilde{P}'_{2u}(\cdot;u_t)+\tilde{P}_{3u}(u_t(\cdot))=0, \tag{1.37}$$

$$-2\frac{\partial\tilde{P}_{2u}}{\partial t}+\tilde{P}^*_{1u}+\tilde{P}_{1u}=0, \tag{1.38}$$

$$\frac{\partial^2\tilde{P}_{2u}}{\partial t^2}-\frac{\partial\tilde{P}_{1u}}{\partial t}+\tilde{Q}'_u-\tilde{Q}'^*_u=0, \tag{1.39}$$

$$-\tilde{P}'_{1u}(\cdot;u_t)+\tilde{P}'_{1u}(u_t;\cdot)-[\tilde{P}'_{1u}(u_t;\cdot)]^*-2\frac{\partial\tilde{P}_{3u}}{\partial t}(u_t(\cdot))+2\frac{\partial}{\partial t}\tilde{P}'_{2u}(\cdot;u_t)=0, \tag{1.40}$$

$$\tilde{P}'_{2u}(u_{tt};\cdot)+\tilde{P}'_{2u}(\cdot;u_{tt})-[\tilde{P}'_{2u}(u_{tt};\cdot)]^*-2\tilde{P}_{3u}(u_{tt}(\cdot))=0, \tag{1.41}$$

$$\tilde{P}''_{2u}(\cdot;u_t;u_t)+\tilde{P}'_{3u}(u_t^2;\cdot)-[\tilde{P}'_{3u}(u_t^2;\cdot)]^*-2\tilde{P}'_{3u}(u_t(\cdot);u_t)=0. \tag{1.42}$$

Замечание 1.4. Если $\Lambda\equiv 0$, то условия (1.16) - (1.22) принимают вид

$$B^*_uP_{2u}-P^*_{2u}B_u=0, \tag{1.43}$$

$$u_tP^*_{3u}B_u-P^{*\prime}_{2u}(B_u(\cdot);u_t)-P^*_{2u}B'_u(\cdot;u_t)+B^*_uP_{3u}(u_t(\cdot))=0, \tag{1.44}$$

$$-2\frac{\partial}{\partial t}(P^*_{2u}B_u)+P^*_{1u}B_u+B^*_uP_{1u}=0, \tag{1.45}$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}(P^*_{2u}B_u)h+[B'_u(\cdot;h)]^*Q(u)-[B'_u(h;\cdot)]^*Q(u)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}(P_{1u}^{*}B_u)h+B_u^{*}Q_u'h-Q_u'^{*}B_uh=0, \tag{1.46}$$

$$P_{1u}^{*\prime}(B_uh;u_t)+B_u^{*}P_{1u}'(u_t;h)-[P_{1u}'(u_t;\cdot)]^{*}B_uh+2u_t\frac{\partial}{\partial t}(P_{3u}^{*}B_u)h+$$
$$+P_{1u}^{*}B_u'(h;u_t)-2\frac{\partial}{\partial t}P_{2u}^{*\prime}(B_uh;u_t)+[B_u'(\cdot;h)]^{*}P_{1u}u_t-$$
$$-2\frac{\partial}{\partial t}(P_{2u}^{*}B_u'(h;u_t))-[B_u'(h;\cdot)]^{*}P_{1u}u_t=0, \tag{1.47}$$

$$B_u^{*}P_{2u}'(u_{tt};h)-P_{2u}^{*\prime}(B_uh;u_{tt})-[P_{2u}'(u_{tt};\cdot)]^{*}B_uh+2u_{tt}P_{3u}^{*}B_uh+$$
$$+[B_u'(\cdot;h)]^{*}P_{2u}u_{tt}-P_{2u}^{*}B_u'(h;u_{tt})-[B_u'(h;\cdot)]^{*}P_{2u}u_{tt}=0, \tag{1.48}$$

$$-P_{2u}^{*\prime\prime}(B_uh;u_t;u_t)+B_u^{*}P_{3u}'(u_t^2;h)-[P_{3u}'(u_t^2;\cdot)]^{*}B_uh+2u_tP_{3u}^{*\prime}(B_uh;u_t)+$$
$$+[B_u'(\cdot;h)]^{*}P_{3u}u_t^2-2P_{2u}^{*\prime}(B_u'(h;u_t);u_t)-P_{2u}^{*}B_u''(h;u_t;u_t)+$$
$$+2u_tP_{3u}^{*}B_u'(h;u_t)-[B_u'(h;\cdot)]^{*}P_{3u}u_t^2=0. \tag{1.49}$$

Отметим, что эти условия являются условиями B_u-потенциальности оператора N вида (1.13) на $D(N)$ относительно билинейной формы (1.7).

Замечание 1.5. [102, 140] Если $\Lambda\equiv 0$, $B_u\equiv I$, то из (1.16) - (1.22) получаем

$$P_{2u}-P_{2u}^{*}=0, \tag{1.50}$$

$$u_tP_{3u}^{*}-P_{2u}^{*\prime}(\cdot;u_t)+P_{3u}(u_t(\cdot))=0, \tag{1.51}$$

$$-2\frac{\partial P_{2u}^{*}}{\partial t}+P_{1u}^{*}+P_{1u}=0, \tag{1.52}$$

$$-\frac{\partial^2 P_{2u}^*}{\partial t^2}+\frac{\partial P_{1u}^*}{\partial t}+Q_u'-Q_u'^*=0, \tag{1.53}$$

$$P_{1u}^{*\prime}(\cdot;u_t)+P_{1u}'(u_t;\cdot)-[P_{1u}'(u_t;\cdot)]^*+2u_t\frac{\partial P_{3u}^*}{\partial t}-2\frac{\partial}{\partial t}P_{2u}^{*\prime}(\cdot;u_t)=0, \tag{1.54}$$

$$P_{2u}'(u_{tt};\cdot)-P_{2u}^{*\prime}(\cdot;u_{tt})-[P_{2u}'(u_{tt};\cdot)]^*+2u_{tt}P_{3u}^*=0, \tag{1.55}$$

$$-P_{2u}^{*\prime\prime}(\cdot;u_t;u_t)+P_{3u}'(u_t^2;\cdot)-[P_{3u}'(u_t^2;\cdot)]^*+2u_tP_{3u}^{*\prime}(\cdot;u_t)=0. \tag{1.56}$$

Замечание 1.6. Предположим, что $P_{2u}\equiv 0, P_{3u}\equiv 0, P_{1u}\equiv P_u$. Тогда уравнение (1.13) сведется к уравнению с первой производной по времени

$$N(u)\equiv P_uu_t+Q(u)=0, \tag{1.57}$$

а условия B_u-потенциальности (1.43)-(1.49) в данном случае примут вид

$$P_u^*B_u+B_u^*P_u=0, \tag{1.58}$$

$$[B_u'(\cdot;h)]^*Q(u)-[B_u'(h;\cdot)]^*Q(u)+\frac{\partial}{\partial t}(P_u^*B_u)h+B_u^*Q_u'h-Q_u'^*B_uh=0, \tag{1.59}$$

$$\begin{gathered}P_u^{*\prime}(B_uh;u_t)+B_u^*P_u'(u_t;h)-[P_u'(u_t;\cdot)]^*B_uh+P_u^*B_u'(h;u_t)+\\+[B_u'(\cdot;h)]^*P_uu_t-[B_u'(h;\cdot)]^*P_uu_t=0.\end{gathered} \tag{1.60}$$

Докажем, что условия (1.58)-(1.60) являются условиями косвенного аналитического представления системы ОДУ [143]

$$N^i(u)\equiv\sum_{j=1}^{2n}\mathcal{C}_{ij}(t,u)\dot{u}^j+\mathcal{D}_i(t,u)=0,\qquad i=\overline{1,2n}, \tag{1.61}$$

в форме уравнений Биркгофа, полученными в [29].

В данном случае

$$P_u = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{11} & \mathcal{C}_{12} & \dots & \mathcal{C}_{1,2n} \\ \mathcal{C}_{21} & \mathcal{C}_{22} & \dots & \mathcal{C}_{2,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{C}_{2n,1} & \mathcal{C}_{2n,2} & \dots & \mathcal{C}_{2n,2n} \end{pmatrix}, \qquad Q(u) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{D}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{D}_{2n} \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$B_u = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & \dots & B_{2n,1} \\ B_{12} & B_{22} & \dots & B_{2n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1,2n} & B_{2,2n} & \dots & B_{2n,2n} \end{pmatrix}, \tag{1.62}$$

где B_{ij} $(i, j = \overline{1, 2n})$ - функции, зависящие от t и $u = (u^1, u^2, ..., u^{2n})$.

Тогда

$$B_u^* = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1,2n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{2n,1} & B_{2n,2} & \dots & B_{2n,2n} \end{pmatrix},$$

$$P_u^* B_u = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{2n} \mathcal{C}_{k1} B_{1k} & \sum\limits_{k=1}^{2n} \mathcal{C}_{k1} B_{2k} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{2n} \mathcal{C}_{k1} B_{2n,k} \\ \sum\limits_{k=1}^{2n} \mathcal{C}_{k2} B_{1k} & \sum\limits_{k=1}^{2n} \mathcal{C}_{k2} B_{2k} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{2n} \mathcal{C}_{k2} B_{2n,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{2n} \mathcal{C}_{k,2n} B_{1k} & \sum\limits_{k=1}^{2n} \mathcal{C}_{k,2n} B_{2k} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{2n} \mathcal{C}_{k,2n} B_{2n,k} \end{pmatrix},$$

$$B_u^* P_u = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{2n} B_{1k}\mathcal{C}_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{2n} B_{1k}\mathcal{C}_{k2} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{2n} B_{1k}\mathcal{C}_{k,2n} \\ \sum\limits_{k=1}^{2n} B_{2k}\mathcal{C}_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{2n} B_{2k}\mathcal{C}_{k2} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{2n} B_{2k}\mathcal{C}_{k,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{2n} B_{2n,k}\mathcal{C}_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{2n} B_{2n,k}\mathcal{C}_{k2} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{2n} B_{2n,k}\mathcal{C}_{k,2n} \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\overline{\mathcal{C}}_{ij} = \sum_{k=1}^{2n} B_{ik}\mathcal{C}_{kj}, \quad i,j = \overline{1,2n}.$$

Тогда условие (1.58) примет вид

$$\overline{\mathcal{C}}_{ij} + \overline{\mathcal{C}}_{ji} = 0, \qquad i,j = \overline{1,2n}. \tag{1.63}$$

Учитывая условие (1.58), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}(P_u^* B_u) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial t}\overline{\mathcal{C}}_{11} & -\frac{\partial}{\partial t}\overline{\mathcal{C}}_{12} & \dots & -\frac{\partial}{\partial t}\overline{\mathcal{C}}_{1,2n} \\ -\frac{\partial}{\partial t}\overline{\mathcal{C}}_{21} & -\frac{\partial}{\partial t}\overline{\mathcal{C}}_{22} & \dots & -\frac{\partial}{\partial t}\overline{\mathcal{C}}_{2,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial}{\partial t}\overline{\mathcal{C}}_{2n,1} & -\frac{\partial}{\partial t}\overline{\mathcal{C}}_{2n,2} & \dots & -\frac{\partial}{\partial t}\overline{\mathcal{C}}_{2n,2n} \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$Q_u' = \begin{pmatrix} \frac{\partial\mathcal{D}_1}{\partial u^1} & \frac{\partial\mathcal{D}_1}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial\mathcal{D}_1}{\partial u^{2n}} \\ \frac{\partial\mathcal{D}_2}{\partial u^1} & \frac{\partial\mathcal{D}_2}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial\mathcal{D}_2}{\partial u^{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\mathcal{D}_{2n}}{\partial u^1} & \frac{\partial\mathcal{D}_{2n}}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial\mathcal{D}_{2n}}{\partial u^{2n}} \end{pmatrix}, \quad Q_u'^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial\mathcal{D}_1}{\partial u^1} & \frac{\partial\mathcal{D}_2}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial\mathcal{D}_{2n}}{\partial u^1} \\ \frac{\partial\mathcal{D}_1}{\partial u^2} & \frac{\partial\mathcal{D}_2}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial\mathcal{D}_{2n}}{\partial u^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\mathcal{D}_1}{\partial u^{2n}} & \frac{\partial\mathcal{D}_2}{\partial u^{2n}} & \cdots & \frac{\partial\mathcal{D}_{2n}}{\partial u^{2n}} \end{pmatrix},$$

$$[B'_u(h;\cdot)]^* Q(u) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{2n} \mathcal{D}_j \sum\limits_{i=1}^{2n} \frac{\partial B_{ij}}{\partial u^1} h^i \\ \sum\limits_{j=1}^{2n} \mathcal{D}_j \sum\limits_{i=1}^{2n} \frac{\partial B_{ij}}{\partial u^2} h^i \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{2n} \mathcal{D}_j \sum\limits_{i=1}^{2n} \frac{\partial B_{ij}}{\partial u^{2n}} h^i \end{pmatrix},$$

$$[B'_u(\cdot;h)]^* Q(u) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{2n} \mathcal{D}_j \sum\limits_{i=1}^{2n} \frac{\partial B_{1j}}{\partial u^i} h^i \\ \sum\limits_{j=1}^{2n} \mathcal{D}_j \sum\limits_{i=1}^{2n} \frac{\partial B_{2j}}{\partial u^i} h^i \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{2n} \mathcal{D}_j \sum\limits_{i=1}^{2n} \frac{\partial B_{2n,j}}{\partial u^i} h^i \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\overline{\mathcal{D}}_i = \sum_{k=1}^{2n} B_{ik}\mathcal{D}_k, \quad i = \overline{1,2n}.$$

Тогда

$$[B'_u(\cdot;h)]^* Q(u) + B^*_u Q'_u h = \begin{pmatrix} \frac{\partial \overline{\mathcal{D}}_1}{\partial u^1} & \frac{\partial \overline{\mathcal{D}}_1}{\partial u^2} & \dots & \frac{\partial \overline{\mathcal{D}}_1}{\partial u^{2n}} \\ \frac{\partial \overline{\mathcal{D}}_2}{\partial u^1} & \frac{\partial \overline{\mathcal{D}}_2}{\partial u^2} & \dots & \frac{\partial \overline{\mathcal{D}}_2}{\partial u^{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \overline{\mathcal{D}}_{2n}}{\partial u^1} & \frac{\partial \overline{\mathcal{D}}_{2n}}{\partial u^2} & \dots & \frac{\partial \overline{\mathcal{D}}_{2n}}{\partial u^{2n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \\ \vdots \\ h^{2n} \end{pmatrix},$$

$$[B'_u(h;\cdot)]^* Q(u) + Q'^*_u B_u h = \begin{pmatrix} \frac{\partial\overline{\mathcal{D}}_1}{\partial u^1} & \frac{\partial\overline{\mathcal{D}}_2}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial\overline{\mathcal{D}}_{2n}}{\partial u^1} \\ \frac{\partial\overline{\mathcal{D}}_1}{\partial u^2} & \frac{\partial\overline{\mathcal{D}}_2}{\partial u^2} & \dots & \frac{\partial\overline{\mathcal{D}}_{2n}}{\partial u^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\overline{\mathcal{D}}_1}{\partial u^{2n}} & \frac{\partial\overline{\mathcal{D}}_2}{\partial u^{2n}} & \dots & \frac{\partial\overline{\mathcal{D}}_{2n}}{\partial u^{2n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \\ \vdots \\ h^{2n} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, из условия (1.59) получаем

$$\frac{\partial\overline{\mathcal{C}}_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial\overline{\mathcal{D}}_i}{\partial u^j} - \frac{\partial\overline{\mathcal{D}}_j}{\partial u^i}, \quad i,j = \overline{1,2n}.$$

Далее, имеем

$$[B'_u(\cdot;h)]^* P_u u_t + P^*_u B'_u(h;u_t) =$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \dots & \tilde{A}_{1,2n} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \dots & \tilde{A}_{2,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{A}_{2n,1} & \tilde{A}_{2n,2} & \dots & \tilde{A}_{2n,2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \\ \vdots \\ h^{2n} \end{pmatrix},$$

где $\tilde{A}_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dot{u}^k \sum\limits_{l=1}^{2n} \left(\mathcal{C}_{lk} \frac{\partial B_{il}}{\partial u^j} + \mathcal{C}_{li} \frac{\partial B_{jl}}{\partial u^k} \right),\ i,j = \overline{1,2n},$

$$B^*_u P'_u(u_t;h) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1,2n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{2n,1} & \tilde{a}_{2n,2} & \dots & \tilde{a}_{2n,2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \\ \vdots \\ h^{2n} \end{pmatrix},$$

где $\tilde{a}_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dot{u}^k \sum\limits_{l=1}^{2n} B_{il} \frac{\partial \mathcal{C}_{lk}}{\partial u^j},\ i,j = \overline{1,2n},$

$$P^{*\prime}_u(B_u h;u_t) = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} & \dots & \overline{a}_{1,2n} \\ \overline{a}_{21} & \overline{a}_{22} & \dots & \overline{a}_{2,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{2n,1} & \overline{a}_{2n,2} & \dots & \overline{a}_{2n,2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \\ \vdots \\ h^{2n} \end{pmatrix},$$

где $\overline{a}_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dot{u}^k \sum\limits_{l=1}^{2n} B_{jl} \frac{\partial \mathcal{C}_{li}}{\partial u^k},\ i,j=\overline{1,2n}$,

$$\left[B'_u(h;\cdot)\right]^* P_u u_t + \left[P'_u(u_t;\cdot)\right]^* B_u h =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} & \dots & \overline{A}_{1,2n} \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} & \dots & \overline{A}_{2,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{A}_{2n,1} & \overline{A}_{2n,2} & \dots & \overline{A}_{2n,2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \\ \vdots \\ h^{2n} \end{pmatrix},$$

где $\overline{A}_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dot{u}^k \cdot \frac{\partial \overline{\mathcal{C}}_{jk}}{\partial u^i},\ i,j=\overline{1,2n}$.

Таким образом, из условия (1.60) получаем

$$\frac{\partial \overline{\mathcal{C}}_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial \overline{\mathcal{C}}_{ki}}{\partial u^j} + \frac{\partial \overline{\mathcal{C}}_{jk}}{\partial u^i} = 0, \quad i,j,k=\overline{1,2n}.$$

Отметим, что здесь учтено условие (1.63).

Следовательно, условия (1.58)-(1.60) являются условиями косвенного аналитического представления системы ОДУ (1.61) в форме уравнений Биркгофа и имеют вид

$$\overline{\mathcal{C}}_{ij} + \overline{\mathcal{C}}_{ji} = 0, \qquad i,j=\overline{1,2n}, \tag{1.64}$$

$$\frac{\partial \overline{\mathcal{C}}_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{\mathcal{D}}_i}{\partial u^j} - \frac{\partial \overline{\mathcal{D}}_j}{\partial u^i}, \quad i,j=\overline{1,2n}, \tag{1.65}$$

$$\frac{\partial \overline{\mathcal{C}}_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial \overline{\mathcal{C}}_{ki}}{\partial u^j} + \frac{\partial \overline{\mathcal{C}}_{jk}}{\partial u^i} = 0, \quad i,j,k=\overline{1,2n}. \tag{1.66}$$

Замечание 1.7. [143] Если матрица (1.62) является единичной, то условия (1.64)-(1.66) принимают вид

$$\mathcal{C}_{ij} + \mathcal{C}_{ji} = 0, \qquad i,j=\overline{1,2n},$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{D}_i}{\partial u^j} - \frac{\partial \mathcal{D}_j}{\partial u^i}, \quad i,j=\overline{1,2n},$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial \mathcal{C}_{ki}}{\partial u^j} + \frac{\partial \mathcal{C}_{jk}}{\partial u^i} = 0, \quad i, j, k = \overline{1, 2n},$$

и являются условиями прямого аналитического представления системы ОДУ (1.61) в форме уравнений Биркгофа.

Пример 1.1.

Рассмотрим систему с бесконечным числом степеней свободы, движение которой описывается нелинейным уравнением с частными производными

$$N(u) \equiv 2u_{tt} + 2uu_t + tu_t^2 - 2u_{xx} - tu_x^2 + u_x = 0, \tag{1.67}$$

$$(x, t) \in \mathcal{Q} = (a, b) \times (t_0, t_1).$$

Зададим область определения оператора N следующим образом:

$$D(N) =$$

$$= \Big\{ u \in U = C_{x,t}^{2,2}(\overline{\mathcal{Q}}) : u|_{x=a} = \psi_1(t), u|_{x=b} = \psi_2(t) \, (t \in (t_0, t_1)),$$

$$u|_{t=t_0} = \varphi_1(x), \; u|_{t=t_1} = \varphi_2(x) \, (x \in (a, b)) \Big\}, \tag{1.68}$$

где ψ_i, φ_i $(i = 1, 2)$ – заданные функции.

Введем классическую билинейную форму

$$\Phi(v, g) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_a^b v(x, t) g(x, t) dx \, dt. \tag{1.69}$$

Отметим, что

$$P_{2u} \equiv 2I, \; P_{1u} = 2uI, \; P_{3u} \equiv tI, \; Q(u) = -2u_{xx} - tu_x^2 + u_x.$$

Оператор N уравнения (1.67) не является потенциальным на $D(N)$ (1.68) относительно билинейной формы (1.69).

Действительно, в данном случае условие (1.51) не выполняется, так как $P^*_{3u} = P_{3u},\ P^*_{2u} = P_{2u},\ P^{*\prime}_{2u}(\cdot; u_t) \equiv 0.$

Представим уравнение (1.67) в форме уравнения Лагранжа с не-B_u-потенциальной плотностью силы.

Будем искать операторы B_u и Λ в виде $B_u = e^{a(t,u)}I$, $a \in C^2([t_0, t_1] \times \mathbb{R})$, $\Lambda(u) = \Lambda_4(u)$ из условий (1.16) - (1.22). В этом случае полагаем $\Lambda_{iu} \equiv 0$ $(i = \overline{1,3})$.

Имеем

$$\tilde{P}_{2u} \equiv 2I,\ \tilde{P}_{1u} = 2uI,\ \tilde{P}_{3u} \equiv tI,\ \tilde{Q}(u) = -2u_{xx} - tu_x^2 + u_x - \Lambda_4(u),$$

$$B^*_u = e^{a(t,u)}I,\ \tilde{P}^*_{2u} \equiv 2I,\ \tilde{P}^*_{3u} \equiv tI,\ \tilde{P}^{*\prime}_{2u}(B_u(\cdot); u_t) \equiv 0,$$

$$B'_u(\cdot; u_t) = e^{a(t,u)}\frac{\partial a}{\partial u}u_t I,\ \tilde{P}^*_{1u} = 2uI,\ [B'_u(\cdot; h)]^* = e^{a(t,u)}\frac{\partial a}{\partial u}hI,$$

$$[B'_u(h; \cdot)]^* = e^{a(t,u)}\frac{\partial a}{\partial u}hI,\ \tilde{Q}'_u = -2D_x^2 - 2tu_xD_x + D_x - \Lambda'_{4u},$$

$$\tilde{Q}'^*_u = -2D_x^2 + 2tu_xD_x + 2tu_{xx} - D_x - \Lambda'^*_{4u},\ \tilde{P}'_{1u}(u_t; h) = 2hu_t,$$

$$\tilde{P}^{*\prime}_{1u}(B_uh; u_t) = 2u_te^{a(t,u)}h,\ [\tilde{P}'_{1u}(u_t; \cdot)]^* = 2u_tI,\ \tilde{P}'_{2u}(u_{tt}; h) \equiv 0,$$

$$[\tilde{P}'_{2u}(u_{tt}; \cdot)]^* \equiv 0,\ \tilde{P}^{*\prime\prime}_{2u}(B_uh; u_t; u_t) \equiv 0,\ \tilde{P}'_{3u}(u_t^2; h) \equiv 0,$$

$$[\tilde{P}'_{3u}(u_t^2; \cdot)]^* \equiv 0,\ \tilde{P}^{*\prime}_{3u}(B_uh; u_t) \equiv 0,\ \tilde{P}^{*\prime}_{2u}(B'_u(h; u_t); u_t) \equiv 0,$$

$$B''_u(h; u_t; u_t) = e^{a(t,u)}\left(\frac{\partial a}{\partial u}\right)^2 u_t^2h + e^{a(t,u)}\frac{\partial^2 a}{\partial u^2}u_t^2h.$$

Далее, из (1.16) $\Longrightarrow 2e^{a(t,u)}I - 2e^{a(t,u)}I = 0,$

(1.17) $\Longrightarrow u_tte^{a(t,u)}I - 2e^{a(t,u)}\frac{\partial a}{\partial u}u_tI + e^{a(t,u)}tu_tI = 0,$

(1.18) $\Longrightarrow -4e^{a(t,u)}\frac{\partial a}{\partial t}I + 2ue^{a(t,u)}I + 2e^{a(t,u)}uI = 0,$

(1.19) $\Longrightarrow -2e^{a(t,u)}\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)^2h - 2e^{a(t,u)}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}h + e^{a(t,u)}\frac{\partial a}{\partial u}h(-2u_{xx} - tu_x^2 + u_x - \Lambda_4(u)) - e^{a(t,u)}\frac{\partial a}{\partial u}h(-2u_{xx} - tu_x^2 + u_x - \Lambda_4(u)) + 2ue^{a(t,u)}\frac{\partial a}{\partial t}h +$

$e^{a(t,u)}(-2h_{xx}-2tu_xh_x+h_x-\Lambda'_{4u}h)+2e^{a(t,u)}\left(\frac{\partial a}{\partial u}\right)^2u_x^2h+2e^{a(t,u)}\frac{\partial^2 a}{\partial u^2}u_x^2h+2e^{a(t,u)}\frac{\partial a}{\partial u}u_{xx}h + 4e^{a(t,u)}\frac{\partial a}{\partial u}u_xh_x + 2e^{a(t,u)}h_{xx} - 2tu_x^2he^{a(t,u)}\frac{\partial a}{\partial u} - 2tu_xh_xe^{a(t,u)}-2tu_{xx}e^{a(t,u)}h+e^{a(t,u)}\frac{\partial a}{\partial u}u_xh+e^{a(t,u)}h_x+\Lambda'^*_{4u}\left(e^{a(t,u)}h\right)=0,$

$(1.20) \Longrightarrow\ 2u_te^{a(t,u)}h + 2e^{a(t,u)}u_th - 2u_te^{a(t,u)}h + 2u_te^{a(t,u)}h + 2u_tte^{a(t,u)}\frac{\partial a}{\partial t}h + 2ue^{a(t,u)}\frac{\partial a}{\partial u}u_th + e^{a(t,u)}\frac{\partial a}{\partial u}h2uu_t - 4u_the^{a(t,u)}\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial a}{\partial u} - 4u_the^{a(t,u)}\frac{\partial^2 a}{\partial t\partial u} - e^{a(t,u)}\frac{\partial a}{\partial u}h2uu_t=0,$

$(1.21) \Longrightarrow\ 2u_{tt}te^{a(t,u)}h + 2e^{a(t,u)}\frac{\partial a}{\partial u}hu_{tt} - 2e^{a(t,u)}\frac{\partial a}{\partial u}hu_{tt} - 2e^{a(t,u)}\frac{\partial a}{\partial u}hu_{tt}=0,$

$(1.22) \Longrightarrow\ e^{a(t,u)}\frac{\partial a}{\partial u}htu_t^2 - 2e^{a(t,u)}\left(\frac{\partial a}{\partial u}\right)^2u_t^2h - 2e^{a(t,u)}\frac{\partial^2 a}{\partial u^2}u_t^2h + 2u_tte^{a(t,u)}\frac{\partial a}{\partial u}u_th - e^{a(t,u)}\frac{\partial a}{\partial u}htu_t^2=0.$

Отсюда находим $a(t,u)=tu,\ \ \Lambda(u)\equiv u_x$.

Таким образом, оператор N уравнения (1.67) является квази-B_u-потенциальным на $D(N)$ (1.68) относительно билинейной формы (1.69), причем $B_u=e^{tu}I$, а плотность существенно не-B_u-потенциальной силы имеет вид $\Lambda(u)=u_x$.

Пример 1.2.

Рассмотрим уравнение Бюргерса

$$N(u)\equiv u_t-uu_x-u_{xx}=0, \qquad (1.70)$$
$$(x,t)\in\Omega=(a,b)\times(t_0,t_1).$$

Как известно (см. [108]), это уравнение, первоначально предложенное Бюргерсом для описания одномерной турбулентности, впоследствии использовалось для изучения волновых явлений.

Зададим область определения оператора N в виде

$$D(N) = \Big\{ u \in U = C^{1,2}_{t,x}(\overline{\mathrm{Q}}) : \, u|_{t=t_0} = \varphi_1(x),$$
$$u|_{t=t_1} = \varphi_2(x) \ (x \in (a,b)), \ u|_{x=a} = \psi_1(t), \, u|_{x=b} = \psi_2(t),$$
$$\int\limits_a^b u(x,t)dx = \psi_3(t) \ (t \in (t_0,t_1)) \Big\}, \quad (1.71)$$

где φ_i, ψ_j $(i = 1,2; \ j = \overline{1,3})$ – заданные функции.

Введем классическую билинейную форму

$$\Phi(v,g) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_a^b v(x,t) g(x,t) dx dt. \quad (1.72)$$

Отметим, что

$$P_{1u} \equiv I, \ P_{2u} \equiv 0, \ P_{3u} \equiv 0, \ Q(u) = -u u_x - u_{xx},$$

где I - тождественный оператор.

Оператор N уравнения (1.70) не является потенциальным на $D(N)$ (1.71) относительно билинейной формы (1.72), так как условие (1.52) не выполняется.

Представим уравнение (1.70) в виде уравнения Лагранжа с не-B-потенциальной плотностью силы.

Отметим, что условия (1.16) - (1.22) выполняются при

$$B \equiv D_x^{-1}, \ \Lambda_{iu} \equiv 0 \ (i = \overline{1,3}), \ \Lambda_4(u) = -u_{xx},$$

где $D_x^{-1} v(x,t) = \int\limits_a^x v(y,t) dy.$

Действительно,

(1.16)$\Longrightarrow$ 0=0,

(1.17)$\Longrightarrow$ 0=0,

(1.18)$\Longrightarrow$ $D_x^{-1} - D_x^{-1} = 0,$

$$(1.19) \Longrightarrow -D_x^{-1}[hu_x + uh_x] + uD_x[D_x^{-1}h] = -D_x^{-1}D_x[uh] + uh =$$
$$= -uh + uh = 0,$$

$(1.20) \Longrightarrow 0{=}0,$
$(1.21) \Longrightarrow 0{=}0,$
$(1.22) \Longrightarrow 0{=}0.$

Таким образом, $\Lambda(u) = \Lambda_4(u)$ является плотностью существенно не-B-потенциальной силы.

Если предположить, что $\psi_j \equiv 0$ $(j = \overline{1,3})$, то $\Lambda(u)$ – плотность циркуляционной силы, так как

$$\Phi_1(\Lambda(u), Bu) = -\int\limits_a^b u_{xx} D_x^{-1} u \, dx =$$
$$= \int\limits_a^b u_x u \, dx = \frac{1}{2}\int\limits_a^b D_x\left(u^2\right) \, dx = 0 \quad \forall u \in D(N).$$

1.3 Условия квазипотенциальности для одного интегро-дифференциального уравнения с отклоняющимися аргументами

В этом параграфе получены необходимые и достаточные условия представимости достаточно общего интегро-дифференциального уравнения с отклоняющимися аргументами в форме уравнения Лагранжа с непотенциальной плотностью силы (см. [117]).

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение с отклоняющимися аргументами

$$N(u) \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1} [a_\lambda(x, t, u(x, t+\mu\tau))u_{tt}(x, t+\lambda\tau)+$$

$$+b_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau))u_t(x,t+\lambda\tau)+c_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau))u_t^2(x,t+\lambda\tau)]+$$
$$+d(x,t,u(x,t+\mu\tau))\int\limits_\Omega \mathcal{K}(x,y,t,u_{\alpha_\mu}(x,t+\mu\tau),u_{\beta_\mu}(y,t+\mu\tau))dy=0, \tag{1.73}$$

где

$$(x,t)\in \mathcal{Q}=\Omega\times(t_0,t_1),\ \Omega\subset\mathbb{R}^n,\ \ |\alpha_\mu|,\,|\beta_\mu|=\overline{0,s},\ \ \mu=-1,0,1,$$
$$a_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau))=a_\lambda(x,t,u(x,t-\tau),u(x,t),u(x,t+\tau))\ \text{и т.д.},$$
$$\alpha_\mu,\beta_\mu\in\mathbb{Z}_+^n,\ a_\lambda\in C^2(\overline{\mathcal{Q}}\times\mathbb{R}^3),\ b_\lambda,c_\lambda\in C^1(\overline{\mathcal{Q}}\times\mathbb{R}^3),$$
$$d\in C^s(\overline{\mathcal{Q}}\times\mathbb{R}^3),\ \mathcal{K}\in C^{s+1}(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\times[t_0,t_1]\times\mathbb{R}^{3q}\times\mathbb{R}^{3q}),$$

q - размерность вектора $\{u_{\alpha_\mu}\}$, Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$.

Положим

$$D(N)=\Big\{u\in U=C^{2s,2}_{x,\,t}\left(\overline{\Omega}\times[t_0-\tau,t_1+\tau]\right):$$
$$u(x,t)=\varphi_1(x,t),\ \ (x,t)\in E_0=\overline{\Omega}\times[t_0-\tau,t_0+\tau],$$
$$u(x,t)=\varphi_2(x,t),\ \ (x,t)\in E_1=\overline{\Omega}\times[t_1-\tau,t_1+\tau],$$
$$\left.\frac{\partial^\nu u}{\partial n_x^\nu}\right|_{\Gamma_\tau}=\psi_\nu(x,t),\ \ \nu=\overline{0,s_0}\Big\}, \tag{1.74}$$

где $\Gamma_\tau=\partial\Omega\times[t_0-\tau,t_1+\tau]$, n_x - внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$, φ_i $(i=1,2)$, ψ_ν $(\nu=\overline{0,s_0})$ - заданные функции.

Считаем, что s_0 зависит от s: если s - четно, то $s_0=s/2-1$, а при нечетном s полагаем $s_0=(s+1)/2-1$.

Введем обозначение $V=C(\overline{\mathcal{Q}}_\tau)$ и зададим нелокальную билинейную форму $\Phi:V\times V\to\mathbb{R}$ в виде

$$\Phi(v,g)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_\Omega v(x,t)g(x,t)dxdt, \tag{1.75}$$

где $\mathcal{Q}_\tau = \Omega \times (t_0 - \tau, t_1 + \tau)$.

Будем считать, что $B_u \equiv I$ - тождественный оператор.

Предположим, что

$$\Lambda(u) = \sum_{\lambda=-1}^{1} \left[\hat{a}_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau))u_{tt}(x,t+\lambda\tau)+\right.$$

$$+\hat{b}_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau))u_t(x,t+\lambda\tau)+$$

$$\left.+\hat{c}_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau))u_t^2(x,t+\lambda\tau)\right]+$$

$$+d(x,t,u(x,t+\mu\tau))\int\limits_\Omega \hat{\mathcal{K}}(x,y,t,u_{\alpha_\mu}(x,t+\mu\tau),u_{\beta_\mu}(y,t+\mu\tau))dy,$$

где

$$\Lambda_{1u} = \sum_{\lambda=-1}^{1} \hat{b}_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau))I_\lambda,$$

$$\Lambda_{2u} = \sum_{\lambda=-1}^{1} \hat{a}_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau))I_\lambda,$$

$$\Lambda_{3u} = \sum_{\lambda=-1}^{1} \hat{c}_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau))I_\lambda,$$

$$\Lambda_4(u) =$$

$$= d(x,t,u(x,t+\mu\tau))\int\limits_\Omega \hat{\mathcal{K}}(x,y,t,u_{\alpha_\mu}(x,t+\mu\tau),u_{\beta_\mu}(y,t+\mu\tau))dy,$$

является плотностью существенно непотенциальной силы.

Обозначим

$$\tilde{a}_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau)) = a_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau)) - \hat{a}_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau)),$$

$$\tilde{b}_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau)) = b_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau)) - \hat{b}_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau)),$$

$$\tilde{c}_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau)) = c_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau)) - \hat{c}_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau)),$$

$$\tilde{\mathcal{K}}(x,y,t,u_{\alpha_\mu}(x,t+\mu\tau),u_{\beta_\mu}(y,t+\mu\tau)) =$$
$$= \mathcal{K}(x,y,t,u_{\alpha_\mu}(x,t+\mu\tau),u_{\beta_\mu}(y,t+\mu\tau)) -$$
$$-\hat{\mathcal{K}}(x,y,t,u_{\alpha_\mu}(x,t+\mu\tau),u_{\beta_\mu}(y,t+\mu\tau)).$$

В данном случае

$$\tilde{P}_{2u} = \sum_{\lambda=-1}^{1} \tilde{a}_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau))I_\lambda,$$

$$\tilde{P}_{1u} = \sum_{\lambda=-1}^{1} \tilde{b}_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau))I_\lambda,$$

$$\tilde{P}_{3u} = \sum_{\lambda=-1}^{1} \tilde{c}_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau))I_\lambda,$$

$$\tilde{Q}(u) =$$
$$= d(x,t,u(x,t+\mu\tau)) \int\limits_\Omega \tilde{\mathcal{K}}(x,y,t,u_{\alpha_\mu}(x,t+\mu\tau),u_{\beta_\mu}(y,t+\mu\tau))dy,$$

где

$$I_\lambda u(x,t) = u(x,t+\lambda\tau).$$

1). Имеем

$$\tilde{P}^*_{2u} = \sum_{\lambda=-1}^{1} I_\lambda \left[\tilde{a}_{-\lambda}(\cdot)\right].$$

Тогда из (1.36) $\Longrightarrow$ $\tilde{a}_\lambda = I_\lambda \tilde{a}_{-\lambda}, \ \lambda = -1, 1.$

2). Отметим, что

$$\tilde{P}^*_{3u} = \sum_{\lambda=-1}^{1} I_\lambda \left[\tilde{c}_{-\lambda}(\cdot)\right], \quad \tilde{P}_{3u}(u_t(\cdot)) = \sum_{\lambda=-1}^{1} \tilde{c}_\lambda u_t(x,t+\lambda\tau)I_\lambda,$$

$$\tilde{P}'_{2u}(\cdot; u_t) = \sum_{\lambda=-1}^{1} \sum_{\mu=-1}^{1} \frac{\partial \tilde{a}_\lambda}{\partial u(x, t+\mu\tau)} u_t(x, t+\mu\tau) I_\lambda,$$

поэтому из (1.37) находим

$$\tilde{a}_0 = \tilde{a}_0(x, t, u(x,t)), \qquad \frac{\partial \tilde{a}_0}{\partial u(x,t)} = 2\tilde{c}_0,$$

$$\tilde{a}_\lambda = \tilde{a}_\lambda(x, t, u(x,t), u(x, t+\lambda\tau)),$$

$$\tilde{c}_\lambda = \frac{\partial \tilde{a}_\lambda}{\partial u(x, t+\lambda\tau)}, \quad \lambda = -1, 1.$$

3). Учитывая, что

$$\tilde{P}^*_{1u} = \sum_{\lambda=-1}^{1} I_\lambda \left[\tilde{b}_{-\lambda}(\cdot) \right], \quad \frac{\partial \tilde{P}_{2u}}{\partial t} = \sum_{\lambda=-1}^{1} \frac{\partial \tilde{a}_\lambda}{\partial t} I_\lambda,$$

из (1.38) получаем

$$\tilde{b}_\lambda + I_\lambda \tilde{b}_{-\lambda} = 2\frac{\partial \tilde{a}_\lambda}{\partial t}, \;\; \lambda = -1, 0, 1.$$

4). Заметим, что

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}_{2u}}{\partial t^2} = \sum_{\lambda=-1}^{1} \frac{\partial^2 \tilde{a}_\lambda}{\partial t^2} I_\lambda, \qquad \frac{\partial \tilde{P}_{1u}}{\partial t} = \sum_{\lambda=-1}^{1} \frac{\partial \tilde{b}_\lambda}{\partial t} I_\lambda,$$

$$\tilde{Q}'_u = \int_\Omega \tilde{\mathfrak{K}}(x, y, t, u_{\alpha_\mu}(x, t+\mu\tau), u_{\beta_\mu}(y, t+\mu\tau)) dy \times$$

$$\times \sum_{\lambda=-1}^{1} \frac{\partial d}{\partial u(x, t+\lambda\tau)} I_\lambda + d(x, t, u(x, t+\mu\tau)) \times$$

$$\times \int_\Omega \sum_{\lambda=-1}^{1} \left(\frac{\partial \tilde{\mathfrak{K}}}{\partial u_{\alpha_\lambda}(x, t+\lambda\tau)} D_{\alpha_\lambda} I_\lambda + \frac{\partial \tilde{\mathfrak{K}}}{\partial u_{\beta_\lambda}(y, t+\lambda\tau)} D_{\beta_\lambda} I_\lambda \right) dy,$$

$$\tilde{Q}'^{*}_{u} = \sum_{\lambda=-1}^{1} \left(I_\lambda \left[\frac{\partial d}{\partial u(x,t-\lambda\tau)}(\cdot) \right] \int\limits_{\Omega} I_\lambda \tilde{\mathcal{K}} dy + \right.$$

$$+ \int\limits_{\Omega} (-1)^{|\alpha_\lambda|} \sum_{|\gamma_\lambda|=0}^{s} \binom{\alpha_\lambda}{\gamma_\lambda} D_{\alpha_\lambda-\gamma_\lambda} I_{-\lambda} \left(d \frac{\partial \tilde{\mathcal{K}}}{\partial u_{\alpha_\lambda}(x,t+\lambda\tau)} \right) D_{\gamma_\lambda} I_{-\lambda} dy +$$

$$\left. + \int\limits_{\Omega} I_{-\lambda} \left[\left(d(-1)^{|\beta_\lambda|} D_{\beta_\lambda} \frac{\partial \tilde{\mathcal{K}}}{\partial u_{\beta_\lambda}(y,t+\lambda\tau)} \right) \bigg|_{x\leftrightarrow y} (\cdot) \right] dy \right),$$

где запись $(...)|_{x\leftrightarrow y}$ означает, что в выражении в скобках x и y нужно поменять местами.

Таким образом, из (1.39) получаем

$$\frac{\partial^2 \tilde{a}_\lambda}{\partial t^2} - \frac{\partial \tilde{b}_\lambda}{\partial t} + \frac{\partial d}{\partial u(x,t+\lambda\tau)} \int\limits_{\Omega} \tilde{\mathcal{K}} dy + d \int\limits_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathcal{K}}}{\partial u(x,t+\lambda\tau)} dy -$$

$$- I_\lambda \frac{\partial d}{\partial u(x,t-\lambda\tau)} \int\limits_{\Omega} I_\lambda \tilde{\mathcal{K}} dy -$$

$$- \int\limits_{\Omega} (-1)^{|\alpha_{-\lambda}|} I_\lambda D_{\alpha_{-\lambda}} \left(d \frac{\partial \tilde{\mathcal{K}}}{\partial u_{\alpha_{-\lambda}}(x,t-\lambda\tau)} \right) dy = 0,$$

$$\int\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial \tilde{\mathcal{K}}}{\partial u_{\gamma_\lambda}(x,t-\lambda\tau)} - \right.$$

$$\left. -(-1)^{|\alpha_\lambda|} \binom{\alpha_\lambda}{\gamma_\lambda} I_{-\lambda} D_{\alpha_\lambda-\gamma_\lambda} \left(d \frac{\partial \tilde{\mathcal{K}}}{\partial u_{\alpha_\lambda}(x,t+\lambda\tau)} \right) \right] dy = 0,$$

$$(-1)^{|\beta_\lambda|} D_{\beta_\lambda} \frac{\partial \tilde{\mathcal{K}}}{\partial u_{\beta_\lambda}(y,t+\lambda\tau)} -$$

$$- I_\lambda \left[\left(d(-1)^{|\beta_{-\lambda}|} D_{\beta_{-\lambda}} \frac{\partial \tilde{\mathcal{K}}}{\partial u_{\beta_{-\lambda}}(y,t-\lambda\tau)} \right) \bigg|_{x\leftrightarrow y} \right] = 0,$$

$$\lambda = -1, 0, 1, \quad |\gamma_\lambda| = \overline{1, s}.$$

5). Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{P}'_{2u}(\cdot; u_t) = \sum_{\lambda=-1}^{1}\sum_{\mu=-1}^{1}\frac{\partial^2 \tilde{a}_\lambda}{\partial t \partial u(x, t+\mu\tau)} u_t(x, t+\mu\tau) I_\lambda,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{P}_{3u}(u_t(\cdot)) = \sum_{\lambda=-1}^{1}\frac{\partial \tilde{c}_\lambda}{\partial t} u_t(x, t+\lambda\tau) I_\lambda,$$

$$\tilde{P}'_{1u}(u_t; \cdot) = \sum_{\lambda=-1}^{1}\sum_{\mu=-1}^{1}\frac{\partial \tilde{b}_\mu}{\partial u(x, t+\lambda\tau)} u_t(x, t+\mu\tau) I_\lambda,$$

$$\left[\tilde{P}'_{1u}(u_t; \cdot)\right]^* = \sum_{\lambda=-1}^{1}\sum_{\mu=-1}^{1} I_\lambda \left[\frac{\partial \tilde{b}_\mu}{\partial u(x, t-\lambda\tau)}(\cdot)\right] u_t(x, t+(\mu+\lambda)\tau),$$

$$\tilde{P}'_{1u}(\cdot; u_t) = \sum_{\lambda=-1}^{1}\sum_{\mu=-1}^{1}\frac{\partial \tilde{b}_\lambda}{\partial u(x, t+\mu\tau)} u_t(x, t+\mu\tau) I_\lambda,$$

из (1.40) получаем

$$\tilde{b}_0 = \tilde{b}_0(x, t, u(x,t)), \quad \tilde{b}_\lambda = \tilde{b}_\lambda(x, t, u(x,t), u(x, t+\lambda\tau)), \ \lambda = -1, 1.$$

6). Отметим, что

$$\tilde{P}'_{2u}(u_{tt}; \cdot) = \sum_{\lambda=-1}^{1}\sum_{\mu=-1}^{1}\frac{\partial \tilde{a}_\mu}{\partial u(x, t+\lambda\tau)} u_{tt}(x, t+\mu\tau) I_\lambda,$$

$$\left[\tilde{P}'_{2u}(u_{tt}; \cdot)\right]^* = \sum_{\lambda=-1}^{1}\sum_{\mu=-1}^{1} I_\lambda \left[\frac{\partial \tilde{a}_\mu}{\partial u(x, t-\lambda\tau)}(\cdot)\right] u_{tt}(x, t+(\mu+\lambda)\tau),$$

$$\tilde{P}'_{2u}(\cdot; u_{tt}) = \sum_{\lambda=-1}^{1}\sum_{\mu=-1}^{1}\frac{\partial \tilde{a}_\lambda}{\partial u(x, t+\mu\tau)} u_{tt}(x, t+\mu\tau) I_\lambda.$$

Из (1.41) $\Longrightarrow$ $0 = 0$ (здесь учтены условия, полученные в предыдущих пунктах).

7). Имеем

$$\tilde{P}''_{2u}(\cdot; u_t; u_t) = \sum_{\lambda=-1}^{1} \sum_{\mu=-1}^{1} \sum_{\nu=-1}^{1} \frac{\partial^2 \tilde{a}_\lambda}{\partial u(x, t+\nu\tau) \partial u(x, t+\mu\tau)} \times$$

$$\times u_t(x, t+\nu\tau) u_t(x, t+\mu\tau) I_\lambda,$$

$$\tilde{P}'_{3u}(u_t^2; \cdot) = \sum_{\lambda=-1}^{1} \sum_{\mu=-1}^{1} \frac{\partial \tilde{c}_\mu}{\partial u(x, t+\lambda\tau)} u_t^2(x, t+\mu\tau) I_\lambda,$$

$$[\tilde{P}'_{3u}(u_t^2; \cdot)]^* = \sum_{\lambda=-1}^{1} \sum_{\mu=-1}^{1} I_\lambda \left[\frac{\partial \tilde{c}_\mu}{\partial u(x, t-\lambda\tau)} (\cdot) \right] u_t^2(x, t+(\mu+\lambda)\tau),$$

$$\tilde{P}'_{3u}(u_t(\cdot); u_t) = \sum_{\lambda=-1}^{1} \sum_{\mu=-1}^{1} \frac{\partial \tilde{c}_\lambda}{\partial u(x, t+\mu\tau)} u_t(x, t+\mu\tau) u_t(x, t+\lambda\tau) I_\lambda.$$

Подставляя полученные выражения в (1.42), находим

$$\tilde{c}_0 = \tilde{c}_0(x, t, u(x,t)), \quad \tilde{c}_\lambda = \tilde{c}_\lambda(x, t, u(x,t), u(x, t+\lambda\tau)), \ \lambda = -1, 1.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1.4. [117] *Оператор N вида (1.73) является квазипотенциальным на $D(N)$ (1.74) относительно классической билинейной формы (1.75) тогда и только тогда, когда*

$$\tilde{a}_0 = \tilde{a}_0(x, t, u(x,t)), \ \ \tilde{a}_\lambda = \tilde{a}_\lambda(x, t, u(x,t), u(x, t+\lambda\tau)), \tag{1.76}$$

$$\tilde{b}_0 = \tilde{b}_0(x, t, u(x,t)), \ \ \tilde{b}_\lambda = \tilde{b}_\lambda(x, t, u(x,t), u(x, t+\lambda\tau)), \tag{1.77}$$

$$\tilde{c}_0 = \tilde{c}_0(x, t, u(x,t)), \ \ \tilde{c}_\lambda = \tilde{c}_\lambda(x, t, u(x,t), u(x, t+\lambda\tau)), \tag{1.78}$$

$\lambda = -1, 1$ *и* $\forall u \in D(N), \ \forall x \in \Omega, \ \forall t \in [t_0, t_1]$ *выполняются следующие условия:*

$$\tilde{a}_\lambda = I_\lambda \tilde{a}_{-\lambda}, \quad \lambda = -1, 1, \tag{1.79}$$

$$\frac{\partial \tilde{a}_0}{\partial u(x,t)} = 2\tilde{c}_0, \tag{1.80}$$

$$\tilde{c}_\lambda = \frac{\partial \tilde{a}_\lambda}{\partial u(x,t+\lambda\tau)}, \quad \lambda = -1, 1, \tag{1.81}$$

$$\tilde{b}_\lambda + I_\lambda \tilde{b}_{-\lambda} = 2\frac{\partial \tilde{a}_\lambda}{\partial t}, \ \lambda = -1, 0, 1, \tag{1.82}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{a}_\lambda}{\partial t^2} - \frac{\partial \tilde{b}_\lambda}{\partial t} + \frac{\partial d}{\partial u(x,t+\lambda\tau)} \int\limits_\Omega \tilde{\mathcal{K}} dy + d \int\limits_\Omega \frac{\partial \tilde{\mathcal{K}}}{\partial u(x,t+\lambda\tau)} dy -$$

$$-I_\lambda \frac{\partial d}{\partial u(x,t-\lambda\tau)} \int\limits_\Omega I_\lambda \tilde{\mathcal{K}} dy -$$

$$- \int\limits_\Omega (-1)^{|\alpha_{-\lambda}|} I_\lambda D_{\alpha_{-\lambda}} \left(d \frac{\partial \tilde{\mathcal{K}}}{\partial u_{\alpha_{-\lambda}}(x,t-\lambda\tau)} \right) dy = 0, \tag{1.83}$$

$$\int\limits_\Omega \left[\frac{\partial \tilde{\mathcal{K}}}{\partial u_{\gamma_\lambda}(x,t-\lambda\tau)} - \right.$$

$$\left. -(-1)^{|\alpha_\lambda|} \binom{\alpha_\lambda}{\gamma_\lambda} I_{-\lambda} D_{\alpha_\lambda - \gamma_\lambda} \left(d \frac{\partial \tilde{\mathcal{K}}}{\partial u_{\alpha_\lambda}(x,t+\lambda\tau)} \right) \right] dy = 0, \tag{1.84}$$

$$(-1)^{|\beta_\lambda|} D_{\beta_\lambda} \frac{\partial \tilde{\mathcal{K}}}{\partial u_{\beta_\lambda}(y,t+\lambda\tau)} -$$

$$-I_\lambda \left[\left(d(-1)^{|\beta_{-\lambda}|} D_{\beta_{-\lambda}} \frac{\partial \tilde{\mathcal{K}}}{\partial u_{\beta_{-\lambda}}(y,t-\lambda\tau)} \right) \Bigg|_{x \leftrightarrow y} \right] = 0, \tag{1.85}$$

$$\lambda = -1, 0, 1, \quad |\gamma_\lambda| = \overline{1, s}.$$

Пример 1.3.

Рассмотрим систему с бесконечным числом степеней свободы, уравнение движения которой является нелинейным интегро-дифференциальным уравнением с отклоняющимися аргументами следующего вида [117]:

$$N(u) \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1} \left[\left(u(x,t+\lambda\tau) + u(x,t) + 2 \right) u_{tt}(x,t+\lambda\tau) + \right.$$

$$\left. + u_t^2(x,t+\lambda\tau) \right] + \left(2u(x,t-\tau) - 2u(x,t) \right) u_t(x,t-\tau) + u_t(x,t) +$$

$$+ \left(2u(x,t+\tau) - 2u(x,t) \right) u_t(x,t+\tau) +$$

$$+ \int_a^b \left\{ 2u_{xx}(x,t) \sum_{\lambda=-1}^{1} \left[k_{-\lambda}(y) e^{-u(y,t+\lambda\tau)} + \; l_{-\lambda}(y) e^{-u(x,t+\lambda\tau)} \right] - \right.$$

$$-2u_x(x,t) \sum_{\lambda=-1}^{1} l_{-\lambda}(y) e^{-u(x,t+\lambda\tau)} u_x(x,t+\lambda\tau) +$$

$$\left. + e^{-u(x,t)} \sum_{\lambda=-1}^{1} \left[l_\lambda(y) u_x^2(x,t+\lambda\tau) + k_\lambda(x) u_y^2(y,t+\lambda\tau) \right] \right\} dy = 0, \tag{1.86}$$

$$(x,t) \in \mathcal{Q} = (a,b) \times (t_0, t_1),$$

где $k_\lambda, l_\lambda \in C[a,b]$ $(\lambda = -1, 0, 1)$ - заданные функции.

Положим

$$D(N) = \left\{ u \in U = C_{x,\,t}^{\,2,\,2} \left([a,b] \times [t_0 - \tau, t_1 + \tau] \right) : \right.$$

$$u(x,t) = \varphi_1(x,t), \;\; (x,t) \in E_0 = [a,b] \times [t_0 - \tau, t_0 + \tau],$$

$$u(x,t) = \varphi_2(x,t), \;\; (x,t) \in E_1 = [a,b] \times [t_1 - \tau, t_1 + \tau],$$

$$\left. u(a,t) = \psi_1(t), \; u(b,t) = \psi_2(t), \;\; t \in [t_0 - \tau, t_1 + \tau] \right\}, \tag{1.87}$$

где $\varphi_i, \; \psi_i$ $(i = 1, 2)$ - заданные функции.

Введем обозначение $V = C(\overline{\mathcal{Q}}_\tau)$ и зададим нелокальную билинейную форму $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ в виде

$$\Phi(v, g) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{a}^{b} v(x,t) g(x,t) dx dt. \qquad (1.88)$$

Отметим, что

$$a_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau)) = u(x,t+\lambda\tau) + u(x,t) + 2,$$

$$c_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau)) \equiv 1, \quad d(x,t,u(x,t+\mu\tau)) \equiv 1,$$

$$\lambda = -1, 0, 1,$$

$$b_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau)) = 2u(x,t+\lambda\tau) - 2u(x,t), \quad \lambda = -1, 1,$$

$$b_0(x,t,u(x,t+\mu\tau)) \equiv 1,$$

$$\mu = -1, 0, 1,$$

$$\mathcal{K} = 2u_{xx}(x,t) \sum_{\lambda=-1}^{1} \left[k_{-\lambda}(y) e^{-u(y,t+\lambda\tau)} + l_{-\lambda}(y) e^{-u(x,t+\lambda\tau)} \right] -$$

$$-2u_x(x,t) \sum_{\lambda=-1}^{1} l_{-\lambda}(y) e^{-u(x,t+\lambda\tau)} u_x(x,t+\lambda\tau) +$$

$$+ e^{-u(x,t)} \sum_{\lambda=-1}^{1} \left[l_\lambda(y) u_x^2(x,t+\lambda\tau) + k_\lambda(x) u_y^2(y,t+\lambda\tau) \right].$$

Предположим, что

$$\hat{a}_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau)) \equiv 0, \quad \hat{c}_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau)) \equiv 0, \quad \hat{\mathcal{K}} \equiv 0,$$

$$\lambda, \mu = -1, 0, 1,$$

$$\hat{b}_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau)) \equiv 0, \quad \lambda = -1, 1,$$

$$\hat{b}_0(x,t,u(x,t+\mu\tau)) \equiv 1,$$

$$\mu = -1, 0, 1.$$

В данном случае

$$\tilde{a}_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau)) = u(x,t+\lambda\tau) + u(x,t) + 2,$$

$$\tilde{b}_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau)) = 2u(x,t+\lambda\tau) - 2u(x,t),$$

$$\tilde{c}_\lambda(x,t,u(x,t+\mu\tau)) \equiv 1, \qquad \lambda,\mu = -1,0,1,$$

$$\tilde{\mathcal{K}} = 2u_{xx}(x,t)\sum_{\lambda=-1}^{1}\Big[k_{-\lambda}(y)e^{-u(y,t+\lambda\tau)} + l_{-\lambda}(y)e^{-u(x,t+\lambda\tau)}\Big] -$$

$$-2u_x(x,t)\sum_{\lambda=-1}^{1} l_{-\lambda}(y)e^{-u(x,t+\lambda\tau)}u_x(x,t+\lambda\tau) +$$

$$+e^{-u(x,t)}\sum_{\lambda=-1}^{1}\left[l_\lambda(y)u_x^2(x,t+\lambda\tau) + k_\lambda(x)u_y^2(y,t+\lambda\tau)\right].$$

Докажем, что оператор N вида (1.86) является квазипотенциальным на $D(N)$ (1.87) относительно классической билинейной формы (1.88). Для этого проверим выполнение условий теоремы 1.4.

Нетрудно убедиться, что функции $\tilde{a}_\lambda$, $\tilde{b}_\lambda$, $\tilde{c}_\lambda$ $(\lambda = -1,0,1)$ удовлетворяют условиям (1.76) - (1.82).

Далее,

$$\frac{\partial\tilde{\mathcal{K}}}{\partial u(x,t+\lambda\tau)} = -2u_{xx}(x,t)l_{-\lambda}(y)e^{-u(x,t+\lambda\tau)} +$$

$$+2u_x(x,t)l_{-\lambda}(y)e^{-u(x,t+\lambda\tau)}u_x(x,t+\lambda\tau), \;\; \lambda = -1,1,$$

$$\frac{\partial\tilde{\mathcal{K}}}{\partial u(x,t)} = -2u_{xx}(x,t)l_0(y)e^{-u(x,t)} + 2u_x^2(x,t)l_0(y)e^{-u(x,t)} -$$

$$-e^{-u(x,t)}\sum_{\lambda=-1}^{1}\left[l_\lambda(y)u_x^2(x,t+\lambda\tau) + k_\lambda(x)u_y^2(y,t+\lambda\tau)\right],$$

$$D_x\left[I_{-\lambda}\frac{\partial\tilde{\mathcal{K}}}{\partial u_x(x,t+\lambda\tau)}\right]=D_xI_{-\lambda}\left[-2u_x(x,t)l_{-\lambda}(y)e^{-u(x,t+\lambda\tau)}+\right.$$

$$\left.+2e^{-u(x,t)}l_\lambda(y)u_x(x,t+\lambda\tau)\right]=D_x\left[-2u_x(x,t-\lambda\tau)l_{-\lambda}(y)e^{-u(x,t)}+\right.$$

$$\left.+2e^{-u(x,t-\lambda\tau)}l_\lambda(y)u_x(x,t)\right]=-2u_{xx}(x,t-\lambda\tau)l_{-\lambda}(y)e^{-u(x,t)}+$$

$$+2u_x(x,t-\lambda\tau)l_{-\lambda}(y)e^{-u(x,t)}u_x(x,t)-$$

$$-2u_x(x,t-\lambda\tau)l_\lambda(y)e^{-u(x,t-\lambda\tau)}u_x(x,t)+2e^{-u(x,t-\lambda\tau)}l_\lambda(y)u_{xx}(x,t),$$

$$\lambda=-1,1,$$

$$D_x\frac{\partial\tilde{\mathcal{K}}}{\partial u_x(x,t)}=D_x\left[-2\sum_{\lambda=-1}^{1}l_{-\lambda}(y)e^{-u(x,t+\lambda\tau)}u_x(x,t+\lambda\tau)\right]=$$

$$=2\sum_{\lambda=-1}^{1}\left[l_{-\lambda}(y)e^{-u(x,t+\lambda\tau)}u_x^2(x,t+\lambda\tau)-\right.$$

$$\left.-l_{-\lambda}(y)e^{-u(x,t+\lambda\tau)}u_{xx}(x,t+\lambda\tau)\right],$$

$$D_x^2\frac{\partial\tilde{\mathcal{K}}}{\partial u_{xx}(x,t)}=2D_x^2\sum_{\lambda=-1}^{1}\left[k_{-\lambda}(y)e^{-u(y,t+\lambda\tau)}+l_{-\lambda}(y)e^{-u(x,t+\lambda\tau)}\right]=$$

$$=-2D_x\sum_{\lambda=-1}^{1}l_{-\lambda}(y)e^{-u(x,t+\lambda\tau)}u_x(x,t+\lambda\tau)=$$

$$=-2\sum_{\lambda=-1}^{1}\left[-l_{-\lambda}(y)e^{-u(x,t+\lambda\tau)}u_x^2(x,t+\lambda\tau)+\right.$$

$$\left.+l_{-\lambda}(y)e^{-u(x,t+\lambda\tau)}u_{xx}(x,t+\lambda\tau)\right].$$

Подставляя полученные выражения в условия (1.83), (1.84), заключаем, что они выполнены.

Проверим условия (1.85). Имеем

$$\frac{\partial\tilde{\mathfrak{K}}}{\partial u(y,t+\lambda\tau)} = -2u_{xx}(x,t)k_{-\lambda}(y)e^{-u(y,t+\lambda\tau)}, \tag{1.89}$$

$$\frac{\partial\tilde{\mathfrak{K}}}{\partial u_y(y,t+\lambda\tau)} = 2e^{-u(x,t)}k_{\lambda}(x)u_y(y,t+\lambda\tau), \tag{1.90}$$

$$D_y\frac{\partial\tilde{\mathfrak{K}}}{\partial u_y(y,t+\lambda\tau)} = 2e^{-u(x,t)}k_{\lambda}(x)u_{yy}(y,t+\lambda\tau), \tag{1.91}$$

$$I_\lambda\left[\left.\frac{\partial\tilde{\mathfrak{K}}}{\partial u(y,t-\lambda\tau)}\right|_{x\leftrightarrow y}\right] = I_\lambda\left[-2u_{yy}(y,t)k_{\lambda}(x)e^{-u(x,t-\lambda\tau)}\right] =$$

$$= -2u_{yy}(y,t+\lambda\tau)k_{\lambda}(x)e^{-u(x,t)}, \tag{1.92}$$

$$I_\lambda\left[\left.D_y\frac{\partial\tilde{\mathfrak{K}}}{\partial u_y(y,t-\lambda\tau)}\right|_{x\leftrightarrow y}\right] = I_\lambda\left[2e^{-u(y,t)}k_{-\lambda}(y)u_{xx}(x,t-\lambda\tau)\right] =$$

$$= 2e^{-u(y,t+\lambda\tau)}k_{-\lambda}(y)u_{xx}(x,t), \quad \lambda=-1,0,1. \tag{1.93}$$

Подставим (1.89) - (1.93) в условия (1.85), получим, что они также выполнены.

Таким образом, уравнение (1.86) представимо в форме уравнения Лагранжа с непотенциальной плотностью силы.

1.4 Построение лагранжиана

В настоящем параграфе получена формула для построения лагранжиана, в общем случае принадлежащего неэйлерову классу функционалов.

Теорема 1.5. *Пусть $D_t^* = -D_t$ на $D(N_u', B_u)$ и оператор N вида (1.13) является квази-B_u-потенциальным на $D(N)$ относитель-*

но билинейной формы (1.7). Тогда функционал F имеет следующий вид:

$$F[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big\{ \Big\langle \tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_t u), B_u u_t \Big\rangle + \Big\langle \tilde{\mathcal{R}}_{2u} u_t, B_u u_t \Big\rangle + \Big\langle \tilde{\mathcal{R}}_1(u), B_u u_t \Big\rangle -$$

$$- \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B_u^* \tilde{\mathcal{R}}_{2u}) u, u_t \right\rangle + \tilde{\mathcal{B}}[u] \Big\} \, dt + F[u_0], \tag{1.94}$$

где

$$\Phi(\tilde{\mathcal{R}}_1(u), B_u u_t) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_0^1 \left\langle -\tilde{P}_{1\tilde{u}(\lambda)}(u - u_0), B_{\tilde{u}(\lambda)} \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} \right\rangle d\lambda dt, \tag{1.95}$$

$$\Phi(\tilde{\mathcal{R}}_{2u} u_t, B_u u_t) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_0^1 \left\langle -\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)}(u_t - u_{0_t}), B_{\tilde{u}(\lambda)} \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} \right\rangle d\lambda dt, \tag{1.96}$$

$$\Phi(\tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_t u), B_u u_t) =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_0^1 \left\langle -\tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)} \left(\frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}(u - u_0) \right), B_{\tilde{u}(\lambda)} \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} \right\rangle d\lambda dt, \tag{1.97}$$

$$\tilde{\mathcal{B}}[u] = \int\limits_0^1 \Big[\big\langle \tilde{Q}(\tilde{u}(\lambda)), B_{\tilde{u}(\lambda)}(u - u_0) \big\rangle +$$

$$+ \lambda \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B_{\tilde{u}(\lambda)}^* \tilde{P}_{1\tilde{u}(\lambda)})(u - u_0), u - u_0 \right\rangle -$$

$$- \lambda \left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2}(B_{\tilde{u}(\lambda)}^* \tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)})(u - u_0), u - u_0 \right\rangle \Big] \, d\lambda, \tag{1.98}$$

u_0 - фиксированный элемент из $D(N)$.

Доказательство. Если $D_t^* = -D_t$ на $D(N_u', B_u)$ и выполнены условия (1.16) - (1.22), то существует функционал F вида

$$F[u] = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 \left[\left\langle \tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)}\frac{\partial^2\tilde{u}(\lambda)}{\partial t^2}, B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle + \right.$$

$$+\left\langle \tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)}\left(\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)^2, B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle +$$

$$+\left\langle \tilde{P}_{1\tilde{u}(\lambda)}\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}, B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle +$$

$$\left. + \left\langle \tilde{Q}(\tilde{u}(\lambda)), B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle\right] d\lambda dt + F[u_0].$$

Обозначим

$$J_1[u] = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 \left\langle \tilde{P}_{1\tilde{u}(\lambda)}\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}, B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle d\lambda dt.$$

Имеем

$$J_1[u] = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 \left[\left\langle \tilde{P}_{1\tilde{u}(\lambda)}u_{0_t}, B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle + \right.$$

$$\left. + \left\langle \lambda\tilde{P}_{1\tilde{u}(\lambda)}(u_t - u_{0_t}), B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle\right] d\lambda dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 \left[\left\langle \tilde{P}_{1\tilde{u}(\lambda)}u_{0_t}, B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle - \right.$$

$$\left. - \left\langle \lambda(u-u_0), D_t(\tilde{P}^*_{1\tilde{u}(\lambda)}B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0))\right\rangle\right] d\lambda dt. \tag{1.99}$$

Учитывая условие (1.18), получаем

$$D_t[\tilde{P}^*_{1\tilde{u}(\lambda)}B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)] =$$

$$= D_t\left[\left(2\frac{\partial}{\partial t}\left(B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}\right) - B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{1\tilde u(\lambda)}\right)(u-u_0)\right] =$$

$$= 2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}\right)(u-u_0) + 2\frac{\partial}{\partial t}\left(B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}\right)(u_t-u_{0_t})+$$

$$+2\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}\right)\right)'_{\tilde u(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{1\tilde u(\lambda)}\right)(u-u_0) - B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{1\tilde u(\lambda)}(u_t-u_{0_t})-$$

$$-\left(B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{1\tilde u(\lambda)}\right)'_{\tilde u(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right).$$

Следовательно, (1.99) примет вид

$$J_1[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^1\left[\left\langle\tilde P_{1\tilde u(\lambda)}u_{0_t}, B_{\tilde u(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle-\right.$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}\right)(u-u_0)\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\frac{\partial}{\partial t}\left(B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}\right)(u_t-u_{0_t})\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}\right)\right)'_{\tilde u(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle+$$

$$+\lambda\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\left(B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{1\tilde u(\lambda)}\right)(u-u_0), u-u_0\right\rangle+$$

$$+\lambda\left\langle B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{1\tilde u(\lambda)}(u_t-u_{0_t}), u-u_0\right\rangle+$$

$$\left.+\lambda\left\langle\left(B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{1\tilde u(\lambda)}\right)'_{\tilde u(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right), u-u_0\right\rangle\right]d\lambda dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^1\left[\left\langle\tilde P_{1\tilde u(\lambda)}\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}, B_{\tilde u(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle-\right.$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}\right)(u-u_0)\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\frac{\partial}{\partial t}\left(B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}\right)(u_t-u_{0_t})\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}\right)\right)'_{\tilde u(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle+$$

$$+\lambda\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\left(B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{1\tilde u(\lambda)}\right)(u-u_0),u-u_0\right\rangle+$$

$$+\lambda\left\langle\left(B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{1\tilde u(\lambda)}\right)'_{\tilde u(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right),u-u_0\right\rangle\Bigg]d\lambda dt. \quad (1.100)$$

Рассмотрим интеграл

$$J_2[u]=\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^1\left\langle\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}\frac{\partial^2\tilde u(\lambda)}{\partial t^2},B_{\tilde u(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle d\lambda dt.$$

Используя условие кососимметричности оператора D_t, получаем

$$J_2[u]=\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^1\left\langle\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}u_{0_{tt}}+\lambda\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}(u_{tt}-u_{0_{tt}}),B_{\tilde u(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle d\lambda dt=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^1\left[\left\langle\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}u_{0_{tt}},B_{\tilde u(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle+\right.$$

$$\left.+\lambda\left\langle(u-u_0),D_t^2\left[\tilde P^*_{2\tilde u(\lambda)}B_{\tilde u(\lambda)}(u-u_0)\right]\right\rangle\right]d\lambda dt.$$

С учетом условия (1.16) имеем

$$D_t^2[\tilde P^*_{2\tilde u(\lambda)}B_{\tilde u(\lambda)}(u-u_0)]=D_t^2[B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}(u-u_0)]=$$

$$=D_t\left[\frac{\partial}{\partial t}(B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{2\tilde u(\lambda)})(u-u_0)+B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}(u_t-u_{0t})+\right.$$

$$+B^{*\prime}_{\tilde{u}(\lambda)}\left(\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0);\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)+B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}'_{2\tilde{u}(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\Bigg]=$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial t^2}(B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)})(u-u_0)+2\frac{\partial}{\partial t}(B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)})(u_t-u_{0_t})+$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial t}(B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)})\right)'_{\tilde{u}(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)+B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)}(u_{tt}-u_{0tt})+$$

$$+B^{*\prime}_{\tilde{u}(\lambda)}\left(\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)}(u_t-u_{0t});\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)+B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}'_{2\tilde{u}(\lambda)}\left(u_t-u_{0t};\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}B^{*\prime}_{\tilde{u}(\lambda)}\left(\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0);\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)+$$

$$+B^{*\prime\prime}_{\tilde{u}(\lambda)}\left(\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0);\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t};\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)+$$

$$+B^{*\prime}_{\tilde{u}(\lambda)}\left(\tilde{P}'_{2\tilde{u}(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right);\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)+$$

$$+B^{*\prime}_{\tilde{u}(\lambda)}\left(\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)}(u_t-u_{0t});\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)+$$

$$+B^{*\prime}_{\tilde{u}(\lambda)}\left(\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0);\frac{\partial^2\tilde{u}(\lambda)}{\partial t^2}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}'_{2\tilde{u}(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)+$$

$$+B^{*\prime}_{\tilde{u}(\lambda)}\left(\tilde{P}'_{2\tilde{u}(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right);\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)+$$

$$+B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}''_{2\tilde{u}(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t};\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)+$$

$$+B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}'_{2\tilde{u}(\lambda)}\left(u_t-u_{0t};\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)+B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}'_{2\tilde{u}(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial^2\tilde{u}(\lambda)}{\partial t^2}\right).$$

Таким образом,

$$J_2[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_0^1 \big[\big\langle \tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)} u_{0tt}, B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\big\rangle +$$

$$+\lambda \left\langle u-u_0, \frac{\partial^2}{\partial t^2}(B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)})(u-u_0)\right\rangle +$$

$$+2\lambda \left\langle u-u_0, \frac{\partial}{\partial t}(B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)})(u_t-u_{0_t})\right\rangle +$$

$$+\lambda \left\langle u-u_0, \left(\frac{\partial}{\partial t}(B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)})\right)'_{\tilde{u}(\lambda)} \left(u-u_0; \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle +$$

$$+\lambda \left\langle u-u_0, B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)}(u_{tt}-u_{0tt})\right\rangle +$$

$$+2\lambda \left\langle u-u_0, B^{*\prime}_{\tilde{u}(\lambda)} \left(\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)}(u_t-u_{0t}); \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle +$$

$$+2\lambda \left\langle u-u_0, B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}'_{2\tilde{u}(\lambda)} \left(u_t-u_{0t}; \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle +$$

$$+\lambda \left\langle u-u_0, \frac{\partial}{\partial t}B^{*\prime}_{\tilde{u}(\lambda)} \left(\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0); \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle +$$

$$+\lambda \left\langle u-u_0, B^{*\prime\prime}_{\tilde{u}(\lambda)} \left(\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0); \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}; \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle +$$

$$+2\lambda \left\langle u-u_0, B^{*\prime}_{\tilde{u}(\lambda)} \left(\tilde{P}'_{2\tilde{u}(\lambda)} \left(u-u_0; \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right); \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle +$$

$$+\lambda \left\langle u-u_0, B^{*\prime}_{\tilde{u}(\lambda)} \left(\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0); \frac{\partial^2 \tilde{u}(\lambda)}{\partial t^2}\right)\right\rangle +$$

$$+\lambda \left\langle u-u_0, \frac{\partial}{\partial t}B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}'_{2\tilde{u}(\lambda)} \left(u-u_0; \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle +$$

$$+\lambda \left\langle u-u_0, B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}''_{2\tilde{u}(\lambda)} \left(u-u_0; \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}; \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle +$$

$$+\lambda\left\langle u-u_0, B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P'_{2\tilde u(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial^2\tilde u(\lambda)}{\partial t^2}\right)\right\rangle\Bigg] d\lambda dt =$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^1\Bigg[\left\langle \tilde P_{2\tilde u(\lambda)}\frac{\partial^2\tilde u(\lambda)}{\partial t^2}, B_{\tilde u(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle+$$

$$+\Bigg\langle\lambda(u-u_0),\frac{\partial^2}{\partial t^2}(B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{2\tilde u(\lambda)})(u-u_0)+$$

$$+2\frac{\partial}{\partial t}(B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{2\tilde u(\lambda)})(u_t-u_{0_t})+$$

$$+2\frac{\partial}{\partial t}B^{*\prime}_{\tilde u(\lambda)}\left(\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}(u-u_0);\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right)+$$

$$+2\frac{\partial}{\partial t}B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P'_{2\tilde u(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right)+$$

$$+2B^{*\prime}_{\tilde u(\lambda)}\left(\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}(u_t-u_{0t});\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right)+$$

$$+2B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P'_{2\tilde u(\lambda)}\left(u_t-u_{0t};\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t};\right)+$$

$$+B^{*\prime\prime}_{\tilde u(\lambda)}\left(\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}(u-u_0);\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t};\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right)+$$

$$+2B^{*\prime}_{\tilde u(\lambda)}\left(\tilde P'_{2\tilde u(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right);\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right)+$$

$$+B^{*\prime}_{\tilde u(\lambda)}\left(\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}(u-u_0);\frac{\partial^2\tilde u(\lambda)}{\partial t^2}\right)+$$

$$+B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P''_{2\tilde u(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t};\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right)+$$

$$+B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P'_{2\tilde u(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial^2\tilde u(\lambda)}{\partial t^2}\right)\Bigg\rangle\Bigg] d\lambda dt. \tag{1.101}$$

Далее, для интеграла

$$J_3[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_0^1 \left\langle \tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)} \left(\frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} \right)^2, B_{\tilde{u}(\lambda)}(u - u_0) \right\rangle d\lambda dt$$

имеем

$$J_3[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_0^1 \big\langle \tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)}(u_{0_t}^2 + 2\lambda u_{0_t}(u_t - u_{0_t}) +$$

$$+ \lambda^2 (u_t - u_{0_t})^2), B_{\tilde{u}(\lambda)}(u - u_0) \big\rangle \, d\lambda dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_0^1 \big[\big\langle \tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)} u_{0_t}^2, B_{\tilde{u}(\lambda)}(u - u_0) \big\rangle +$$

$$+ 2\lambda \big\langle \tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)} u_{0_t}(u_t - u_{0_t}), B_{\tilde{u}(\lambda)}(u - u_0) \big\rangle +$$

$$+ 2\lambda^2 \big\langle \tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)}(u_t - u_{0_t})^2, B_{\tilde{u}(\lambda)}(u - u_0) \big\rangle -$$

$$- \lambda^2 \big\langle \tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)}(u_t - u_{0_t})^2, B_{\tilde{u}(\lambda)}(u - u_0) \big\rangle \big] \, d\lambda dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_0^1 \big[\big\langle \tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)} u_{0_t}^2, B_{\tilde{u}(\lambda)}(u - u_0) \big\rangle +$$

$$+ 2\lambda \big\langle \tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)} u_{0_t}(u_t - u_{0_t}), B_{\tilde{u}(\lambda)}(u - u_0) \big\rangle +$$

$$+ 2\lambda^2 \left\langle u_t - u_{0_t}, (u_t - u_{0_t}) \tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)} B_{\tilde{u}(\lambda)}(u - u_0) \right\rangle -$$

$$- \lambda^2 \big\langle \tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)}(u_t - u_{0_t})^2, B_{\tilde{u}(\lambda)}(u - u_0) \big\rangle \big] \, d\lambda dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_0^1 \big[\big\langle \tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)} u_{0_t}^2, B_{\tilde{u}(\lambda)}(u - u_0) \big\rangle +$$

$$+ 2\lambda \big\langle \tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)} u_{0_t}(u_t - u_{0_t}), B_{\tilde{u}(\lambda)}(u - u_0) \big\rangle -$$

$$- 2\lambda^2 \left\langle u - u_0, (u_{tt} - u_{0_{tt}}) \tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)} B_{\tilde{u}(\lambda)}(u - u_0) \right\rangle -$$

$$-2\lambda^2 \left\langle u-u_0, (u_t-u_{0_t})\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B_{\tilde{u}(\lambda)})(u-u_0)\right\rangle -$$

$$-2\lambda^2 \left\langle u-u_0, (u_t-u_{0_t})\tilde{P}^{*\prime}_{3\tilde{u}(\lambda)}\left(B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0); \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle -$$

$$-2\lambda^2 \left\langle u-u_0, (u_t-u_{0_t})\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B'_{\tilde{u}(\lambda)}\left(u-u_0; \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle -$$

$$-2\lambda^2 \left\langle u-u_0, (u_t-u_{0_t})\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B_{\tilde{u}(\lambda)}(u_t-u_{0_t})\right\rangle -$$

$$-\lambda^2 \left\langle \tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)}(u_t-u_{0_t})^2, B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle\Big]\, d\lambda dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^1 \Big[\left\langle \tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)}u^2_{0_t}, B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle -$$

$$-2\lambda \Big\langle u-u_0, u_{0_{tt}}\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)+$$

$$+u_{0_t}\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B_{\tilde{u}(\lambda)})(u-u_0) + u_{0_t}\tilde{P}^{*\prime}_{3\tilde{u}(\lambda)}\left(B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0); \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right) +$$

$$+u_{0_t}\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B'_{\tilde{u}(\lambda)}\left(u-u_0; \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right) + u_{0_t}\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B_{\tilde{u}(\lambda)}(u_t-u_{0_t})+$$

$$+\lambda(u_{tt}-u_{0_{tt}})\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)+\lambda(u_t-u_{0_t})\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B_{\tilde{u}(\lambda)})(u-u_0)+$$

$$+\lambda(u_t-u_{0_t})\left[\tilde{P}^{*\prime}_{3\tilde{u}(\lambda)}\left(B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0); \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right) +\right.$$

$$\left.+\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B'_{\tilde{u}(\lambda)}\left(u-u_0; \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right] +$$

$$+\lambda(u_t-u_{0t})\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B_{\tilde{u}(\lambda)}(u_t-u_{0t})\Big\rangle -$$

$$-\lambda^2 \left\langle \tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)}(u_t-u_{0t})^2, B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle\Big]\, d\lambda dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^1 \Big[\left\langle \tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)}u^2_{0t}, B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle -$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\frac{\partial^2\tilde{u}(\lambda)}{\partial t^2}\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B_{\tilde{u}(\lambda)}\right)(u-u_0)\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\tilde{P}^{*\prime}_{3\tilde{u}(\lambda)}\left(B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0);\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B'_{\tilde{u}(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B_{\tilde{u}(\lambda)}(u_t-u_{0t})\right\rangle-$$

$$-\lambda^2\left\langle\tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)}(u_t-u_{0t})^2,B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle\Big]\,d\lambda dt=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^1\Big[\left\langle\tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)}u^2_{0t},B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\frac{\partial^2\tilde{u}(\lambda)}{\partial t^2}\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B_{\tilde{u}(\lambda)})(u-u_0)\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\tilde{P}^{*\prime}_{3\tilde{u}(\lambda)}\left(B_{\tilde{u}(\lambda)})(u-u_0);\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B'_{\tilde{u}(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle-$$

$$-\lambda^2\left\langle\tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)}(u_t-u_{0t})^2,B_{\tilde{u}(\lambda)})(u-u_0)\right\rangle+$$

$$+2\lambda\left\langle u-u_0,B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)}\left(\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}(u_t-u_{0t})\right)\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\tilde{P}^{*\prime}_{2\tilde{u}(\lambda)}\left(B_{\tilde{u}(\lambda)}(u_t-u_{0t});\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0, \tilde{P}^*_{2\tilde{u}(\lambda)}B'_{\tilde{u}(\lambda)}\left(u_t-u_{0t};\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle\Bigg] d\lambda dt =$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^1 \left[\left\langle \tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)}u_{0t}^2, B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle -\right.$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0, \frac{\partial^2\tilde{u}(\lambda)}{\partial t^2}\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle -$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0, \frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B_{\tilde{u}(\lambda)})(u-u_0)\right\rangle -$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0, \frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\tilde{P}^{*\prime}_{3\tilde{u}(\lambda)}\left(B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0);\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle -$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0, \frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B'_{\tilde{u}(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle -$$

$$-\lambda^2\left\langle \tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)}(u_t-u_{0t})^2, B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle +$$

$$+2\lambda\left\langle u-u_0, B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)}u_{0t}(u_t-u_{0t})\right\rangle +$$

$$+2\lambda^2\left\langle u-u_0, B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)}(u_t-u_{0t})^2\right\rangle -$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0, \tilde{P}^{*\prime}_{2\tilde{u}(\lambda)}\left(B_{\tilde{u}(\lambda)}(u_t-u_{0t});\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle -$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0, \tilde{P}^*_{2\tilde{u}(\lambda)}B'_{\tilde{u}(\lambda)}\left(u_t-u_{0t};\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle\Bigg] d\lambda dt =$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^1 \left[\left\langle \tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)}\left(\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)^2, B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle -\right.$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0, \frac{\partial^2\tilde{u}(\lambda)}{\partial t^2}\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle -$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0, \frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B_{\tilde{u}(\lambda)}\right)(u-u_0)\right\rangle -$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\tilde P^{*\prime}_{3\tilde u(\lambda)}\left(B_{\tilde u(\lambda)}(u-u_0);\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\tilde P^{*}_{3\tilde u(\lambda)}B'_{\tilde u(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\tilde P^{*\prime}_{2\tilde u(\lambda)}\left(B_{\tilde u(\lambda)}(u_t-u_{0t});\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\tilde P^{*}_{2\tilde u(\lambda)}B'_{\tilde u(\lambda)}\left(u_t-u_{0t};\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle\Bigg]d\lambda dt. \qquad (1.102)$$

Учитывая равенства (1.100) - (1.102), получаем

$$F[u]=\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{0}^{1}\Big[\left\langle\tilde Q(\tilde u(\lambda)),B_{\tilde u(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle+$$

$$+2\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde P^{*}_{2\tilde u(\lambda)}B_{\tilde u(\lambda)}\right)(u-u_0),\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right\rangle-$$

$$-\left\langle B^{*}_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{1\tilde u(\lambda)}(u-u_0),\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(B^{*}_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}\right)(u-u_0),u-u_0\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\left(B^{*}_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}\right)(u_t-u_{0t}),u-u_0\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle\frac{\partial}{\partial t}B^{*\prime}_{\tilde u(\lambda)}\left(\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}(u-u_0);\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right),u-u_0\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle\frac{\partial}{\partial t}B^{*}_{\tilde u(\lambda)}\tilde P'_{2\tilde u(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right),u-u_0\right\rangle+$$

$$+\lambda\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\left(B^{*}_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{1\tilde u(\lambda)}\right)(u-u_0),u-u_0\right\rangle+$$

$$+\lambda\left\langle B^{*\prime}_{\tilde u(\lambda)}\left(\tilde P_{1\tilde u(\lambda)}(u-u_0);\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right),u-u_0\right\rangle+$$

$$+\lambda\left\langle B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P'_{1\tilde u(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right),u-u_0\right\rangle-$$

$$-\left\langle\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde P^*_{2\tilde u(\lambda)}B_{\tilde u(\lambda)}\right)(u-u_0)\right\rangle-$$

$$-\left\langle\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t},\tilde P^{*\prime}_{2\tilde u(\lambda)}\left(B_{\tilde u(\lambda)}(u-u_0);\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle-$$

$$-\left\langle\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t},\tilde P^*_{2\tilde u(\lambda)}B'_{\tilde u(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle-$$

$$-\left\langle\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t},\tilde P^*_{2\tilde u(\lambda)}B_{\tilde u(\lambda)}(u_t-u_{0t})\right\rangle+$$

$$+\lambda\left\langle u-u_0,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}\right)(u-u_0)\right\rangle+$$

$$+2\lambda\left\langle u-u_0,\frac{\partial}{\partial t}\left(B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}\right)(u_t-u_{0t})\right\rangle+$$

$$+2\lambda\left\langle u-u_0,\frac{\partial}{\partial t}B^{*\prime}_{\tilde u(\lambda)}\left(\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}(u-u_0);\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle+$$

$$+2\lambda\left\langle u-u_0,\frac{\partial}{\partial t}B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P'_{2\tilde u(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle+$$

$$+2\lambda\left\langle u-u_0,B^{*\prime}_{\tilde u(\lambda)}\left(\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}(u_t-u_{0t});\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle+$$

$$+2\lambda\left\langle u-u_0,B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P'_{2\tilde u(\lambda)}\left(u_t-u_{0t};\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle+$$

$$+\lambda\left\langle u-u_0,B^{*\prime\prime}_{\tilde u(\lambda)}\left(\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}(u-u_0);\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t};\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle+$$

$$+2\lambda\left\langle u-u_0,B^{*\prime}_{\tilde u(\lambda)}\left(\tilde P'_{2\tilde u(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right);\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle+$$

$$+\lambda\left\langle u-u_0,B^{*\prime}_{\tilde u(\lambda)}\left(\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}(u-u_0);\frac{\partial^2\tilde u(\lambda)}{\partial t^2}\right)\right\rangle+$$

$$+\lambda\left\langle u-u_0, B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}''_{2\tilde{u}(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t};\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle+$$

$$+\lambda\left\langle u-u_0, B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}'_{2\tilde{u}(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial^2\tilde{u}(\lambda)}{\partial t^2}\right)\right\rangle+$$

$$+\left\langle\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t},\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\frac{\partial^2\tilde{u}(\lambda)}{\partial t^2}\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B_{\tilde{u}(\lambda)}\right)(u-u_0)\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\tilde{P}^{*\prime}_{3\tilde{u}(\lambda)}\left(B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0);\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B'_{\tilde{u}(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\tilde{P}^{*\prime}_{2\tilde{u}(\lambda)}\left(B_{\tilde{u}(\lambda)}(u_t-u_{0t});\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\tilde{P}^*_{2\tilde{u}(\lambda)}B'_{\tilde{u}(\lambda)}\left(u_t-u_{0t};\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle\Bigg]\,d\lambda dt+$$

$$+F[u_0]=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1\left[\left\langle\tilde{Q}(\tilde{u}(\lambda)),B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle+\right.$$

$$+\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{P}^*_{2\tilde{u}(\lambda)}B_{\tilde{u}(\lambda)}\right)(u-u_0),\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right\rangle-$$

$$-\left\langle\tilde{P}_{1\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0),B_{\tilde{u}(\lambda)}\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right\rangle-$$

$$-\lambda\left\langle\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)}\right)(u-u_0),u-u_0\right\rangle+$$

$$+\lambda\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\left(B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}_{1\tilde{u}(\lambda)}\right)(u-u_0),u-u_0\right\rangle-$$

$$-\left\langle\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)}(u_t-u_{0t}),B_{\tilde{u}(\lambda)}\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right\rangle-$$

$$-\left\langle\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t},B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)}\left(\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}(u-u_0)\right)\right\rangle+$$

$$+2\lambda\left\langle u-u_0,\frac{\partial}{\partial t}\tilde{P}^{*\prime}_{2\tilde{u}(\lambda)}\left(B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0);\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle+$$

$$+2\lambda\left\langle u-u_0,\frac{\partial}{\partial t}\tilde{P}^{*}_{2\tilde{u}(\lambda)}B'_{\tilde{u}(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\tilde{P}^{*\prime}_{1\tilde{u}(\lambda)}\left(B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0);\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\tilde{P}^{*}_{1\tilde{u}(\lambda)}B'_{\tilde{u}(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle+$$

$$+2\lambda\left\langle u-u_0,\tilde{P}^{*\prime}_{2\tilde{u}(\lambda)}\left(B_{\tilde{u}(\lambda)}(u_t-u_{0t});\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle+$$

$$+2\lambda\left\langle u-u_0,\tilde{P}^{*}_{2\tilde{u}(\lambda)}B'_{\tilde{u}(\lambda)}\left(u_t-u_{0t};\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle+$$

$$+\lambda\left\langle u-u_0,\tilde{P}^{*\prime\prime}_{2\tilde{u}(\lambda)}\left(B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0);\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t};\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle+$$

$$+2\lambda\left\langle u-u_0,\tilde{P}^{*\prime}_{2\tilde{u}(\lambda)}\left(B'_{\tilde{u}(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right);\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle+$$

$$+\lambda\left\langle u-u_0,\tilde{P}^{*\prime}_{2\tilde{u}(\lambda)}\left(B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0);\frac{\partial^2\tilde{u}(\lambda)}{\partial t^2}\right)\right\rangle+$$

$$+\lambda\left\langle u-u_0,\tilde{P}^{*}_{2\tilde{u}(\lambda)}B''_{\tilde{u}(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t};\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle+$$

$$+\lambda\left\langle u-u_0,\tilde{P}^{*}_{2\tilde{u}(\lambda)}B'_{\tilde{u}(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial^2\tilde{u}(\lambda)}{\partial t^2}\right)\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\frac{\partial^2\tilde{u}(\lambda)}{\partial t^2}\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B_{\tilde{u}(\lambda)}\right)(u-u_0)\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\tilde{P}^{*\prime}_{3\tilde{u}(\lambda)}\left(B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0);\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\tilde{P}^*_{3\tilde{u}(\lambda)}B'_{\tilde{u}(\lambda)}\left(u-u_0;\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\tilde{P}^{*\prime}_{2\tilde{u}(\lambda)}\left(B_{\tilde{u}(\lambda)}(u_t-u_{0t});\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle-$$

$$-2\lambda\left\langle u-u_0,\tilde{P}^*_{2\tilde{u}(\lambda)}B'_{\tilde{u}(\lambda)}\left(u_t-u_{0t};\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right)\right\rangle\Bigg]d\lambda dt+$$

$$+F[u_0]=\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^1\Big[\big\langle\tilde{Q}(\tilde{u}(\lambda)),B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\big\rangle+$$

$$+\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\left(B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)}\right)(u-u_0),\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right\rangle-$$

$$-\left\langle\tilde{P}_{1\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0),B_{\tilde{u}(\lambda)}\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right\rangle-$$

$$-\lambda\left\langle\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)}\right)(u-u_0),u-u_0\right\rangle+$$

$$+\lambda\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\left(B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}_{1\tilde{u}(\lambda)}\right)(u-u_0),u-u_0\right\rangle-$$

$$-\left\langle\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)}(u_t-u_{0t}),B_{\tilde{u}(\lambda)}\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right\rangle-$$

$$-\left\langle B_{\tilde{u}(\lambda)}\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t},\tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)}\left(\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}(u-u_0)\right)\right\rangle+$$

$$+\lambda\left\langle B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P'_{1\tilde u(\lambda)}\left(\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t};u-u_0\right),u-u_0\right\rangle+$$

$$+\lambda\left\langle u-u_0,\left[B'_{\tilde u(\lambda)}\left(\cdot;u-u_0\right)\right]^*\tilde P_{1\tilde u(\lambda)}\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right\rangle-$$

$$-\lambda\left\langle u-u_0,\left[\tilde P'_{1\tilde u(\lambda)}\left(\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t};\cdot\right)\right]^*B_{\tilde u(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle-$$

$$-\lambda\left\langle u-u_0,\left[B'_{\tilde u(\lambda)}\left(u-u_0;\cdot\right)\right]^*\tilde P_{1\tilde u(\lambda)}\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right\rangle+$$

$$+\lambda\left\langle u-u_0,B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P'_{2\tilde u(\lambda)}\left(\frac{\partial^2\tilde u(\lambda)}{\partial t^2};u-u_0\right)\right\rangle+$$

$$+\lambda\left\langle u-u_0,\left[B'_{\tilde u(\lambda)}\left(\cdot;u-u_0\right)\right]^*\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}\frac{\partial^2\tilde u(\lambda)}{\partial t^2}\right\rangle-$$

$$-\lambda\left\langle u-u_0,\left[\tilde P'_{2\tilde u(\lambda)}\left(\frac{\partial^2\tilde u(\lambda)}{\partial t^2};\cdot\right)\right]^*B_{\tilde u(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle-$$

$$-\lambda\left\langle u-u_0,\left[B'_{\tilde u(\lambda)}\left(u-u_0;\cdot\right)\right]^*\tilde P_{2\tilde u(\lambda)}\frac{\partial^2\tilde u(\lambda)}{\partial t^2}\right\rangle+$$

$$+\lambda\left\langle u-u_0,B^*_{\tilde u(\lambda)}\tilde P'_{3\tilde u(\lambda)}\left(\left(\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right)^2;u-u_0\right)\right\rangle+$$

$$+\lambda\left\langle u-u_0,\left[B'_{\tilde u(\lambda)}\left(\cdot;u-u_0\right)\right]^*\tilde P_{3\tilde u(\lambda)}\left(\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right)^2\right\rangle-$$

$$-\lambda\left\langle u-u_0,\left[\tilde P'_{3\tilde u(\lambda)}\left(\left(\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right)^2;\cdot\right)\right]^*B_{\tilde u(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle-$$

$$-\lambda\left\langle u-u_0,\left[B'_{\tilde u(\lambda)}\left(u-u_0;\cdot\right)\right]^*\tilde P_{3\tilde u(\lambda)}\left(\frac{\partial\tilde u(\lambda)}{\partial t}\right)^2\right\rangle\Bigg]d\lambda dt+$$

$$+F[u_0]=\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^1\left[\left\langle\tilde Q(\tilde u(\lambda)),B_{\tilde u(\lambda)}(u-u_0)\right\rangle+\right.$$

$$+\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left(B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)}\right)(u-u_0), \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right\rangle -$$

$$-\left\langle \tilde{P}_{1\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0), B_{\tilde{u}(\lambda)}\frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right\rangle -$$

$$-\lambda\left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)}\right)(u-u_0), u-u_0\right\rangle +$$

$$+\lambda\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left(B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}_{1\tilde{u}(\lambda)}\right)(u-u_0), u-u_0\right\rangle -$$

$$-\left\langle \tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)}(u_t-u_{0t}), B_{\tilde{u}(\lambda)}\frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right\rangle -$$

$$-\left\langle \tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)}\left(\frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}(u-u_0)\right), B_{\tilde{u}(\lambda)}\frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right\rangle\Bigg] d\lambda dt + F[u_0],$$

откуда, используя (1.95) - (1.98), получаем (1.94). □

Замечание 1.8. Отметим, что в данном случае обобщенный лагранжиан $L[u, u_t]$ имеет вид

$$L[u,u_t] = \left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_t u), B_u u_t\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u_t, B_u u_t\right\rangle +$$

$$+\left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_1(u), B_u u_t\right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B^*_u\tilde{\mathfrak{R}}_{2u})u, u_t\right\rangle + \tilde{\mathfrak{B}}[u]. \tag{1.103}$$

Замечание 1.9. Иногда функционал $F[u]$ вида (1.94) будем обозначать также $F^{t_1}[u]$.

Замечание 1.10. Если оператор N вида (1.13) является квазипотенциальным на $D(N)$ относительно билинейной формы (1.7), то функционал F имеет следующий вид:

$$F[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1}\left\{\left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_t u), u_t\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u_t, u_t\right\rangle +\right.$$

$$+\left\langle \tilde{\mathcal{R}}_1(u), u_t \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \tilde{\mathcal{R}}_{2u}}{\partial t} u, u_t \right\rangle + \tilde{\mathcal{B}}[u] \Bigg\} dt + F[u_0], \qquad (1.104)$$

где

$$\Phi(\tilde{\mathcal{R}}_1(u), u_t) = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \left\langle -\tilde{P}_{1\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0), \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} \right\rangle d\lambda dt, \qquad (1.105)$$

$$\Phi(\tilde{\mathcal{R}}_{2u} u_t, u_t) = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \left\langle -\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)}(u_t - u_{0_t}), \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} \right\rangle d\lambda dt, \qquad (1.106)$$

$$\Phi(\tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_t u), u_t) =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \left\langle -\tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)} \left(\frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}(u-u_0) \right), \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} \right\rangle d\lambda dt, \qquad (1.107)$$

$$\tilde{\mathcal{B}}[u] = \int_0^1 \left[\left\langle \tilde{Q}(\tilde{u}(\lambda)), u-u_0 \right\rangle + \lambda \left\langle \frac{\partial \tilde{P}_{1\tilde{u}(\lambda)}}{\partial t}(u-u_0), u-u_0 \right\rangle - \right.$$
$$\left. - \lambda \left\langle \frac{\partial^2 \tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)}}{\partial t^2}(u-u_0), u-u_0 \right\rangle \right] d\lambda, \qquad (1.108)$$

u_0 - фиксированный элемент из $D(N)$.

Замечание 1.11. Если оператор N вида (1.13) является B_u-потенциальным на $D(N)$ относительно билинейной формы (1.7), то функционал F_N имеет следующий вид:

$$F_N[u] = \int_{t_0}^{t_1} \{ \langle \mathcal{R}_{3u}(u_t u), B_u u_t \rangle + \langle \mathcal{R}_{2u} u_t, B_u u_t \rangle +$$

$$+\langle \mathcal{R}_1(u), B_u u_t\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B_u^*\mathcal{R}_{2u})u, u_t \right\rangle + \mathcal{B}[u] \Bigg\} dt + F_N[u_0], \quad (1.109)$$

где

$$\Phi(\mathcal{R}_1(u), B_u u_t) = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 \left\langle -P_{1\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0), B_{\tilde{u}(\lambda)}\frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right\rangle d\lambda dt, \quad (1.110)$$

$$\Phi(\mathcal{R}_{2u}u_t, B_u u_t) = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 \left\langle -P_{2\tilde{u}(\lambda)}(u_t-u_{0_t}), B_{\tilde{u}(\lambda)}\frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right\rangle d\lambda dt, \quad (1.111)$$

$$\Phi(\mathcal{R}_{3u}(u_t u), B_u u_t) =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 \left\langle -P_{3\tilde{u}(\lambda)}\left(\frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}(u-u_0)\right), B_{\tilde{u}(\lambda)}\frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right\rangle d\lambda dt, \quad (1.112)$$

$$\mathcal{B}[u] = \int_0^1 \Big[\langle Q(\tilde{u}(\lambda)), B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\rangle +$$
$$+\lambda \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B^*_{\tilde{u}(\lambda)}P_{1\tilde{u}(\lambda)})(u-u_0), u-u_0\right\rangle -$$
$$-\lambda \left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2}(B^*_{\tilde{u}(\lambda)}P_{2\tilde{u}(\lambda)})(u-u_0), u-u_0\right\rangle\Big] d\lambda, \quad (1.113)$$

u_0 - фиксированный элемент из $D(N)$.

Замечание 1.12. Если оператор N вида (1.13) является потенциальным на $D(N)$ относительно билинейной формы (1.7), то функционал F_N имеет следующий вид:

$$F_N[u] = \int_{t_0}^{t_1} \{\langle \mathcal{R}_{3u}(u_t u), u_t\rangle + \langle \mathcal{R}_{2u}u_t, u_t\rangle +$$

$$+\langle \mathcal{R}_1(u), u_t\rangle - \left\langle \frac{\partial \mathcal{R}_{2u}}{\partial t} u, u_t \right\rangle + \mathcal{B}[u] \Bigg\} dt + F_N[u_0], \qquad (1.114)$$

где

$$\Phi(\mathcal{R}_1(u), u_t) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_0^1 \left\langle -P_{1\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0), \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} \right\rangle d\lambda dt, \qquad (1.115)$$

$$\Phi(\mathcal{R}_{2u} u_t, u_t) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_0^1 \left\langle -P_{2\tilde{u}(\lambda)}(u_t-u_{0_t}), \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} \right\rangle d\lambda dt, \qquad (1.116)$$

$$\Phi(\mathcal{R}_{3u}(u_t u), u_t) =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_0^1 \left\langle -P_{3\tilde{u}(\lambda)} \left(\frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} (u-u_0) \right), \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} \right\rangle d\lambda dt, \qquad (1.117)$$

$$\mathcal{B}[u] = \int\limits_0^1 \Bigg[\langle Q(\tilde{u}(\lambda)), u-u_0\rangle + \lambda \left\langle \frac{\partial P_{1\tilde{u}(\lambda)}}{\partial t}(u-u_0), u-u_0 \right\rangle -$$

$$- \lambda \left\langle \frac{\partial^2 P_{2\tilde{u}(\lambda)}}{\partial t^2}(u-u_0), u-u_0 \right\rangle \Bigg] d\lambda, \qquad (1.118)$$

u_0 - фиксированный элемент из $D(N)$.

1.5 Структура уравнения движения в случае квази-B_u-потенциальности его оператора

Выясним структуру уравнения движения (1.13) в случае квази-B_u-потенциальной системы с бесконечным числом степеней свободы.

Теорема 1.6. *Пусть* $D_t^* = -D_t$ *на* $D(N'_u, B_u)$, $\exists\, B_u^{-1}$. *Условия (1.16) - (1.22) выполняются тогда и только тогда, когда операторы* $P_{iu}\,(i=\overline{1,3})$ *и* Q *имеют вид*

$$P_{2u}u_{tt} = \Lambda_{2u}u_{tt} - \tag{1.119}$$
$$-(B_u^{-1})^*(u\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}^* B_u u_{tt}) - \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(uu_{tt}) - (B_u^{-1})^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}^* B_u u_{tt} - \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u_{tt},$$

$$P_{1u}u_t = -(B_u^{-1})^*\left(u\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}^* B_u)u_t\right) - (B_u^{-1})^*\frac{\partial}{\partial t}(B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{3u})(uu_t) -$$
$$-(B_u^{-1})^*\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}^* B_u)u_t + (B_u^{-1})^*\tilde{\mathfrak{R}}_{1u}'^* B_u u_t + (B_u^{-1})^*[B'_u(u_t;\cdot)]^*\tilde{\mathfrak{R}}_1(u) -$$
$$-(B_u^{-1})^* B_u^{*\prime}(\tilde{\mathfrak{R}}_1(u);u_t) - \tilde{\mathfrak{R}}'_{1u}u_t - (B_u^{-1})^*\left(\frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}(\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u;\cdot)\right)^* u_t -$$
$$-(B_u^{-1})^*\left(\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}'_{2u}(u;\cdot)\right)^* u_t - (B_u^{-1})^*\left(\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}\right)^* u_t +$$
$$+(B_u^{-1})^*\frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}(\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u;u_t) + (B_u^{-1})^*\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}'_{2u}(u;u_t) + \Lambda_{1u}u_t, \tag{1.120}$$

$$P_{3u}u_t^2 = (B_u^{-1})^*(\tilde{\mathfrak{R}}'_{3u}(u_t u;\cdot))^* B_u u_t - (B_u^{-1})^*(u\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}^{*\prime}(B_u u_t;u_t)) -$$
$$-(B_u^{-1})^*(u\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}^* B'_u(u_t;u_t)) - (B_u^{-1})^* B_u^{*\prime}(\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_t u);u_t) - \tilde{\mathfrak{R}}'_{3u}(u_t u;u_t) -$$
$$-\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}u_t^2 + (B_u^{-1})^*[B'_u(u_t;\cdot)]^*\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_t u) + (B_u^{-1})^*[\tilde{\mathfrak{R}}'_{2u}(u_t;\cdot)]^* B_u u_t -$$
$$-(B_u^{-1})^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}^{*\prime}(B_u u_t;u_t) - (B_u^{-1})^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}^* B'_u(u_t;u_t) - \tilde{\mathfrak{R}}'_{2u}(u_t;u_t) -$$
$$-(B_u^{-1})^* B_u^{*\prime}(\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u_t;u_t) + (B_u^{-1})^*[B'_u(u_t;\cdot)]^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u_t + \Lambda_{3u}u_t^2, \tag{1.121}$$

$$Q(u) = \Lambda_4(u) + (B_u{-}grad)_{\Phi_1}\tilde{\mathfrak{B}}[u] -$$
$$- (B_u^{-1})^*\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_1(u) + (B_u^{-1})^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}(B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u})u. \tag{1.122}$$

Доказательство. Если $D_t^* = -D_t$ на $D(N_u', B_u)$ и оператор N вида (1.13) является квази-B_u-потенциальным на $D(N)$ относительно билинейной формы (1.7), то по теореме 1.5 существует функционал F вида

$$F[u] = \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ \Big\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_t u), B_u u_t \Big\rangle + \Big\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{2u} u_t, B_u u_t \Big\rangle +$$

$$+ \Big\langle \tilde{\mathfrak{R}}_1(u), B_u u_t \Big\rangle - \Big\langle \frac{\partial}{\partial t}(B_u^* \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}) u, u_t \Big\rangle + \tilde{\mathfrak{B}}[u] \Big\} dt + F[u_0].$$

Найдем вариацию функционала F. Имеем

$$\delta F[u,h] = \int_{t_0}^{t_1} \Big[\Big\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}'(u_t u; h) + \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(h_t u) + \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_t h), B_u u_t \Big\rangle +$$

$$+ \Big\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_t u), B_u h_t + B_u'(u_t; h) \Big\rangle + \Big\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}'(u_t; h) + \tilde{\mathfrak{R}}_{2u} h_t, B_u u_t \Big\rangle +$$

$$+ \Big\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{2u} u_t, B_u h_t + B_u'(u_t; h) \Big\rangle + \Big\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{1u}' h, B_u u_t \Big\rangle +$$

$$+ \Big\langle \tilde{\mathfrak{R}}_1(u), B_u h_t + B_u'(u_t; h) \Big\rangle - \Big\langle \frac{\partial}{\partial t} B_u^{*\prime}(\tilde{\mathfrak{R}}_{2u} u; h), u_t \Big\rangle -$$

$$- \Big\langle \frac{\partial}{\partial t} B_u^* \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}'(u; h) + \frac{\partial}{\partial t}(B_u^* \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}) h, u_t \Big\rangle - \Big\langle \frac{\partial}{\partial t}(B_u^* \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}) u, h_t \Big\rangle +$$

$$+ \Big\langle (B_u {-} grad)_{\Phi_1} \tilde{\mathfrak{B}}[u], B_u h \Big\rangle \Big] dt = \int_{t_0}^{t_1} \Big[\Big\langle \Big[\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}'(u_t u; \cdot) \Big]^* B_u u_t, h \Big\rangle +$$

$$+ \Big\langle h_t, u \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}^* B_u u_t \Big\rangle + \Big\langle h, u_t \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}^* B_u u_t \Big\rangle + \Big\langle B_u^* \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_t u), h_t \Big\rangle +$$

$$+ \Big\langle [B_u'(u_t; \cdot)]^* \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_t u), h \Big\rangle + \Big\langle \Big[\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}'(u_t; \cdot) \Big]^* B_u u_t, h \Big\rangle +$$

$$+ \Big\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}^* B_u u_t, h_t \Big\rangle + \Big\langle B_u^* \tilde{\mathfrak{R}}_{2u} u_t, h_t \Big\rangle + \Big\langle h, \tilde{\mathfrak{R}}_{1u}^{\prime *} B_u u_t \Big\rangle +$$

$$+\left\langle \left[B_u'(u_t;\cdot)\right]^* \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u_t, h\right\rangle + \left\langle \left[B_u'(u_t;\cdot)\right]^* \tilde{\mathfrak{R}}_1(u), h\right\rangle +$$

$$+\left\langle B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_1(u), h_t\right\rangle - \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}\left(\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u;\cdot\right)\right]^* u_t, h\right\rangle -$$

$$-\left\langle \left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}'(u;\cdot)\right]^* u_t, h\right\rangle - \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial t}(B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u})\right]^* u_t, h\right\rangle -$$

$$-\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u})u, h_t\right\rangle + \left\langle (B_u{-}grad)_{\Phi_1}\tilde{\mathfrak{B}}[u], B_u h\right\rangle\Bigg] dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[\left\langle \left[\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}'(u_t u;\cdot)\right]^* B_u u_t, h\right\rangle - \left\langle h, u\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}^* B_u\right)u_t + \right.\right.$$

$$\left.+u_t\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}^* B_u u_t + u\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}^{*\prime}\left(B_u u_t; u_t\right) + u\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}^* B_u'\left(u_t; u_t\right) + u\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}^* B_u u_{tt}\right\rangle +$$

$$+\left\langle h, u_t\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}^* B_u u_t\right\rangle - \left\langle h, \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}\right)(u_t u) + B_u^{*\prime}\left(\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_t u); u_t\right) + \right.$$

$$\left.+B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}'(u_t u; u_t) + B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_{tt}u) + B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}u_t^2\right\rangle +$$

$$+\left\langle \left[B_u'(u_t;\cdot)\right]^* \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_t u), h\right\rangle + \left\langle \left[\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}'(u_t;\cdot)\right]^* B_u u_t, h\right\rangle -$$

$$-\langle h, \frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}^* B_u\right)u_t + \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}^{*\prime}(B_u u_t; u_t) + \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}^* B_u'(u_t; u_t) + \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}^* B_u u_{tt}\rangle -$$

$$-\langle h, \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}\right)u_t + B_u^{*\prime}(\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u_t; u_t) + B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}'(u_t; u_t) + B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u_{tt}\rangle +$$

$$+\left\langle \left[B_u'(u_t;\cdot)\right]^* \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u_t, h\right\rangle + \left\langle h, \tilde{\mathfrak{R}}_{1u}'^* B_u u_t\right\rangle +$$

$$+\left\langle \left[B_u'(u_t;\cdot)\right]^* \tilde{\mathfrak{R}}_1(u), h\right\rangle - \left\langle h, \frac{\partial}{\partial t}B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_1(u) + B_u^{*\prime}(\tilde{\mathfrak{R}}_1(u); u_t) + \right.$$

$$\left.+B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{1u}' u_t\right\rangle - \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}(\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u;\cdot)\right]^* u_t, h\right\rangle -$$

$$-\left\langle \left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}'(u;\cdot)\right]^* u_t, h\right\rangle - \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial t}(B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u})\right]^* u_t, h\right\rangle +$$

$$+\left\langle h, \frac{\partial^2}{\partial t^2}(B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_{2u})u + \frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}(\tilde{\mathcal{R}}_{2u}u; u_t) + \frac{\partial}{\partial t}B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_{2u}'(u; u_t)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial t}(B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_{2u})u_t\right\rangle + \left\langle (B_u{-}grad)_{\Phi_1}\tilde{\mathcal{B}}[u], B_u h\right\rangle\Bigg]\, dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big\langle B_u h, -(B_u^{-1})^*(u\tilde{\mathcal{R}}_{3u}^* B_u u_{tt}) - \tilde{\mathcal{R}}_{3u}(uu_{tt}) - (B_u^{-1})^*\tilde{\mathcal{R}}_{2u}^* B_u u_{tt} -$$

$$-\tilde{\mathcal{R}}_{2u}u_{tt} - (B_u^{-1})^*\left(u\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\mathcal{R}}_{3u}^* B_u)u_t\right) - (B_u^{-1})^*\frac{\partial}{\partial t}(B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_{3u})(uu_t) -$$

$$-(B_u^{-1})^*\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\mathcal{R}}_{2u}^* B_u)u_t + (B_u^{-1})^*\tilde{\mathcal{R}}_{1u}^{\prime *} B_u u_t + (B_u^{-1})^*[B_u'(u_t;\cdot)]^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u) -$$

$$-(B_u^{-1})^* B_u^{*\prime}(\tilde{\mathcal{R}}_1(u); u_t) - \tilde{\mathcal{R}}_{1u}' u_t - (B_u^{-1})^*\left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}(\tilde{\mathcal{R}}_{2u}u;\cdot)\right]^* u_t -$$

$$-(B_u^{-1})^*\left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_{2u}'(u;\cdot)\right]^* u_t - (B_u^{-1})^*\left[\frac{\partial}{\partial t}(B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_{2u})\right]^* u_t +$$

$$+(B_u^{-1})^*\frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}(\tilde{\mathcal{R}}_{2u}u; u_t) + (B_u^{-1})^*\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_{2u}'(u; u_t) +$$

$$+(B_u^{-1})^*[\tilde{\mathcal{R}}_{3u}'(u_t u;\cdot)]^* B_u u_t - (B_u^{-1})^*(u\tilde{\mathcal{R}}_{3u}^{*\prime}(B_u u_t; u_t)) -$$

$$-(B_u^{-1})^*(u\tilde{\mathcal{R}}_{3u}^* B_u'(u_t; u_t)) - (B_u^{-1})^* B_u^{*\prime}(\tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_t u); u_t) - \tilde{\mathcal{R}}_{3u}'(u_t u; u_t) -$$

$$-\tilde{\mathcal{R}}_{3u}u_t^2 + (B_u^{-1})^*[B_u'(u_t;\cdot)]^*\tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_t u) + (B_u^{-1})^*[\tilde{\mathcal{R}}_{2u}'(u_t;\cdot)]^* B_u u_t -$$

$$-(B_u^{-1})^*\tilde{\mathcal{R}}_{2u}^{*\prime}(B_u u_t; u_t) - (B_u^{-1})^*\tilde{\mathcal{R}}_{2u}^* B_u'(u_t; u_t) -$$

$$-(B_u^{-1})^* B_u^{*\prime}(\tilde{\mathcal{R}}_{2u}u_t; u_t) - \tilde{\mathcal{R}}_{2u}'(u_t; u_t) + (B_u^{-1})^*[B_u'(u_t;\cdot)]^*\tilde{\mathcal{R}}_{2u}u_t -$$

$$-(B_u^{-1})^*\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u) + (B_u^{-1})^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}(B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_{2u})u +$$

$$+(B_u{-}grad)_{\Phi_1}\tilde{\mathcal{B}}[u]\Big\rangle\, dt.$$

Учитывая (1.15), получаем достаточность представления (1.119) - (1.122). Обратно, если имеют место (1.119) - (1.122), то условия (1.16) - (1.22) выполняются, так как они являются условиями B_u-потенциальности оператора $\tilde{N} = N - \Lambda$. $\square$

Полученный результат позволяет по структуре оператора N со второй производной по времени определить, допускает ли заданное уравнение движения представление в форме уравнения Лагранжа с не-B_u-потенциальной плотностью силы, и в случае равенств (1.119) - (1.122) построить функционал (1.94).

Замечание 1.13. Если $B_u \equiv I$ - тождественный оператор (то есть оператор N вида (1.13) является квазипотенциальным на $D(N)$ относительно заданной билинейной формы), то операторы $P_{iu}\,(i=\overline{1,3})$ и Q имеют следующую структуру:

$$P_{2u} = \Lambda_{2u} - u\tilde{\mathfrak{R}}^*_{3u} - \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u(\cdot)) - \tilde{\mathfrak{R}}^*_{2u} - \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}, \tag{1.123}$$

$$P_{1u} = -u\frac{\partial\tilde{\mathfrak{R}}^*_{3u}}{\partial t} - \frac{\partial\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}}{\partial t}(u(\cdot)) - \frac{\partial\tilde{\mathfrak{R}}^*_{2u}}{\partial t} + \tilde{\mathfrak{R}}'^*_{1u} - \tilde{\mathfrak{R}}'_{1u} -$$
$$- \left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathfrak{R}}'_{2u}(u;\cdot)\right)^* - \left(\frac{\partial\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}}{\partial t}\right)^* + \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathfrak{R}}'_{2u}(u;\cdot) + \Lambda_{1u}, \tag{1.124}$$

$$P_{3u}u_t^2 = (\tilde{\mathfrak{R}}'_{3u}(u_t u;\cdot))^* u_t - u\tilde{\mathfrak{R}}^{*\prime}_{3u}(u_t;u_t) - \tilde{\mathfrak{R}}'_{3u}(u_t u;u_t) - \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}u_t^2 +$$
$$+ [\tilde{\mathfrak{R}}'_{2u}(u_t;\cdot)]^* u_t - \tilde{\mathfrak{R}}^{*\prime}_{2u}(u_t;u_t) - \tilde{\mathfrak{R}}'_{2u}(u_t;u_t) + \Lambda_{3u}u_t^2, \tag{1.125}$$

$$Q(u) = \Lambda_4(u) + grad_{\Phi_1}\tilde{\mathfrak{B}}[u] - \frac{\partial\tilde{\mathfrak{R}}_1(u)}{\partial t} + \frac{\partial^2\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}}{\partial t^2}u. \tag{1.126}$$

Замечание 1.14. Если $\Lambda \equiv 0$ (то есть оператор N вида (1.13) является B_u-потенциальным на $D(N)$ относительно заданной билинейной формы), то операторы $P_{iu}\,(i=\overline{1,3})$ и Q имеют следующую структуру:

$$P_{2u} = -(B_u^{-1})^*(u\mathfrak{R}^*_{3u}B_u(\cdot)) - \mathfrak{R}_{3u}(u(\cdot)) - (B_u^{-1})^*\mathfrak{R}^*_{2u}B_u - \mathfrak{R}_{2u}, \tag{1.127}$$

$$P_{1u}u_t = -(B_u^{-1})^* \left(u \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{R}_{3u}^* B_u) u_t \right) - (B_u^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} (B_u^* \mathcal{R}_{3u})(u u_t) -$$

$$-(B_u^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{R}_{2u}^* B_u) u_t + (B_u^{-1})^* \mathcal{R}_{1u}'^* B_u u_t + (B_u^{-1})^* [B_u'(u_t; \cdot)]^* \mathcal{R}_1(u) -$$

$$-(B_u^{-1})^* B_u^{*\prime}(\mathcal{R}_1(u); u_t) - \mathcal{R}_{1u}' u_t - (B_u^{-1})^* \left(\frac{\partial}{\partial t} B_u^{*\prime}(\mathcal{R}_{2u} u; \cdot) \right)^* u_t -$$

$$-(B_u^{-1})^* \left(\frac{\partial}{\partial t} B_u^* \mathcal{R}_{2u}'(u; \cdot) \right)^* u_t - (B_u^{-1})^* \left(\frac{\partial}{\partial t} B_u^* \mathcal{R}_{2u} \right)^* u_t +$$

$$+(B_u^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} B_u^{*\prime}(\mathcal{R}_{2u} u; u_t) + (B_u^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} B_u^* \mathcal{R}_{2u}'(u; u_t), \qquad (1.128)$$

$$P_{3u}u_t^2 = (B_u^{-1})^* (\mathcal{R}_{3u}'(u_t u; \cdot))^* B_u u_t - (B_u^{-1})^* (u \mathcal{R}_{3u}^{*\prime}(B_u u_t; u_t)) -$$

$$-(B_u^{-1})^* (u \mathcal{R}_{3u}^* B_u'(u_t; u_t)) - (B_u^{-1})^* B_u^{*\prime}(\mathcal{R}_{3u}(u_t u); u_t) - \mathcal{R}_{3u}'(u_t u; u_t) -$$

$$-\mathcal{R}_{3u} u_t^2 + (B_u^{-1})^* [B_u'(u_t; \cdot)]^* \mathcal{R}_{3u}(u_t u) + (B_u^{-1})^* [\mathcal{R}_{2u}'(u_t; \cdot)]^* B_u u_t -$$

$$-(B_u^{-1})^* \mathcal{R}_{2u}^{*\prime}(B_u u_t; u_t) - (B_u^{-1})^* \mathcal{R}_{2u}^* B_u'(u_t; u_t) - \mathcal{R}_{2u}'(u_t; u_t) -$$

$$-(B_u^{-1})^* B_u^{*\prime}(\mathcal{R}_{2u} u_t; u_t) + (B_u^{-1})^* [B_u'(u_t; \cdot)]^* \mathcal{R}_{2u} u_t, \qquad (1.129)$$

$$Q(u) = (B_u - grad)_{\Phi_1} \mathcal{B}[u] - (B_u^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} B_u^* \mathcal{R}_1(u) + (B_u^{-1})^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} (B_u^* \mathcal{R}_{2u}) u. \qquad (1.130)$$

Замечание 1.15. Если $\Lambda \equiv 0$, $B_u \equiv I$ - тождественный оператор (то есть оператор N вида (1.13) является потенциальным на $D(N)$ относительно заданной билинейной формы), то операторы $P_{iu}\,(i = \overline{1,3})$ и Q имеют следующую структуру:

$$P_{2u} = -u \mathcal{R}_{3u}^* - \mathcal{R}_{3u}(u(\cdot)) - \mathcal{R}_{2u}^* - \mathcal{R}_{2u}, \qquad (1.131)$$

$$P_{1u}=-u\frac{\partial\mathcal{R}_{3u}^{*}}{\partial t}-\frac{\partial\mathcal{R}_{3u}}{\partial t}(u(\cdot))-\frac{\partial\mathcal{R}_{2u}^{*}}{\partial t}+\mathcal{R}_{1u}^{\prime *}-\mathcal{R}_{1u}^{\prime}-$$
$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{R}_{2u}^{\prime}(u;\cdot)\right)^{*}-\left(\frac{\partial\mathcal{R}_{2u}}{\partial t}\right)^{*}+\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{R}_{2u}^{\prime}(u;\cdot),\tag{1.132}$$

$$P_{3u}u_t^2=(\mathcal{R}_{3u}^{\prime}(u_tu;\cdot))^{*}u_t-u\mathcal{R}_{3u}^{*\prime}(u_t;u_t)-\mathcal{R}_{3u}^{\prime}(u_tu;u_t)-\mathcal{R}_{3u}u_t^2+$$
$$+[\mathcal{R}_{2u}^{\prime}(u_t;\cdot)]^{*}u_t-\mathcal{R}_{2u}^{*\prime}(u_t;u_t)-\mathcal{R}_{2u}^{\prime}(u_t;u_t),\tag{1.133}$$

$$Q(u)=grad_{\Phi_1}\mathcal{B}[u]-\frac{\partial\mathcal{R}_1(u)}{\partial t}+\frac{\partial^2\mathcal{R}_{2u}}{\partial t^2}u.\tag{1.134}$$

Замечание 1.16. [143] Покажем, что при определенных условиях из равенств (1.131) - (1.134) может быть получена структура классических уравнений Биркгофа [29, 189].

Действительно, пусть $\mathcal{R}_3\equiv 0,\ \mathcal{R}_2\equiv 0,\ \mathcal{R}_1\equiv\mathcal{R}$.

В этом случае из равенств (1.131) - (1.134) получаем, что $P_{2u}\equiv 0,\ P_{3u}\equiv 0$ и

$$P_u\equiv P_{1u}=\mathcal{R}_u^{\prime *}-\mathcal{R}_u^{\prime},\tag{1.135}$$

$$Q(u)=grad_{\Phi_1}\mathcal{B}[u]-\frac{\partial\mathcal{R}(u)}{\partial t},\tag{1.136}$$

то есть уравнение (1.13) принимает вид

$$N(u)\equiv\left(\mathcal{R}_u^{\prime *}-\mathcal{R}_u^{\prime}\right)u_t+grad_{\Phi_1}\mathcal{B}[u]-\frac{\partial\mathcal{R}(u)}{\partial t}=0.\tag{1.137}$$

Отметим, что, как следует из (1.114), это уравнение является уравнением Лагранжа для функционала

$$F_N[u]=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left\{\langle\mathcal{R}(u),u_t\rangle+\mathcal{B}[u]\right\}dt.\tag{1.138}$$

Предположим также, что

$$\mathcal{R} = (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, ..., \mathcal{R}_{2n})^T, \qquad \mathcal{B} = -\boldsymbol{\mathcal{B}}, \tag{1.139}$$

где $\mathcal{R}_i$ $(i = \overline{1, 2n})$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ - функции, зависящие от переменной t и вектор-функции $u(t) = (u^1(t), u^2(t), ..., u^{2n}(t))^T$.

Из формулы (1.2) получаем

$$\mathcal{R}'_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial u^1} & \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial u^{2n}} \\ \frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial u^1} & \frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial u^{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{R}_{2n}}{\partial u^1} & \frac{\partial \mathcal{R}_{2n}}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{R}_{2n}}{\partial u^{2n}} \end{pmatrix}.$$

Найдем $\mathcal{R}'^*_u$. Для этого будем использовать классическую билинейную форму

$$\Phi(v, g) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{2n} v^i(t) \cdot g^i(t) dt. \tag{1.140}$$

Имеем

$$\Phi(\mathcal{R}'_u h, g) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial u^1} h^1 g^1 + \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial u^2} h^2 g^1 + ... + \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial u^{2n}} h^{2n} g^1 + \right.$$

$$+ \frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial u^1} h^1 g^2 + \frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial u^2} h^2 g^2 + ... + \frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial u^{2n}} h^{2n} g^2 + ... + \frac{\partial \mathcal{R}_{2n}}{\partial u^1} h^1 g^{2n} +$$

$$\left. + \frac{\partial \mathcal{R}_{2n}}{\partial u^2} h^2 g^{2n} + ... + \frac{\partial \mathcal{R}_{2n}}{\partial u^{2n}} h^{2n} g^{2n} \right) dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[h^1 \left(\frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial u^1} g^1 + \frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial u^1} g^2 + \right. \right.$$

$$\left. + ... + \frac{\partial \mathcal{R}_{2n}}{\partial u^1} g^{2n} \right) + h^2 \left(\frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial u^2} g^1 + \frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial u^2} g^2 + ... + \frac{\partial \mathcal{R}_{2n}}{\partial u^2} g^{2n} \right) + ... +$$

$$\left. + h^{2n} \left(\frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial u^{2n}} g^1 + \frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial u^{2n}} g^2 + ... + \frac{\partial \mathcal{R}_{2n}}{\partial u^{2n}} g^{2n} \right) \right] dt = \Phi(h, \mathcal{R}'^*_u g),$$

то есть

$$\mathcal{R}_u'^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial u^1} & \frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial \mathcal{R}_{2n}}{\partial u^1} \\ \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial u^2} & \frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial u^2} & \dots & \frac{\partial \mathcal{R}_{2n}}{\partial u^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial u^{2n}} & \frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial u^{2n}} & \dots & \frac{\partial \mathcal{R}_{2n}}{\partial u^{2n}} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathcal{R}_u'^* - \mathcal{R}_u' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial u^1} - \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial u^2} & \dots & \frac{\partial \mathcal{R}_{2n}}{\partial u^1} - \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial u^{2n}} \\ \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial u^2} - \frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial u^1} & 0 & \dots & \frac{\partial \mathcal{R}_{2n}}{\partial u^2} - \frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial u^{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial u^{2n}} - \frac{\partial \mathcal{R}_{2n}}{\partial u^1} & \frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial u^{2n}} - \frac{\partial \mathcal{R}_{2n}}{\partial u^2} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, из (1.137) получаем уравнения Биркгофа

$$N^i(u) \equiv \sum_{j=1}^{2n} \left(\frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial u^i} - \frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial u^j} \right) \dot{u}^j - \left[\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial u^i} + \frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial t} \right] = 0, \quad i = \overline{1, 2n},$$

а из (1.138) - известный функционал Пфаффа

$$F_N[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\mathcal{R}_i \cdot \dot{u}^i - \mathcal{B} \right] dt.$$

Пример 1.4. [102]

Рассмотрим уравнение движения вида

$$N(u) \equiv a_1 u_t^2 + b_1 u_x^2 + a_2 u u_{tt} + b_2 u u_{xx} = 0, \tag{1.141}$$

$$(x, t) \in Q_T = (0, l) \times (0, T),$$

где $u = u(x, t)$ - неизвестная функция; $a_i, b_i \, (i = 1, 2)$ - постоянные.

Положим

$D(N) =$

$$= \{u \in U = C^2(\overline{Q}_T) : u|_{t=0} = \varphi_1(x),\ u|_{t=T} = \varphi_2(x)\,(x \in (0,l)),$$
$$u|_{x=0} = \psi_1(t),\ u|_{x=l} = \psi_2(t)\,(t \in (0,T))\}, \tag{1.142}$$

где φ_i, ψ_i $(i = 1, 2)$ – заданные функции.

Обозначим $V = C(\overline{Q}_T)$ и зададим билинейную форму в виде

$$\Phi(v, g) = \int_0^T \int_0^l v(x,t) g(x,t) dx\, dt. \tag{1.143}$$

Покажем, что уравнение движения (1.141) допускает представление в форме уравнения Лагранжа при выполнении условий

$$b_2 = 2b_1,\ a_2 = 2a_1. \tag{1.144}$$

Действительно, в данном случае

$$\Lambda(u) \equiv 0,\ \ B_u \equiv I,\ \ P_{3u} \equiv a_1 I,\ \ P_{2u} = a_2 u I,$$
$$P_{1u} \equiv 0,\ \ Q(u) = b_1 u_x^2 + b_2 u u_{xx},$$

где I - тождественный оператор.

Далее,

$$P_{2u}^* = a_2 u I, \quad \frac{\partial P_{2u}^*}{\partial t} = 0, \quad P_{1u}^* = 0, \quad P_{3u}^* = a_1 I, \quad \frac{\partial^2 P_{2u}^*}{\partial t^2} = 0,$$
$$\frac{\partial P_{3u}^*}{\partial t} = 0, \quad P_{3u}(u_t(\cdot)) = a_1 u_t I, \quad Q'_u = 2b_1 u_x D_x + b_2 u_{xx} I + b_2 u D_x^2,$$
$$Q'^*_u = -2b_1 u_{xx} I - 2b_1 u_x D_x + 2b_2 u_{xx} I + 2b_2 u_x D_x + b_2 u D_x^2,$$
$$P_{2u}^{*\prime}(\cdot; u_t) = a_2 u_t I,\ \ P'_{1u}(u_t; \cdot) = 0,\ \ P_{1u}^{*\prime}(\cdot; u_t) = 0,\ \ [P'_{1u}(u_t; \cdot)]^* = 0,$$
$$\left(\frac{\partial P_{2u}^*}{\partial t}\right)'_u (\cdot; u_t) = 0, \quad \frac{\partial P_{2u}^{*\prime}}{\partial t}(\cdot; u_t) = 0, \quad P'_{2u}(u_{tt}; \cdot) = a_2 u_{tt} I,$$
$$P_{2u}^{*\prime}(\cdot; u_{tt}) = a_2 u_{tt} I, \quad [P'_{2u}(u_{tt}; \cdot)]^* = a_2 u_{tt} I, \quad P_{2u}^{*\prime\prime}(\cdot; u_t; u_t) = 0,$$
$$\frac{\partial P_{1u}^*}{\partial t} = 0, \quad P'_{3u}(u_t^2; \cdot) = 0, \quad [P'_{3u}(u_t^2; \cdot)]^* = 0, \quad P_{3u}^{*\prime}(\cdot; u_t) = 0.$$

Из (1.43) $\Longrightarrow a_2uI - a_2uI = 0$,

(1.44) $\Longrightarrow a_1u_tI - a_2u_tI + a_1u_tI = 0$,

(1.45) $\Longrightarrow 0 = 0$,

(1.46) $\Longrightarrow$ $2b_1u_xD_x + b_2u_{xx}I + b_2uD_x^2 + 2b_1u_{xx}I + 2b_1u_xD_x - 2b_2u_{xx}I - 2b_2u_xD_x - b_2uD_x^2 = 0$,

(1.47) $\Longrightarrow 0 = 0$,

(1.48) $\Longrightarrow a_2u_{tt}I - a_2u_{tt}I - a_2u_{tt}I + 2a_1u_{tt}I = 0$,

(1.49) $\Longrightarrow 0 = 0$.

Таким образом, при выполнении условий (1.144) оператор N вида (1.141) является потенциальным на $D(N)$ (1.142) относительно билинейной формы (1.143).

Построим действие по Гамильтону F_N. Из (1.110) - (1.113) находим

$$\mathcal{R}_{1u} = 0,\ \ \mathcal{R}_{2u} = -\frac{2}{3}a_1uI,\ \ \mathcal{R}_3 = -\frac{1}{3}a_1I,\ \ \mathcal{B}[u] = -b_1\int\limits_0^l uu_x^2dx.$$

Следовательно, из (1.109) получаем

$$F_N[u] = -\int\limits_0^T\int\limits_0^l u(a_1u_t^2 + b_1u_x^2)dxdt.$$

Пример 1.5. [12]

Рассмотрим систему уравнений, описывающую движение жидкости в пористой среде

$$\begin{cases} \rho[\partial_t v + (v,\nabla)v] = -\nabla p + \rho\mathbf{g} - (\alpha_0 + \varepsilon(v,\nabla p))v, \\ \partial_t\rho + divj = 0. \end{cases} \tag{1.145}$$

Эта система была предложена Ю.П. Рыбаковым.

Здесь $\rho = \rho(x,y,t)$, $\mathbf{g} = (0,g)^T$, $\alpha_0 = const$, $\varepsilon = const$, $v = (v^1,v^2)^T$, $divj = \partial_x(\rho v^1 - \rho\mathcal{D}\partial_x v^2)$, $\mathcal{D} = const$.

Перепишем (1.145) в координатной форме, полагая $u = (u^1,u^2,u^3)^T$, где $u^1 = v^1$, $u^2 = v^2$, $u^3 = p$.

Получим

$$\begin{cases} N^1(u) = 0, \\ N^2(u) = 0, \\ N^3(u) = 0, \end{cases} \tag{1.146}$$

где

$$N^1(u) \equiv \rho u^1_t + \rho u^1 u^1_x + \rho u^1_y u^2 + u^3_x + \alpha_0 u^1 + \varepsilon(u^1)^2 u^3_x + \varepsilon u^1 u^2 u^3_y,$$

$$N^2(u) \equiv \rho u^2_t + \rho u^1 u^2_x + \rho u^2 u^2_y + u^3_y - \rho g + \alpha_0 u^2 + \varepsilon u^1 u^2 u^3_x + \varepsilon (u^2)^2 u^3_y,$$

$$N^3(u) \equiv \rho_t + \rho_x u^1 + \rho u^1_x - \rho_x \mathcal{D} u^2_x - \mathcal{D}\rho u^2_{xx}.$$

Отметим, что в данном случае $(x,y,t) \in Q_T = (a,b)\times(c,d)\times(0,T)$, $u(x,y,t) = (u^1(x,y,t),u^2(x,y,t),u^3(x,y,t))^T$ - неизвестная вектор-функция, $N = (N^1,N^2,N^3)^T$.

Определим $D(N)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} D(N) = \{&u \in U = (U^1,U^2,U^3)^T, u^1 \in U^1 = C^{1,1,1}_{x,y,t}(\overline{Q_T}), \\ &u^2 \in U^2 = C^{2,1,1}_{x,y,t}(\overline{Q_T}),\ \ u^3 \in U^3 = C^{1,1,0}_{x,y,t}(\overline{Q_T}) : \\ &u^i\Big|_{t=0} = \alpha^i_1(x,y),\ \ (x,y) \in (a,b)\times(c,d), \\ &u^i\Big|_{x=a} = \alpha^i_2(y,t),\ \ u^i\Big|_{x=b} = \alpha^i_3(y,t), \\ &u^2_x\Big|_{x=a} = \alpha^2_4(y,t),\ \ u^2_x\Big|_{x=b} = \alpha^2_5(y,t), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (y,t) \in (c,d)\times(0,T), \\ &u^i\Big|_{y=c} = \alpha^i_6(x,t),\ \ u^i\Big|_{y=d} = \alpha^i_7(x,t), \\ &\qquad\qquad\qquad (x,t) \in (a,b)\times(0,T),\ \ i = 1,2\}, \end{aligned} \tag{1.147}$$

где $\alpha^i_1, \alpha^i_2, \alpha^i_3, \alpha^2_4, \alpha^2_5, \alpha^i_6, \alpha^i_7$ $(i = 1,2)$ - заданные функции.

Введем классическую билинейную форму

$$\Phi(h,w) = \int_0^T \int_c^d \int_a^b \sum_{i=1}^{3} h^i(x,y,t)\cdot w^i(x,y,t)\,dxdydt. \tag{1.148}$$

В данном случае

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; P_1 = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q(u) =$$
$$= \begin{pmatrix} \rho u^1 u^1_x + \rho u^1_y u^2 + u^3_x + \alpha_0 u^1 + \varepsilon (u^1)^2 u^3_x + \varepsilon u^1 u^2 u^3_y \\ \rho u^1 u^2_x + \rho u^2 u^2_y + u^3_y - \rho g + \alpha_0 u^2 + \varepsilon u^1 u^2 u^3_x + \varepsilon (u^2)^2 u^3_y \\ \rho_t + \rho_x u^1 + \rho u^1_x - \rho_x \mathcal{D} u^2_x - \mathcal{D} \rho u^2_{xx} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что условие (1.52) не выполняется, так как $P_1 = P_1^*$, поэтому система уравнений (1.146) не допускает прямое представление в форме уравнений Лагранжа.

Построим обобщенное действие по Гамильтону для системы (1.146), используя метод, предложенный в [95].

Имеем

$$N'_u = \begin{pmatrix} a_{11} & \rho u^1_y + \varepsilon u^1 u^3_y & a_{13} \\ \rho u^2_x + \varepsilon u^2 u^3_x & a_{22} & a_{23} \\ \rho_x + \rho D_x & -\rho_x \mathcal{D} D_x - \mathcal{D} \rho D^2_x & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$a_{11} = \rho D_t + \rho u^1_x + \rho u^1 D_x + \rho u^2 D_y + \alpha_0 + 2\varepsilon u^1 u^3_x + \varepsilon u^2 u^3_y,$$
$$a_{22} = \rho D_t + \rho u^1 D_x + \rho u^2_y + \rho u^2 D_y + \alpha_0 + \varepsilon u^1 u^3_x + 2\varepsilon u^2 u^3_y,$$
$$a_{13} = D_x + \varepsilon (u^1)^2 D_x + \varepsilon u^1 u^2 D_y,$$
$$a_{23} = D_y + \varepsilon u^1 u^2 D_x + \varepsilon (u^2)^2 D_y.$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} D(N'_u) = \{ & h \in U = (U^1, U^2, U^3)^T, h^1 \in U^1 = C^{1,1,1}_{x,y,t}(\overline{Q_T}), \\ & h^2 \in U^2 = C^{2,1,1}_{x,y,t}(\overline{Q_T}), \;\; h^3 \in U^3 = C^{1,1,0}_{x,y,t}(\overline{Q_T}) : \\ & h^i\big|_{t=0} = 0, \;\; h^i\big|_{x=a} = h^i\big|_{x=b} = h^2_x\big|_{x=a} = h^2_x\big|_{x=b} = 0, \\ & h^i\big|_{y=c} = h^i\big|_{y=d} = 0, \;\; i = 1, 2 \}. \end{aligned}$$

Найдем $N_u'^*$. Имеем

$$\Phi(N_u'\phi,\psi)=\int\limits_0^T\int\limits_c^d\int\limits_a^b[\rho\phi_t^1\psi^1+\rho u_x^1\phi^1\psi^1+\rho u^1\phi_x^1\psi^1+\rho u^2\phi_y^1\psi^1+$$

$$+\alpha_0\phi^1\psi^1+2\varepsilon u^1u_x^3\phi^1\psi^1+\varepsilon u^2u_y^3\phi^1\psi^1+\rho u_y^1\phi^2\psi^1+\varepsilon u^1u_y^3\phi^2\psi^1+\phi_x^3\psi^1+$$

$$+\varepsilon(u^1)^2\phi_x^3\psi^1+\varepsilon u^1u^2\phi_y^3\psi^1+\rho u_x^2\phi^1\psi^2+\varepsilon u^2u_x^3\phi^1\psi^2+\rho\phi_t^2\psi^2+\rho u^1\phi_x^2\psi^2+$$

$$+\rho u_y^2\phi^2\psi^2+\rho u^2\phi_y^2\psi^2+\alpha_0\phi^2\psi^2+\varepsilon u^1u_x^3\phi^2\psi^2+2\varepsilon u^2u_y^3\phi^2\psi^2+\phi_y^3\psi^2+$$

$$+\varepsilon u^1u^2\phi_x^3\psi^2+\varepsilon(u^2)^2\phi_y^3\psi^2+\rho_x\phi^1\psi^3+\rho\phi_x^1\psi^3-\rho_x\mathfrak{D}\phi_x^2\psi^3-$$

$$-\mathfrak{D}\rho\phi_{xx}^2\psi^3]dxdydt=\int\limits_0^T\int\limits_c^d\int\limits_a^b[-\rho_t\phi^1\psi^1-\rho\phi^1\psi_t^1+\rho u_x^1\phi^1\psi^1-$$

$$-\rho_xu^1\phi^1\psi^1-\rho u_x^1\phi^1\psi^1-\rho u^1\phi^1\psi_x^1-\rho_yu^2\phi^1\psi^1-\rho u_y^2\phi^1\psi^1-\rho u^2\phi^1\psi_y^1+$$

$$+\alpha_0\phi^1\psi^1+2\varepsilon u^1u_x^3\phi^1\psi^1+\varepsilon u^2u_y^3\phi^1\psi^1+\rho u_y^1\phi^2\psi^1+\varepsilon u^1u_y^3\phi^2\psi^1-\phi^3\psi_x^1-$$

$$-2\varepsilon u^1u_x^1\phi^3\psi^1-\varepsilon(u^1)^2\phi^3\psi_x^1-\varepsilon u_y^1u^2\phi^3\psi^1-\varepsilon u^1u_y^2\phi^3\psi^1-\varepsilon u^1u^2\phi^3\psi_y^1+$$

$$+\rho u_x^2\phi^1\psi^2+\varepsilon u^2u_x^3\phi^1\psi^2-\rho_t\phi^2\psi^2-\rho\phi^2\psi_t^2-\rho_xu^1\phi^2\psi^2-\rho u_x^1\phi^2\psi^2-$$

$$-\rho u^1\phi^2\psi_x^2+\rho u_y^2\phi^2\psi^2-\rho_yu^2\phi^2\psi^2-\rho u_y^2\phi^2\psi^2-\rho u^2\phi^2\psi_y^2+\alpha_0\phi^2\psi^2+$$

$$+\varepsilon u^1u_x^3\phi^2\psi^2+2\varepsilon u^2u_y^3\phi^2\psi^2-\phi^3\psi_y^2-\varepsilon u_x^1u^2\phi^3\psi^2-\varepsilon u^1u_x^2\phi^3\psi^2-$$

$$-\varepsilon u^1u^2\phi^3\psi_x^2-2\varepsilon u^2u_y^2\phi^3\psi^2-\varepsilon(u^2)^2\phi^3\psi_y^2+\rho_x\phi^1\psi^3-\rho_x\phi^1\psi^3-\rho\phi^1\psi_x^3+$$

$$+\rho_{xx}\mathfrak{D}\phi^2\psi^3+\rho_x\mathfrak{D}\phi^2\psi_x^3-\mathfrak{D}\rho_{xx}\phi^2\psi^3-2\mathfrak{D}\rho_x\phi^2\psi_x^3-\mathfrak{D}\rho\phi^2\psi_{xx}^3]dxdydt=$$

$$=\int\limits_0^T\int\limits_c^d\int\limits_a^b[\phi^1(-\rho_t\psi^1-\rho\psi_t^1-\rho_xu^1\psi^1-\rho u^1\psi_x^1-\rho_yu^2\psi^1-\rho u_y^2\psi^1-$$

$$-\rho u^2\psi_y^1+\alpha_0\psi^1+2\varepsilon u^1u_x^3\psi^1+\varepsilon u^2u_y^3\psi^1+\rho u_x^2\psi^2+\varepsilon u^2u_x^3\psi^2-\rho\psi_x^3)+$$

$$+\phi^2(\rho u_y^1\psi^1+\varepsilon u^1u_y^3\psi^1-\rho_t\psi^2-\rho\psi_t^2-\rho_xu^1\psi^2-\rho u_x^1\psi^2-\rho u^1\psi_x^2-$$

$$-\rho_yu^2\psi^2-\rho u^2\psi_y^2+\alpha_0\psi^2+\varepsilon u^1u_x^3\psi^2+2\varepsilon u^2u_y^3\psi^2-\mathfrak{D}\rho_x\psi_x^3-\mathfrak{D}\rho\psi_{xx}^3)+$$

$$+\phi^3(-\psi^1_x - 2\varepsilon u^1 u^1_x \psi^1 - \varepsilon (u^1)^2 \psi^1_x - \varepsilon u^1_y u^2 \psi^1 - \varepsilon u^1 u^2_y \psi^1 - \varepsilon u^1 u^2 \psi^1_y -$$
$$-\psi^2_y - \varepsilon u^1_x u^2 \psi^2 - \varepsilon u^1 u^2_x \psi^2 - \varepsilon u^1 u^2 \psi^2_x - 2\varepsilon u^2 u^2_y \psi^2 - \varepsilon (u^2)^2 \psi^2_y] dxdydt =$$
$$= \Phi(\phi, N'^* \psi),$$

то есть

$$N'^*_u = \begin{pmatrix} a^*_{11} & \rho u^2_x + \varepsilon u^2 u^3_x & -\rho D_x \\ \rho u^1_y + \varepsilon u^1 u^3_y & a^*_{22} & -\mathfrak{D}\rho_x D_x - \mathfrak{D}\rho D^2_x \\ a^*_{31} & a^*_{32} & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$a^*_{11} = -\rho_t - \rho D_t - \rho_x u^1 - \rho u^1 D_x - \rho_y u^2 -$$
$$-\rho u^2_y - \rho u^2 D_y + \alpha_0 + 2\varepsilon u^1 u^3_x + \varepsilon u^2 u^3_y,$$
$$a^*_{22} = -\rho_t - \rho D_t - \rho_x u^1 - \rho u^1_x - \rho u^1 D_x -$$
$$-\rho_y u^2 - \rho u^2 D_y + \alpha_0 + \varepsilon u^1 u^3_x + 2\varepsilon u^2 u^3_y,$$
$$a^*_{31} = -D_x - 2\varepsilon u^1 u^1_x - \varepsilon (u^1)^2 D_x - \varepsilon u^1_y u^2 - \varepsilon u^1 u^2_y - \varepsilon u^1 u^2 D_y,$$
$$a^*_{32} = -D_y - \varepsilon u^1_x u^2 - \varepsilon u^1 u^2_x - \varepsilon u^1 u^2 D_x - 2\varepsilon u^2 u^2_y - \varepsilon (u^2)^2 D_y.$$

Область определения оператора N'^*_u задается следующим образом:

$$D(N'^*_u) = \{\psi \in \tilde{U} = (\tilde{U}^1, \tilde{U}^2, \tilde{U}^3)^T, \psi^i \in \tilde{U}^i = C^{1,1,1}_{x,y,t}(\overline{Q_T}),$$
$$\psi^3 \in \tilde{U}^3 = C^{2,1,0}_{x,y,t}(\overline{Q_T}) : \psi^i\Big|_{t=T} = 0, \quad \psi^i\Big|_{x=a} = \psi^i\Big|_{x=b} = 0,$$
$$\psi^i\Big|_{y=c} = \psi^i\Big|_{y=d} = 0, \quad i = 1, 2\}.$$

Введем в рассмотрение оператор C такой, что $D(C) = R(N)$ и

$$(C\tilde{v})^k(x,y,t) = \tag{1.149}$$

$$= \int_0^T \int_c^d \int_a^b K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau) \varphi^k(x,y,t) \varphi^k(\overline{x},\overline{y},\tau) \tilde{v}^k(\overline{x},\overline{y},\tau) d\overline{x} d\overline{y} d\tau,$$

$$k = \overline{1,3},$$

где
$$K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)=\exp(x\overline{x}+y\overline{y}+t\tau), \tag{1.150}$$
а произвольные функции $\varphi^1(x,y,t),\varphi^2(x,y,t),\varphi^3(x,y,t)$ удовлетворяют следующим условиям:
$$\varphi^i|_{t=0}=\varphi^i|_{t=T}=0\ (i=1,2),\qquad \varphi^2|_{y=c}=\varphi^2|_{y=d}=0,$$
$$\varphi^k|_{x=a}=\varphi^k|_{x=b}=0\ (k=1,3),\qquad \varphi^3_x|_{x=a}=\varphi^3_x|_{x=b}=0.$$

Покажем, что оператор C вида (1.149) является симметрическим на $R(N)$. Имеем
$$\Phi(C\tilde{v},h)=\int\limits_0^T\int\limits_c^d\int\limits_a^b\sum_{k=1}^3(C\tilde{v})^k(x,y,t)\cdot h^k(x,y,t)dxdydt=$$
$$=\int\limits_0^T\int\limits_c^d\int\limits_a^b\sum_{k=1}^3\int\limits_0^T\int\limits_c^d\int\limits_a^b K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\cdot\varphi^k(x,y,t)\cdot\varphi^k(\overline{x},\overline{y},\tau)\times$$
$$\times\tilde{v}^k(\overline{x},\overline{y},\tau)d\overline{x}d\overline{y}d\tau\cdot h^k(x,y,t)dxdydt=$$
$$=\int\limits_0^T\int\limits_c^d\int\limits_a^b\sum_{k=1}^3\int\limits_0^T\int\limits_c^d\int\limits_a^b K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\cdot\varphi^k(x,y,t)\cdot\varphi^k(\overline{x},\overline{y},\tau)\times$$
$$\times\tilde{v}^k(\overline{x},\overline{y},\tau)\cdot h^k(x,y,t)d\overline{x}d\overline{y}d\tau dxdydt=$$
$$=\int\limits_0^T\int\limits_c^d\int\limits_a^b\int\limits_0^T\int\limits_c^d\int\limits_a^b\sum_{k=1}^3 K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\cdot\varphi^k(x,y,t)\cdot\varphi^k(\overline{x},\overline{y},\tau)\times$$
$$\times\tilde{v}^k(\overline{x},\overline{y},\tau)\cdot h^k(x,y,t)d\overline{x}d\overline{y}d\tau dxdydt.$$

Сделаем замену переменных: $x\leftrightarrow\overline{x},\ y\leftrightarrow\overline{y},\ t\leftrightarrow\tau$. В данном случае $|J|=1$, поэтому
$$\Phi(C\tilde{v},h)=\int\limits_0^T\int\limits_c^d\int\limits_a^b\int\limits_0^T\int\limits_c^d\int\limits_a^b\sum_{k=1}^3 K(\overline{x},\overline{y},\tau,x,y,t)\cdot\varphi^k(\overline{x},\overline{y},\tau)\times$$

$\times\varphi^k(x,y,t)\cdot\tilde{v}^k(x,y,t)\cdot h^k(\overline{x},\overline{y},\tau)dxdydtd\overline{x}d\overline{y}d\tau.$

Учитывая (1.150), получаем

$$\Phi(C\tilde{v},h)=\int\limits_0^T\int\limits_c^d\int\limits_a^b\int\limits_0^T\int\limits_c^d\int\limits_a^b\sum_{k=1}^3 K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\cdot\varphi^k(x,y,t)\times$$

$$\times\varphi^k(\overline{x},\overline{y},\tau)\cdot h^k(\overline{x},\overline{y},\tau)d\overline{x}d\overline{y}d\tau\cdot\tilde{v}^k(x,y,t)dxdydt=$$

$$=\int\limits_0^T\int\limits_c^d\int\limits_a^b\sum_{k=1}^3\int\limits_0^T\int\limits_c^d\int\limits_a^b K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\cdot\varphi^k(x,y,t)\cdot\varphi^k(\overline{x},\overline{y},\tau)\times$$

$$\times h^k(\overline{x},\overline{y},\tau)d\overline{x}d\overline{y}d\tau\cdot\tilde{v}^k(x,y,t)dxdydt=\Phi(\tilde{v},Ch).$$

Построим теперь обобщенное действие по Гамильтону вида

$$F_N[u]=\frac{1}{2}\Phi(N(u),CN(u)).$$

Имеем

$$(CN(u))^1(x,y,t)=\int\limits_0^T\int\limits_c^d\int\limits_a^b K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^1(x,y,t)\varphi^1(\overline{x},\overline{y},\tau)\times$$

$$\times\left[\rho(\overline{x},\overline{y},\tau)u^1_\tau(\overline{x},\overline{y},\tau)+\rho(\overline{x},\overline{y},\tau)u^1(\overline{x},\overline{y},\tau)u^1_{\overline{x}}(\overline{x},\overline{y},\tau)+u^3_{\overline{x}}(\overline{x},\overline{y},\tau)+\right.$$

$$+\rho(\overline{x},\overline{y},\tau)u^2(\overline{x},\overline{y},\tau)u^1_{\overline{y}}(\overline{x},\overline{y},\tau)+\alpha_0u^1(\overline{x},\overline{y},\tau)+$$

$$+\varepsilon(u^1)^2(\overline{x},\overline{y},\tau)u^3_{\overline{x}}(\overline{x},\overline{y},\tau)+\varepsilon u^1(\overline{x},\overline{y},\tau)u^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\times$$

$$\times u^3_{\overline{y}}(\overline{x},\overline{y},\tau)d\overline{x}d\overline{y}d\tau=\int\limits_0^T\int\limits_c^d\int\limits_a^b[-u^1(\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^1(x,y,t)\times$$

$$\times D_\tau(K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^1(\overline{x},\overline{y},\tau)\rho(\overline{x},\overline{y},\tau))-\frac{1}{2}(u^1)^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\times$$

$$\times\varphi^1(x,y,t)D_{\overline{x}}(K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^1(\overline{x},\overline{y},\tau)\rho(\overline{x},\overline{y},\tau))-$$

$$-u^3(\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^1(x,y,t)D_{\overline{x}}(K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^1(\overline{x},\overline{y},\tau))+$$

$$+K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^1(x,y,t)\varphi^1(\overline{x},\overline{y},\tau)\rho(\overline{x},\overline{y},\tau)u^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\times$$
$$\times u^1_{\overline{y}}(\overline{x},\overline{y},\tau)+K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^1(x,y,t)\varphi^1(\overline{x},\overline{y},\tau)\alpha_0 u^1(\overline{x},\overline{y},\tau)+$$
$$+K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^1(x,y,t)\varphi^1(\overline{x},\overline{y},\tau)\varepsilon(u^1)^2(\overline{x},\overline{y},\tau)u^3_{\overline{x}}(\overline{x},\overline{y},\tau)+$$
$$+K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^1(x,y,t)\varphi^1(\overline{x},\overline{y},\tau)\times$$
$$\times\varepsilon u^1(\overline{x},\overline{y},\tau)u^2(\overline{x},\overline{y},\tau)u^3_{\overline{y}}(\overline{x},\overline{y},\tau)]d\overline{x}d\overline{y}d\tau,$$

$$(CN(u))^2(x,y,t)=\int\limits_0^T\int\limits_c^d\int\limits_a^b K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^2(x,y,t)\varphi^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\times$$
$$\times\left[\rho(\overline{x},\overline{y},\tau)u^2_\tau(\overline{x},\overline{y},\tau)+\rho(\overline{x},\overline{y},\tau)u^2(\overline{x},\overline{y},\tau)u^2_{\overline{y}}(\overline{x},\overline{y},\tau)+u^3_{\overline{y}}(\overline{x},\overline{y},\tau)+\right.$$
$$+\rho(\overline{x},\overline{y},\tau)u^1(\overline{x},\overline{y},\tau)u^2_{\overline{x}}(\overline{x},\overline{y},\tau)+\alpha_0 u^2(\overline{x},\overline{y},\tau)+\varepsilon(u^2)^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\times$$
$$\times u^3_{\overline{y}}(\overline{x},\overline{y},\tau)+\varepsilon u^1(\overline{x},\overline{y},\tau)u^2(\overline{x},\overline{y},\tau)u^3_{\overline{x}}(\overline{x},\overline{y},\tau)-$$
$$-\rho(\overline{x},\overline{y},\tau)g d\overline{x}d\overline{y}d\tau=\int\limits_0^T\int\limits_c^d\int\limits_a^b[-u^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^2(x,y,t)\times$$
$$\times D_\tau(K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\rho(\overline{x},\overline{y},\tau))-\frac{1}{2}(u^2)^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\times$$
$$\times\varphi^2(x,y,t)D_{\overline{y}}(K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\rho(\overline{x},\overline{y},\tau))-$$
$$-u^3(\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^2(x,y,t)D_{\overline{y}}(K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^2(\overline{x},\overline{y},\tau))+$$
$$+K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^2(x,y,t)\varphi^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\rho(\overline{x},\overline{y},\tau)u^1(\overline{x},\overline{y},\tau)\times$$
$$\times u^2_{\overline{x}}(\overline{x},\overline{y},\tau)+K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^2(x,y,t)\varphi^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\alpha_0 u^2(\overline{x},\overline{y},\tau)+$$
$$+K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^2(x,y,t)\varphi^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\varepsilon(u^2)^2(\overline{x},\overline{y},\tau)u^3_{\overline{y}}(\overline{x},\overline{y},\tau)+$$
$$+K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^2(x,y,t)\varphi^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\varepsilon u^1(\overline{x},\overline{y},\tau)u^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\times$$
$$\times u^3_{\overline{x}}(\overline{x},\overline{y},\tau)-K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^2(x,y,t)\varphi^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\times$$
$$\times\rho(\overline{x},\overline{y},\tau)g]d\overline{x}d\overline{y}d\tau,$$

$$(CN(u))^3(x,y,t)=\int\limits_0^T\int\limits_c^d\int\limits_a^b K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^3(x,y,t)\varphi^3(\overline{x},\overline{y},\tau)\times$$

$$\times\,[\rho_\tau(\overline{x},\overline{y},\tau)+\rho_{\overline{x}}(\overline{x},\overline{y},\tau)u^1(\overline{x},\overline{y},\tau)+\rho(\overline{x},\overline{y},\tau)u^1_{\overline{x}}(\overline{x},\overline{y},\tau)-$$

$$-\rho_{\overline{x}}(\overline{x},\overline{y},\tau)\mathcal{D}u^2_{\overline{x}}(\overline{x},\overline{y},\tau)-\mathcal{D}\rho(\overline{x},\overline{y},\tau)u^2_{\overline{x}\,\overline{x}}(\overline{x},\overline{y},\tau)]d\overline{x}d\overline{y}d\tau=$$

$$=\int\limits_0^T\int\limits_c^d\int\limits_a^b[K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^3(x,y,t)\varphi^3(\overline{x},\overline{y},\tau)\times\rho_\tau(\overline{x},\overline{y},\tau)+$$

$$+K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^3(x,y,t)\varphi^3(\overline{x},\overline{y},\tau)\rho_{\overline{x}}(\overline{x},\overline{y},\tau)u^1(\overline{x},\overline{y},\tau)-$$

$$-u^1(\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^3(x,y,t)D_{\overline{x}}(K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^3(\overline{x},\overline{y},\tau)\rho(\overline{x},\overline{y},\tau))+$$

$$+u^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^3(x,y,t)\mathcal{D}D_{\overline{x}}(K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^3(\overline{x},\overline{y},\tau)\rho_{\overline{x}}(\overline{x},\overline{y},\tau))-$$

$$-u^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^3(x,y,t)\mathcal{D}D^2_{\overline{x}}(K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^3(\overline{x},\overline{y},\tau)\times$$

$$\times\rho(\overline{x},\overline{y},\tau))d\overline{x}d\overline{y}d\tau.$$

Таким образом, искомое действие по Гамильтону имеет следующий вид:

$$F_N[u]=\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_c^d\int\limits_a^b\int\limits_0^T\int\limits_c^d\int\limits_a^b[(-\rho_t(x,y,t)u^1(x,y,t)-$$

$$-\rho(x,y,t)u^1(x,y,t)D_t+\rho(x,y,t)u^1(x,y,t)u^1_x(x,y,t)+$$

$$+\rho(x,y,t)u^2(x,y,t)u^1_y(x,y,t)-u^3(x,y,t)D_x+\alpha_0u^1(x,y,t)+$$

$$+\varepsilon(u^1)^2(x,y,t)u^3_x(x,y,t)+\varepsilon u^1(x,y,t)u^2(x,y,t)u^3_y(x,y,t))\times$$

$$\times(-u^1(\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^1(x,y,t)D_\tau(K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^1(\overline{x},\overline{y},\tau)\rho(\overline{x},\overline{y},\tau))-$$

$$-\frac{1}{2}(u^1)^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^1(x,y,t)D_{\overline{x}}(K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^1(\overline{x},\overline{y},\tau)\times$$

$$\times\rho(\overline{x},\overline{y},\tau))-u^3(\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^1(x,y,t)D_{\overline{x}}(K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^1(\overline{x},\overline{y},\tau))+$$

$$+K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^1(x,y,t)\varphi^1(\overline{x},\overline{y},\tau)\rho(\overline{x},\overline{y},\tau)u^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\times$$

$$\times u^1_{\overline{y}}(\overline{x},\overline{y},\tau)+K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^1(x,y,t)\varphi^1(\overline{x},\overline{y},\tau)\alpha_0u^1(\overline{x},\overline{y},\tau)+$$

$$+K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^1(x,y,t)\varphi^1(\overline{x},\overline{y},\tau)\varepsilon(u^1)^2(\overline{x},\overline{y},\tau)u^3_{\overline{x}}(\overline{x},\overline{y},\tau)+$$

$$+K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^1(x,y,t)\varphi^1(\overline{x},\overline{y},\tau)\varepsilon u^1(\overline{x},\overline{y},\tau)u^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\times$$

$$\times u^3_{\overline{y}}(\overline{x},\overline{y},\tau)) + (-\rho_t(x,y,t)u^2(x,y,t) - \rho(x,y,t)u^2(x,y,t)D_t +$$
$$+\rho(x,y,t)u^1(x,y,t)u^2_x(x,y,t) + \rho(x,y,t)u^2(x,y,t)u^2_y(x,y,t) -$$
$$-u^3(x,y,t)D_y - \rho(x,y,t)g + \alpha_0 u^2(x,y,t) + \varepsilon u^1(x,y,t)u^2(x,y,t)\times$$
$$\times u^3_x(x,y,t) + \varepsilon(u^2)^2(x,y,t)u^3_y(x,y,t))(-u^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^2(x,y,t)\times$$
$$\times D_\tau(K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\rho(\overline{x},\overline{y},\tau)) - \frac{1}{2}(u^2)^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\times$$
$$\times\varphi^2(x,y,t)D_{\overline{y}}(K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\rho(\overline{x},\overline{y},\tau)) -$$
$$-u^3(\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^2(x,y,t)D_{\overline{y}}(K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^2(\overline{x},\overline{y},\tau)) +$$
$$+K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^2(x,y,t)\varphi^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\rho(\overline{x},\overline{y},\tau)u^1(\overline{x},\overline{y},\tau)\times$$
$$\times u^2_{\overline{x}}(\overline{x},\overline{y},\tau) + K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^2(x,y,t)\varphi^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\alpha_0 u^2(\overline{x},\overline{y},\tau) +$$
$$+K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^2(x,y,t)\varphi^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\varepsilon(u^2)^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\times$$
$$\times u^3_{\overline{y}}(\overline{x},\overline{y},\tau) + K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^2(x,y,t)\varphi^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\varepsilon u^1(\overline{x},\overline{y},\tau)\times$$
$$\times u^2(\overline{x},\overline{y},\tau)u^3_{\overline{x}}(\overline{x},\overline{y},\tau) - K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^2(x,y,t)\varphi^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\times$$
$$\times\rho(\overline{x},\overline{y},\tau)g) + (\rho_t(x,y,t) - \rho(x,y,t)u^1(x,y,t)D_x -$$
$$-\mathcal{D}\rho_x(x,y,t)u^2(x,y,t)D_x - \mathcal{D}\rho(x,y,t)u^2(x,y,t)D^2_x)\times$$
$$\times(K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^3(x,y,t)\varphi^3(\overline{x},\overline{y},\tau)\rho_\tau(\overline{x},\overline{y},\tau) +$$
$$+K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^3(x,y,t)\varphi^3(\overline{x},\overline{y},\tau)\rho_{\overline{x}}(\overline{x},\overline{y},\tau)u^1(\overline{x},\overline{y},\tau) -$$
$$-u^1(\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^3(x,y,t)D_{\overline{x}}(K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^3(\overline{x},\overline{y},\tau)\rho(\overline{x},\overline{y},\tau)) +$$
$$+u^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^3(x,y,t)\mathcal{D}D_{\overline{x}}(K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^3(\overline{x},\overline{y},\tau)\rho_{\overline{x}}(\overline{x},\overline{y},\tau)) -$$
$$-u^2(\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^3(x,y,t)\mathcal{D}D^2_{\overline{x}}(K(x,y,t,\overline{x},\overline{y},\tau)\varphi^3(\overline{x},\overline{y},\tau)\times$$
$$\times\rho(\overline{x},\overline{y},\tau)))]d\overline{x}d\overline{y}d\tau dxdydt.$$

Функции $\varphi^k(x,y,t)$ $(k=\overline{1,3})$ можно взять, например, в виде

$$\varphi^k(x,y,t) = t^s(T-t)^s(x-a)^s(b-x)^s(y-c)^s(d-y)^s, \ s\geq 2.$$

Замечание 1.17. Отметим, что оператор N вида (1.146) является B_u-потенциальным на множестве $D(N)$ (1.147) относительно билинейной формы (1.148) при $B_u = CN'_u$.

Глава 2

Симметрийные свойства уравнений движения бесконечномерных лагранжевых систем с не-B_u-потенциальными силами

В классической механике широко применяются преобразования переменных для выявления инвариантных свойств движения механических систем – инвариантности функционалов, стационаризуемых в процессе движения, инвариантности уравнений движения, а также отыскания интегралов этих уравнений.

Основываясь на идеях классической механики, в настоящей главе разработаны конструктивные приемы нахождения интегралов уравнений движения непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы в случае инвариантности уравнений движения. Кроме того, установлена связь симметрий уравнений движения с Ли-допустимыми алгебрами (в том числе алгебрами Ли).

2.1 Симметрии уравнений движения и их интегралы

Распространим метод нахождения интегралов, предложенный в [145], на случай операторного уравнения (1.13).

Рассмотрим однопараметрическую группу преобразований вида

$$G:\begin{cases}\overline{t}=t+\varepsilon\varphi(t,u),\\ \overline{u}=u+\varepsilon\psi(t,u),\end{cases} \tag{2.1}$$

где φ,ψ - некоторые операторы.

С помощью преобразования (2.1) заданной функции $u(t)$ можно поставить в соответствие функцию $\overline{u}(t,\varepsilon)$ по правилу

$$\overline{u}=u+\varepsilon S(u), \tag{2.2}$$

где $S(u)=\psi(t,u)-u_t\varphi(t,u)$. При этом оператор S называется генератором преобразования (2.2).

Определение 2.1. Преобразование (2.2) называется симметрией уравнения движения

$$N(u)=0, \tag{2.3}$$

если для любого достаточно малого ε и любого решения u этого уравнения функция $\overline{u}$ вида (2.2) также является решением этого уравнения.

Отметим, что в этом случае оператор S называется также генератором симметрии уравнения движения (2.3).

Критерий инвариантности получен в работе [98] и сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 2.1. *Преобразование (2.2) является симметрией уравнения движения (2.3) тогда и только тогда, когда*

$$N'_u S(u)=0 \tag{2.4}$$

на решениях заданного уравнения движения.

Теорема 2.2. *Если S_1,S_2 - генераторы симметрий уравнения движения (2.3), то их коммутатор*

$$[S_1,S_2](u)=S'_{1u}S_2(u)-S'_{2u}S_1(u) \tag{2.5}$$

также является генератором симметрии уравнения (2.3).

Доказательство. Используя формулу (1.3), получаем

$$N'_{u+\varepsilon S_j(u)}S_i(u+\varepsilon S_j(u)) = N'_{u+\varepsilon S_j(u)}\left(S_i(u)+\varepsilon S'_{iu}S_j(u)+o(\varepsilon)\right) =$$

$$= N'_{u+\varepsilon S_j(u)}S_i(u)+\varepsilon N'_{u+\varepsilon S_j(u)}S'_{iu}S_j(u)+o(\varepsilon) = N'_uS_i(u)+$$

$$+\varepsilon\left(N''_u\left(S_i(u);S_j(u)\right)+N'_uS'_{iu}S_j(u)\right)+o(\varepsilon), \qquad i,j=1,2,$$

откуда следует, что

$$N'_{u+\varepsilon S_2(u)}S_1(u+\varepsilon S_2(u)) = N'_uS_1(u)+$$

$$+\varepsilon\left(N''_u\left(S_1(u);S_2(u)\right)+N'_uS'_{1u}S_2(u)\right)+o(\varepsilon)$$

и

$$N'_{u+\varepsilon S_1(u)}S_2(u+\varepsilon S_1(u)) = N'_uS_2(u)+$$

$$+\varepsilon\left(N''_u\left(S_2(u);S_1(u)\right)+N'_uS'_{2u}S_1(u)\right)+o(\varepsilon).$$

Далее, принимая во внимание равенство (1.6), получаем

$$N'_{u+\varepsilon S_2(u)}S_1(u+\varepsilon S_2(u)) - N'_{u+\varepsilon S_1(u)}S_2(u+\varepsilon S_1(u)) =$$

$$= N'_uS_1(u)-N'_uS_2(u)+\varepsilon\left(N'_uS'_{1u}S_2(u)-N'_uS'_{2u}S_1(u)\right)+o(\varepsilon) =$$

$$= N'_uS_1(u)-N'_uS_2(u)+\varepsilon N'_u[S_1,S_2](u)+o(\varepsilon).$$

Пусть u - решение уравнения (2.3). В силу условия (2.4) из последнего равенства находим

$$N'_u[S_1,S_2](u)=0.$$

Таким образом, из теоремы 2.1 следует, что коммутатор двух генераторов симметрий уравнения движения (2.3) также является его генератором симметрии. □

Теорема 2.2 дает конструктивный способ построения новых генераторов симметрий уравнения движения (2.3) из полученных ранее. Однако следует отметить, что коммутатор двух генераторов симметрий может быть нулевым оператором или совпадать с одним из них.

Определение 2.2. Функционал $I[t,u]$ называется интегралом уравнения движения (1.13), если $I[t,u(t)]$ не зависит от t, когда $u(t)$ есть решение уравнения (1.13).

Теорема 2.3. [136] *Пусть S_1, S_2 - генераторы симметрий уравнения (1.13), оператор N является B_u-потенциальным на $D(N)$ относительно билинейной формы (1.7). Тогда выражение*

$$I[t,u] = D_t \langle P_{2u}S_2(u), B_uS_1(u)\rangle -$$

$$- \langle 2P_{3u}(u_tS_2(u)) + 2P_{2u}D_tS_2(u) + P_{1u}S_2(u), B_uS_1(u)\rangle \qquad (2.6)$$

определяет интеграл заданного уравнения движения.

Доказательство. Имеем

$$\langle N_u'h, B_ug\rangle + \langle N(u), B_u'(g;h)\rangle = \Big\langle 2P_{3u}(u_th_t) + P_{3u}'(u_t^2;h) +$$

$$+P_{2u}h_{tt} + P_{2u}'(u_{tt};h) + P_{1u}h_t + P_{1u}'(u_t;h) + Q_u'h, B_ug\rangle +$$

$$+ \Big\langle P_{2u}u_{tt} + P_{1u}u_t + P_{3u}u_t^2 + Q(u), B_u'(g;h)\Big\rangle =$$

$$= 2\langle h_t, u_tP_{3u}^*B_ug\rangle + \Big\langle h, [P_{3u}'(u_t^2;\cdot)]^*B_ug\Big\rangle +$$

$$+ \langle h_{tt}, P_{2u}^*B_ug\rangle + \langle h, [P_{2u}'(u_{tt};\cdot)]^*B_ug\rangle + \langle h_t, P_{1u}^*B_ug\rangle +$$

$$+ \langle h, [P_{1u}'(u_t;\cdot)]^*B_ug\rangle + \langle Q_u'^*B_ug, h\rangle +$$

$$+ \Big\langle h, [B_u'(g;\cdot)]^*(P_{2u}u_{tt} + P_{1u}u_t + P_{3u}u_t^2 + Q(u))\Big\rangle =$$

$$= 2D_t\langle h, u_tP_{3u}^*B_ug\rangle - 2\langle h, u_{tt}P_{3u}^*B_ug\rangle -$$

$$-2\left\langle h, u_t\frac{\partial}{\partial t}(P_{3u}^*B_u)g\right\rangle - 2\langle h, u_tP_{3u}^{*\prime}(B_ug;u_t)\rangle -$$

$$-2\langle h, u_tP_{3u}^*B_u'(g;u_t)\rangle - 2\langle h, u_tP_{3u}^*B_ug_t\rangle +$$

$$+ \Big\langle h, [P_{3u}'(u_t^2;\cdot)]^*B_ug\Big\rangle + D_t^2\langle h, P_{2u}^*B_ug\rangle -$$

$$-2D_t\left\langle h, \frac{\partial}{\partial t}(P_{2u}^*B_u)g\right\rangle - 2D_t\langle h, P_{2u}^{*\prime}(B_ug;u_t)\rangle -$$

$$-2D_t\langle h, P_{2u}^*B_u'(g;u_t)\rangle - 2D_t\langle h, P_{2u}^*B_ug_t\rangle +$$

$$+\left\langle h,\frac{\partial^2}{\partial t^2}(P^*_{2u}B_u)g\right\rangle+\left\langle h,2\frac{\partial}{\partial t}P^{*\prime}_{2u}(B_ug;u_t)\right\rangle+$$

$$+2\left\langle h,\frac{\partial}{\partial t}P^*_{2u}B'_u(g;u_t)\right\rangle+2\left\langle h,\frac{\partial}{\partial t}P^*_{2u}B_ug_t\right\rangle+$$

$$+\left\langle h,P^{*\prime\prime}_{2u}(B_ug;u_t;u_t)\right\rangle+2\left\langle h,P^{*\prime}_{2u}(B'_u(g,u_t);u_t)\right\rangle+$$

$$+2\left\langle h,P^{*\prime}_{2u}(B_ug_t;u_t)\right\rangle+\left\langle h,P^{*\prime}_{2u}(B_ug;u_{tt})\right\rangle+$$

$$+\left\langle h,P^*_{2u}B''_u(g;u_t;u_t)\right\rangle+2\left\langle h,P^*_{2u}B'_u(g_t;u_t)\right\rangle+$$

$$+\left\langle h,P^*_{2u}B'_u(g;u_{tt})\right\rangle+\left\langle h,P^*_{2u}B_ug_{tt}\right\rangle+$$

$$+\left\langle h,[P'_{2u}(u_{tt};\cdot)]^*B_ug\right\rangle+D_t\left\langle h,P^*_{1u}B_ug\right\rangle-$$

$$-\left\langle h,\frac{\partial}{\partial t}(P^*_{1u}B_u)g\right\rangle-\left\langle h,P^{*\prime}_{1u}(B_ug;u_t)\right\rangle-\left\langle h,P^*_{1u}B'_u(g;u_t)\right\rangle-$$

$$-\left\langle h,P^*_{1u}B_ug_t\right\rangle+\left\langle h,[P'_{1u}(u_t;\cdot)]^*B_ug\right\rangle+\left\langle h,Q'^*_uB_ug\right\rangle+$$

$$+\left\langle h,[B'_u(g;\cdot)]^*(P_{2u}u_{tt}+P_{1u}u_t+P_{3u}u_t^2+Q(u))\right\rangle.$$

Учитывая условия (1.16) - (1.22), получаем

$$\left\langle N'_uh,B_ug\right\rangle+\left\langle N(u),B'_u(g;h)\right\rangle=$$

$$=\left\langle N'_ug,B_uh\right\rangle+\left\langle N(u),B'_u(h;g)\right\rangle+$$

$$+D_t(D_t\left\langle P_{2u}g,B_uh\right\rangle-\left\langle 2P_{3u}(u_tg)+2P_{2u}g_t+P_{1u}g,B_uh\right\rangle).$$

Подставляя в последнее выражение $S_1(u)$ и $S_2(u)$ вместо h и g и принимая во внимание (2.4), заключаем, что $I[t,u]$ вида (2.6) является интегралом заданного уравнения движения. $\square$

Теорема 2.4. [136] *Пусть S_1 - генератор симметрии уравнения движения (1.13) и существуют операторы S_2 и B_u такие, что $N'^*_uB_uS_2(u)=0$ на решениях этого уравнения. Тогда выражение*

$$I[t,u]=D_t\left\langle P_{2u}S_1(u),B_uS_2(u)\right\rangle-$$

$$-\left\langle 2P_{3u}(u_tS_1(u))+2P_{2u}D_tS_1(u)+P_{1u}S_1(u),B_uS_2(u)\right\rangle \qquad (2.7)$$

определяет интеграл заданного уравнения движения.

Доказательство. Действительно, в данном случае

$$N_u'^*B_ug = D_t^2[P_{2u}^*B_ug] + [P_{2u}'(u_{tt};\cdot)]^*B_ug - D_t[P_{1u}^*B_ug]+$$
$$+[P_{1u}'(u_t;\cdot)]^*B_ug - 2D_t[u_tP_{3u}^*B_ug] + [P_{3u}'(u_t^2;\cdot)]^*B_ug + Q_u'^*B_ug.$$

Тогда

$$\langle h, N_u'^*B_ug\rangle - \langle N_u'h, B_ug\rangle = \Big\langle h, D_t^2[P_{2u}^*B_ug]+$$
$$+[P_{2u}'(u_{tt};\cdot)]^*B_ug - D_t[P_{1u}^*B_ug] + [P_{1u}'(u_t;\cdot)]^*B_ug - 2D_t[u_tP_{3u}^*B_ug]+$$
$$+[P_{3u}'(u_t^2;\cdot)]^*B_ug + Q_u'^*B_ug\Big\rangle - \langle P_{2u}h_{tt} + P_{2u}'(u_{tt};h) + P_{1u}h_t+$$
$$+P_{1u}'(u_t;h) + 2P_{3u}(u_th_t) + P_{3u}'(u_t^2;h) + Q_u'h, B_ug\Big\rangle =$$
$$= \Big\langle h, D_t^2[P_{2u}^*B_ug] + [P_{2u}'(u_{tt};\cdot)]^*B_ug - D_t[P_{1u}^*B_ug]+$$
$$+[P_{1u}'(u_t;\cdot)]^*B_ug - 2D_t[u_tP_{3u}^*B_ug] + [P_{3u}'(u_t^2;\cdot)]^*B_ug + Q_u'^*B_ug\Big\rangle -$$
$$-D_t\,\langle h_t, P_{2u}^*B_ug\rangle + \langle h_t, D_t[P_{2u}^*B_ug]\rangle -$$
$$-\,\langle h, [P_{2u}'(u_{tt};\cdot)]^*B_ug\rangle - D_t\,\langle h, P_{1u}^*B_ug\rangle +$$
$$+\,\langle h, D_t[P_{1u}^*B_ug]\rangle - \langle h, [P_{1u}'(u_t;\cdot)]^*B_ug\rangle -$$
$$-2D_t\,\langle h, u_tP_{3u}^*B_ug\rangle + 2\,\langle h, D_t[u_tP_{3u}^*B_ug]\rangle -$$
$$-\,\Big\langle h, [P_{3u}'(u_t^2;\cdot)]^*B_ug\Big\rangle - \langle h, Q_u'^*B_ug\rangle = \Big\langle h, D_t^2[P_{2u}^*B_ug]\Big\rangle -$$
$$-D_t[D_t\,\langle h, P_{2u}^*B_ug\rangle - \langle h, D_t[P_{2u}^*B_ug\rangle]+$$
$$+D_t\,\langle h, D_t[P_{2u}^*B_ug]\rangle - \Big\langle h, D_t^2[P_{2u}^*B_ug]\Big\rangle -$$
$$-D_t\,\langle h, P_{1u}^*B_ug\rangle - 2D_t\,\langle h, u_tP_{3u}^*B_ug\rangle =$$
$$= -D_t^2\,\langle P_{2u}h, B_ug\rangle + 2D_t\,\langle h, D_t[P_{2u}^*B_ug]\rangle -$$
$$-D_t\,\langle P_{1u}h, B_ug\rangle - 2D_t\,\langle P_{3u}(u_th), B_ug\rangle =$$
$$= -D_t^2\,\langle P_{2u}h, B_ug\rangle + 2D_t^2\,\langle P_{2u}h, B_ug\rangle -$$
$$-2D_t\,\langle P_{2u}h_t, B_ug\rangle - D_t\,\langle P_{1u}h, B_ug\rangle -$$
$$-2D_t\,\langle P_{3u}(u_th), B_ug\rangle = D_t^2\,\langle P_{2u}h, B_ug\rangle -$$
$$-D_t\,\langle P_{1u}h, B_ug\rangle - 2D_t\,\langle P_{2u}h_t, B_ug\rangle -$$

$$-2D_t \langle P_{3u}(u_t h), B_u g \rangle .$$

Подставляя в последнее выражение $S_1(u)$ и $S_2(u)$ вместо h и g соответственно, получаем интеграл уравнения движения (1.13) вида (2.7). □

Замечание 2.1. В настоящей главе и далее предполагается, что $S(u) \in D(N'_u)$. Если $S(u) \notin D(N'_u)$, то полученные выражения для $I[t, u]$ могут использоваться для нахождения законов сохранения в дифференциальной форме.

Проиллюстрируем это на следующем примере.

Пример 2.1. [136]

Рассматривается дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка по t [6]

$$N(u) \equiv u_{tt} + 2\beta v(t) u_{tx} + u_{xxxx} + v^2(t) u_{xx} + \beta v'(t) u_x = 0, \quad (2.8)$$

$$(x, t) \in Q_T = (a, b) \times (0, T),$$

описывающее малые поперечные колебания шарнирно закрепленного прямолинейного трубопровода, по которому течет идеальная жидкость со скоростью $v(t)$ и при отсутствии внутреннего и внешнего трения.

Зададим $D(N)$ следующим образом:

$$D(N) = \{u \in U = C^{2,6}_{t,x}(\overline{Q_T}) : u|_{t=0} = \phi_1(x),$$

$$u|_{t=T} = \phi_2(x) \ (x \in (a, b)), \ u|_{x=a} = \psi_1(t), \ u|_{x=b} = \psi_2(t),$$

$$u_x|_{x=a} = \psi_3(t), \ u_x|_{x=b} = \psi_4(t) \ (t \in (0, T))\}, \quad (2.9)$$

где $\phi_i, \psi_j (i = 1, 2, \ j = \overline{1, 4})$ – заданные функции.

Отметим, что оператор N (2.8) является потенциальным на $D(N)$ (2.9) относительно классической билинейной формы

$$\Phi(v,g)=\int_0^T\int_a^b v(x,t)g(x,t)\,dxdt.$$

Действительно, в данном случае

$$B_u\equiv I,\qquad P_2=I,\qquad P_1=2\beta v(t)D_x,\qquad P_1^*=-2\beta v(t)D_x,$$
$$\frac{\partial P_1^*}{\partial t}=-2\beta v'(t)D_x,\qquad Q'_u=D_x^4+v^2(t)D_x^2+\beta v'(t)D_x,$$
$$P_3=0,\qquad Q'^*_u=D_x^4+v^2(t)D_x^2-\beta v'(t)D_x$$

и

(1.43) $\Longrightarrow I-I=0$,
(1.44) $\Longrightarrow 0=0$,
(1.45) $\Longrightarrow 2\beta v(t)D_x-2\beta v(t)D_x=0$,
(1.46) $\Longrightarrow -2\beta v'(t)D_x+D_x^4+v^2(t)D_x^2+\beta v'(t)D_x-D_x^4-v^2(t)D_x^2+\beta v'(t)D_x=0$,
(1.47) $\Longrightarrow 0=0$,
(1.48) $\Longrightarrow 0=0$,
(1.49) $\Longrightarrow 0=0$.

Заметим, что $S_1(u)=u_x$ и $S_2(u)=u_{xx}$ являются генераторами симметрий уравнения (2.8).

Действительно,

$$N'_uh=h_{tt}+2\beta v(t)h_{tx}+h_{xxxx}+v^2(t)h_{xx}+\beta v'(t)h_x,$$

поэтому

$$N'_uS_1(u)=u_{xtt}+2\beta v(t)u_{txx}+u_{xxxxx}+v^2(t)u_{xxx}+\beta v'(t)u_{xx}=$$

$$=D_x\{u_{tt}+2\beta v(t)u_{tx}+u_{xxxx}+v^2(t)u_{xx}+\beta v'(t)u_x\}=D_xN(u)\overset{(2.8)}{=}0,$$
$$N'_uS_2(u)=u_{xxtt}+2\beta v(t)u_{txxx}+u_{xxxxxx}+v^2(t)u_{xxxx}+$$

$$+\beta v'(t)u_{xxx} = D_x^2 N(u) \overset{(2.8)}{=} 0.$$

Используя (2.6), получаем

$$D_t(u_{xx}u_x) - 2u_{txx}u_x - 2\beta v(t)u_{xxx}u_x = -u_{txx}u_x + u_{xx}u_{tx} -$$

$$-D_x(2\beta v(t)u_{xx}u_x) + 2\beta v(t)u_{xx}^2.$$

Тогда, учитывая (2.8), получаем

$$D_t(-u_{txx}u_x + u_{xx}u_{tx} + 2\beta v(t)u_{xx}^2) - D_x(D_t(2\beta v(t)u_{xx}u_x)) =$$

$$= -u_{ttxx}u_x - u_{txx}u_{tx} + u_{txx}u_{tx} + u_{xx}u_{ttx} + 2\beta v'(t)u_{xx}^2 +$$

$$+4\beta v(t)u_{xx}u_{txx} - D_x(2\beta v'(t)u_{xx}u_x + 2\beta v(t)u_{txx}u_x + 2\beta v(t)u_{xx}u_{tx}) =$$

$$= -u_x(-2\beta v(t)u_{txxx} - u_{xxxxxx} - v^2(t)u_{xxxx} - \beta v'(t)u_{xxx}) +$$

$$+u_{xx}(-2\beta v(t)u_{txx} - u_{xxxxx} - v^2(t)u_{xxx} - \beta v'(t)u_{xx}) + 2\beta v'(t)u_{xx}^2 +$$

$$+4\beta v(t)u_{xx}u_{txx} - 2\beta v'(t)u_{xxx}u_x - 2\beta v'(t)u_{xx}^2 - 2\beta v(t)u_{txxx}u_x -$$

$$-2\beta v(t)u_{txx}u_{xx} - 2\beta v(t)u_{xxx}u_{tx} - 2\beta v(t)u_{xx}u_{txx} =$$

$$= 2\beta v(t)u_{txxx}u_x + u_{xxxxxx}u_x + v^2(t)u_{xxxx}u_x + \beta v'(t)u_{xxx}u_x +$$

$$+2\beta v(t)u_{txx}u_{xx} - u_{xxxxx}u_{xx} - v^2(t)u_{xxx}u_{xx} + \beta v'(t)u_{xx}^2 -$$

$$-2\beta v'(t)u_{xxx}u_x - 2\beta v'(t)u_{xx}^2 - 2\beta v(t)u_{txxx}u_x -$$

$$-4\beta v(t)u_{txx}u_{xx} - 2\beta v(t)u_{xxx}u_{tx} = D_x(2\beta v(t)u_{txx}u_x) +$$

$$+D_x(u_{xxxxx}u_x) + D_x(-2u_{xxxx}u_{xx}) + D_x(u_{xxx}^2) + D_x(v^2(t)u_{xxx}u_x) -$$

$$-D_x(v^2(t)u_{xx}^2) - D_x(\beta v'(t)u_{xx}u_x) - D_x(2\beta v(t)u_{txx}u_x) -$$

$$-D_x(2\beta v(t)u_{tx}u_{xx}) = -D_x(D_t(2\beta v(t)u_{xx}u_x)) + D_x(2\beta v(t)u_{txx}u_x) +$$

$$+D_x(u_{xxxxx}u_x) + D_x(-2u_{xxxx}u_{xx}) + D_x(u_{xxx}^2) + D_x(v^2(t)u_{xxx}u_x) -$$

$$-D_x(v^2(t)u_{xx}^2) + D_x(\beta v'(t)u_{xx}u_x).$$

Следовательно,

$$D_t(-u_{txx}u_x + u_{xx}u_{tx} + 2\beta v(t)u_{xx}^2) - D_x(D_t(2\beta v(t)u_{xx}u_x)) =$$

$$= -D_x(D_t(2\beta v(t)u_{xx}u_x)) + D_x(2\beta v(t)u_{txx}u_x) +$$
$$+ D_x(u_{xxxxx}u_x) + D_x(-2u_{xxxx}u_{xx}) + D_x(u_{xxx}^2) + D_x(v^2(t)u_{xxx}u_x) -$$
$$- D_x(v^2(t)u_{xx}^2) + D_x(\beta v'(t)u_{xx}u_x).$$

Отсюда получаем закон сохранения в дифференциальной форме

$$D_t(-u_{txx}u_x + u_{xx}u_{tx} + 2\beta v(t)u_{xx}^2) + D_x(-2\beta v(t)u_{txx}u_x - u_{xxx}^2 -$$
$$- u_{xxxxx}u_x + 2u_{xxxx}u_{xx} - v^2(t)u_{xxx}u_x + v^2(t)u_{xx}^2 - \beta v'(t)u_{xx}u_x) = 0.$$

Замечание 2.2. Уравнение (2.8) также может быть записано в виде следующего закона сохранения в дифференциальной форме:

$$N(u) \equiv D_t u_t + D_x[2\beta v(t)u_t + u_{xxx} + v^2(t)u_x + \beta v'(t)u] = 0.$$

Пример 2.2. [136]

Рассмотрим дифференциальное уравнение с частными производными вида

$$N(u) \equiv auu_{tt} + buu_{xx} + au_t^2 + bu_x^2 = 0, \qquad (2.10)$$
$$(x,t) \in Q_T = (0,l) \times (0,T),$$

где a, b - постоянные.

Зададим область определения оператора N следующим образом:

$$D(N) = \{u \in U = C^2(\overline{Q_T}) : u|_{t=0} = \varphi_1(x), \qquad (2.11)$$
$$u|_{t=T} = \varphi_2(x)\ (x \in (0,l)),\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=l} = 0\},$$

где φ_1, φ_2 – заданные функции.

Заметим, что

$$P_{2u} = auI, \quad P_3 = aI, \quad P_1 = 0, \quad Q(u) = buu_{xx} + bu_x^2.$$

Оператор N (2.10) не является B_u-потенциальным на $D(N)$ (2.11) относительно билинейной формы

$$\Phi(v,g)=\int\limits_0^T\int\limits_0^l v(x,t)g(x,t)\,dxdt,$$

если $B_u=u(D_x+I)$, так как в данном случае условие (1.43) не выполняется.

Действительно,

$$B_u^*P_{2u}\neq P_{2u}^*B_u,$$

так как

$$B_u^*P_{2u}h=-au_xuh-auu_xh-au^2h_x+au^2h=$$

$$=-2auu_xh-au^2h_x+au^2h,$$

$$P_{2u}^*B_uh=au^2h_x+au^2h.$$

Далее, $S_1(u)=u_x$ является генератором симметрии уравнения (2.10). Действительно,

$$N_u'S_1(u)=au_xu_{tt}+auu_{xtt}+bu_xu_{xx}+buu_{xxx}+2au_tu_{tx}+2bu_xu_{xx}=$$

$$=D_xN(u)\overset{(2.10)}{=}0.$$

Если $S_2(u)=u$, то $N_u'^*B_uS_2(u)\overset{(2.10)}{=}0$.

Используя (2.7), получаем интеграл заданного уравнения движения

$$I[t,u]=\int\limits_0^l au^2u_tu_xdx.$$

Замечание 2.3. Уравнение (2.10) может быть записано в виде закона сохранения в дифференциальной форме

$$N(u)\equiv D_t(auu_t)+D_x(buu_x)=0.$$

Отсюда получаем интеграл рассматриваемого уравнения движения

$$I_1[t, u] = \int_0^l a u u_t dx.$$

2.2 Симметрии уравнений движения и связанные с ними алгебраические структуры

Пусть задано операторное уравнение

$$N(u) = 0, \qquad u \in D(N), \tag{2.12}$$

где $N : D(N) \subset U \to V$ - дифференцируемый по Гато оператор, U, V - линейные нормированные пространства над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, $D(N)$ - область определения оператора N.

Рассмотрим на $D(N)$ бесконечно малое преобразование, определяемое формулой

$$\overline{u} = u + \varepsilon S(u), \tag{2.13}$$

где S – генератор преобразования.

Определение 2.3. [92] Алгеброй $\mathcal{A}$ называется линейное пространство над полем $\mathcal{K}$, наделенное билинейным произведением $*$, удовлетворяющим для произвольных $a, b, c \in \mathcal{A}$ и любом $\lambda \in \mathcal{K}$ следующим условиям:

$$a * (b + c) = a * b + a * c, \tag{2.14}$$

$$(a + b) * c = a * c + b * c, \tag{2.15}$$

$$(\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda(a * b). \tag{2.16}$$

Определение 2.4. [92] Алгебра Ли - это алгебра $\mathcal{A}$ над полем $\mathcal{K}$, для которой выполняются условия

$$a * b + b * a = 0, \tag{2.17}$$

$$a * (b * c) + b * (c * a) + c * (a * b) = 0 \qquad \forall a, b, c \in \mathcal{A}. \qquad (2.18)$$

Определение 2.5. [92] Любая алгебра $\mathcal{A}$ над полем $\mathcal{K}$ с произведением $*$ называется Ли-допустимой алгеброй, если алгеброй Ли является алгебра $\mathcal{A}$, которая есть линейное пространство $\mathcal{A}$ над полем $\mathcal{K}$, наделенное билинейным произведением

$$[a, b] = a * b - b * a \qquad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Если S_1 и S_2 - генераторы преобразования (2.13), то их $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-произведение определяется формулой

$$(S_1, S_2)(u) = S'_{1u}\mathcal{S}_u S_2(u) - S'_{2u}\mathcal{T}_u S_1(u), \qquad (2.19)$$

соответствующий $\mathcal{G}$-коммутатор имеет вид

$$[S_1, S_2]_{\mathcal{G}}(u) = S'_{1u}\mathcal{G}_u S_2(u) - S'_{2u}\mathcal{G}_u S_1(u), \qquad (2.20)$$

откуда при $\mathcal{G}_u \equiv I$, где I - тождественный оператор, получаем коммутатор

$$[S_1, S_2](u) = S'_{1u} S_2(u) - S'_{2u} S_1(u). \qquad (2.21)$$

Теорема 2.5. [106] *Если S_1, S_2 - генераторы симметрий уравнения (2.12), $\mathcal{S}_u, \mathcal{T}_u$ - операторы рекурсии и $\forall u \in D(N)$, $\forall h, v \in D(N'_u)$ выполнено условие*

$$N''_u(h, \mathcal{S}_u v) = N''_u(v, \mathcal{T}_u h), \qquad (2.22)$$

то $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-произведение (2.19) также является генератором симметрии этого уравнения.

Доказательство. Имеем

$$N'_{u+\varepsilon\mathcal{S}_u S_2(u)} S_1(u + \varepsilon\mathcal{S}_u S_2(u)) = N'_u S_1(u) + \varepsilon\,[N''_u(S_1(u), \mathcal{S}_u S_2(u)) +$$

$$+ N'_u S'_{1u}\mathcal{S}_u S_2(u)] + o(\varepsilon), \qquad (2.23)$$

$$N'_{u+\varepsilon\mathcal{T}_u S_1(u)} S_2(u+\varepsilon\mathcal{T}_u S_1(u)) = N'_u S_2(u) + \varepsilon\left[N''_u(S_2(u), \mathcal{T}_u S_1(u)) + \right.$$
$$\left. + N'_u S'_{2u} \mathcal{T}_u S_1(u)\right] + o(\varepsilon). \tag{2.24}$$

Пусть u - решение уравнения (2.12). Вычтем из равенства (2.23) равенство (2.24) и учтем условие (2.22). В результате получим, что $N'_u(S_1, S_2)(u) = 0$. Таким образом, на основе теоремы 2.1 заключаем, что $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-произведение (2.19) также является генератором симметрии уравнения (2.12). □

Теорема 2.6. [106] *Если S_1, S_2 - генераторы симметрий уравнения (2.12), $\mathcal{S}_u, \mathcal{T}_u$ - операторы рекурсии и $\forall u \in D(N)$, $\forall h, v \in D(N'_u)$ выполнены условия*

$$N''_u(h, \mathcal{S}_u v) = N''_u(v, \mathcal{T}_u h),$$

$$\tilde{\mathcal{G}}'_u(h; \tilde{\mathcal{G}}_u v) = \tilde{\mathcal{G}}'_u(v; \tilde{\mathcal{G}}_u h),$$

где $\tilde{\mathcal{G}}_u \equiv \mathcal{S}_u + \mathcal{T}_u$, то генераторы симметрий уравнения (2.12) образуют Ли-допустимую алгебру относительно $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-произведения (2.19) .

Доказательство. Это следует из теоремы 2.5 и теоремы 7.1 (см. [92], стр. 92). □

Теорема 2.7. [106] *Если S_1, S_2 - генераторы симметрий уравнения (2.12), $\mathcal{G}_u$ - оператор рекурсии и $\forall u \in D(N)$, $\forall h, v \in D(N'_u)$ выполнено условие*

$$N''_u(h, \mathcal{G}_u v) = N''_u(v, \mathcal{G}_u h),$$

то $\mathcal{G}$-коммутатор (2.20) также является генератором симметрии этого уравнения.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.5 при $\mathcal{G}_u \equiv \mathcal{S}_u = \mathcal{T}_u$.

Теорема 2.8. [106] *Если S_1, S_2 - генераторы симметрий уравнения (2.12), $\mathcal{G}_u$ - оператор рекурсии и $\forall u \in D(N)$, $\forall h, v \in D(N'_u)$ выполнены условия*

$$N''_u(h, \mathcal{G}_u v) = N''_u(v, \mathcal{G}_u h), \tag{2.25}$$

$$\mathcal{G}'_u(h; \mathcal{G}_u v) = \mathcal{G}'_u(v; \mathcal{G}_u h), \tag{2.26}$$

то генераторы симметрий уравнения (2.12) образуют алгебру Ли относительно $\mathcal{G}$-коммутатора (2.20).

Доказательство. Это следует из теоремы 2.7 и теоремы 7.1 (см. [92], стр. 92). □

Теорема 2.9. [106] *Генераторы симметрий уравнения (2.12) образуют алгебру Ли относительно коммутатора (2.21).*

Доказательство. Это следует из теоремы 2.8. Отметим, что в данном случае $\mathcal{G}_u \equiv I$, где I - тождественный оператор, поэтому $\mathcal{G}'_u$ есть нулевой оператор и, следовательно, условие (2.26) выполняется тождественно. Условие (2.25) также выполняется ввиду предположения (1.6). □

Замечание 2.4. Отметим, что теорема 2.9 была доказана в п. 2.1.

Пример 2.3. [106]

Рассмотрим уравнение движения

$$N(u) \equiv u_t + u_x + u_y + \alpha(u) = 0, \tag{2.27}$$

$$(x, y, t) \in \mathcal{Q} = (a, b) \times (c, d) \times (t_0, t_1).$$

Здесь α - достаточно гладкая функция.

При $\alpha \equiv 0$ уравнение (2.27) является частным случаем линейного уравнения переноса с двумя пространственными переменными [64]

$$u_t + a u_x + b u_y = 0,$$

где a и b – положительные постоянные.

Отметим, что $S_1(u) = u_x$, $S_2(u) = u_y$ и $S_3(u) = \alpha(u)$ являются генераторами симметрий уравнения (2.27).

Действительно, по теореме 2.1 получаем

$$N'_u S_1(u) = (D_t + D_x + D_y + \alpha'(u)I)\, u_x =$$

$$= u_{tx} + u_{xx} + u_{xy} + \alpha'(u)u_x = D_x\left[u_t + u_x + u_y + \alpha(u)\right] \stackrel{(2.27)}{=} 0.$$

Здесь I - тождественный оператор.

Аналогично

$$N'_u S_2(u) = (D_t + D_x + D_y + \alpha'(u)I)\, u_y =$$

$$= u_{ty} + u_{xy} + u_{yy} + \alpha'(u)u_y = D_y\left[u_t + u_x + u_y + \alpha(u)\right] \stackrel{(2.27)}{=} 0,$$

$$N'_u S_3(u) = (D_t + D_x + D_y + \alpha'(u)I)\, \alpha(u) =$$

$$= \alpha'(u)u_t + \alpha'(u)u_x + \alpha'(u)u_y + \alpha'(u)\alpha(u) =$$

$$= \alpha'(u)\left(u_t + u_x + u_y + \alpha(u)\right) \stackrel{(2.27)}{=} 0.$$

Оператор $\mathcal{G}_u \equiv \mathcal{G} = a(x,y,t)I$, где a - достаточно гладкая функция такая, что

$$a_t + a_x + a_y = 0, \tag{2.28}$$

является оператором рекурсии, так как

$$N'_u \mathcal{G}_u S(u) = \left[D_t + D_x + D_y + \alpha'(u)I\right](aS(u)) =$$

$$= a_t S(u) + aD_t S(u) + a_x S(u) + aD_x S(u) + a_y S(u) + aD_y S(u) +$$

$$+ \alpha'(u)aS(u) = S(u)\left(a_t + a_x + a_y\right) +$$

$$+ a\left[D_t + D_x + D_y + \alpha'(u)I\right]S(u) = aN'_u S(u) \stackrel{(2.27)}{=} 0.$$

Здесь S - произвольный генератор симметрии уравнения (2.27).

Условие (2.25) в данном случае выполнено, так как

$$N''_u(h, v) = \alpha''(u)hv$$

и

$$N''_u(h, \mathcal{G}_u v) = \alpha''(u)ahv = N''_u(v, \mathcal{G}_u h).$$

Условие (2.26) также выполняется, так как оператор $\mathcal{G}_u \equiv \mathcal{G}$ не зависит от u, поэтому $\mathcal{G}'_u \equiv 0$.

Тогда по теореме 2.8 генераторы симметрий уравнения (2.27) образуют алгебру Ли относительно $\mathcal{G}$-коммутаторов

$$[S_1, S_2]_{\mathcal{G}}(u) = D_x(au_y) - D_y(au_x) = a_x u_y + au_{xy} - a_y u_x - au_{xy} =$$

$$= a_x u_y - a_y u_x,$$

$$[S_1, S_3]_{\mathcal{G}}(u) = D_x(a\alpha(u)) - \alpha'(u)(au_x) =$$

$$= a_x\alpha(u) + \alpha'(u)au_x - \alpha'(u)au_x = a_x\alpha(u),$$

$$[S_2, S_3]_{\mathcal{G}}(u) = D_y(a\alpha(u)) - \alpha'(u)(au_y) =$$

$$= a_y\alpha(u) + \alpha'(u)au_y - \alpha'(u)au_y = a_y\alpha(u).$$

Замечание 2.5. Отметим, что условию (2.28) удовлетворяет, например, функция

$$a(x, y, t) = e^{x+y-2t}.$$

Глава 3

Симметрийные свойства функционалов и интегралы уравнений движения бесконечномерных лагранжевых систем с не-B_u-потенциальными силами

В настоящей главе разработан единый подход к решению прямой задачи механики как конечномерных, так и бесконечномерных систем – нахождению интегралов уравнений движения непотенциальных систем, основанный на исследовании инвариантности действий по Гамильтону, связанных с уравнениями движения. С этой целью получены условия существования абсолютных симметрий и симметрий до дивергенции для функционалов действия.

Это позволило с единой точки зрения рассматривать симметрии эйлеровых и неэйлеровых функционалов, что, в частности, привело к распространению теоремы Э. Нетер на случай действий по Гамильтону, принадлежащих более широкому классу функционалов.

Установлена также связь вариационных симметрий с симметриями уравнений движения и алгебраическими структурами (Ли-допустимыми алгебрами, в том числе алгебрами Ли).

Теоретические результаты проиллюстрированы примерами.

3.1 Необходимые и достаточные условия инвариантности действий по Гамильтону. Интегралы уравнений движения с квази-B_u-потенциальными операторами

Определение 3.1. [16] Функционал вида (1.94) называется абсолютным инвариантом относительно преобразования (2.2), если

$$F^{T_1}[u+\varepsilon S(u)] = F^{T_1}[u] + r(u,\varepsilon S(u)) \tag{3.1}$$

$$\forall u \in D(N),\ \forall T_1 : t_0 \leq T_1 \leq t_1,$$

причем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{r(u,\varepsilon S(u))}{\varepsilon} = 0$.

Определение 3.2. [16] Преобразование (2.2) называется симметрией до дивергенции функционала (1.94) на $D(N)$, если существует $f : D(N) \to C^1[t_0,t_1]$ такое, что

$$F^{T_1}[u+\varepsilon S(u)] = F^{T_1}[u] + \varepsilon \int\limits_{t_0}^{T_1} D_t f[u]\, dt + r(u,\varepsilon S(u)) \tag{3.2}$$

$$\forall u \in D(N), \forall T_1 : t_0 \leq T_1 \leq t_1,$$

причем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{r(u,\varepsilon S(u))}{\varepsilon} = 0$.

Отметим, что оператор S называется также генератором симметрии (абсолютной, до дивергенции), а симметрии функционала F называются также вариационными симметриями.

Теорема 3.1. *Преобразование (2.2) - симметрия до дивергенции действия (1.94) тогда и только тогда, когда*

$$\left\langle \tilde{N}(u), B_u S(u) \right\rangle + D_t \left\{ \left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_t u), B_u S(u) \right\rangle + \right.$$

$$+ \left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(uS(u)), B_u u_t \right\rangle + \left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{2u} u_t, B_u S(u) \right\rangle +$$

$$+ \left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{2u} S(u), B_u u_t \right\rangle + \left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_1(u), B_u S(u) \right\rangle -$$

$$-\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_{2u})u, S(u)\right\rangle - f[u]\Bigg\} = 0 \tag{3.3}$$

$$\forall u \in D(N),\ t_0 \leq t \leq t_1.$$

Доказательство. Пусть (2.2) является симметрией до дивергенции действия (1.94). Тогда, применяя формулу (1.3), получаем

$$F^{T_1}[u+\varepsilon S(u)] = F^{T_1}[u] + \varepsilon \int\limits_{t_0}^{T_1} \Bigg\{ \left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_t u), B_u D_t S(u)\right\rangle +$$

$$+\left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_t u), B_u'(u_t; S(u))\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{3u} D_t(uS(u)), B_u u_t\right\rangle +$$

$$+\left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{3u}'(u_t u; S(u)), B_u u_t\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{2u} u_t, B_u D_t S(u)\right\rangle +$$

$$+\left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{2u} u_t, B_u'(u_t; S(u))\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{2u} D_t S(u), B_u u_t\right\rangle +$$

$$+\left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{2u}'(u_t; S(u)), B_u u_t\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathcal{R}}_1(u), B_u D_t S(u)\right\rangle +$$

$$+\left\langle \tilde{\mathcal{R}}_1(u), B_u'(u_t; S(u))\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{1u}' S(u), B_u u_t\right\rangle -$$

$$-\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_{2u})u, D_t S(u)\right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_{2u})S(u), u_t\right\rangle -$$

$$-\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_{2u}'(u; S(u))), u_t\right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial t} B_u^{*\prime}(\tilde{\mathcal{R}}_{2u} u; S(u)), u_t\right\rangle +$$

$$+\left\langle (B_u - grad)_{\Phi_1} \tilde{\mathcal{B}}[u], B_u S(u)\right\rangle \Bigg\} dt + o(\varepsilon).$$

Условие (3.2) записывается в виде

$$\varepsilon \int\limits_{t_0}^{T_1} \Bigg\{ \left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_t u), B_u D_t S(u)\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_t u), B_u'(u_t; S(u))\right\rangle +$$

$$+\left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{3u} D_t(uS(u)), B_u u_t\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{3u}'(u_t u; S(u)), B_u u_t\right\rangle +$$

$$+\left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u_t, B_uD_tS(u)\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u_t, B'_u(u_t;S(u))\right\rangle +$$
$$+\left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}D_tS(u), B_uu_t\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathfrak{R}}'_{2u}(u_t;S(u)), B_uu_t\right\rangle +$$
$$+\left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_1(u), B_uD_tS(u)\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_1(u), B'_u(u_t;S(u))\right\rangle +$$
$$+\left\langle \tilde{\mathfrak{R}}'_{1u}S(u), B_uu_t\right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B^*_u\tilde{\mathfrak{R}}_{2u})u, D_tS(u)\right\rangle -$$
$$-\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B^*_u\tilde{\mathfrak{R}}_{2u})S(u), u_t\right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B^*_u\tilde{\mathfrak{R}}'_{2u}(u;S(u))), u_t\right\rangle -$$
$$-\left\langle \frac{\partial}{\partial t}B^{*\prime}_u(\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u;S(u)), u_t\right\rangle + \left\langle (B_u{-}grad)_{\Phi_1}\tilde{\mathfrak{B}}[u], B_uS(u)\right\rangle\Bigg\}\,dt-$$
$$-\varepsilon\int\limits_{t_0}^{T_1} D_tf[u]\,dt = o(\varepsilon) \qquad \forall u\in D(N), \quad \forall T_1: t_0\le T_1\le t_1,$$

или

$$\left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_tu), B_uD_tS(u)\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_tu), B'_u(u_t;S(u))\right\rangle +$$
$$+\left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}D_t(uS(u)), B_uu_t\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathfrak{R}}'_{3u}(u_tu;S(u)), B_uu_t\right\rangle +$$
$$+\left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u_t, B_uD_tS(u)\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u_t, B'_u(u_t;S(u))\right\rangle +$$
$$+\left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}D_tS(u), B_uu_t\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathfrak{R}}'_{2u}(u_t;S(u)), B_uu_t\right\rangle +$$
$$+\left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_1(u), B_uD_tS(u)\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_1(u), B'_u(u_t;S(u))\right\rangle +$$
$$+\left\langle \tilde{\mathfrak{R}}'_{1u}S(u), B_uu_t\right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B^*_u\tilde{\mathfrak{R}}_{2u})u, D_tS(u)\right\rangle -$$
$$-\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B^*_u\tilde{\mathfrak{R}}_{2u})S(u), u_t\right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B^*_u\tilde{\mathfrak{R}}'_{2u}(u;S(u))), u_t\right\rangle -$$
$$-\left\langle \frac{\partial}{\partial t}B^{*\prime}_u(\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u;S(u)), u_t\right\rangle + \left\langle (B_u{-}grad)_{\Phi_1}\tilde{\mathfrak{B}}[u], B_uS(u)\right\rangle -$$

$$-D_t f[u] = 0 \qquad\qquad \forall u \in D(N),\ t_0 \le t \le t_1. \qquad (3.4)$$

Далее,

$$\left\langle [B'_u(u_t;\cdot)]^* \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_t u), S(u) \right\rangle + \left\langle B_u^* \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_t u), D_t S(u) \right\rangle +$$

$$+ \left\langle D_t(uS(u)), \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}^* B_u u_t \right\rangle + \left\langle \left[\tilde{\mathfrak{R}}'_{3u}(u_t u;\cdot)\right]^* B_u u_t, S(u) \right\rangle +$$

$$+ \left\langle B_u^* \tilde{\mathfrak{R}}_{2u} u_t, D_t S(u) \right\rangle + \left\langle [B'_u(u_t;\cdot)]^* \tilde{\mathfrak{R}}_{2u} u_t, S(u) \right\rangle +$$

$$+ \left\langle D_t S(u), \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}^* B_u u_t \right\rangle + \left\langle \left[\tilde{\mathfrak{R}}'_{2u}(u_t;\cdot)\right]^* B_u u_t, S(u) \right\rangle +$$

$$+ \left\langle B_u^* \tilde{\mathfrak{R}}_1(u), D_t S(u) \right\rangle + \left\langle [B'_u(u_t;\cdot)]^* \tilde{\mathfrak{R}}_1(u), S(u) \right\rangle +$$

$$+ \left\langle S(u), \tilde{\mathfrak{R}}_{1u}'^* B_u u_t \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B_u^* \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}) u, D_t S(u) \right\rangle -$$

$$- \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial t}(B_u^* \tilde{\mathfrak{R}}_{2u})\right]^* u_t, S(u) \right\rangle - \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial t}(B_u^* \tilde{\mathfrak{R}}'_{2u}(u;\cdot))\right]^* u_t, S(u) \right\rangle -$$

$$- \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial t}(B_u^{*\prime}(\tilde{\mathfrak{R}}_{2u} u;\cdot))\right]^* u_t, S(u) \right\rangle +$$

$$+ \left\langle (B_u{-}grad)_{\Phi_1} \tilde{\mathfrak{B}}[u], B_u S(u) \right\rangle - D_t f[u] = 0,$$

то есть

$$\left\langle [B'_u(u_t;\cdot)]^* \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_t u), S(u) \right\rangle + D_t \left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_t u), B_u S(u) \right\rangle -$$

$$- \left\langle D_t B_u^* \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_t u), S(u) \right\rangle + D_t \left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(uS(u)), B_u u_t \right\rangle -$$

$$- \left\langle S(u), u D_t(\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}^* B_u u_t) \right\rangle + \left\langle \left[\tilde{\mathfrak{R}}'_{3u}(u_t u;\cdot)\right]^* B_u u_t, S(u) \right\rangle +$$

$$+ D_t \left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{2u} u_t, B_u S(u) \right\rangle - \left\langle D_t(B_u^* \tilde{\mathfrak{R}}_{2u} u_t), S(u) \right\rangle +$$

$$+ \left\langle [B'_u(u_t;\cdot)]^* \tilde{\mathfrak{R}}_{2u} u_t, S(u) \right\rangle + D_t \left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{2u} S(u), B_u u_t \right\rangle -$$

$$- \left\langle D_t(\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}^* B_u u_t), S(u) \right\rangle + \left\langle \left[\tilde{\mathfrak{R}}'_{2u}(u_t;\cdot)\right]^* B_u u_t, S(u) \right\rangle +$$

$$+D_t\left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_1(u), B_uS(u)\right\rangle - \left\langle D_t(B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_1(u)), S(u)\right\rangle +$$

$$+\left\langle [B_u'(u_t;\cdot)]^*\tilde{\mathfrak{R}}_1(u), S(u)\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{1u}'S(u), B_uu_t\right\rangle -$$

$$-D_t\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u})u, S(u)\right\rangle + \left\langle D_t\left(\frac{\partial}{\partial t}(B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u})u\right), S(u)\right\rangle -$$

$$-\left\langle \left[\frac{\partial}{\partial t}(B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u})\right]^* u_t, S(u)\right\rangle - \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}'(u;\cdot)\right]^* u_t, S(u)\right\rangle -$$

$$-\left\langle \left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}(\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u;\cdot)\right]^* u_t, S(u)\right\rangle +$$

$$+\left\langle (B_u{-}grad)_{\Phi_1}\tilde{\mathfrak{B}}[u], B_uS(u)\right\rangle - D_tf[u] = 0,$$

или

$$D_t\left\{\left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_tu), B_uS(u)\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(uS(u)), B_uu_t\right\rangle +\right.$$

$$+\left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u_t, B_uS(u)\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}S(u), B_uu_t\right\rangle +$$

$$\left.+\left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_1(u), B_uS(u)\right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u})u, S(u)\right\rangle - f[u]\right\} +$$

$$+\left\langle B_uS(u), (B_u^{-1})^*\left\{[B_u'(u_t;\cdot)]^*\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_tu) - \frac{\partial}{\partial t}(B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{3u})(u_tu) -\right.\right.$$

$$-B_u^{*\prime}(\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_tu);u_t) - B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}'(u_tu;u_t) - B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_{tt}u) - B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}u_t^2-$$

$$-u\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}^*B_u)u_t - u\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}^{*\prime}(B_uu_t;u_t) - u\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}^*B_u'(u_t;u_t) - u\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}^*B_uu_{tt}+$$

$$+\left[\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}'(u_tu;\cdot)\right]^* B_uu_t - \frac{\partial}{\partial t}(B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u})u_t - B_u^{*\prime}(\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u_t;u_t)-$$

$$-B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}'(u_t;u_t) - B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u_{tt} + [B_u'(u_t;\cdot)]^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u_t - \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}^*B_u)u_t-$$

$$-\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}^{*\prime}(B_uu_t;u_t) - \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}^*B_u'(u_t;u_t) - \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}^*B_uu_{tt} + \left[\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}'(u_t;\cdot)\right]^* B_uu_t-$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_1(u)\right) - B_u^{*\prime}(\tilde{\mathfrak{R}}_1(u);u_t) - B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{1u}'u_t + [B_u'(u_t;\cdot)]^*\tilde{\mathfrak{R}}_1(u)+$$

$$+\tilde{\mathfrak{R}}'^{*}_{1u}B_u u_t + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}\right)u + \frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}(\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u;u_t) + \frac{\partial}{\partial t}B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}'_{2u}(u;u_t)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}\right)u_t - \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}\right)\right]^* u_t - \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}'_{2u}(u;\cdot)\right)\right]^* u_t+$$

$$+\ B_u^*((B_u - grad)_{\Phi_1}\tilde{\mathfrak{B}}[u]) - \left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}(\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u;\cdot)\right]^* u_t\Bigg\}\Bigg\rangle = 0.$$

Таким образом, учитывая (1.119) - (1.122), заключаем, что выполняется условие (3.3).

Очевидно, условие (3.3) является также достаточным. □

Теорема 3.2. *Если преобразование (2.2) - симметрия до дивергенции действия (1.94) на* $D(N)$ *и существует* $f_1 : D(N) \to C^1[t_0, t_1]$ *такое, что*

$$\langle \Lambda(u), B_u S(u)\rangle = D_t f_1[u], \tag{3.5}$$

то выражение

$$I[t,u] = \left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_t u), B_u S(u)\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(uS(u)), B_u u_t\right\rangle +$$

$$+\left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u_t, B_u S(u)\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{2u}S(u), B_u u_t\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_1(u), B_u S(u)\right\rangle -$$

$$-\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}\right)u, S(u)\right\rangle - f[u] - f_1[u] \tag{3.6}$$

определяет интеграл уравнения движения (1.13).

Это утверждение следует из условия (3.3).

Замечание 3.1. Если $B_u \equiv I$ - тождественный оператор, то теоремы 3.1 и 3.2 формулируются следующим образом.

Теорема 3.3. *Преобразование (2.2) - симметрия до дивергенции действия (1.104) тогда и только тогда, когда*

$$\left\langle \tilde{N}(u), S(u)\right\rangle + D_t\left\{\left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_t u), S(u)\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(uS(u)), u_t\right\rangle +\right.$$

$$+\left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{2u}u_t, S(u)\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{2u}S(u), u_t\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathcal{R}}_1(u), S(u)\right\rangle -$$

$$\left.-\left\langle \frac{\partial \tilde{\mathcal{R}}_{2u}}{\partial t}u, S(u)\right\rangle - f[u]\right\} = 0 \qquad (3.7)$$

$$\forall u \in D(N),\ t_0 \le t \le t_1.$$

Теорема 3.4. *Если преобразование (2.2) - симметрия до дивергенции действия (1.104) на* $D(N)$ *и существует* $f_1 : D(N) \to C^1[t_0, t_1]$ *такое, что*

$$\langle \Lambda(u), S(u)\rangle = D_t f_1[u], \qquad (3.8)$$

то выражение

$$I[t,u] = \left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_t u), S(u)\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{3u}(uS(u)), u_t\right\rangle +$$

$$+\left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{2u}u_t, S(u)\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{2u}S(u), u_t\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathcal{R}}_1(u), S(u)\right\rangle -$$

$$-\left\langle \frac{\partial \tilde{\mathcal{R}}_{2u}}{\partial t}u, S(u)\right\rangle - f[u] - f_1[u] \qquad (3.9)$$

определяет интеграл уравнения движения (1.13).

Замечание 3.2. Если $\Lambda \equiv 0$, то теоремы 3.1 и 3.2 могут быть сформулированы следующим образом.

Теорема 3.5. *Преобразование (2.2) - симметрия до дивергенции действия по Гамильтону (1.109) тогда и только тогда, когда*

$$\langle N(u), B_u S(u)\rangle + D_t\left\{\langle \mathcal{R}_{3u}(u_t u), B_u S(u)\rangle +\right.$$

$$+\langle \mathcal{R}_{3u}(uS(u)), B_u u_t\rangle + \langle \mathcal{R}_{2u}u_t, B_u S(u)\rangle +$$

$$+\langle \mathcal{R}_{2u}S(u), B_u u_t\rangle + \langle \mathcal{R}_1(u), B_u S(u)\rangle -$$

$$\left.-\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B_u^*\mathcal{R}_{2u})u, S(u)\right\rangle - f[u]\right\} = 0 \qquad (3.10)$$

$$\forall u \in D(N),\ t_0 \le t \le t_1.$$

Теорема 3.6. *Если преобразование (2.2) - симметрия до дивергенции действия (1.109) на $D(N)$, то выражение*

$$I[t,u] = \langle \mathcal{R}_{3u}(u_t u), B_u S(u)\rangle + \langle \mathcal{R}_{3u}(uS(u)), B_u u_t\rangle +$$
$$+ \langle \mathcal{R}_{2u} u_t, B_u S(u)\rangle + \langle \mathcal{R}_{2u} S(u), B_u u_t\rangle + \langle \mathcal{R}_1(u), B_u S(u)\rangle -$$
$$- \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B_u^* \mathcal{R}_{2u})u, S(u)\right\rangle - f[u] \qquad (3.11)$$

определяет интеграл уравнения движения (1.13).

Замечание 3.3. Если $\Lambda \equiv 0, B_u \equiv I$, то теоремы 3.1 и 3.2 формулируются следующим образом.

Теорема 3.7. *Преобразование (2.2) - симметрия до дивергенции действия по Гамильтону (1.114) тогда и только тогда, когда*

$$\langle N(u), S(u)\rangle + D_t \{\langle \mathcal{R}_{3u}(u_t u), S(u)\rangle + \langle \mathcal{R}_{3u}(uS(u)), u_t\rangle +$$
$$+ \langle \mathcal{R}_{2u} u_t, S(u)\rangle + \langle \mathcal{R}_{2u} S(u), u_t\rangle + \langle \mathcal{R}_1(u), S(u)\rangle -$$
$$- \left\langle \frac{\partial \mathcal{R}_{2u}}{\partial t} u, S(u)\right\rangle - f[u]\Big\} = 0 \qquad (3.12)$$
$$\forall u \in D(N),\ t_0 \le t \le t_1.$$

Теорема 3.8. *Если преобразование (2.2) - симметрия до дивергенции действия (1.114) на $D(N)$, то выражение*

$$I[t,u] = \langle \mathcal{R}_{3u}(u_t u), S(u)\rangle + \langle \mathcal{R}_{3u}(uS(u)), u_t\rangle + \langle \mathcal{R}_{2u} u_t, S(u)\rangle +$$
$$+ \langle \mathcal{R}_{2u} S(u), u_t\rangle + \langle \mathcal{R}_1(u), S(u)\rangle - \left\langle \frac{\partial \mathcal{R}_{2u}}{\partial t} u, S(u)\right\rangle - f[u] \qquad (3.13)$$

определяет первый интеграл уравнения движения (1.13).

Пример 3.1.

Рассмотрим уравнение движения

$$N(u) \equiv u_{tt} + u_{tx} + u_x u_{tx} + u_{xx} = 0, \tag{3.14}$$

$$(x,t) \in \mathfrak{Q} = (a,b) \times (t_0, t_1).$$

Положим

$$D(N) = \Big\{ u \in U = C^{2,\infty}_{t,x}(\overline{\mathfrak{Q}}) : \; u|_{t=t_0} = 0, \;\; u|_{t=t_1} = 0,$$

$$u|_{x=a} = 0, \;\; u|_{x=b} = 0, \;\; u_t|_{x=a} = 0, \;\; u_t|_{x=b} = 0 \Big\}. \tag{3.15}$$

Введем обозначение $V = C(\overline{\mathfrak{Q}})$ и зададим билинейную форму $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ в виде

$$\Phi(v,g) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{a}^{b} v(x,t) g(x,t) dx dt. \tag{3.16}$$

В данном случае

$$P_{2u} \equiv I, \;\; P_{3u} \equiv 0, \;\; P_{1u} = D_x + u_x D_x, \;\; Q(u) = u_{xx}.$$

Оператор N (3.14) не является потенциальным на $D(N)$ (3.15) относительно билинейной формы (3.16). Условие (1.52) не выполняется, так как

$$P^*_{2u} \equiv I, \quad \frac{\partial P^*_{2u}}{\partial t} \equiv 0, \quad P^*_{1u} = -D_x - u_{xx} I - u_x D_x.$$

Отметим, что уравнение (3.14) представимо в форме уравнения Лагранжа с непотенциальной плотностью силы.

Положим $B_u \equiv I, \; \Lambda(u) = u_x u_{tx}$.

Тогда

$$\tilde{P}_{2u} \equiv I, \;\; \tilde{P}_{3u} \equiv 0, \;\; \tilde{P}_{1u} = D_x, \;\; \tilde{Q}(u) = u_{xx}$$

и условия (1.36)–(1.42) выполняются.

Действительно,

(1.36)$\Longrightarrow I = I$,

(1.37)$\Longrightarrow 0=0,$
(1.38)$\Longrightarrow -D_x+D_x=0,$
(1.39)$\Longrightarrow D_{xx}-D_{xx}=0,$
(1.40)$\Longrightarrow 0=0,$
(1.41)$\Longrightarrow 0=0,$
(1.42)$\Longrightarrow 0=0.$

Далее,

$$\tilde{\mathcal{R}}_1(u)=-\frac{1}{2}u_x,\quad \mathcal{R}_{2u}\equiv-\frac{1}{2}I,\quad \tilde{\mathcal{R}}_3\equiv 0,\quad \tilde{\mathcal{B}}[u]=-\frac{1}{2}\int\limits_a^b u_x^2dx.$$

Действие по Гамильтону (1.104) имеет вид

$$F^{t_1}[u]=-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^b\left(u_t^2+u_tu_x+u_x^2\right)dxdt. \tag{3.17}$$

Найдем интеграл уравнения (3.14).

Предположим, что $u_x\in D(N)=D(N'_u)$.

Преобразование $\overline{u}=u+\varepsilon u_x$ является симметрией функционала (3.17).

Действительно,

$$F^{T_1}[u+\varepsilon u_x]=-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T_1}\int\limits_a^b\left[(u_t+\varepsilon u_{tx})^2+(u_t+\varepsilon u_{tx})(u_x+\varepsilon u_{xx})+\right.$$

$$\left.+(u_x+\varepsilon u_{xx})^2\right]dxdt=F^{T_1}[u]+$$

$$+\varepsilon\int\limits_{t_0}^{T_1}\int\limits_a^b\left[-u_tu_{tx}-\frac{1}{2}u_tu_{xx}-\frac{1}{2}u_{tx}u_x-u_xu_{xx}\right]dxdt+o(\varepsilon)=$$

$$=F^{T_1}[u]+\varepsilon\int\limits_{t_0}^{T_1}\int\limits_a^b\left[-\frac{1}{2}D_xu_t^2+\frac{1}{2}u_{tx}u_x-\frac{1}{2}u_{tx}u_x-\frac{1}{2}D_xu_x^2\right]dxdt+$$

$$+o(\varepsilon) = F^{T_1}[u] + o(\varepsilon) \qquad \forall T_1 : t_0 \le T_1 \le t_1,$$

то есть имеет место абсолютная инвариантность.

Условие (3.8) в данном случае выполнено, так как

$$\langle \Lambda(u), S(u) \rangle = \int_a^b u_x u_{tx} u_x dx = \frac{1}{3} \int_a^b D_t u_x^3 dx,$$

то есть

$$f_1[u] = \frac{1}{3} \int_a^b u_x^3 dx.$$

Таким образом, по теореме 3.4

$$I[t, u] = \int_a^b \left[u_t u_x + \frac{1}{2} u_x^2 + \frac{1}{3} u_x^3 \right] dx$$

является искомым интегралом.

Пример 3.2.

Рассматривается уравнение движения

$$N(u) \equiv u u_{tt} + D_x^{-1} u_t + u_t^2 + u u_{xx} + u_x^2 = 0, \tag{3.18}$$

$$(x, t) \in \mathcal{Q} = (a, b) \times (t_0, t_1).$$

Положим

$$D(N) = \left\{ u \in U = C_{t,x}^{2,\infty}(\overline{\mathcal{Q}}) : u|_{t=t_0} = 0,\ u|_{t=t_1} = 0, \right.$$

$$\left. u|_{x=a} = 0,\ u|_{x=b} = 0,\ \int_a^b u(y, t) dy = 0 \right\}. \tag{3.19}$$

Введем классическую билинейную форму

$$\Phi(v, g) = \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b v(x, t) g(x, t) dx dt. \tag{3.20}$$

Отметим, что

$$P_{2u} = uI, \quad P_{1u} \equiv D_x^{-1}, \quad P_{3u} \equiv I, \quad Q(u) = uu_{xx} + u_x^2,$$

I - тождественный оператор.

Оператор N (3.18) не является потенциальным на $D(N)$ (3.19) относительно билинейной формы (3.20). Условие (1.51) не выполняется, так как

$$P_{3u}^* \equiv I, \quad P_{2u}^* = P_{2u} = uI, \quad P_{2u}^{*\prime}(h; u_t) = hu_t.$$

Отметим, что уравнение (3.18) представимо в форме уравнения Лагранжа с не-B_u-потенциальной плотностью силы.

Пусть

$$B_u \equiv uI, \quad \Lambda(u) = D_x^{-1} u_t.$$

Тогда

$$\tilde{P}_{2u} = uI, \ \tilde{P}_{1u} \equiv 0, \ \tilde{P}_{3u} \equiv I, \ \tilde{Q}(u) = uu_{xx} + u_x^2.$$

В данном случае условия (1.16) - (1.22) выполнены.

Действительно,

(1.16)$\Longrightarrow u^2 I - u^2 I = 0,$

(1.17)$\Longrightarrow u_t uh - uu_t h - uu_t h + uu_t h = 0,$

(1.18)$\Longrightarrow 0 = 0,$

(1.19)$\Longrightarrow h(uu_{xx} + u_x^2) - h(uu_{xx} + u_x^2) + u(hu_{xx} + uh_{xx} + 2u_x h_x) -$
$-u(u_{xx} h + 2u_x h_x + uh_{xx}) = 0,$

(1.20)$\Longrightarrow 0 = 0,$

(1.21)$\Longrightarrow uu_{tt} h - uhu_{tt} - u_{tt} uh + 2u_{tt} uh + huu_{tt} - uhu_{tt} - huu_{tt} = 0,$

(1.22)$\Longrightarrow hu_t^2 - 2hu_t^2 + 2u_t hu_t - hu_t^2 = 0.$

Из (1.95) - (1.98) получаем

$$\tilde{\mathcal{R}}_{2u} = -\frac{1}{4}uI, \quad \tilde{\mathcal{R}}_1 \equiv 0, \quad \tilde{\mathcal{R}}_{3u} = -\frac{1}{4}I, \quad \tilde{\mathcal{B}}[u] = -\frac{1}{2}\int\limits_a^b u^2 u_x^2 dx.$$

Соответствующее действие по Гамильтону находится по формуле (1.94) и имеет вид

$$F^{t_1}[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^b \left(-\frac{1}{4}u_t uuu_t - \frac{1}{4}uu_t uu_t - \frac{1}{2}u^2 u_x^2\right) dxdt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^b u^2\left(u_t^2 + u_x^2\right) dxdt. \tag{3.21}$$

Найдем интеграл уравнения (3.18).

Предположим, что $u_x \in D(N) = D(N_u')$.

Преобразование $\overline{u} = u + \varepsilon u_x$ является симметрией функционала (3.21).

Действительно,

$$F^{T_1}[u + \varepsilon u_x] = -\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T_1}\int\limits_a^b \left[(u + \varepsilon u_x)^2 (u_t + \varepsilon u_{tx})^2 + \right.$$

$$\left. + (u + \varepsilon u_x)^2 (u_x + \varepsilon u_{xx})^2\right] dxdt = F^{T_1}[u] -$$

$$-\varepsilon \int\limits_{t_0}^{T_1}\int\limits_a^b \left[u^2 u_t u_{tx} + uu_x u_t^2 + uu_x^3 + u^2 u_x u_{xx}\right] dxdt + o(\varepsilon) =$$

$$= F^{T_1}[u] - \varepsilon\int\limits_{t_0}^{T_1}\int\limits_a^b \frac{1}{2}D_x\left[u^2 u_t^2 + u^2 u_x^2\right] dxdt + o(\varepsilon) = F^{T_1}[u] + o(\varepsilon)$$

$$\forall T_1 : t_0 \le T_1 \le t_1,$$

то есть имеет место абсолютная инвариантность.

Условие (3.5) в данном случае выполнено, так как

$$\langle \Lambda(u), B_u S(u) \rangle = \int_a^b D_x^{-1} u_t \cdot u u_x dx = \frac{1}{2} \int_a^b D_x^{-1} u_t \cdot D_x u^2 dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_a^b u_t u^2 dx = -\frac{1}{6} \int_a^b D_t u^3 dx,$$

то есть

$$f_1[u] = -\frac{1}{6} \int_a^b u^3 dx.$$

Таким образом, по формуле (3.6) получаем интеграл уравнения (3.18) вида

$$I[t,u] = \int_a^b \left[u^2 u_t u_x - \frac{1}{6} u^3 \right] dx.$$

Полученные теоретические результаты проиллюстрируем известным примером, то есть установим связь с механикой конечномерных систем.

Пример 3.3.

Рассмотрим уравнение Эмдена равновесия для политропного газа [27, 107]

$$N(u) \equiv \ddot{u} + \frac{2}{t}\dot{u} + u^5 = 0, \qquad t \in [t_0, t_1],\ t_0 > 0. \tag{3.22}$$

Положим

$$D(N) = \left\{ u \in U = C^2[t_0, t_1] : u|_{t=t_0} = 0,\ u|_{t=t_1} = 0 \right\}. \tag{3.23}$$

Введем классическую билинейную форму

$$\Phi(v,g)=\int\limits_{t_0}^{t_1} v(t)g(t)dt. \tag{3.24}$$

В данном случае

$$P_{2u}\equiv I,\ P_{1u}\equiv \frac{2}{t}I,\ P_{3u}\equiv 0,\ Q(u)=u^5,$$

где I – тождественный оператор.

Оператор N уравнения (3.22) не является потенциальным на множестве $D(N)$ (3.23) относительно билинейной формы (3.24), так как условие (1.52) не выполняется.

Отметим, что оператор N уравнения (3.22) является B-потенциальным на множестве $D(N)$ (3.23) относительно билинейной формы (3.24), где $B=t^2I$.

Действительно,
(1.43)$\Longrightarrow t^2I-t^2I=0$,
(1.44)$\Longrightarrow 0=0$,
(1.45)$\Longrightarrow -4tI+2tI+2tI=0$,
(1.46)$\Longrightarrow -2h+2h+t^25u^4h-5u^4t^2h=0$,
(1.47)$\Longrightarrow 0=0$,
(1.48)$\Longrightarrow 0=0$,
(1.49)$\Longrightarrow 0=0$.

Из (1.110) - (1.113) получаем

$$\mathcal{R}_{2u}\equiv\mathcal{R}_2=-\frac{1}{2}I,\ \mathcal{R}_{1u}\equiv\mathcal{R}_1=-\frac{1}{t}I,\ \mathcal{R}_{3u}\equiv 0,\ \mathcal{B}[u]=\frac{t^2}{6}u^6.$$

Соответствующее действие по Гамильтону находится по формуле (1.109) и имеет вид

$$F_N^{t_1}[u]=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left(-\frac{t^2}{2}\dot{u}^2-\frac{1}{t}ut^2\dot{u}+tu\dot{u}+\frac{t^2}{6}u^6\right)dt=$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{t^2}{6} u^6 - \frac{t^2}{2} \dot{u}^2 \right) dt. \tag{3.25}$$

Найдем первый интеграл уравнения (3.22).

Генератор вариационной симметрии будем искать в виде

$$S(u) = \psi(t,u) - \dot{u}\varphi(t,u),$$

где φ и ψ – непрерывно дифференцируемые функции.

Предположим, что $\dot{u} \in D(N) = D(N'_u)$.

Равенство (3.10) в данном случае примет вид

$$\left(\ddot{u} + \frac{2}{t}\dot{u} + u^5 \right) t^2 (\psi - \dot{u}\varphi) + D_t \left\{ -\frac{1}{2}\dot{u}t^2 (\psi - \dot{u}\varphi) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2} (\psi - \dot{u}\varphi) t^2 \dot{u} - \frac{1}{t} u t^2 (\psi - \dot{u}\varphi) + tu (\psi - \dot{u}\varphi) - f_1(t,u,\dot{u}) \right\} = 0. \tag{3.26}$$

Здесь $f[u] = f_1(t,u,\dot{u})$ – непрерывно дифференцируемая функция.

Далее,

$$\left(t^2\ddot{u} + 2t\dot{u} + t^2u^5 \right) (\psi - \dot{u}\varphi) + D_t \left\{ -\dot{u}t^2 (\psi - \dot{u}\varphi) - f_1(t,u,\dot{u}) \right\} = 0,$$

или

$$\left(t^2\ddot{u} + 2t\dot{u} + t^2u^5 \right) (\psi - \dot{u}\varphi) - \ddot{u}t^2 (\psi - \dot{u}\varphi) - \dot{u}2t (\psi - \dot{u}\varphi) - \frac{\partial f_1}{\partial t} -$$

$$-\dot{u}t^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\dot{u} - \ddot{u}\varphi - \dot{u} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\dot{u} \right) \right) - \frac{\partial f_1}{\partial u}\dot{u} - \frac{\partial f_1}{\partial \dot{u}}\ddot{u} = 0.$$

Следовательно,

$$\ddot{u} \left(t^2\dot{u}\varphi - \frac{\partial f_1}{\partial \dot{u}} \right) + \dot{u} \left(-t^2u^5\varphi - t^2\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial u} \right) + \dot{u}^2t^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) +$$

$$+\dot{u}^3t^2\frac{\partial \varphi}{\partial u} + t^2u^5\psi - \frac{\partial f_1}{\partial t} = 0. \tag{3.27}$$

Пусть $\varphi = \varphi(t)$ и
$$\varphi(t) = -t. \tag{3.28}$$
Из условия
$$-t^3\dot{u} - \frac{\partial f_1}{\partial \dot{u}} = 0$$
находим
$$f_1(t, u, \dot{u}) = -\frac{t^3}{2}\dot{u}^2 + f_2(t, u). \tag{3.29}$$
С учетом (3.28) и (3.29) равенство (3.27) записывается в виде
$$\dot{u}\left(t^3u^5 - t^2\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial f_2}{\partial u}\right) + \dot{u}^2t^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + t^2u^5\psi - \frac{\partial f_2}{\partial t} = 0. \tag{3.30}$$
Приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях $\dot{u}$ в (3.30), получаем следующие уравнения Киллинга:
$$t^3u^5 - t^2\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial f_2}{\partial u} = 0,$$
$$\frac{1}{2} - \frac{\partial\psi}{\partial u} = 0,$$
$$t^2u^5\psi - \frac{\partial f_2}{\partial t} = 0.$$
Отсюда следует, что
$$\psi(u) = \frac{1}{2}u, \quad f_2(t, u) = \frac{t^3}{6}u^6.$$
Таким образом,
$$S(u) = \frac{1}{2}u + t\dot{u}, \quad f[u] = \frac{t^3}{6}u^6 - \frac{t^3}{2}\dot{u}^2.$$
По формуле (3.11) находим известный первый интеграл уравнения Эмдена (3.22) (см. [27])
$$I[t, u] = -\frac{1}{2}\dot{u}t^2\left(\frac{1}{2}u + t\dot{u}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u + t\dot{u}\right)t^2\dot{u} -$$

$$-\frac{u}{t}t^2\left(\frac{1}{2}u+t\dot{u}\right)+tu\left(\frac{1}{2}u+t\dot{u}\right)-\frac{t^3}{6}u^6+\frac{t^3}{2}\dot{u}^2=$$

$$=-t^2\dot{u}\left(\frac{1}{2}u+t\dot{u}\right)-\frac{t^3}{6}u^6+\frac{t^3}{2}\dot{u}^2=-\frac{t^2}{2}\left(u\dot{u}+t\dot{u}^2+\frac{t}{3}u^6\right).$$

3.2 Симметрии функционалов и связанные с ними алгебраические структуры

Пусть оператор N уравнения (1.13) является квази-B_u-потенциальным на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы (1.7).

Тогда соответствующее действие по Гамильтону имеет вид (1.94).

Теорема 3.9. *Преобразование (2.2) является симметрией (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.94) на $D(N)$ тогда и только тогда, когда*

$$\Phi(\tilde{N}(u),B_uS(u))=0 \qquad \forall u\in D(N). \tag{3.31}$$

Доказательство. Предположим, что преобразование (2.2) является симметрией (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.94) на $D(N)$. Тогда имеет место равенство (3.3). Интегрируя левую и правую части этого равенства по t в пределах от t_0 до t_1, получим, что условие (3.31) выполняется.

Обратно, пусть условие (3.31) выполняется. Тогда

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big[\Big\langle\tilde{N}(u),B_uS(u)\Big\rangle+D_t\Big\{\Big\langle\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_tu),B_uS(u)\Big\rangle+$$

$$+\Big\langle\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(uS(u)),B_uu_t\Big\rangle+\Big\langle\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u_t,B_uS(u)\Big\rangle+$$

$$+\Big\langle\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}S(u),B_uu_t\Big\rangle+\Big\langle\tilde{\mathfrak{R}}_{1}(u),B_uS(u)\Big\rangle-$$

$$-\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_{2u})u, S(u)\right\rangle\Bigg\}\Bigg]\,dt = 0 \qquad \forall u \in D(N).$$

Следовательно, существует $f : D(N) \to C^1[t_0, t_1]$ такое, что

$$\left\langle \tilde{N}(u), B_u S(u)\right\rangle + D_t\left\{\left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_t u), B_u S(u)\right\rangle + \right.$$

$$+\left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{3u}(uS(u)), B_u u_t\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{2u} u_t, B_u S(u)\right\rangle +$$

$$+\left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{2u} S(u), B_u u_t\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathcal{R}}_1(u), B_u S(u)\right\rangle -$$

$$\left. -\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_{2u})u, S(u)\right\rangle\right\} = D_t f[u],$$

то есть условие (3.3) выполняется. □

Теорема 3.10. [15] *Если S_1, S_2 - генераторы симметрий (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.94), существуют операторы $\mathcal{S}_u, \mathcal{T}_u : D(N'_u, B_u) \to D(N'_u, B_u)$ такие, что $\forall u \in D(N)$, $\forall\, h, v \in D(N'_u, B_u)$ выполнено условие*

$$\Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{S}_u h, B_u v) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_u(v; \mathcal{S}_u h)) =$$

$$= \Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{T}_u v, B_u h) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_u(h; \mathcal{T}_u v)), \tag{3.32}$$

то $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-произведение (2.19) также является генератором симметрии этого функционала.

Доказательство. Имеем

$$\Phi(\tilde{N}(u + \varepsilon\mathcal{T}_u S_1(u)), B_{u+\varepsilon\mathcal{T}_u S_1(u)} S_2(u + \varepsilon\mathcal{T}_u S_1(u))) = 0$$
$$\forall u \in D(N),$$

или

$$\Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{T}_u S_1(u), B_u S_2(u)) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_u(S_2(u); \mathcal{T}_u S_1(u))) +$$

$$+\Phi(\tilde{N}(u), B_u S'_{2u} \mathcal{T}_u S_1(u)) = 0.$$

Аналогично

$$\Phi(\tilde{N}_u'\mathcal{S}_u S_2(u), B_u S_1(u)) + \Phi(\tilde{N}(u), B_u'(S_1(u); \mathcal{S}_u S_2(u)))+$$
$$+\Phi(\tilde{N}(u), B_u S_{1u}'\mathcal{S}_u S_2(u)) = 0.$$

Вычитая из второго равенства первое и учитывая условие (3.32), получаем

$$\Phi(\tilde{N}(u), B_u(S_1, S_2)(u)) = 0.$$

Таким образом, $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-произведение (2.19) также является генератором симметрии функционала (1.94) (см. теорему 3.9). □

Теорема 3.11. [15] *Если S_1, S_2 - генераторы симметрий (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.94), существуют операторы $\mathcal{S}_u, \mathcal{T}_u : D(N_u', B_u) \to D(N_u', B_u)$ такие, что $\forall u \in D(N)$, $\forall\, h, v \in D(N_u', B_u)$ выполнены условия*

$$\Phi(\tilde{N}_u'\mathcal{S}_u h, B_u v) + \Phi(\tilde{N}(u), B_u'(v; \mathcal{S}_u h)) =$$
$$= \Phi(\tilde{N}_u'\mathcal{T}_u v, B_u h) + \Phi(\tilde{N}(u), B_u'(h; \mathcal{T}_u v)), \tag{3.33}$$
$$\tilde{\mathcal{G}}_u'(v; \tilde{\mathcal{G}}_u h) = \tilde{\mathcal{G}}_u'(h; \tilde{\mathcal{G}}_u v), \tag{3.34}$$

где $\tilde{\mathcal{G}}_u \equiv \mathcal{S}_u + \mathcal{T}_u$, то генераторы симметрий функционала (1.94) образуют Ли-допустимую алгебру относительно $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-произведения (2.19) .

Доказательство. Это следует из теоремы 3.10 и теоремы 7.1 (см. [92], стр. 92). □

Теорема 3.12. [15] *Если S_1, S_2 - генераторы симметрий (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.94), существует оператор $\mathcal{G}_u : D(N_u', B_u) \to D(N_u', B_u)$ такой, что $\forall u \in D(N)$, $\forall\, h, v \in D(N_u', B_u)$ выполнено условие*

$$\Phi(\tilde{N}_u'\mathcal{G}_u h, B_u v) + \Phi(\tilde{N}(u), B_u'(v; \mathcal{G}_u h)) =$$
$$= \Phi(\tilde{N}_u'\mathcal{G}_u v, B_u h) + \Phi(\tilde{N}(u), B_u'(h; \mathcal{G}_u v)), \tag{3.35}$$

то $\mathcal{G}$-коммутатор (2.20) также является генератором симметрии этого функционала.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.10 при $\mathcal{G}_u \equiv \mathcal{S}_u = \mathcal{T}_u$.

Теорема 3.13. [15] *Если S_1, S_2 - генераторы симметрий (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.94), существует оператор $\mathcal{G}_u : D(N'_u, B_u) \to D(N'_u, B_u)$ такой, что $\forall u \in D(N)$, $\forall\, h, v \in D(N'_u, B_u)$ выполнены условия*

$$\Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{G}_u h, B_u v) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_u(v; \mathcal{G}_u h)) =$$

$$= \Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{G}_u v, B_u h) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_u(h; \mathcal{G}_u v)), \tag{3.36}$$

$$\mathcal{G}'_u(v; \mathcal{G}_u h) = \mathcal{G}'_u(h; \mathcal{G}_u v), \tag{3.37}$$

то генераторы симметрий функционала (1.94) образуют алгебру Ли относительно $\mathcal{G}$-коммутатора (2.20).

Доказательство. Это следует из теоремы 3.12 и теоремы 7.1 (см. [92], стр. 92). □

Теорема 3.14. [15] *Если оператор N уравнения (1.13) является квази-B_{iu}-потенциальным ($i = 1, 2$) на $D(N)$ относительно непрерывной невырожденной билинейной формы (1.7), то есть оператор $\tilde{N} = N - \Lambda$ является бипотенциальным, S_1, S_2 - генераторы симметрий (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.94) при $B_u = B_{1u}$, $\exists B_{1u}^{-1}$ и $\forall\, u \in D(N)$, $\forall\, h, v \in D(N'_u, B_{1u}, B_{2u})$ выполняется условие*

$$\Phi(\tilde{N}(u), B_{1u}\mathcal{G}'_u(v; h) - B_{1u}\mathcal{G}'_u(h; v)) = 0, \tag{3.38}$$

где $\mathcal{G}_u = B_{1u}^{-1} B_{2u}$, то $\mathcal{G}$-коммутатор (2.20) также является генератором симметрии функционала (1.94). Если, кроме того, $\forall\, u \in D(N)$, $\forall\, h, v \in D(N'_u, B_{1u}, B_{2u})$

$$\mathcal{G}'_u(v; \mathcal{G}_u h) = \mathcal{G}'_u(h; \mathcal{G}_u v), \tag{3.39}$$

то генераторы симметрий функционала (1.94) образуют алгебру Ли относительно $\mathcal{G}$-коммутатора (2.20).

Доказательство. По формуле (1.11) получаем

$$\Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{G}_u h, B_{1u} v) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_{1u}(v; \mathcal{G}_u h) =$$
$$= \Phi(\tilde{N}'_u v, B_{1u} \mathcal{G}_u h) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_{1u}(\mathcal{G}_u h; v) =$$
$$= \Phi(\tilde{N}'_u v, B_{2u} h) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_{1u}(\mathcal{G}_u h; v) = \Phi(\tilde{N}'_u h, B_{2u} v) -$$
$$- \Phi(\tilde{N}(u), B'_{2u}(h; v) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_{2u}(v; h) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_{1u}(\mathcal{G}_u h; v) =$$
$$= \Phi(\tilde{N}'_u h, B_{1u} \mathcal{G}_u v) - \Phi(\tilde{N}(u), B'_{1u}(\mathcal{G}_u h; v) - \Phi(\tilde{N}(u), B_{1u} \mathcal{G}'_u(h; v) +$$
$$+ \Phi(\tilde{N}(u), B'_{1u}(\mathcal{G}_u v; h) + \Phi(\tilde{N}(u), B_{1u} \mathcal{G}'_u(v; h) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_{1u}(\mathcal{G}_u h; v) =$$
$$= \Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{G}_u v, B_{1u} h) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_{1u}(h; \mathcal{G}_u v) - \Phi(\tilde{N}(u), B'_{1u}(\mathcal{G}_u v; h) -$$
$$- \Phi(\tilde{N}(u), B_{1u} \mathcal{G}'_u(h; v) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_{1u}(\mathcal{G}_u v; h) +$$
$$+ \Phi(\tilde{N}(u), B_{1u} \mathcal{G}'_u(v; h) = \Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{G}_u v, B_{1u} h) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_{1u}(h; \mathcal{G}_u v) +$$
$$+ \Phi(\tilde{N}(u), B_{1u} \mathcal{G}'_u(v; h) - \Phi(\tilde{N}(u), B_{1u} \mathcal{G}'_u(h; v). \tag{3.40}$$

С учетом условия (3.38) равенство (3.40) примет вид

$$\Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{G}_u h, B_{1u} v) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_{1u}(v; \mathcal{G}_u h) =$$
$$= \Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{G}_u v, B_{1u} h) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_{1u}(h; \mathcal{G}_u v).$$

Следовательно, условие (3.35) выполнено, поэтому по теореме 3.12 $\mathcal{G}$-коммутатор (2.20) является генератором симметрии функционала (1.94). Если, кроме того, выполнено условие (3.39), то по теореме 3.13 генераторы симметрий функционала (1.94) образуют алгебру Ли относительно $\mathcal{G}$-коммутатора (2.20). □

Пример 3.4. [15]

Рассмотрим функционал

$$F[u] = \frac{1}{6} \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_a^b u^3 dx dt. \tag{3.41}$$

Тогда

$$\delta F[u,h]=\frac{1}{6}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^b 3u^2 h dxdt=\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^b D_{xx}u^2\cdot D_x^{-1}D_x^{-1}hdxdt=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^b \left(uu_{xx}+u_x^2\right)D_x^{-1}D_x^{-1}hdxdt,$$

то есть

$$N(u)=\tilde{N}(u)+\Lambda(u)=uu_{xx}+u_x^2+\Lambda(u)=0, \qquad (3.42)$$

$$(x,t)\in \mathcal{Q}=(a,b)\times(t_0,t_1),$$

где $\Lambda(u)$ – плотность существенно не-B_1-потенциальной силы.

В данном случае $B_{1u}\equiv B_1=D_x^{-1}D_x^{-1}$, где

$$D_x^{-1}v(x,t)=\int\limits_a^x v(y,t)dy.$$

Зададим область определения оператора N в виде

$$D(N)=\left\{u\in U=C^{\infty}(\overline{\mathcal{Q}}):\ u|_{t=t_0}=0,\ u|_{t=t_1}=0,\right.$$
$$\left.u|_{x=a}=0,\ u|_{x=b}=0\right\}, \qquad (3.43)$$

то есть $D(N)=D(N_u', B_1, B_{2u})$, где $B_{2u}=uI,\ I$ - тождественный оператор.

Отметим, что оператор $\tilde{N}$ вида (3.42) является также B_{2u}-потенциальным на множестве $D(N)$ вида (3.43) относительно классической билинейной формы

$$\Phi(v,g)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^b v(x,t)g(x,t)dxdt.$$

Действительно, в данном случае

$$P_{iu} \equiv 0,\ \ i = \overline{1,3}, \quad Q(u) = uu_{xx} + u_x^2,$$

$$Q'_u = u_{xx}I + uD_{xx} + 2u_xD_x, \quad Q'^*_u = uD_{xx}, \quad B'_{2u}(h;g) = hg$$

и
(1.43)$\Longrightarrow 0 = 0,$
(1.44)$\Longrightarrow 0 = 0,$
(1.45)$\Longrightarrow 0 = 0,$
(1.46)$\Longrightarrow huu_{xx} + hu_x^2 - huu_{xx} - hu_x^2 + uu_{xx}h + u^2h_{xx} + 2uu_xh_x - uD_{xx}(uh) = uu_{xx}h + u^2h_{xx} + 2uu_xh_x - uu_{xx}h - 2uu_xh_x - uh_{xx} = 0,$
(1.47)$\Longrightarrow 0{=}0,$
(1.48)$\Longrightarrow 0{=}0,$
(1.49)$\Longrightarrow 0{=}0,$
то есть условия (1.43) - (1.49) выполняются.

Будем предполагать, что $\Lambda(u)$ в уравнении (3.42) является также плотностью существенно не-B_{2u}-потенциальной силы и $u_x \in D(N)$.

Операторы $S_1 = D_x,\ S_2(u) = uu_t$ и $S_3(u) = uu_x$ являются генераторами симметрий функционала (3.41). Это следует из теоремы 3.9, так как

$$\Phi(\tilde{N}(u), B_1S_1(u)) = \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^b \left(uu_{xx} + u_x^2\right) D_x^{-1}D_x^{-1}u_x dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^b D_{xx}u^2 \cdot D_x^{-1}D_x^{-1}u_x dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^b u^2u_x dxdt = \frac{1}{6}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^b D_xu^3 dxdt,$$

$$\Phi(\tilde{N}(u), B_1 S_2(u)) = \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^b \left(uu_{xx} + u_x^2\right) D_x^{-1} D_x^{-1} \left(uu_t\right) dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^b D_{xx}u^2 \cdot D_x^{-1} D_x^{-1} \left(uu_t\right) dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^b u^3 u_t dxdt = \frac{1}{8}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^b D_t u^4 dxdt$$

и

$$\Phi(\tilde{N}(u), B_1 S_3(u)) = \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^b \left(uu_{xx} + u_x^2\right) D_x^{-1} D_x^{-1} \left(uu_x\right) dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^b D_{xx}u^2 \cdot D_x^{-1} D_x^{-1} \left(uu_x\right) dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^b u^3 u_x dxdt = \frac{1}{8}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^b D_x u^4 dxdt.$$

Учитывая, что $u \in D(N)$ вида (3.43), получаем, что в каждом случае условие (3.31) выполнено.

Условие (3.38) выполняется, так как

$$\mathcal{G}_u v = D_{xx}\left(uv\right), \;\; \mathcal{G}'_u(v;h) = D_{xx}\left(vh\right)$$

и

$$B_{1u}\mathcal{G}'_u(v;h) - B_{1u}\mathcal{G}'_u(h;v)) =$$
$$= D_x^{-1} D_x^{-1}\left(D_{xx}\left(vh\right)\right) - D_x^{-1} D_x^{-1}\left(D_{xx}\left(hv\right)\right) = vh - hv = 0.$$

Тогда по теореме 3.14 $\mathcal{G}$-коммутаторы

$$[S_1, S_2]_{\mathcal{G}}(u) = S'_{1u}\mathcal{G}_u S_2(u) - S'_{2u}\mathcal{G}_u S_2(u) = D_x D_{xx}\left(u^2 u_t\right) -$$

$$-\left(u_t I + u D_t\right) D_{xx}\left(u u_x\right) = D_{xx}\left(2 u u_t u_x + u^2 u_{tx}\right) -$$

$$-u_t D_x\left(u_x^2 + u u_{xx}\right) - u D_{tx}\left(u_x^2 + u u_{xx}\right) =$$

$$= D_x\left(2 u_t u_x^2 + 4 u u_{tx} u_x + 2 u u_t u_{xx} + u^2 u_{txx}\right) -$$

$$-u_t\left(3 u_x u_{xx} + u u_{xxx}\right) - u D_t\left(3 u_x u_{xx} + u u_{xxx}\right) =$$

$$= 6 u_{tx} u_x^2 + 4 u_t u_x u_{xx} + 6 u u_{txx} u_x + 6 u u_{tx} u_{xx} + 2 u_x u_t u_{xx} + 2 u u_t u_{xxx} +$$

$$+ u^2 u_{txxx} - 3 u_t u_x u_{xx} - u u_t u_{xxx} - 3 u u_{tx} u_{xx} - 3 u u_x u_{txx} - u u_t u_{xxx} -$$

$$-u^2 u_{txxx} = 6 u_{tx} u_x^2 + 3 u_t u_x u_{xx} + 3 u u_x u_{txx} + 3 u u_{tx} u_{xx}$$

и

$$[S_1, S_3]_{\mathcal{G}}(u) = S'_{1u} \mathcal{G}_u S_3(u) - S'_{3u} \mathcal{G}_u S_2(u) = D_x D_{xx}\left(u^2 u_x\right) -$$

$$-\left(u_x I + u D_x\right) D_{xx}\left(u u_x\right) = 9 u_{xx} u_x^2 + 3 u u_x u_{xxx} + 3 u u_{xx}^2$$

являются генераторами симметрий функционала (3.41).

Заметим, что условие (3.39) в данном случае не выполняется, так как

$$\mathcal{G}'_u(v; \mathcal{G}_u h) = D_{xx}\left(v D_{xx}\left(u h\right)\right),$$

$$\mathcal{G}'_u(h; \mathcal{G}_u v) = D_{xx}\left(h D_{xx}\left(u v\right)\right).$$

Теорема 3.15. [15] *Если S_1, S_2 - генераторы симметрий (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.94), то их коммутатор (2.21) также является генератором симметрии этого функционала.*

Доказательство. Это следует из теоремы 3.12. Отметим, что в данном случае $\mathcal{G}_u \equiv I$, где I - тождественный оператор, поэтому условие (3.35) выполняется, так как оно является условием квази-B_u-потенциальности оператора N уравнения (1.13). $\square$

Теорема 3.16. [15] *Генераторы симметрии (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.94) образуют алгебру Ли относительно операции (2.21).*

Доказательство. Это следует из теорем 3.13 и 3.15. В данном случае $\mathcal{G}'_u$ есть нулевой оператор, поэтому условие (3.37) выполняется тождественно. $\square$

Таким образом, в определенных случаях теоремы 3.10, 3.12 и 3.15 могут быть использованы для построения симметрий функционала (1.94) по известным хотя бы двум генераторам симметрий.

Замечание 3.4. Пусть оператор N уравнения (1.13) является квазипотенциальным на $D(N)$ относительно непрерывной невырожденной билинейной формы (1.7), то есть $B_u \equiv I$ – тождественный оператор. В этом случае действие по Гамильтону имеет вид (1.104), а теоремы 3.9 - 3.13, 3.15, 3.16 формулируются следующим образом.

Теорема 3.17. *Преобразование (2.2) является симметрией (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.104) на $D(N)$ тогда и только тогда, когда*

$$\Phi(\tilde{N}(u), S(u)) = 0 \qquad \forall u \in D(N). \tag{3.44}$$

Теорема 3.18. *Если S_1, S_2 - генераторы симметрий (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.104), существуют операторы $\mathcal{S}_u, \mathcal{T}_u : D(N'_u) \to D(N'_u)$ такие, что $\forall u \in D(N)$, $\forall\, h, v \in D(N'_u)$ выполнено условие*

$$\Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{S}_u h, v) = \Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{T}_u v, h), \tag{3.45}$$

то $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-произведение (2.19) также является генератором симметрии этого функционала.

Теорема 3.19. *Если S_1, S_2 - генераторы симметрий (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.104), существуют операторы $\mathcal{S}_u, \mathcal{T}_u : D(N'_u) \to D(N'_u)$ такие, что $\forall u \in D(N)$, $\forall\, h, v \in$*

$D(N'_u)$ *выполнены условия*

$$\Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{S}_u h, v) = \Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{T}_u v, h), \tag{3.46}$$

$$\tilde{\mathcal{G}}'_u(v; \tilde{\mathcal{G}}_u h) = \tilde{\mathcal{G}}'_u(h; \tilde{\mathcal{G}}_u v), \tag{3.47}$$

где $\tilde{\mathcal{G}}_u \equiv \mathcal{S}_u + \mathcal{T}_u$, *то генераторы симметрий функционала (1.104) образуют Ли-допустимую алгебру относительно* $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-*произведения (2.19) .*

Теорема 3.20. *Если* S_1, S_2 *- генераторы симметрий (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.104), существует оператор* $\mathcal{G}_u : D(N'_u) \to D(N'_u)$ *такой, что* $\forall u \in D(N)$, $\forall\, h, v \in D(N'_u)$ *выполнено условие*

$$\Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{G}_u h, v) = \Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{G}_u v, h), \tag{3.48}$$

то $\mathcal{G}$-*коммутатор (2.20) также является генератором симметрии этого функционала.*

Теорема 3.21. *Если* S_1, S_2 *- генераторы симметрий (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.104), существует оператор* $\mathcal{G}_u : D(N'_u) \to D(N'_u)$ *такой, что* $\forall u \in D(N)$, $\forall\, h, v \in D(N'_u)$ *выполнены условия*

$$\Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{G}_u h, v) = \Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{G}_u v, h), \tag{3.49}$$

$$\mathcal{G}'_u(v; \mathcal{G}_u h) = \mathcal{G}'_u(h; \mathcal{G}_u v), \tag{3.50}$$

то генераторы симметрий функционала (1.104) образуют алгебру Ли относительно $\mathcal{G}$-*коммутатора (2.20).*

Теорема 3.22. *Если* S_1, S_2 *- генераторы симметрий (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.104), то их коммутатор (2.21) также является генератором симметрии этого функционала.*

Теорема 3.23. *Генераторы симметрии (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.104) образуют алгебру Ли относительно операции (2.21).*

Пример 3.5.

Рассмотрим функционал

$$F[u] = -\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b \left(u_t^2 - u_x^2\right) dxdt. \tag{3.51}$$

Тогда

$$\delta F[u,h] = -\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b \left(2u_t h_t - 2u_x h_x\right) dxdt = \int_{t_0}^{t_1}\int_a^b \left(u_{tt} - u_{xx}\right) h dxdt,$$

то есть

$$N(u) = \tilde{N}(u) + \Lambda(u) = u_{tt} - u_{xx} + \Lambda(u) = 0, \tag{3.52}$$

$$(x,t) \in \mathfrak{Q} = (a,b) \times (t_0, t_1),$$

где $\Lambda(u)$ – плотность существенно непотенциальной силы.

Зададим область определения оператора N в виде

$$D(N) = \left\{u \in U = C^\infty(\overline{\mathfrak{Q}}) : \; u|_{t=t_0} = 0, \; u|_{t=t_1} = 0, \right.$$

$$\left. u|_{x=a} = 0, \;\; u|_{x=b} = 0\right\}, \tag{3.53}$$

то есть $D(N) = D(N_u')$.

Будем предполагать, что $u_x \in D(N_u')$ и $u_t \in D(N_u')$.

Операторы $S_1 = D_x$ и $S_2 = D_t$ являются генераторами симметрии функционала (3.51). Это следует из теоремы 3.17, так как

$$\Phi(\tilde{N}(u), S_1(u)) = \int_{t_0}^{t_1}\int_a^b \left(u_{tt} - u_{xx}\right) u_x dxdt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \left(-u_t u_{tx} - \frac{1}{2} D_x \left(u_x^2 \right) \right) dxdt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \left(-\frac{1}{2} D_x \left(u_t^2 \right) - \frac{1}{2} D_x \left(u_x^2 \right) \right) dxdt$$

и

$$\Phi(\tilde{N}(u), S_2(u)) = \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \left(u_{tt} - u_{xx} \right) u_t dxdt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \left(\frac{1}{2} D_t \left(u_t^2 \right) + u_x u_{tx} \right) dxdt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \left(\frac{1}{2} D_t \left(u_t^2 \right) + \frac{1}{2} D_t \left(u_x^2 \right) \right) dxdt.$$

Учитывая, что $u \in D(N)$ вида (3.53), получаем, что в обоих случаях условие (3.44) выполнено.

Предположим также, что

$$\frac{\partial^{i+1} u}{\partial t \partial x^i} \in D(N'_u), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Условие (3.45) выполняется при $\mathcal{S}_u \equiv \mathcal{S} = D_x$ и $\mathcal{T}_u \equiv \mathcal{T} = -D_x$. Действительно,

$$\Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{S} h, v) = \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \left(D_{tt} - D_{xx} \right) h_x \cdot v dxdt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \left(h_{ttx} - h_{xxx} \right) v dxdt = -\int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \left(v_{ttx} - v_{xxx} \right) h dxdt =$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b (D_{tt} - D_{xx})\, v_x \cdot h dx dt = \Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{T} v, h).$$

Тогда по теореме 3.18 $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-произведение генераторов S_1 и S_2

$$(S_1, S_2)(u) = S'_{1u}\mathcal{S}S_2(u) - S'_{2u}\mathcal{T}S_2(u) =$$
$$= D_x D_x u_t - D_t(-D_x)u_x = 2u_{txx}$$

является генератором симметрии функционала (3.51).

В данном случае $\tilde{\mathcal{G}}_u \equiv \mathcal{S} + \mathcal{T} = D_x - D_x = 0$, поэтому условие (3.47) также выполнено. По теореме 3.19 генераторы симметрий функционала (3.51) образуют Ли-допустимую алгебру относительно $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-произведения

$$(S_1, S_2)(u) = S'_{1u} D_x S_2(u) + S'_{2u} D_x S_1(u).$$

Замечание 3.5. Если $\Lambda(u) = u_x$, то уравнение (3.51) является частным случаем уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - b u_x + \phi(x,t). \tag{3.54}$$

Уравнение (3.54) с помощью замены

$$u(x,t) = exp\left(\frac{bx}{2a^2}\right) w(x,t)$$

приводится к неоднородному уравнению Клейна-Гордона [83]

$$w_{tt} = a^2 w_{xx} - \frac{b^2}{4a^2} w + exp\left(-\frac{bx}{2a^2}\right)\phi(x,t),$$

которое встречается в квантовой теории поля и ряде приложений.

Замечание 3.6. Пусть оператор N уравнения (1.13) является B_u-потенциальным на $D(N)$ относительно непрерывной невырожденной билинейной формы (1.7), то есть $\Lambda \equiv 0$. В этом случае действие по Гамильтону имеет вид (1.109), а теоремы 3.9 - 3.16 формулируются следующим образом.

Теорема 3.24. *Преобразование (2.2) является симметрией (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.109) на $D(N)$ тогда и только тогда, когда*

$$\Phi(N(u), B_u S(u)) = 0 \qquad \forall u \in D(N).$$

Теорема 3.25. *Если S_1, S_2 - генераторы симметрий (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.109), существуют операторы $\mathcal{S}_u, \mathcal{T}_u : D(N'_u, B_u) \to D(N'_u, B_u)$ такие, что $\forall u \in D(N)$, $\forall\, h, v \in D(N'_u, B_u)$ выполнено условие*

$$\Phi(N'_u \mathcal{S}_u h, B_u v) + \Phi(N(u), B'_u(v; \mathcal{S}_u h)) =$$
$$= \Phi(N'_u \mathcal{T}_u v, B_u h) + \Phi(N(u), B'_u(h; \mathcal{T}_u v)), \tag{3.55}$$

то $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-произведение (2.19) также является генератором симметрии этого функционала.

Теорема 3.26. *Если S_1, S_2 - генераторы симметрий (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.109), существуют операторы $\mathcal{S}_u, \mathcal{T}_u : D(N'_u, B_u) \to D(N'_u, B_u)$ такие, что $\forall u \in D(N)$, $\forall\, h, v \in D(N'_u, B_u)$ выполнены условия*

$$\Phi(N'_u \mathcal{S}_u h, B_u v) + \Phi(N(u), B'_u(v; \mathcal{S}_u h)) =$$
$$= \Phi(N'_u \mathcal{T}_u v, B_u h) + \Phi(N(u), B'_u(h; \mathcal{T}_u v)), \tag{3.56}$$
$$\tilde{\mathcal{G}}'_u(v; \tilde{\mathcal{G}}_u h) = \tilde{\mathcal{G}}'_u(h; \tilde{\mathcal{G}}_u v), \tag{3.57}$$

где $\tilde{\mathcal{G}}_u \equiv \mathcal{S}_u + \mathcal{T}_u$, то генераторы симметрий функционала (1.109) образуют Ли-допустимую алгебру относительно $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-произведения (2.19) .

Теорема 3.27. *Если S_1, S_2 - генераторы симметрий (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.109), существует оператор $\mathcal{G}_u : D(N'_u, B_u) \to D(N'_u, B_u)$ такой, что $\forall u \in D(N)$, $\forall\, h, v \in D(N'_u, B_u)$ выполнено условие*

$$\Phi(N'_u \mathcal{G}_u h, B_u v) + \Phi(N(u), B'_u(v; \mathcal{G}_u h)) =$$

$$= \Phi(N'_u \mathcal{G}_u v, B_u h) + \Phi(N(u), B'_u(h; \mathcal{G}_u v)), \tag{3.58}$$

то $\mathcal{G}$-коммутатор (2.20) также является генератором симметрии этого функционала.

Теорема 3.28. *Если S_1, S_2 - генераторы симметрий (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.109), существует оператор $\mathcal{G}_u : D(N'_u, B_u) \to D(N'_u, B_u)$ такой, что $\forall u \in D(N)$, $\forall\, h, v \in D(N'_u, B_u)$ выполнены условия*

$$\Phi(N'_u \mathcal{G}_u h, B_u v) + \Phi(N(u), B'_u(v; \mathcal{G}_u h)) =$$

$$= \Phi(N'_u \mathcal{G}_u v, B_u h) + \Phi(N(u), B'_u(h; \mathcal{G}_u v)), \tag{3.59}$$

$$\mathcal{G}'_u(v; \mathcal{G}_u h) = \mathcal{G}'_u(h; \mathcal{G}_u v), \tag{3.60}$$

то генераторы симметрий функционала (1.109) образуют алгебру Ли относительно $\mathcal{G}$-коммутатора (2.20).

Теорема 3.29. *Если оператор N уравнения (1.13) является B_{iu}-потенциальным ($i = 1, 2$) на $D(N) = D(N)$ относительно непрерывной невырожденной билинейной формы (1.7), S_1, S_2 - генераторы симметрий (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.109) при $B_u = B_{1u}$, $\exists B_{1u}^{-1}$ и $\forall\, u \in D(N)$, $\forall\, h, v \in D(N'_u, B_{1u}, B_{2u})$ выполняется условие*

$$\Phi(N(u), B_{1u}\mathcal{G}'_u(v; h) - B_{1u}\mathcal{G}'_u(h; v)) = 0, \tag{3.61}$$

где $\mathcal{G}_u = B_{1u}^{-1} B_{2u}$, то $\mathcal{G}$-коммутатор (2.20) также является генератором симметрии функционала (1.109). Если, кроме того, $\forall\, u \in D(N)$, $\forall\, h, v \in D(N'_u, B_{1u}, B_{2u})$

$$\mathcal{G}'_u(v; \mathcal{G}_u h) = \mathcal{G}'_u(h; \mathcal{G}_u v), \tag{3.62}$$

то генераторы симметрий функционала (1.109) образуют алгебру Ли относительно $\mathcal{G}$-коммутатора (2.20).

Теорема 3.30. *Если S_1, S_2 - генераторы симметрий (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.109), то их коммутатор (2.21) также является генератором симметрии этого функционала.*

Теорема 3.31. *Генераторы симметрии (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.109) образуют алгебру Ли относительно операции (2.21).*

Замечание 3.7. Пусть оператор N уравнения (1.13) является потенциальным на $D(N)$ относительно непрерывной невырожденной билинейной формы (1.7), то есть $\Lambda \equiv 0$ и $B_u \equiv I$. В этом случае действие по Гамильтону имеет вид (1.114), а теоремы 3.24 - 3.28, 3.30 и 3.31 формулируются следующим образом.

Теорема 3.32. *Преобразование (2.2) является симметрией (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.114) на $D(N)$ тогда и только тогда, когда*

$$\Phi(N(u), S(u)) = 0 \qquad \forall u \in D(N).$$

Теорема 3.33. *Если S_1, S_2 - генераторы симметрий (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.114), существуют операторы $\mathcal{S}_u, \mathcal{T}_u : D(N'_u) \to D(N'_u)$ такие, что $\forall u \in D(N)$, $\forall\, h, v \in D(N'_u)$ выполнено условие*

$$\Phi(N'_u \mathcal{S}_u h, v) = \Phi(N'_u \mathcal{T}_u v, h), \tag{3.63}$$

то $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-произведение (2.19) также является генератором симметрии этого функционала.

Теорема 3.34. *Если S_1, S_2 - генераторы симметрий (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.114), существуют операторы $\mathcal{S}_u, \mathcal{T}_u : D(N'_u) \to D(N'_u)$ такие, что $\forall u \in D(N)$, $\forall\, h, v \in D(N'_u)$ выполнены условия*

$$\Phi(N'_u \mathcal{S}_u h, v) = \Phi(N'_u \mathcal{T}_u v, h), \tag{3.64}$$

$$\tilde{\mathcal{G}}'_u(v; \tilde{\mathcal{G}}_u h) = \tilde{\mathcal{G}}'_u(h; \tilde{\mathcal{G}}_u v), \tag{3.65}$$

где $\tilde{\mathcal{G}}_u \equiv \mathcal{S}_u + \mathcal{T}_u$, *то генераторы симметрий функционала (1.114) образуют Ли-допустимую алгебру относительно* $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-*произведения (2.19) .*

Теорема 3.35. *Если* S_1, S_2 *- генераторы симметрий (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.114), существует оператор* $\mathcal{G}_u : D(N'_u) \to D(N'_u)$ *такой, что* $\forall u \in D(N)$, $\forall\, h, v \in D(N'_u)$ *выполнено условие*

$$\Phi(N'_u \mathcal{G}_u h, v) = \Phi(N'_u \mathcal{G}_u v, h), \tag{3.66}$$

то $\mathcal{G}$-*коммутатор (2.20) также является генератором симметрии этого функционала.*

Теорема 3.36. *Если* S_1, S_2 *- генераторы симметрий (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.114), существует оператор* $\mathcal{G}_u : D(N'_u) \to D(N'_u)$ *такой, что* $\forall u \in D(N)$, $\forall\, h, v \in D(N'_u)$ *выполнены условия*

$$\Phi(N'_u \mathcal{G}_u h, v) = \Phi(N'_u \mathcal{G}_u v, h), \tag{3.67}$$

$$\mathcal{G}'_u(v; \mathcal{G}_u h) = \mathcal{G}'_u(h; \mathcal{G}_u v), \tag{3.68}$$

то генераторы симметрий функционала (1.114) образуют алгебру Ли относительно $\mathcal{G}$-*коммутатора (2.20).*

Теорема 3.37. *Если* S_1, S_2 *- генераторы симметрий (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.114), то их коммутатор (2.21) также является генератором симметрии этого функционала.*

Теорема 3.38. *Генераторы симметрии (абсолютной, до дивергенции) функционала (1.114) образуют алгебру Ли относительно операции (2.21).*

3.3 О взаимосвязи различных видов симметрий

Установим взаимосвязь между симметриями действия по Гамильтону и соответствующего уравнения движения непотенциальной системы с бесконечным числом степеней свободы.

Теорема 3.39. *Если оператор N уравнения (1.13) является квази-B_u-потенциальным на $D(N)$ вида относительно билинейной формы Φ (1.7), $\exists\,(B_u^*)^{-1}$, S - генератор симметрии функционала (1.94) и выполняется условие*

$$B_u^*\Lambda_u' S(u) + \left[B_u'(\cdot; S(u))\right]^* \Lambda(u) + S_u'^* B_u^*\Lambda(u) = 0, \tag{3.69}$$

то симметрия функционала (1.94) является также симметрией заданного уравнения движения.

Доказательство. По теореме 3.9 имеем

$$\Phi(\tilde{N}(u), B_u S(u)) = 0.$$

Далее,

$$\Phi(\tilde{N}(u+\varepsilon h), B_{u+\varepsilon h} S(u+\varepsilon h))\Big|_{\varepsilon=0} = \Phi(\tilde{N}_u' h, B_u S(u)) +$$

$$+\Phi(\tilde{N}(u), B_u'(S(u); h)) + \Phi(\tilde{N}(u), B_u S_u' h) = 0 \quad \forall h \in D(N_u', B_u). \tag{3.70}$$

Учитывая квази-B_u-потенциальность оператора N уравнения (1.13), перепишем (3.70) в виде

$$\Phi(\tilde{N}_u' S(u), B_u h) + \Phi(\tilde{N}(u), B_u'(h; S(u))) + \Phi(\tilde{N}(u), B_u S_u' h) = 0.$$

Подставляя в последнее равенство $\tilde{N}(u) = N(u) - \Lambda(u)$, получаем

$$\Phi(N_u' S(u), B_u h) + \Phi(N(u), B_u'(h; S(u))) + \Phi(N(u), B_u S_u' h) =$$

$$= \Phi(\Lambda_u' S(u), B_u h) + \Phi(\Lambda(u), B_u'(h; S(u))) + \Phi(\Lambda(u), B_u S_u' h),$$

или

$$\Phi(B_u^* N_u' S(u), h) + \Phi(\left[B_u'(\cdot; S(u))\right]^* N(u), h) + \Phi(S_u'^* B_u^* N(u), h) =$$

$$= \Phi(B_u^* \Lambda_u' S(u), h) + \Phi(\left[B_u'(\cdot; S(u))\right]^* \Lambda(u), h) + \Phi(S_u'^* B_u^* \Lambda(u), h).$$

Поскольку билинейная форма Φ является невырожденной, отсюда находим

$$B_u^* N_u' S(u) + \left[B_u'(\cdot; S(u))\right]^* N(u) + S_u'^* B_u^* N(u) - B_u^* \Lambda_u' S(u) -$$

$$- \left[B_u'(\cdot; S(u))\right]^* \Lambda(u) - S_u'^* B_u^* \Lambda(u) = 0. \qquad (3.71)$$

Пусть u - решение уравнения (1.13). Принимая во внимание (3.69), из (3.71) получаем

$$B_u^* N_u' S(u) = 0.$$

Отметим, что

$$N_u' S(u) = (B_u^*)^{-1} B_u^* N_u' S(u),$$

поэтому $N_u' S(u) = 0$ на решениях уравнения (1.13), то есть имеет место (2.4).

Таким образом, при рассматриваемых условиях симметрия функционала (1.94) является также симметрией заданного уравнения движения. $\square$

Пример 3.6.

Рассмотрим уравнение Кортевега-де Фриза-Бюргерса

$$N(u) \equiv u_t + u u_x + \beta u_{xxx} - \alpha u_{xx} = 0, \qquad (3.72)$$

$$(x, t) \in \mathcal{Q} = (a, b) \times (t_0, t_1).$$

Здесь α и β – постоянные.

Положим

$$D(N)=\{u\in U=C^{1,\infty}_{t,x}(\overline{\mathfrak{Q}}):\ u|_{t=t_0}=\varphi_1(x),\\ u|_{t=t_1}=\varphi_2(x)\ (x\in(a,b)),\ u|_{x=a}=\psi_1(t),\\ u|_{x=b}=\psi_2(t)\ (t\in(t_0,t_1))\},\quad (3.73)$$

где $\varphi_i,\ \psi_i\ (i=\overline{1,2})$ - заданные непрерывные функции.

Тогда

$$D(N'_u)=\{h\in U=C^{1,\infty}_{t,x}(\overline{\mathfrak{Q}}):\ h|_{t=t_0}=0,\ h|_{t=t_1}=0,\\ h|_{x=a}=0,\ h|_{x=b}=0\}.$$

Введем классическую билинейную форму

$$\Phi(v,g)=\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b v(x,t)g(x,t)dxdt. \quad (3.74)$$

Отметим, что

$$P_{1u}\equiv I,\ P_{2u}\equiv 0,\ P_{3u}\equiv 0,\ Q(u)=uu_x+\beta u_{xxx}-\alpha u_{xx},$$

где I - тождественный оператор.

Оператор N уравнения (3.72) не является потенциальным на $D(N)$ (3.73) относительно билинейной формы (3.74), так как условие (1.52) не выполняется.

Представим уравнение (3.72) в виде уравнения Лагранжа с не-B-потенциальной плотностью силы.

Отметим, что условия (1.16) - (1.22) выполняются при

$$B\equiv D_x^{-1},\ \Lambda_{iu}\equiv 0\ (i=\overline{1,3}),\ \Lambda(u)=\Lambda_4(u)=-\alpha u_{xx}.$$

Действительно,

(1.16)$\Longrightarrow$ 0=0,

(1.17)$\Longrightarrow$ 0=0,

(1.18)$\Longrightarrow D_x^{-1}-D_x^{-1}=0,$

(1.19)$\Longrightarrow$ $-D_x^{-1}[hu_x + uh_x + \beta h_{xxx}] + \left(uD_x + \beta D_x^3\right)[D_x^{-1}h] = -D_x^{-1}D_x[uh + \beta h_{xx}] + uh + \beta h_{xx} = -uh - \beta h_{xx} + uh + \beta h_{xx} = 0$,
(1.20)$\Longrightarrow$ 0=0,
(1.21)$\Longrightarrow$ 0=0,
(1.22)$\Longrightarrow$ 0=0.

Таким образом, $\Lambda(u) = \Lambda_4(u)$ является плотностью существенно не-B-потенциальной силы.

Построим функционал F. Из формул (1.95) и (1.98) находим

$$\mathcal{R}(u) = -\frac{u}{2}, \qquad \tilde{\mathcal{B}}[u] = \int\limits_a^b \left(\frac{\beta}{2}u_x^2 - \frac{1}{6}u^3\right) dx.$$

Тогда по формуле (1.94) получаем

$$F[u] = -\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^b \left(u \cdot \int\limits_a^x u_t(y,t)dy - \beta u_x^2 + \frac{1}{3}u^3\right) dxdt. \tag{3.75}$$

Пусть $D(N) = D(N'_u)$ и $u_x \in D(N'_u)$.

Преобразование $\overline{u} = u + \varepsilon u_x$ является симметрией функционала (3.75). Действительно,

$$F^{T_1}[u + \varepsilon u_x] = -\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T_1}\int\limits_a^b \Bigg[(u + \varepsilon u_x) \cdot \int\limits_a^x \left(u_t(y,t) + \varepsilon u_{ty}(y,t)\right) dy -$$

$$-\beta\left(u_x + \varepsilon u_{xx}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(u + \varepsilon u_x\right)^3\Bigg] dxdt = F^{T_1}[u] -$$

$$-\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{t_0}^{T_1}\int\limits_a^b \left[uD_x^{-1}u_{tx} + u_x D_x^{-1}u_t - 2\beta u_x u_{xx} + u^2 u_x\right] dxdt + o(\varepsilon) =$$

$$= F^{T_1}[u] - \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{t_0}^{T_1}\int\limits_a^b \left[uu_t - uu_t - \beta D_x u_x^2 + \frac{1}{3}D_x u^3\right] dxdt + o(\varepsilon) =$$

$$= F^{T_1}[u] + o(\varepsilon) \qquad \forall T_1 : t_0 \le T_1 \le t_1.$$

Подставляя

$$B^* = -D_x^{-1}, \qquad \Lambda'_u = -\alpha D_x^2, \qquad S'^*_u = -D_x$$

в левую часть равенства (3.69), получаем

$$B^*_u \Lambda'_u S(u) + [B'_u(\cdot; S(u))]^* \Lambda(u) + S'^*_u B^*_u \Lambda(u) =$$

$$= -D_x^{-1}(-\alpha D_x^2)u_x - D_x \left(-D_x^{-1}\right)(-\alpha u_{xx}) = \alpha u_{xx} - \alpha u_{xx} = 0,$$

то есть условие (3.69) выполнено.

Следовательно, симметрия функционала (3.75) является также симметрией уравнения Кортевега-де Фриза-Бюргерса.

Пример 3.7.

Рассмотрим уравнение движения

$$N(u) \equiv u\ddot{u} + \dot{u}^2 + \dot{u} = 0, \qquad t \in (t_0, t_1). \tag{3.76}$$

Отметим (см. [40]), что уравнение (3.76) является частным случаем уравнения

$$\ddot{u} = f(u)\dot{u}^2 + g(u)\dot{u}^k,$$

которое с помощью замены $w(u) = \dot{u}$ в общем случае приводится к уравнению Бернулли

$$w'_u = f(u)w + g(u)w^{k-1},$$

а в частном (при $k = 1$) - к линейному уравнению первого порядка

$$w'_u = f(u)w + g(u).$$

Положим

$$D(N) = \{u \in U = C^\infty[t_0, t_1] : \; u|_{t=t_0} = u_0, \; u|_{t=t_1} = u_1\}, \tag{3.77}$$

где u_0, u_1 - постоянные.

Тогда

$$D(N'_u) = \{h \in U = C^\infty[t_0, t_1] : \; h|_{t=t_0} = 0, \; h|_{t=t_1} = 0\}.$$

Введем классическую билинейную форму

$$\Phi(v, g) = \int\limits_{t_0}^{t_1} v(t) g(t) dt. \tag{3.78}$$

Отметим, что

$$P_{1u} \equiv I, \; P_{2u} = uI, \; P_{3u} \equiv I, \; Q \equiv 0,$$

где I - тождественный оператор.

Оператор N уравнения (3.76) не является потенциальным на $D(N)$ (3.77) относительно билинейной формы (3.78), так как условие (1.52) не выполняется.

Представим уравнение (3.76) в виде уравнения Лагранжа с не-B_u-потенциальной плотностью силы.

Отметим, что условия (1.16) - (1.22) выполняются при

$$B_u = uI, \; \Lambda_{iu} \equiv 0 \; (i = 2, 3), \; \Lambda_4 \equiv 0, \; \Lambda(u) = \Lambda_1 \dot{u} = \dot{u}.$$

Действительно,

(1.16)$\Longrightarrow u^2 I - u^2 I = 0,$

(1.17)$\Longrightarrow \dot{u} u h - u h \dot{u} - u h \dot{u} + u \dot{u} h = 0,$

(1.18)$\Longrightarrow 0 = 0,$

(1.19)$\Longrightarrow 0 = 0,$

(1.20)$\Longrightarrow 0 = 0,$

(1.21)$\Longrightarrow u \ddot{u} h - u h \ddot{u} - \ddot{u} u h + 2 \ddot{u} u h + h u \ddot{u} - u h \ddot{u} - h u \ddot{u} = 0,$

(1.22)$\Longrightarrow h \dot{u}^2 - 2 h \dot{u}^2 + 2 \dot{u}^2 h - h \dot{u}^2 = 0.$

Таким образом, $\Lambda(u) = \Lambda_1 \dot{u} = \dot{u}$ является плотностью существенно не-B_u-потенциальной силы.

Построим функционал F. Из формул (1.95) – (1.98) находим

$$\tilde{\mathcal{R}}_1 \equiv 0, \quad \mathcal{R}_{2u} = -\frac{u}{4}I, \quad \mathcal{R}_3 = -\frac{1}{4}I, \quad \mathcal{B} \equiv 0.$$

Тогда по формуле (1.94) получаем

$$F[u] = -\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} u^2\dot{u}^2 dt. \tag{3.79}$$

Пусть $D(N) = D(N'_u)$ и $\dot{u} \in D(N'_u)$.

Преобразование $\overline{u} = u + \varepsilon\dot{u}$ является симметрией до дивергенции функционала (3.79). Действительно,

$$F^{T_1}[u + \varepsilon\dot{u}] = -\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T_1} \left(u + \varepsilon\dot{u}\right)^2 \left(\dot{u} + \varepsilon\ddot{u}\right)^2 dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T_1} \left[u^2\dot{u}^2 + \varepsilon\left(2u^2\dot{u}\ddot{u} + 2u\dot{u}^3\right)\right] dt + o(\varepsilon) =$$

$$= F^{T_1}[u] + \varepsilon\int\limits_{t_0}^{T_1} D_t\left(-\frac{1}{2}u^2\dot{u}^2\right) + o(\varepsilon) \qquad \forall T_1 : t_0 \leq T_1 \leq t_1,$$

то есть $f[u] = -\frac{1}{2}u^2\dot{u}^2$.

Подставляя

$$B^*_u = uI, \qquad \Lambda'_u = \frac{d}{dt}, \qquad S'^*_u = -\frac{d}{dt}$$

в левую часть равенства (3.69), получаем

$$B^*_u\Lambda'_uS(u) + \left[B'_u(\cdot; S(u))\right]^*\Lambda(u) + S'^*_uB^*_u\Lambda(u) =$$

$$= u\frac{d}{dt}\dot{u} + \dot{u}^2 - \frac{d}{dt}\left(u\dot{u}\right) = u\ddot{u} + \dot{u}^2 - \dot{u}^2 - u\ddot{u} = 0,$$

то есть условие (3.69) выполнено.

Следовательно, симметрия функционала (3.79) является также симметрией уравнения (3.76).

Теорема 3.40. *Если оператор N уравнения (1.13) является квазипотенциальным на $D(N)$ вида относительно билинейной формы Φ (1.7), S - генератор симметрии функционала (1.104) и выполняется условие*

$$\Lambda'_u S(u) + S'^{*}_u \Lambda(u) = 0, \tag{3.80}$$

то симметрия функционала (1.104) является также симметрией заданного уравнения движения.

Доказательство. Это следует из теоремы 3.39, так как в этом случае $B_u \equiv I$ - тождественный оператор, поэтому условие (3.69) сводится к (3.80), а функционал (1.94) записывается в виде (1.104). □

Теорема 3.41. *Если оператор N уравнения (1.13) является B_u-потенциальным на $D(N)$ вида относительно билинейной формы Φ (1.7), $\exists\,(B_u^*)^{-1}$, то симметрия функционала (1.109) является также симметрией заданного уравнения движения.*

Доказательство. Это следует из теоремы 3.39, так как в этом случае $\Lambda \equiv 0$, поэтому условие (3.69) выполняется тождественно, а функционал (1.94) записывается в виде (1.109). □

Теорема 3.42. *Если оператор N уравнения (1.13) является потенциальным на $D(N)$ вида относительно билинейной формы Φ (1.7), то симметрия функционала (1.114) является также симметрией заданного уравнения движения.*

Доказательство. Это следует из теоремы 3.39, так как в этом случае $\Lambda \equiv 0$, $B_u \equiv I$ - тождественный оператор, поэтому условие (3.69) выполняется тождественно, а функционал (1.94) записывается в виде (1.114). □

Глава 4

B_u-гамильтоновы и Гамильтона-допустимые уравнения в механике систем с бесконечным числом степеней свободы

Исследования, имеющие целью распространение методов гамильтоновой механики на системы различной физической природы, привели к обобщениям гамильтоновых систем. В работе [26] понятие обобщения гамильтоновых систем означает определение структур уравнений движения материальных систем, приводящихся к уравнениям Гамильтона или являющихся их обобщениями в том смысле, что решения этих уравнений могут быть изучены методами гамильтоновой механики.

Настоящая глава посвящена разработке методов представимости уравнений движения непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы в форме Гамильтона-допустимых уравнений (в том числе уравнений Гамильтона) и B_u-гамильтоновых уравнений. Следует отметить, что при исследовании движения систем с бесконечным числом степеней свободы существенную роль могут играть алгебраические структуры, явно или скрыто связанные с уравнениями движения, поэтому установлена также взаимосвязь указанных типов уравнений со скобками Пуассона и Ли-допустимыми алгебрами (в том числе алгебрами Ли).

4.1 B_u-гамильтоновы и Гамильтона-допустимые уравнения, аналог скобок Пуассона и алгебраические структуры

В данном параграфе установлена взаимосвязь B_u-гамильтоновых и Гамильтона-допустимых уравнений с Ли-допустимыми алгебрами (в том числе алгебрами Ли), а также со скобками Пуассона, заданными в пространствах как эйлеровых, так и неэйлеровых B_u-потенциалов. Разработан аналог метода Пуассона для бесконечномерных систем.

Рассматриваются нелокальная билинейная форма вида

$$\Phi_1(\cdot,\cdot) \equiv \langle\cdot,\cdot\rangle : V_1 \times V_1 \to \mathbb{R} \tag{4.1}$$

и оператор $B_u : V_1 \to V_1$.

Определение 4.1. [92] Нелокальная билинейная форма (4.1) называется B_uG_u-кососимметрической, если $\forall\, h, v \in V_1$ выполнено условие

$$\langle v, B_uG_uh\rangle = -\langle h, B_uG_uv\rangle\,. \tag{4.2}$$

Рассмотрим уравнение

$$u_t = G_u((B_u{-}grad)_{\Phi_1}H[u]). \tag{4.3}$$

Определение 4.2. [137] Линейный оператор $G_u : D(G_u) \subset V_1 \to V_1$ называется B_u-гамильтоновым (относительно билинейной формы (4.1)), если $\forall h, v, g \in V_1$ выполнены условия

$$\langle g, B_uG_uh\rangle = -\langle h, B_uG_ug\rangle\,, \tag{4.4}$$

$$\begin{gathered}\langle v, B_uG'_u(g; G_uh) + B'_u(G_uh; G_ug)\rangle + \\ + \langle g, B_uG'_u(h; G_uv) + B'_u(G_uv; G_uh)\rangle + \\ + \langle h, B_uG'_u(v; G_ug) + B'_u(G_ug; G_uv)\rangle = 0.\end{gathered} \tag{4.5}$$

Определение 4.3. Уравнение (4.3), где оператор G_u является B_u-гамильтоновым, называется B_u-гамильтоновым уравнением.

Определение 4.4. Линейный оператор $G_u : D(G_u) \subset V_1 \to V_1$ называется гамильтоновым (относительно билинейной формы (4.1)), если $\forall h, v, g \in V_1$ выполнены условия

$$\langle g, G_u h \rangle = - \langle h, G_u g \rangle \,, \tag{4.6}$$

$$\langle v, G_u'(g; G_u h) \rangle + \langle g, G_u'(h; G_u v) \rangle + \langle h, G_u'(v; G_u g) \rangle = 0. \tag{4.7}$$

Определение 4.5. Уравнение

$$u_t = G_u(grad_{\Phi_1} H[u]),$$

где оператор G_u является гамильтоновым, называется уравнением Гамильтона.

Рассмотрим действительное линейное пространство $\mathcal{F}_{\Phi_1, B_u}$, элементами которого являются параметрически зависящие от t функционалы $F[t,\cdot] : U_1 \subseteq V_1 \to \mathbb{R}$, допускающие представление [137]

$$\delta F[t,u,h] = \langle (B_u{-}grad)_{\Phi_1} F[t,u], B_u h \rangle \qquad \forall u \in U_1, \quad \forall h \in D(F_u', B_u).$$

Отметим, что в дальнейшем параметрически зависящие от t функционалы $F[t,u]$ будем обозначать также $F[u]$.

В этом пространстве определим билинейную операцию $\{\cdot,\cdot\}$, которая каждой паре функционалов F_1 и F_2 ставит в соответствие функционал $\{F_1, F_2\}$, определяемый формулой [137]

$$\{F_1, F_2\}[u] = \langle K_1(u), B_u G_u K_2(u) \rangle \qquad \forall u \in U_1, \tag{4.8}$$

где $K_1(u) = (B_u{-}grad)_{\Phi_1} F_1[u]$, $K_2(u) = (B_u{-}grad)_{\Phi_1} F_2[u]$.

Теорема 4.1. [137] *Если оператор G_u является B_u-гамильтоновым относительно симметрической невырожденной билинейной формы Φ_1 вида (4.1), B_u - обратимый оператор,* *то* $\forall F_1, F_2, F_3 \in \mathfrak{F}_{\Phi_1, B_u}$ *и* $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *на* U_1 *выполняются соотношения*

$$\{F_1, F_2\} = -\{F_2, F_1\}, \tag{4.9}$$

$$\{\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2, F_3\} = \lambda_1\{F_1, F_3\} + \lambda_2\{F_2, F_3\}, \tag{4.10}$$

$$\{F_1, \lambda_1 F_2 + \lambda_2 F_3\} = \lambda_1\{F_1, F_2\} + \lambda_2\{F_1, F_3\}, \tag{4.11}$$

$$\{F_1, \{F_2, F_3\}\} + \{F_2, \{F_3, F_1\}\} + \{F_3, \{F_1, F_2\}\} = 0 \tag{4.12}$$

(тождество Якоби).

Доказательство. Отметим, что (4.9) вытекает из условия $B_u G_u$-кососимметричности билинейной формы (4.1).

Далее, используя билинейность формы (4.1), получаем

$$\{\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2, F_3\}[u] = \langle \lambda_1 K_1(u) + \lambda_2 K_2(u), B_u G_u K_3(u)\rangle =$$

$$= \lambda_1 \langle K_1(u), B_u G_u K_3(u)\rangle + \lambda_2 \langle K_2(u), B_u G_u K_3(u)\rangle =$$

$$= \lambda_1\{F_1, F_3\}[u] + \lambda_2\{F_2, F_3\}[u].$$

Аналогично доказывается (4.11).

Докажем (4.12). Имеем

$$\{F_1, \{F_2, F_3\}\}[u] = \langle K_1(u), B_u G_u((B_u{-}grad)_{\Phi_1}\{F_2, F_3\}[u])\rangle.$$

Найдем $(B_u{-}grad)_{\Phi_1}\{F_2, F_3\}[u]$. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \langle K_2(u+\varepsilon h), B_{u+\varepsilon h} G_{u+\varepsilon h} K_3(u+\varepsilon h)\rangle \Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \langle K'_{2u} h, B_u G_u K_3(u)\rangle + \langle K_2(u), B'_u(G_u K_3(u); h)\rangle +$$

$$+ \langle K_2(u), B_u G'_u(K_3(u); h)\rangle + \langle K_2(u), B_u G_u K'_{3u} h\rangle =$$

$$= \left\langle K'_{2u} B_u^{-1} B_u h, B_u G_u K_3(u)\right\rangle +$$

$$+ \left\langle K_2(u), B'_u(G_u K_3(u); B_u^{-1} B_u h)\right\rangle +$$

$$+ \left\langle K_2(u), B_u G'_u(K_3(u); B_u^{-1} B_u h)\right\rangle +$$

$$+\left\langle K_2(u), B_u G_u K'_{3u} B_u^{-1} B_u h\right\rangle =$$
$$=\left\langle (B_u^{-1})^* K'^*_{2u} B_u G_u K_3(u), B_u h\right\rangle +$$
$$+\left\langle [B'_u(G_u K_3(u); B_u^{-1}(\cdot)]^* K_2(u), B_u h\right\rangle +$$
$$+\left\langle [G'_u(K_3(u); B_u^{-1}(\cdot))]^* B_u^* K_2(u), B_u h\right\rangle -$$
$$-\left\langle (B_u^{-1})^* K'^*_{3u} B_u G_u K_2(u), B_u h\right\rangle .$$

Следовательно,

$$(B_u{-}grad)_{\Phi_1}\{F_2, F_3\}[u] = (B_u^{-1})^* K'^*_{2u} B_u G_u K_3(u)+$$
$$+[B'_u(G_u K_3(u); B_u^{-1}(\cdot)]^* K_2(u) + [G'_u(K_3(u); B_u^{-1}(\cdot))]^* B_u^* K_2(u)-$$
$$-(B_u^{-1})^* K'^*_{3u} B_u G_u K_2(u).$$

Таким образом,

$$\{F_1, \{F_2, F_3\}\}[u] = \left\langle K_1(u), B_u G_u (B_u^{-1})^* K'^*_{2u} B_u G_u K_3(u)+\right.$$
$$+B_u G_u [B'_u(G_u K_3(u); B_u^{-1}(\cdot)]^* K_2(u)+$$
$$+B_u G_u [G'_u(K_3(u); B_u^{-1}(\cdot))]^* B_u^* K_2(u)-$$
$$\left.- B_u G_u (B_u^{-1})^* K'^*_{3u} B_u G_u K_2(u)\right\rangle .$$

Далее,

$$\{F_2, \{F_3, F_1\}\}[u] = \left\langle K_2(u), B_u G_u (B_u^{-1})^* K'^*_{3u} B_u G_u K_1(u)+\right.$$
$$+B_u G_u [B'_u(G_u K_1(u); B_u^{-1}(\cdot)]^* K_3(u)+$$
$$+B_u G_u [G'_u(K_1(u); B_u^{-1}(\cdot))]^* B_u^* K_3(u)-$$
$$\left.- B_u G_u (B_u^{-1})^* K'^*_{1u} B_u G_u K_3(u)\right\rangle ;$$
$$\{F_3, \{F_1, F_2\}\}[u] = \left\langle K_3(u), B_u G_u (B_u^{-1})^* K'^*_{1u} B_u G_u K_2(u)+\right.$$
$$+B_u G_u [B'_u(G_u K_2(u); B_u^{-1}(\cdot)]^* K_1(u)+$$
$$+B_u G_u [G'_u(K_2(u); B_u^{-1}(\cdot))]^* B_u^* K_1(u)-$$
$$\left.- B_u G_u (B_u^{-1})^* K'^*_{2u} B_u G_u K_1(u)\right\rangle .$$

Тогда

$$\{F_1,\{F_2,F_3\}\}[u]+\{F_2,\{F_3,F_1\}\}[u]+\{F_3,\{F_1,F_2\}\}[u]=$$

$$=-\Big\langle B_uG_uK_1(u),(B_u^{-1})^*K_{2u}'^*B_uG_uK_3(u)+$$

$$+[B_u'(G_uK_3(u);B_u^{-1}(\cdot)]^*K_2(u)+$$

$$+[G_u'(K_3(u);B_u^{-1}(\cdot))]^*B_u^*K_2(u)-(B_u^{-1})^*K_{3u}'^*B_uG_uK_2(u)\Big\rangle-$$

$$-\Big\langle B_uG_uK_2(u),(B_u^{-1})^*K_{3u}'^*B_uG_uK_1(u)+$$

$$+[B_u'(G_uK_1(u);B_u^{-1}(\cdot)]^*K_3(u)+$$

$$+[G_u'(K_1(u);B_u^{-1}(\cdot))]^*B_u^*K_3(u)-(B_u^{-1})^*K_{1u}'^*B_uG_uK_3(u)\Big\rangle-$$

$$-\Big\langle B_uG_uK_3(u),(B_u^{-1})^*K_{1u}'^*B_uG_uK_2(u)+$$

$$+[B_u'(G_uK_2(u);B_u^{-1}(\cdot)]^*K_1(u)+$$

$$+[G_u'(K_2(u);B_u^{-1}(\cdot))]^*B_u^*K_1(u)-(B_u^{-1})^*K_{2u}'^*B_uG_uK_1(u)\Big\rangle=$$

$$=-\langle K_{2u}'G_uK_1(u),B_uG_uK_3(u)\rangle-$$

$$-\Big\langle B_uG_uK_1(u),[B_u'(G_uK_3(u);B_u^{-1}(\cdot))]^*K_2(u)\Big\rangle-$$

$$-\Big\langle B_uG_uK_1(u),[G_u'(K_3(u);B_u^{-1}(\cdot))]^*B_u^*K_2(u)\Big\rangle+$$

$$+\langle K_{3u}'G_uK_1(u),B_uG_uK_2(u)\rangle-$$

$$-\langle K_{3u}'G_uK_2(u),B_uG_uK_1(u)\rangle-$$

$$-\Big\langle B_uG_uK_2(u),[B_u'(G_uK_1(u);B_u^{-1}(\cdot))]^*K_3(u)\Big\rangle-$$

$$-\Big\langle B_uG_uK_2(u),[G_u'(K_1(u);B_u^{-1}(\cdot))]^*B_u^*K_3(u)\Big\rangle+$$

$$+\langle K_{1u}'G_uK_2(u),B_uG_uK_3(u)\rangle-$$

$$-\langle K_{1u}'G_uK_3(u),B_uG_uK_2(u)\rangle-$$

$$-\Big\langle B_uG_uK_3(u),[B_u'(G_uK_2(u);B_u^{-1}(\cdot))]^*K_1(u)\Big\rangle-$$

$$-\Big\langle B_uG_uK_3(u),[G_u'(K_2(u);B_u^{-1}(\cdot))]^*B_u^*K_1(u)\Big\rangle+$$

$$+\langle K_{2u}'G_uK_3(u),B_uG_uK_1(u)\rangle=$$

$$=-\langle K_{2u}'G_uK_1(u),B_uG_uK_3(u)\rangle-$$

$$
\begin{aligned}
&- \langle B'_u(G_uK_3(u); G_uK_1(u)), K_2(u)\rangle - \\
&- \langle B_uG'_u(K_3(u); G_uK_1(u)), K_2(u)\rangle + \\
&\quad + \langle K'_{3u}G_uK_1(u), B_uG_uK_2(u)\rangle - \\
&\quad - \langle K'_{3u}G_uK_2(u), B_uG_uK_1(u)\rangle - \\
&- \langle B'_u(G_uK_1(u); G_uK_2(u)), K_3(u)\rangle - \\
&- \langle B_uG'_u(K_1(u); G_uK_2(u)), K_3(u)\rangle + \\
&\quad + \langle K'_{1u}G_uK_2(u), B_uG_uK_3(u)\rangle - \\
&\quad - \langle K'_{1u}G_uK_3(u), B_uG_uK_2(u)\rangle - \\
&- \langle B'_u(G_uK_2(u); G_uK_3(u)), K_1(u)\rangle - \\
&- \langle B_uG'_u(K_2(u); G_uK_3(u)), K_1(u)\rangle + \\
&\quad + \langle K'_{2u}G_uK_3(u), B_uG_uK_1(u)\rangle\,. \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

Так как операторы K_1, K_2, K_3 удовлетворяют условию B_u-потенциальности вида (1.11), то

$$
\begin{aligned}
1)\ \ &- \langle K'_{2u}G_uK_1(u), B_uG_uK_3(u)\rangle - \\
&\quad - \langle B'_u(G_uK_3(u); G_uK_1(u)), K_2(u)\rangle + \\
&\qquad + \langle K'_{2u}G_uK_3(u), B_uG_uK_1(u)\rangle = \\
&\qquad\quad = - \langle K_2(u), B'_u(G_uK_1(u); G_uK_3(u))\rangle\,; \\
2)\ \ &- \langle K'_{3u}G_uK_2(u), B_uG_uK_1(u)\rangle - \\
&\quad - \langle B'_u(G_uK_1(u); G_uK_2(u)), K_3(u)\rangle + \\
&\qquad + \langle K'_{3u}G_uK_1(u), B_uG_uK_2(u)\rangle = \\
&\qquad\quad = - \langle K_3(u), B'_u(G_uK_2(u); G_uK_1(u))\rangle\,; \\
3)\ \ &- \langle K'_{1u}G_uK_3(u), B_uG_uK_2(u)\rangle - \\
&\quad - \langle B'_u(G_uK_2(u); G_uK_3(u)), K_1(u)\rangle + \\
&\qquad + \langle K'_{1u}G_uK_2(u), B_uG_uK_3(u)\rangle =
\end{aligned}
$$

$$= -\left\langle K_1(u), B'_u(G_uK_3(u); G_uK_2(u))\right\rangle.$$

Следовательно, (4.13) примет вид

$$\{F_1,\{F_2,F_3\}\}[u] + \{F_2,\{F_3,F_1\}\}[u] + \{F_3,\{F_1,F_2\}\}[u] =$$
$$= -\left\langle B_uG'_u(K_3(u); G_uK_1(u)), K_2(u)\right\rangle -$$
$$- \left\langle K_2(u), B'_u(G_uK_1(u); G_uK_3(u))\right\rangle -$$
$$- \left\langle B_uG'_u(K_1(u); G_uK_2(u)), K_3(u)\right\rangle -$$
$$- \left\langle K_3(u), B'_u(G_uK_2(u); G_uK_1(u))\right\rangle -$$
$$- \left\langle B_uG'_u(K_2(u); G_uK_3(u)), K_1(u)\right\rangle -$$
$$- \left\langle K_1(u), B'_u(G_uK_3(u); G_uK_2(u))\right\rangle.$$

Учитывая второе условие из определения B_u-гамильтонова оператора, заключаем, что в данном случае тождество Якоби выполнено. $\square$

Замечание 4.1. Если $B_u \equiv I$ – тождественный оператор, то пространство $\mathcal{F}_{\Phi_1,I}$ будем обозначать через $\mathcal{F}_{\Phi_1}$.

В этом случае билинейная операция (4.8) примет вид

$$\{F_1,F_2\}[u] = \langle grad_{\Phi_1}F_1[u], G_u(grad_{\Phi_1}F_2[u])\rangle \qquad \forall u \in U_1, \quad (4.14)$$

а теорема 4.1 сформулируется следующим образом.

Теорема 4.2. *Если оператор G_u является гамильтоновым относительно симметрической невырожденной билинейной формы Φ_1 вида (4.1), то $\forall F_1,F_2,F_3 \in \mathcal{F}_{\Phi_1}$ и $\forall \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$ на U_1 выполняются соотношения*

$$\{F_1,F_2\} = -\{F_2,F_1\}, \quad (4.15)$$
$$\{\lambda_1F_1+\lambda_2F_2,F_3\} = \lambda_1\{F_1,F_3\}+\lambda_2\{F_2,F_3\}, \quad (4.16)$$
$$\{F_1,\lambda_1F_2+\lambda_2F_3\} = \lambda_1\{F_1,F_2\}+\lambda_2\{F_1,F_3\}, \quad (4.17)$$
$$\{F_1,\{F_2,F_3\}\}+\{F_2,\{F_3,F_1\}\}+\{F_3,\{F_1,F_2\}\} = 0 \quad (4.18)$$

(тождество Якоби).

Следуя [92], скобкой Пуассона на многообразии $M \subseteq U_1$ будем называть произвольную билинейную операцию $\{\cdot,\cdot\}$, определенную в пространстве функционалов, заданных на M, и удовлетворяющую соотношениям (4.9)-(4.12).

Следствие 4.1. [137] При выполнении условий теоремы 4.1 формула (4.8) определяет скобку Пуассона.

Замечание 4.2. Если $B_u \equiv I$, $u = (q,p)$, $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$, $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$,

$$G_u \equiv G = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix},$$

I_n – единичная матрица, то из (4.8) получаем классическую скобку Пуассона, составленнную из функций $\varphi(q,p,t)$ и $\psi(q,p,t)$ (см. [27])

$$\{\varphi,\psi\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial p_i} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right) \equiv \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(q_i,p_i)}.$$

Следствие 4.2. При выполнении условий теоремы 4.1 линейное пространство $\mathcal{F}_{\Phi_1,B_u}$, наделенное билинейной операцией (4.8), образует алгебру Ли.

Докажем, что при выполнении некоторых условий скобка Пуассона двух интегралов B_u-гамильтонова уравнения (4.3) также является интегралом этого уравнения.

Для этого потребуются уравнение в вариациях для (4.3)

$$h_t = G_u((B_u{-}grad)_{\Phi_1}H[u])'_u h + G'_u((B_u{-}grad)_{\Phi_1}H[u];h) \quad (4.19)$$

и уравнение вида

$$[B'_u(\cdot;G_u((B_u{-}grad)_{\Phi_1}H[u]))]^* g - ((B_u{-}grad)_{\Phi_1}H[u])'^*_u B_u G_u g +$$

$$+B^*_u g_t + [G'_u((B_u{-}grad)_{\Phi_1}H[u];\cdot)]^* B^*_u g + \left(\frac{\partial B_u}{\partial t}\right)^* g = 0. \quad (4.20)$$

Лемма 4.1. *Если функционал $I[u]$ является интегралом уравнения (4.3), то уравнение (4.20) имеет решение $g = (B_u{-}grad)_{\Phi_1} I[u]$.*

Доказательство. Имеем

$$\frac{d}{dt} I[u]\Big|_{(4.3)} = 0,$$

поэтому

$$\frac{d}{dt}\delta I[u,h]\Big|_{(4.3),(4.19)} = 0,$$

то есть

$$\frac{d}{dt}\left\langle (B_u{-}grad)_{\Phi_1} I[u], B_u h\right\rangle\Big|_{(4.3),(4.19)} = 0,$$

или

$$\Bigg(\left\langle \frac{d}{dt}((B_u{-}grad)_{\Phi_1} I[u]), B_u h\right\rangle +$$
$$+\left\langle (B_u{-}grad)_{\Phi_1} I[u], B'_u(h;u_t) + B_u h_t + \frac{\partial B_u}{\partial t} h\right\rangle\Bigg)\Bigg|_{(4.3),(4.19)} = 0.$$

Следовательно,

$$\left\langle B^*_u \frac{d}{dt}((B_u{-}grad)_{\Phi_1} I[u]), h\right\rangle +$$
$$+\langle [B'_u(\cdot; G_u((B_u{-}grad)_{\Phi_1} H[u]))]^*((B_u{-}grad)_{\Phi_1} I[u]), h\rangle -$$
$$-\langle ((B_u{-}grad)_{\Phi_1} H[u])'^*_u B_u G_u((B_u{-}grad)_{\Phi_1} I[u]), h\rangle +$$
$$+\langle [G'_u((B_u{-}grad)_{\Phi_1} H[u];\cdot)]^* B^*_u((B_u{-}grad)_{\Phi_1} I[u]), h\rangle +$$
$$+\left\langle \left(\frac{\partial B_u}{\partial t}\right)^* ((B_u{-}grad)_{\Phi_1} I[u]), h\right\rangle = 0.$$

Учитывая билинейность и невырожденность формы (4.1), заключаем, что $g = (B_u{-}grad)_{\Phi_1} I[u]$ является решением уравнения (4.20). $\square$

Теорема 4.3. [13] *Если* $I_1[u], I_2[u]$ *- интегралы уравнения (4.3), операторы* $B_u : V_1 \to V_1$ *и* $G_u : D(G_u) \subset V_1 \to V_1$ *не зависят явно от* t, $\exists B_u^{-1}$, *то скобка Пуассона*

$$\{I_1, I_2\}[u] = \langle (B_u{-}grad)_{\Phi_1} I_1[u], B_u G_u((B_u{-}grad)_{\Phi_1} I_2[u]) \rangle$$

также является интегралом (4.3).

Доказательство. Обозначим $R_1(u) = (B_u{-}grad)_{\Phi_1} I_1[u]$,

$$R_2(u) = (B_u{-}grad)_{\Phi_1} I_2[u], \qquad R_3(u) = (B_u{-}grad)_{\Phi_1} H[u].$$

Имеем

$$\frac{d}{dt}\{I_1, I_2\}[u]\bigg|_{(4.3)} = \left\langle \frac{d}{dt} R_1(u), B_u G_u R_2(u) \right\rangle +$$
$$+ \left\langle R_1(u), B_u G_u \left(\frac{d}{dt} R_2(u) \right) \right\rangle +$$
$$+ \langle R_1(u), B_u'(G_u R_2(u); G_u R_3(u)) \rangle +$$
$$+ \langle R_1(u), B_u G_u'(R_2(u); G_u R_3(u)) \rangle .$$

Так как, согласно лемме 4.1, R_1 и R_2 являются решениями уравнения (4.20), то

$$\frac{d}{dt}\{I_1, I_2\}[u]\bigg|_{(4.3)} = \left\langle B_u^* \frac{d}{dt} R_1(u), G_u R_2(u) \right\rangle +$$
$$+ \left\langle R_1(u), B_u G_u (B_u^*)^{-1} \left(B_u^* \frac{d}{dt} R_2(u) \right) \right\rangle +$$
$$+ \langle R_1(u), B_u'(G_u R_2(u); G_u R_3(u)) \rangle +$$
$$+ \langle R_1(u), B_u G_u'(R_2(u); G_u R_3(u)) \rangle =$$
$$= - \langle G_u R_2(u), [B_u'(\cdot; G_u R_3(u))]^* R_1(u) \rangle +$$
$$+ \langle G_u R_2(u), R_{3u}'^* B_u G_u R_1(u) \rangle -$$
$$- \langle G_u R_2(u), [G_u'(R_3(u); \cdot)]^* B_u^* R_1(u) \rangle -$$

$$
\begin{aligned}
&-\Big\langle R_1(u), B_u G_u (B_u^*)^{-1}[B_u'(\cdot; G_u R_3(u))]^* R_2(u)\Big\rangle + \\
&+\Big\langle R_1(u), B_u G_u (B_u^*)^{-1} R_{3u}'^{*} B_u G_u R_2(u)\Big\rangle - \\
&-\Big\langle R_1(u), B_u G_u (B_u^*)^{-1}[G_u'(R_3(u); \cdot)]^* B_u^* R_2(u)\Big\rangle + \\
&+\langle R_1(u), B_u'(G_u R_2(u); G_u R_3(u))\rangle + \\
&+\langle R_1(u), B_u G_u'(R_2(u); G_u R_3(u))\rangle = \\
&= -\langle B_u'(G_u R_2(u); G_u R_3(u)), R_1(u)\rangle + \\
&+\langle R_{3u}' G_u R_2(u), B_u G_u R_1(u)\rangle - \\
&-\langle B_u G_u'(R_3(u); G_u R_2(u)), R_1(u)\rangle + \\
&+\langle B_u'(G_u R_1(u); G_u R_3(u)), R_2(u)\rangle - \\
&-\langle R_{3u}' G_u R_1(u), B_u G_u R_2(u)\rangle + \\
&+\langle B_u G_u'(R_3(u); G_u R_1(u)), R_2(u)\rangle + \\
&+\langle R_1(u), B_u'(G_u R_2(u); G_u R_3(u))\rangle + \\
&+\langle R_1(u), B_u G_u'(R_2(u); G_u R_3(u))\rangle .
\end{aligned}
$$

Так как оператор R_3 является B_u-потенциальным относительно билинейной формы (4.1), то

$$
\begin{aligned}
&\langle R_{3u}' G_u R_2(u), B_u G_u R_1(u)\rangle - \langle R_{3u}' G_u R_1(u), B_u G_u R_2(u)\rangle = \\
&= \langle R_3(u), B_u'(G_u R_2(u); G_u R_1(u))\rangle - \\
&-\langle R_3(u), B_u'(G_u R_1(u); G_u R_2(u))\rangle .
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\{I_1, I_2\}[u]\Big|_{(4.3)} &= \langle R_3(u), B_u'(G_u R_2(u); G_u R_1(u))\rangle - \\
&-\langle R_3(u), B_u'(G_u R_1(u); G_u R_2(u))\rangle - \\
&-\langle B_u G_u'(R_3(u); G_u R_2(u)), R_1(u)\rangle + \\
&+\langle R_1(u), B_u G_u'(R_2(u); G_u R_3(u))\rangle +
\end{aligned}
$$

$$+ \left\langle B'_u(G_u R_1(u); G_u R_3(u)), R_2(u) \right\rangle +$$
$$+ \left\langle B_u G'_u(R_3(u); G_u R_1(u)), R_2(u) \right\rangle . \qquad (4.21)$$

Отметим, что

$$\left\langle R_3(u), B_u G_u R_1(u) \right\rangle = - \left\langle B_u G_u R_3(u), R_1(u) \right\rangle ,$$

поэтому

$$\left\langle R'_{3u} v, B_u G_u R_1(u) \right\rangle + \left\langle R_3(u), B'_u(G_u R_1(u); v) \right\rangle +$$
$$+ \left\langle R_3(u), B_u G'_u(R_1(u); v) \right\rangle + \left\langle R_3(u), B_u G_u R'_{1u} v \right\rangle =$$
$$= - \left\langle B'_u(G_u R_3(u); v), R_1(u) \right\rangle - \left\langle B_u G'_u(R_3(u); v), R_1(u) \right\rangle -$$
$$- \left\langle B_u G_u R'_{3u} v, R_1(u) \right\rangle - \left\langle B_u G_u R_3(u), R'_{1u} v \right\rangle .$$

Таким образом, из последнего равенства получаем

$$\left\langle R_3(u), B'_u(G_u R_1(u); v) \right\rangle + \left\langle R_1(u), B_u G'_u(R_3(u); v) \right\rangle =$$
$$= - \left\langle B'_u(G_u R_3(u); v), R_1(u) \right\rangle - \left\langle B_u G'_u(R_1(u); v), R_3(u) \right\rangle .$$

Пусть $v = G_u R_2(u)$. Тогда (4.21) примет вид

$$\frac{d}{dt}\{I_1, I_2\}[u]\Big|_{(4.3)} = \left\langle R_3(u), B'_u(G_u R_2(u); G_u R_1(u)) \right\rangle +$$
$$+ \left\langle R_3(u), B_u G'_u(R_1(u); G_u R_2(u)) \right\rangle +$$
$$+ \left\langle R_1(u), B'_u(G_u R_3(u); G_u R_2(u)) \right\rangle +$$
$$+ \left\langle R_1(u), B_u G'_u(R_2(u); G_u R_3(u)) \right\rangle +$$
$$+ \left\langle B'_u(G_u R_1(u); G_u R_3(u)), R_2(u) \right\rangle +$$
$$+ \left\langle B_u G'_u(R_3(u); G_u R_1(u)), R_2(u) \right\rangle .$$

Учитывая второе условие из определения B_u-гамильтонова оператора, заключаем, что

$$\frac{d}{dt}\{I_1, I_2\}[u]\Big|_{(4.3)} = 0.$$

□

Определение 4.6. Уравнение

$$u_t = \tilde{G}_u((B_u - grad)_{\Phi_1} H[u]) \tag{4.22}$$

называется B_u-Гамильтона-допустимым уравнением, если оператор $G_u \equiv \tilde{G}_u - \tilde{G}_u^*$ является B_u-гамильтоновым в области $D(\tilde{G}_u)$ относительно заданной билинейной формы.

В этом случае оператор $\tilde{G}_u$ называется B_u-Гамильтона-допустимым оператором.

Отметим, что если $B_u \equiv I$ - тождественный оператор, то уравнение (4.22) называется Гамильтона-допустимым уравнением, а оператор $\tilde{G}_u$ - Гамильтона-допустимым оператором [14].

Теорема 4.4. [14] *Оператор $\tilde{G}_u : D(\tilde{G}_u) \subset V_1 \to V_1$ является Гамильтона-допустимым оператором тогда и только тогда, когда он представим в виде*

$$\tilde{G}_u = \tilde{G}_{1u} + \tilde{G}_{2u}, \tag{4.23}$$

где $\tilde{G}_{1u}$ – симметрический оператор, а $\tilde{G}_{2u}$ – гамильтонов.

Доказательство. Предположим, что оператор $\tilde{G}_u$ является Гамильтона-допустимым оператором. Представим его в виде

$$\tilde{G}_u = \frac{\tilde{G}_u + \tilde{G}_u^*}{2} + \frac{\tilde{G}_u - \tilde{G}_u^*}{2}$$

и обозначим

$$\tilde{G}_{1u} = \frac{\tilde{G}_u + \tilde{G}_u^*}{2}, \qquad \tilde{G}_{2u} = \frac{\tilde{G}_u - \tilde{G}_u^*}{2}.$$

Отметим, что оператор $\tilde{G}_{1u}$ является симметрическим, а оператор $\tilde{G}_{2u}$ – гамильтоновым (по определению Гамильтона-допустимого оператора).

Обратно, пусть имеет место (4.23). Тогда

$$\tilde{G}_u^* = \tilde{G}_{1u} - \tilde{G}_{2u}$$

и оператор

$$\tilde{G}_u - \tilde{G}_u^* = 2\tilde{G}_{2u}$$

является гамильтоновым. $\square$

Пример 4.1. [14]

Рассмотрим уравнения движения

$$\begin{cases} u_t = \frac{\delta H}{\delta p} \\ p_t = -\frac{\delta H}{\delta u} + s(u,p). \end{cases} \tag{4.24}$$

Предположим, что $\delta H/\delta p \neq 0$.

Покажем, что уравнения (4.24) являются Гамильтона-допустимыми уравнениями. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\delta H}{\delta u} \\ \frac{\delta H}{\delta p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\delta H}{\delta u} \\ \frac{\delta H}{\delta p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\delta H}{\delta u} \\ \frac{\delta H}{\delta p} \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Theta \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \frac{\delta H}{\delta u} \\ \frac{\delta H}{\delta p} \end{pmatrix},$$

где $\Theta = s/\left(\delta H/\delta p\right), I$ – тождественный оператор.

В данном случае оператор

$$\tilde{G}_{\overline{u}} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & \Theta \end{pmatrix}$$

представим в виде суммы

$$\tilde{G}_{1\overline{u}} + \tilde{G}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

симметрического и гамильтонова операторов.

Здесь $\overline{u} = (u, p)^T$.

Тогда по теореме 4.4 оператор $\tilde{G}_{\overline{u}}$ является Гамильтона-допустимым оператором.

Замечание 4.3. [14] Рассмотрим уравнение движения

$$\tilde{N}(u) \equiv u_t - \tilde{G}(grad_{\Phi_1} H[u]) = 0, \qquad u \in D(\tilde{N}). \tag{4.25}$$

Отметим, что по теореме 4.4 уравнение (4.25) является Гамильтона-допустимым уравнением, так как $\tilde{G} = \tilde{G}_1 + \tilde{G}_2$, где оператор

$$\tilde{G}_1 = \frac{\tilde{G} + \tilde{G}^*}{2},$$

очевидно, симметрический, а оператор

$$\tilde{G}_2 = \frac{\tilde{G} - \tilde{G}^*}{2}$$

гамильтонов, так как он кососимметрический и не зависит от u.

Предположим, что функционал $I[u]$ – интеграл уравнения (4.25), а симметрический оператор $\tilde{G}_1$ является положительно определенным относительно заданной билинейной формы Φ_1, то есть

$$\Phi_1(v, \tilde{G}_1 v) \geq k\|v\| \qquad \forall v \in D(\tilde{G}_1),$$

где k - положительная постоянная.

Будем считать, что функционал $H + \alpha I$ не зависит явно от t. Здесь α – постоянная.

Тогда

$$D_t\left(H + \alpha I\right)\big|_{(4.25)} = \Phi_1\left(grad_{\Phi_1} H + \alpha\, grad_{\Phi_1} I, \tilde{G}(grad_{\Phi_1} H)\right) =$$

$$= \Phi_1\left(grad_{\Phi_1} H, \tilde{G}(grad_{\Phi_1} H)\right) + \alpha \Phi_1\left(grad_{\Phi_1} I, \tilde{G}(grad_{\Phi_1} H)\right) =$$
$$= \Phi_1\left(grad_{\Phi_1} H, \tilde{G}_1(grad_{\Phi_1} H)\right) + \Phi_1\left(grad_{\Phi_1} H, \tilde{G}_2(grad_{\Phi_1} H)\right) =$$
$$= \Phi_1\left(grad_{\Phi_1} H, \tilde{G}_1(grad_{\Phi_1} H)\right) \geq k\left\|grad_{\Phi_1} H[u]\right\| \tag{4.26}$$

$$\forall u \in D(\tilde{N}),$$

что указывает на возможность использования функционалов H (при $\alpha = 0$) или $H + \alpha I$ в качестве функционалов Ляпунова для исследования устойчивости движений системы.

Отметим, что в (4.26)

$$\Phi_1\left(grad_{\Phi_1} I, \tilde{G}(grad_{\Phi_1} H)\right) = 0$$

по определению интеграла, а

$$\Phi_1\left(grad_{\Phi_1} H, \tilde{G}_2(grad_{\Phi_1} H)\right) = 0$$

ввиду кососимметричности оператора $\tilde{G}_2$.

В связи с изложенным выше естественным образом возникают задачи представления уравнений движения непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы в форме (4.25) и нахождения их интегралов.

Обозначим

$$\{I, H\}[u] = \langle (B_u - grad)_{\Phi_1} I[u], B_u G_u((B_u - grad)_{\Phi_1} H[u]) \rangle ,$$

где $G_u \equiv \tilde{G}_u - \tilde{G}_u^*$.

Теорема 4.5. *Функционал $I[u]$ является интегралом уравнения (4.22) тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\partial I[u]}{\partial t} + \{I, H\}[u] + \\ + \left\langle (B_u - grad)_{\Phi_1} I[u], B_u \tilde{G}_u^*((B_u - grad)_{\Phi_1} H[u]) \right\rangle = 0 \quad (4.27)$$

на решениях уравнения (4.22).

Доказательство. Необходимость. Пусть $I[u]$ является интегралом уравнения (4.22), то есть

$$\left.\frac{d}{dt} I[u]\right|_{(4.22)} = 0.$$

Отсюда получаем

$$\frac{d}{dt}I[u]\Big|_{(4.22)} = \left(\frac{\partial I[u]}{\partial t} + \langle (B_u - grad)_{\Phi_1} I[u], B_u u_t \rangle\right)\Big|_{(4.22)} =$$

$$= \frac{\partial I[u]}{\partial t} + \left\langle (B_u - grad)_{\Phi_1} I[u], B_u \tilde{G}_u((B_u - grad)_{\Phi_1} H[u]) \right\rangle =$$

$$= \frac{\partial I[u]}{\partial t} + \left\langle (B_u - grad)_{\Phi_1} I[u], B_u \left(\tilde{G}_u - \tilde{G}_u^*\right)((B_u - grad)_{\Phi_1} H[u]) \right\rangle +$$

$$+ \left\langle (B_u - grad)_{\Phi_1} I[u], B_u \tilde{G}_u^*((B_u - grad)_{\Phi_1} H[u]) \right\rangle =$$

$$= \frac{\partial I[u]}{\partial t} + \langle (B_u - grad)_{\Phi_1} I[u], B_u G_u((B_u - grad)_{\Phi_1} H[u]) \rangle +$$

$$+ \left\langle (B_u - grad)_{\Phi_1} I[u], B_u \tilde{G}_u^*((B_u - grad)_{\Phi_1} H[u]) \right\rangle =$$

$$= \frac{\partial I[u]}{\partial t} + \{I, H\}[u] +$$

$$+ \left\langle (B_u - grad)_{\Phi_1} I[u], B_u \tilde{G}_u^*((B_u - grad)_{\Phi_1} H[u]) \right\rangle = 0.$$

Достаточность доказывается обратным ходом рассуждений. □

Замечание 4.4. [14] Если $B_u \equiv I$ - тождественный оператор, то условие (4.27) принимает вид

$$\frac{\partial I[u]}{\partial t} + \{I, H\}[u] + \left\langle grad_{\Phi_1} I[u], \tilde{G}_u^*(grad_{\Phi_1} H[u]) \right\rangle = 0, \qquad (4.28)$$

где

$$\{I, H\}[u] = \langle grad_{\Phi_1} I[u], G_u(grad_{\Phi_1} H[u]) \rangle .$$

Пример 4.2.

Рассмотрим уравнения движения

$$\begin{cases} N^1(u) \equiv u^1_t + t^{-1}u^1 - u^2_{xxx} = 0, \\ N^2(u) \equiv u^2_t - t^2 u^1_x = 0, \end{cases} \tag{4.29}$$

$$(x,t) \in \Omega = (a,b) \times (t_0, t_1),\ t_0 > 0,$$

где $u(x,t) = (u^1(x,t), u^2(x,t))^T$ – неизвестная вектор-функция, $N = (N^1, N^2)^T$.

Введем классическую билинейную форму

$$\Phi(v,g) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_a^b \sum_{i=1}^2 v^i(x,t) g^i(x,t) dx dt$$

и определим $D(N)$ следующим образом:

$$D(N) =$$

$$= \{u \in U = (U^1, U^2)^T,\ u^1 \in U^1 = C^{1,1}_{x,t}(\overline{\Omega}),\ u^2 \in U^2 = C^{3,1}_{x,t}(\overline{\Omega}) :$$

$$u^i\Big|_{x=a} = u^i\Big|_{x=b} = 0,\ i = 1, 2,\ u^2_x\Big|_{x=a} = u^2_x\Big|_{x=b} = 0\}.$$

Отметим, что в данном случае система уравнений (4.29) представима в виде (4.22), где

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} -t^{-1}I & D_{xxx} \\ t^2 D_x & 0 \end{pmatrix},\ H[u] = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(\left(u^1\right)^2 + \left(u^2\right)^2\right) dx,\ B_u \equiv I,$$

I - тождественный оператор.

Система уравнений (4.29) не является гамильтоновой, так как оператор $\tilde{G}$ не является кососимметрическим. Уравнения (4.29) являются Гамильтона-допустимыми уравнениями, так как оператор

$$G \equiv \tilde{G} - \tilde{G}^* = \begin{pmatrix} 0 & D_{xxx} + t^2 D_x \\ t^2 D_x + D_{xxx} & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{G}^* = \begin{pmatrix} -t^{-1}I & -t^2 D_x \\ -D_{xxx} & 0 \end{pmatrix},$$

не зависит от u, является кососимметрическим и, следовательно, - гамильтоновым.

Если

$$I[u] = \frac{1}{4}\int\limits_a^b \left(t^2\left(u^1\right)^2 - \left(u_x^2\right)^2\right) dx, \tag{4.30}$$

то условие (4.28) выполняется. Действительно, так как

$$\frac{\partial I[u]}{\partial t} = \frac{t}{2}\int\limits_a^b \left(u^1\right)^2 dx, \quad grad_{\Phi_1} I[u] = \left(\frac{t^2 u^1}{2}, \frac{u_{xx}^2}{2}\right)^T,$$

то

$$\frac{\partial I[u]}{\partial t} + \{I, H\}[u] + \left\langle grad_{\Phi_1} I[u], \tilde{G}_u^*(grad_{\Phi_1} H[u])\right\rangle =$$

$$= \int\limits_a^b \left(\frac{t}{2}\left(u^1\right)^2 + \frac{t^2}{2}u^1 u_{xxx}^2 + \frac{t^4}{2}u^1 u_x^2 + \frac{t^2}{2}u_x^1 u_{xx}^2 + \frac{1}{2}u_{xx}^2 u_{xxx}^1 - \right.$$

$$\left. -\frac{t}{2}\left(u^1\right)^2 - \frac{t^4}{2}u^1 u_x^2 - \frac{1}{2}u_{xx}^2 u_{xxx}^1\right) dx = \int\limits_a^b \frac{t^2}{2}\left(u^1 u_{xxx}^2 + u_x^1 u_{xx}^2\right) dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left(-\frac{t^2}{2}u_x^1 u_{xx}^2 + \frac{t^2}{2}u_x^1 u_{xx}^2\right) dx = 0.$$

Таким образом, функционал $I[u]$ вида (4.30) является интегралом уравнений движения (4.29).

Следствие 4.3. Если

$$\frac{\partial H[u]}{\partial t} + \left\langle (B_u - grad)_{\Phi_1} H[u], B_u \tilde{G}_u^*((B_u - grad)_{\Phi_1} H[u])\right\rangle = 0 \tag{4.31}$$

на решениях уравнения (4.22), то гамильтониан $H[u]$ является интегралом этого уравнения.

Действительно, в данном случае условие (4.27) выполняется, так как

$$\{H,H\}[u] = \langle (B_u - grad)_{\Phi_1} H[u], B_u G_u((B_u - grad)_{\Phi_1} H[u])\rangle = 0$$

ввиду кососимметричности оператора $B_u G_u$.

Замечание 4.5. [14] В случае Гамильтона-допустимого уравнения ($B_u \equiv I$ – тождественный оператор), условие (4.31) записывается в виде

$$\frac{\partial H[u]}{\partial t} + \left\langle grad_{\Phi_1} H[u], \tilde{G}_u^*(grad_{\Phi_1} H[u])\right\rangle = 0. \qquad (4.32)$$

Пример 4.3.

Рассмотрим уравнения движения

$$\left\{ \begin{array}{l} N^1(u) \equiv u_t^1 - u^2 - u_{xx}^2 + u^1 = 0, \\ N^2(u) \equiv u_t^2 + u^1 + u_{xx}^1 - (u^2)^{-1}(u^1)^2 = 0, \end{array} \right. \qquad (4.33)$$

$$(x,t) \in \mathcal{Q} = (a,b) \times (t_0, t_1),$$

где $u(x,t) = (u^1(x,t), u^2(x,t))^T$ – неизвестная вектор-функция, $N = (N^1, N^2)^T$.

Введем классическую билинейную форму

$$\Phi(v,g) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_a^b \sum_{i=1}^2 v^i(x,t) g^i(x,t) dx dt$$

и определим $D(N)$ следующим образом:

$$D(N) = \{u \in U = (U^1, U^2)^T,\ u^i \in U^i = C_{x,t}^{2,1}(\overline{\mathcal{Q}}) : u^i|_{x=a} = 0,$$

$$u^i|_{x=b} = 0,\ i = 1,2\}.$$

Отметим, что в данном случае система уравнений (4.33) представима в виде (4.22), где

$$\tilde{G}_u = \begin{pmatrix} -I & I + D_{xx} \\ -I - D_{xx} & (u^2)^{-2}(u^1)^2 I \end{pmatrix}, \quad B_u \equiv I,$$

$$H[u] = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(\left(u^1\right)^2 + \left(u^2\right)^2\right) dx, \tag{4.34}$$

I - тождественный оператор.

Система уравнений (4.33) не является гамильтоновой, так как оператор $\tilde{G}_u$ не является кососимметрическим. Уравнения (4.33) являются Гамильтона-допустимыми уравнениями, так как оператор

$$G \equiv \tilde{G}_u - \tilde{G}_u^* = \begin{pmatrix} 0 & 2I + 2D_{xx} \\ -2I - 2D_{xx} & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{G}_u^* = \begin{pmatrix} -I & -I - D_{xx} \\ I + D_{xx} & (u^2)^{-2}(u^1)^2 I \end{pmatrix},$$

не зависит от u, является кососимметрическим и, следовательно, - гамильтоновым.

Условие (4.32) в данном случае выполняется, так как

$$\frac{\partial H[u]}{\partial t} \equiv 0, \qquad grad_{\Phi_1} H[u] = (u^1, u^2)^T$$

и

$$\left\langle grad_{\Phi_1} H[u], \tilde{G}_u^*(grad_{\Phi_1} H[u])\right\rangle =$$

$$= \int\limits_a^b \left(-\left(u^1\right)^2 - u^1u^2 - u^1u^2_{xx} + u^2u^1 + u^2u^1_{xx} + \left(u^1\right)^2\right) dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left(u^2u^1_{xx} - u^2u^1_{xx}\right) dx = 0.$$

Таким образом, гамильтониан $H[u]$ вида (4.34) является интегралом уравнений движения (4.33).

Если оператор G_u является B_u-гамильтоновым, то теорема 4.5 формулируется следующим образом.

Теорема 4.6. *Функционал $I[u]$ является интегралом уравнения (4.3) тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\partial I[u]}{\partial t} + \{I, H\}[u] = 0 \tag{4.35}$$

на решениях уравнения (4.3).

Здесь

$$\{I, H\}[u] = \langle (B_u{-}grad)_{\Phi_1} I[u], B_u G_u((B_u{-}grad)_{\Phi_1} H[u]) \rangle \,.$$

Следствие 4.4. Если гамильтониан H не зависит явно от t, то он является интегралом B_u-гамильтонова уравнения (4.3).

Это следует из условия (4.35), так как

$$\frac{\partial H[u]}{\partial t} = 0$$

и $\{H, H\}[u] = 0$ ввиду кососимметричности оператора $B_u G_u$.

В пространстве $\mathcal{F}_{\Phi_1}$ определим билинейную операцию [14]

$$(F_1, F_2)[u] = \left\langle grad_{\Phi_1} F_1[u], \tilde{G}_u(grad_{\Phi_1} F_2[u]) \right\rangle , \tag{4.36}$$

где $\tilde{G}_u$ – Гамильтона-допустимый оператор.

Теорема 4.7. [14] *Линейное пространство $\mathcal{F}_{\Phi_1}$, наделенное билинейной операцией (4.36), образует Ли-допустимую алгебру.*

Доказательство. Действительно, (4.36) позволяет ввести структуру алгебры в линейном пространстве $\mathcal{F}_{\Phi_1}$ над полем $\mathbb{R}$, так как условия (2.14) – (2.16), очевидно, выполняются.

Эта алгебра не является алгеброй Ли. Однако она является Ли-допустимой алгеброй, так как для скобки $\{\cdot,\cdot\}$, определенной формулой

$$\{F_1, F_2\}[u] = (F_1, F_2)[u] - (F_2, F_1)[u] =$$
$$= \left\langle grad_{\Phi_1} F_1[u], (\tilde{G}_u - \tilde{G}_u^*) grad_{\Phi_1} F_2[u] \right\rangle,$$

выполняются условия (2.17) – (2.18), так как оператор $G_u = \tilde{G}_u - \tilde{G}_u^*$ является гамильтоновым. □

4.2 Распознавание гамильтоновости систем с бесконечным числом степеней свободы

В данном параграфе исследуется вопрос о распознавании принадлежности систем с бесконечным числом степеней свободы к гамильтоновым системам, или, другими словами, о представлении уравнений движения систем с бесконечным числом степеней свободы с первой производной по времени в форме уравнений Гамильтона.

Рассматривается уравнение

$$u_t = Au, \tag{4.37}$$

где A - линейный, не зависящий от u и t оператор.

Представим уравнение (4.37) в виде уравнения Гамильтона

$$u_t = G(grad_{\Phi_1} H[u]). \tag{4.38}$$

Теорема 4.8. [13, 17] *Пусть*
1. функционал

$$\mathcal{I}[u] = \langle \mathcal{K}u, u \rangle \tag{4.39}$$

является интегралом уравнения (4.37);

2. $\exists\ (\mathcal{K}+\mathcal{K}^*)^{-1}$.
Тогда (4.37) представимо в виде (4.38), где $G = A(\mathcal{K}+\mathcal{K}^*)^{-1}$ *и* $H \equiv \mathcal{I}$.

Доказательство. Поскольку $\mathcal{I}[u]$ является интегралом уравнения (4.37), то

$$\frac{d}{dt}\mathcal{I}[u]\bigg|_{(4.37)} = \langle grad_{\Phi_1}\mathcal{I}[u], Au\rangle = 0.$$

Найдем $grad_{\Phi_1}\mathcal{I}[u]$. Имеем

$$\delta\mathcal{I}[u,h] = \langle \mathcal{K}h, u\rangle + \langle \mathcal{K}u, h\rangle = \langle (\mathcal{K}+\mathcal{K}^*)u, h\rangle\,,$$

то есть

$$grad_{\Phi_1}\mathcal{I}[u] = (\mathcal{K}+\mathcal{K}^*)u.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\mathcal{I}[u]\bigg|_{(4.37)} = \langle (\mathcal{K}+\mathcal{K}^*)u, Au\rangle = \langle (\mathcal{K}+\mathcal{K}^*)Au, u\rangle = 0.$$

Следовательно, оператор $(\mathcal{K}+\mathcal{K}^*)A$ является кососимметрическим.
В данном случае оператор $G = A(\mathcal{K}+\mathcal{K}^*)^{-1}$ является гамильтоновым, так как он не зависит от u и

$$\left\langle v, A(\mathcal{K}+\mathcal{K}^*)^{-1}h\right\rangle =$$
$$= \left\langle v, (\mathcal{K}+\mathcal{K}^*)^{-1}[(\mathcal{K}+\mathcal{K}^*)A](\mathcal{K}+\mathcal{K}^*)^{-1}h\right\rangle =$$
$$= -\left\langle (\mathcal{K}+\mathcal{K}^*)^{-1}(\mathcal{K}+\mathcal{K}^*)A(\mathcal{K}+\mathcal{K}^*)^{-1}v, h\right\rangle =$$
$$= -\left\langle A(\mathcal{K}+\mathcal{K}^*)^{-1}v, h\right\rangle.$$

Таким образом, (4.37) представимо в виде (4.38), где оператор $G = A(\mathcal{K}+\mathcal{K}^*)^{-1}$ является гамильтоновым и $H \equiv \mathcal{I}$. □

Пример 4.4.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} N^1(u) \equiv u^1_t - 2e^x u^2_x - u^2 e^x - u^1_x - u^1 = 0, \\ N^2(u) \equiv u^2_t - u^1 - 2x u^1_x - u^2_x + u^2 = 0, \end{cases} \tag{4.40}$$

$$(x,t) \in Q_T = (a,b) \times (0,T),$$

где $u(x,t) = (u^1(x,t), u^2(x,t))^T$ - неизвестная вектор-функция.

В данном случае

$$A = \begin{pmatrix} D_x + I & 2e^x D_x + e^x I \\ I + 2x D_x & D_x - I \end{pmatrix}.$$

Зададим область определения оператора $N = (N^1, N^2)^T$ в виде

$$D(N) = \Big\{ u \in U = (U^1, U^2)^T : U^i = C^1(\overline{Q_T}),$$
$$u^i|_{x=a} = 0, \;\; u^i|_{x=b} = 0, \;\; i = 1,2 \Big\}. \tag{4.41}$$

Отметим, что функционал

$$\mathcal{I}[u] = \int\limits_a^b u^1 u^2 dx \tag{4.42}$$

является интегралом системы уравнений (4.40).

Действительно,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{I}[u]\Big|_{(4.40)} = \int\limits_a^b \left(u^1_t u^2 + u^1 u^2_t\right) dx\Bigg|_{(4.40)} =$$

$$= \int\limits_a^b \Big[\left(2e^x u^2_x + u^2 e^x + u^1_x + u^1\right) u^2 +$$

$$+ \left(u^1 + 2x u^1_x + u^2_x - u^2\right) u^1 dx =$$

$$= \int\limits_a^b \big(2e^x u^2_x u^2 + (u^2)^2 e^x + u^1_x u^2 + u^1 u^2 + (u^1)^2 + 2x u^1 u^1_x +$$

$$+u^1u^2_x - u^1u^2\big)\,dx = \int\limits_a^b D_x\left[(u^2)^2e^x + u^1u^2 + x(u^1)^2\right]dx = 0.$$

Функционал (4.42) имеет вид (4.39), где

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}I \\ \frac{1}{2}I & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$\mathcal{K}^* = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}I \\ \frac{1}{2}I & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{K}+\mathcal{K}^* = (\mathcal{K}+\mathcal{K}^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда по теореме 4.8 система уравнений (4.40) представима в виде уравнения Гамильтона (4.38), где

$$G = A(\mathcal{K}+\mathcal{K}^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 2e^xD_x + e^xI & D_x + I \\ D_x - I & I + 2xD_x \end{pmatrix},$$

$$grad_{\Phi_1}H[u] = \begin{pmatrix} u^2 \\ u^1 \end{pmatrix}.$$

4.3 О представлении операторного уравнения с первой производной по времени в форме B_u-гамильтонова уравнения

В настоящем параграфе изложен метод приведения операторного уравнения с первой производной по времени к виду B_u-гамильтонова уравнения (см. [11]).

Предположим, что в уравнении (1.13) $P_{2u} \equiv 0, P_{3u} \equiv 0, P_{1u} \equiv P_u$, то есть

$$N(u) \equiv P_uu_t + Q(u) = 0. \tag{4.43}$$

В данном случае условия B_u-потенциальности (1.43)-(1.49) принимают вид [11]

$$B_u^*P_u + P_u^*B_u = 0, \tag{4.44}$$

$$B_u^* Q_u' h + [B_u'(\cdot; h)]^* Q(u) + \frac{\partial}{\partial t}(P_u^* B_u) h - Q_u'^* B_u h - [B_u'(h; \cdot)]^* Q(u) = 0, \tag{4.45}$$

$$B_u^* P_u'(u_t; h) + [B_u'(\cdot; h)]^* P_u u_t + P_u^{*\prime}(B_u h; u_t) + P_u^* B_u'(h; u_t) -$$
$$- [P_u'(u_t; \cdot)]^* B_u h - [B_u'(h; \cdot)]^* P_u u_t = 0, \tag{4.46}$$

а операторы P_u и Q имеют следующую структуру:

$$P_u u_t = (B_u^{-1})^* \mathcal{R}_u'^* B_u u_t + (B_u^{-1})^* [B_u'(u_t; \cdot)]^* \mathcal{R}(u) -$$
$$- (B_u^{-1})^* B_u^{*\prime}(\mathcal{R}(u); u_t) - \mathcal{R}_u' u_t, \tag{4.47}$$

$$Q(u) = (B_u{-}grad)_{\Phi_1} \mathcal{B}[u] - (B_u^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} B_u^* \mathcal{R}(u). \tag{4.48}$$

Теорема 4.9. [11] *Линейный обратимый оператор P_u удовлетворяет условиям (4.44), (4.46) тогда и только тогда, когда оператор $G_u \equiv P_u^{-1}$ является B_u-гамильтоновым.*

Доказательство. Предположим, что оператор P_u удовлетворяет (4.44), (4.46). Покажем, что в этом случае выполняются условия (4.4), (4.5). Учитывая (4.44), получаем

$$\langle B_u G_u h, g \rangle = \langle B_u G_u h, P_u G_u g \rangle =$$
$$= \langle G_u h, (B_u^* P_u) G_u g \rangle = - \langle G_u h, P_u^* B_u G_u g \rangle =$$
$$= - \langle P_u G_u h, B_u G_u g \rangle = - \langle h, B_u G_u g \rangle . \tag{4.49}$$

Далее, имеем $P_u G_u h = h$, поэтому $P_u'(G_u h; g) + P_u G_u'(h; g) = 0$, то есть

$$G_u'(h; g) = -G_u P_u'(G_u h; g),$$

или

$$B_u G_u'(g; G_u h) = -B_u G_u P_u'(G_u g; G_u h).$$

Следовательно,

$$\langle v, B_u G_u'(g; G_u h) + B_u'(G_u h; G_u g) \rangle +$$

$$+\langle g, B_u G_u'(h; G_u v) + B_u'(G_u v; G_u h)\rangle +$$
$$+\langle h, B_u G_u'(v; G_u g) + B_u'(G_u g; G_u v)\rangle =$$
$$= -\langle v, B_u G_u P_u'(G_u g; G_u h)\rangle + \langle v, B_u'(G_u h; G_u g)\rangle -$$
$$-\langle g, B_u G_u P_u'(G_u h; G_u v)\rangle + \langle g, B_u'(G_u v; G_u h)\rangle -$$
$$-\langle h, B_u G_u P_u'(G_u v; G_u g)\rangle + \langle h, B_u'(G_u g; G_u v)\rangle =$$
$$= \langle B_u G_u v, P_u'(G_u g; G_u h)\rangle + \langle P_u G_u v, B_u'(G_u h; G_u g)\rangle +$$
$$+\langle B_u G_u g, P_u'(G_u h; G_u v)\rangle + \langle P_u G_u g, B_u'(G_u v; G_u h)\rangle +$$
$$+\langle B_u G_u h, P_u'(G_u v; G_u g)\rangle + \langle P_u G_u h, B_u'(G_u g; G_u v)\rangle =$$
$$= \left\langle B_u\tilde{v}, P_u'(\tilde{g}; \tilde{h})\right\rangle + \left\langle P_u\tilde{v}, B_u'(\tilde{h}; \tilde{g})\right\rangle + \left\langle B_u\tilde{g}, P_u'(\tilde{h}; \tilde{v})\right\rangle +$$
$$+\left\langle P_u\tilde{g}, B_u'(\tilde{v}; \tilde{h})\right\rangle + \left\langle B_u\tilde{h}, P_u'(\tilde{v}; \tilde{g})\right\rangle + \left\langle P_u\tilde{h}, B_u'(\tilde{g}; \tilde{v})\right\rangle =$$
$$= \Big\langle \tilde{v}, B_u^* P_u'(\tilde{g}; \tilde{h}) + P_u^* B_u'(\tilde{h}; \tilde{g}) + [P_u'(\tilde{h}; \cdot)]^* B_u\tilde{g} + [B_u'(\cdot; \tilde{h})]^* P_u\tilde{g} +$$
$$+ [P_u'(\cdot; \tilde{g})]^* B_u\tilde{h} + [B_u'(\tilde{g}; \cdot)]^* P_u\tilde{h}\Big\rangle \tag{4.50}$$

(здесь учтено условие (4.49) и введены обозначения $\tilde{g} = G_u g$, $\tilde{v} = G_u v$, $\tilde{h} = G_u h$).

Отметим, что

$$P_u^* B_u h = -B_u^* P_u h,$$

поэтому

$$P_u^{*\prime}(B_u h; g) + P_u^* B_u'(h; g) = -B_u^{*\prime}(P_u h; g) - B_u^* P_u'(h; g).$$

Следовательно, условие (4.46) примет вид

$$B_u^* P_u'(u_t; h) + [B_u'(\cdot; h)]^* P_u u_t - B_u^{*\prime}(P_u h; u_t) - B_u^* P_u'(h; u_t) -$$
$$-[P_u'(u_t; \cdot)]^* B_u h - [B_u'(h; \cdot)]^* P_u u_t = 0. \tag{4.51}$$

Из равенства

$$[P_u'(g; \cdot)]^* B_u h + [B_u'(h; \cdot)]^* P_u g - P_u^* [B_u^{*\prime}(\cdot; g)]^* h - [P_u'(\cdot; g)]^* B_u h -$$

$$-B_u^* P_u'(g;h) - [B_u'(\cdot;h)]^* P_u g = 0$$

выразим $[P_u'(\cdot;g)]^* B_u h$ и подставим в (4.50), получим

$$\langle v, B_u G_u'(g;G_u h) + B_u'(G_u h;G_u g)\rangle +$$

$$+\langle g, B_u G_u'(h;G_u v) + B_u'(G_u v;G_u h)\rangle +$$

$$+\langle h, B_u G_u'(v;G_u g) + B_u'(G_u g;G_u v)\rangle =$$

$$= \left\langle \tilde{v}, B_u^* P_u'(\tilde{g};\tilde{h})\right\rangle + \left\langle \tilde{v}, P_u^* B_u'(\tilde{h};\tilde{g})\right\rangle + \left\langle \tilde{v}, [P_u'(\tilde{h};\cdot)]^* B_u \tilde{g}\right\rangle +$$

$$+\left\langle \tilde{v}, [B_u'(\cdot;\tilde{h})]^* P_u \tilde{g}\right\rangle + \left\langle \tilde{v}, [P_u'(\tilde{g};\cdot)]^* B_u \tilde{h}\right\rangle +$$

$$+\left\langle \tilde{v}, [B_u'(\tilde{h};\cdot)]^* P_u \tilde{g}\right\rangle - \left\langle \tilde{v}, P_u^* [B_u^{*\prime}(\cdot;\tilde{g})]^* \tilde{h}\right\rangle -$$

$$-\left\langle \tilde{v}, B_u^* P_u'(\tilde{g};\tilde{h})\right\rangle - \left\langle \tilde{v}, [B_u'(\cdot;\tilde{h})]^* P_u \tilde{g}\right\rangle +$$

$$+\left\langle \tilde{v}, [B_u'(\tilde{g};\cdot)]^* P_u \tilde{h}\right\rangle. \tag{4.52}$$

Учитывая условие (4.51), равенство (4.52) запишем в следующем виде:

$$\langle v, B_u G_u'(g;G_u h) + B_u'(G_u h;G_u g)\rangle +$$

$$+\langle g, B_u G_u'(h;G_u v) + B_u'(G_u v;G_u h)\rangle +$$

$$+\langle h, B_u G_u'(v;G_u g) + B_u'(G_u g;G_u v)\rangle =$$

$$= \left\langle \tilde{v}, B_u^* P_u'(\tilde{g};\tilde{h})\right\rangle + \left\langle \tilde{v}, P_u^* B_u'(\tilde{h};\tilde{g})\right\rangle +$$

$$+\left\langle \tilde{v}, [P_u'(\tilde{h};\cdot)]^* B_u \tilde{g}\right\rangle + \left\langle \tilde{v}, [B_u'(\cdot;\tilde{h})]^* P_u \tilde{g}\right\rangle -$$

$$-\left\langle \tilde{v}, B_u^{*\prime}(P_u \tilde{h};\tilde{g})\right\rangle - \left\langle \tilde{v}, B_u^* P_u'(\tilde{h};\tilde{g})\right\rangle -$$

$$-\left\langle \tilde{v}, P_u^* [B_u^{*\prime}(\cdot;\tilde{g})]^* \tilde{h}\right\rangle + \left\langle \tilde{v}, [B_u'(\tilde{g};\cdot)]^* P_u \tilde{h}\right\rangle. \tag{4.53}$$

Отметим, что $\langle P_u v, B_u h\rangle = \langle B_u^* P_u v, h\rangle$, поэтому

$$\langle P_u'(v;g), B_u h\rangle + \langle P_u v, B_u'(h;g)\rangle =$$

$$= \langle B_u^{*\prime}(P_u v; g), h\rangle + \langle B_u^* P_u'(v; g), h)\rangle\,,$$

то есть

$$\langle P_u v, B_u'(h; g)\rangle - \langle B_u^{*\prime}(P_u v; g), h\rangle = 0.$$

Так как $\langle P_u^* B_u h, g\rangle = -\langle B_u^* P_u h, g\rangle$, то

$$\langle B_u h, P_u g\rangle = -\langle P_u h, B_u g\rangle\,,$$

поэтому

$$\langle P_u'(h; v), B_u g\rangle + \langle P_u h, B_u'(g; v)\rangle =$$
$$= -\langle B_u'(h; v), P_u g\rangle - \langle B_u h, P_u'(g; v)\rangle\,. \tag{4.54}$$

Принимая во внимание два последних равенства, из (4.53) с учетом (4.51) окончательно получаем

$$\langle v, B_u G_u'(g; G_u h) + B_u'(G_u h; G_u g)\rangle +$$
$$+\langle g, B_u G_u'(h; G_u v) + B_u'(G_u v; G_u h)\rangle +$$
$$+\langle h, B_u G_u'(v; G_u g) + B_u'(G_u g; G_u v)\rangle =$$
$$= \Big\langle \tilde{v}, B_u^* P_u'(\tilde{g}; \tilde{h}) + [B_u'(\cdot; \tilde{h})]^* P_u \tilde{g} - B_u^{*\prime}(P_u \tilde{h}; \tilde{g}) - B_u^* P_u'(\tilde{h}; \tilde{g}) -$$
$$- [P_u'(\tilde{g}; \cdot)]^* B_u \tilde{h} - [B_u'(\tilde{h}; \cdot)]^* P_u \tilde{g} \Big\rangle = 0.$$

Докажем обратное утверждение. Предположим, что выполнены условия (4.4), (4.5). Покажем, что оператор P_u удовлетворяет (4.44), (4.46).

Имеем

$$\langle P_u^* B_u h, g\rangle = \langle B_u h, P_u g\rangle = \langle B_u G_u P_u h, P_u g\rangle\,,$$

откуда в силу условия (4.4) получаем

$$\langle P_u^* B_u h, g\rangle = -\langle P_u h, B_u G_u P_u g\rangle = -\langle P_u h, B_u g\rangle = -\langle B_u^* P_u h, g\rangle\,,$$

или

$$\langle (P_u^* B_u + B_u^* P_u) h, g\rangle = 0.$$

Учитывая невырожденность заданной билинейной формы, заключаем, что выполнено условие (4.44).

Пусть выполнено условие (4.5), то есть

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle v, B_u G_u'(g; G_u h)\rangle + \langle v, B_u'(G_u h; G_u g)\rangle + \\
&+ \langle g, B_u G_u'(h; G_u v)\rangle + \langle g, B_u'(G_u v; G_u h)\rangle + \\
&+ \langle h, B_u G_u'(v; G_u g)\rangle + \langle h, B_u'(G_u g; G_u v)\rangle = \\
&= \left\langle B_u\tilde v, P_u'(\tilde g; \tilde h)\right\rangle + \left\langle P_u\tilde v, B_u'(\tilde h; \tilde g)\right\rangle + \left\langle P_u'(\tilde h; \tilde v), B_u\tilde g\right\rangle + \\
&+ \left\langle B_u'(\tilde v; \tilde h), P_u\tilde g\right\rangle + \left\langle P_u'(\tilde v; \tilde g), B_u\tilde h\right\rangle + \left\langle B_u'(\tilde g; \tilde v), P_u\tilde h\right\rangle = \\
&= \left\langle B_u\tilde v, P_u'(\tilde g; \tilde h)\right\rangle + \left\langle P_u\tilde v, B_u'(\tilde h; \tilde g)\right\rangle - \left\langle B_u'(\tilde h; \tilde v), P_u\tilde g\right\rangle - \\
&- \left\langle B_u\tilde h, P_u'(\tilde g; \tilde v)\right\rangle + \left\langle B_u'(\tilde v; \tilde h), P_u\tilde g\right\rangle + \left\langle P_u'(\tilde v; \tilde g), B_u\tilde h\right\rangle
\end{aligned}
$$

(здесь использовались равенства (4.50) и (4.54)).
Отметим, что

$$\langle P_u^* B_u h, v\rangle = \langle B_u h, P_u v\rangle\,,$$

поэтому

$$
\begin{aligned}
&\langle P_u^{*\prime}(B_u h; g), v\rangle + \langle P_u^* B_u'(h; g), v\rangle = \\
&= \langle B_u'(h; g), P_u v\rangle + \langle B_u h, P_u'(v; g)\rangle\,,
\end{aligned}
$$

то есть

$$\langle P_u^{*\prime}(B_u h; g), v\rangle = \langle B_u h, P_u'(v; g)\rangle\,.$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle v, B_u G_u'(g; G_u h)\rangle + \langle v, B_u'(G_u h; G_u g)\rangle + \\
&+ \langle g, B_u G_u'(h; G_u v)\rangle + \langle g, B_u'(G_u v; G_u h)\rangle + \\
&+ \langle h, B_u G_u'(v; G_u g)\rangle + \langle h, B_u'(G_u g; G_u v)\rangle = \\
&= \left\langle B_u\tilde v, P_u'(\tilde g; \tilde h)\right\rangle + \left\langle P_u\tilde v, B_u'(\tilde h; \tilde g)\right\rangle - \left\langle B_u'(\tilde h; \tilde v), P_u\tilde g\right\rangle -
\end{aligned}
$$

$$-\left\langle B_u\tilde{h}, P'_u(\tilde{g};\tilde{v})\right\rangle + \left\langle B'_u(\tilde{v};\tilde{h}), P_u\tilde{g}\right\rangle + \left\langle P^{*\prime}_u(B_u\tilde{h};\tilde{g}), \tilde{v}\right\rangle =$$

$$= \Big\langle \tilde{v}, B^*_u P'_u(\tilde{g};\tilde{h}) + P^*_u B'_u(\tilde{h};\tilde{g}) - [B'_u(\tilde{h};\cdot)]^* P_u\tilde{g} - [P'_u(\tilde{g};\cdot)]^* B_u\tilde{h} +$$

$$+ [B'_u(\cdot;\tilde{h})]^* P_u\tilde{g} + P^{*\prime}_u(B_u\tilde{h};\tilde{g})\Big\rangle .$$

Учитывая невырожденность заданной билинейной формы, заключаем, что имеет место (4.46). □

На основе теоремы 4.9 (с учетом условий (4.44) - (4.48)) заключаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 4.10. [11] *Пусть $D^*_t = -D_t$ на $D(N'_u, B_u)$, P_u - линейный обратимый оператор, $B^*_u P_u$ не зависит явно от t. Уравнение (4.43) является B_u-гамильтоновым уравнением тогда и только тогда, когда $\forall u \in D(N), \forall h \in D(N'_u, B_u), \forall t \in [t_0, t_1]$ выполняются следующие условия на $D(N'_u, B_u)$:*

$$P^*_u B_u + B^*_u P_u = 0, \tag{4.55}$$

$$[B'_u(\cdot;h)]^* Q(u) - [B'_u(h;\cdot)]^* Q(u) + B^*_u Q'_u h - Q'^*_u B_u h = 0, \tag{4.56}$$

$$\begin{gathered} P^{*\prime}_u(B_u h; u_t) + B^*_u P'_u(u_t;h) - [P'_u(u_t;\cdot)]^* B_u h + \\ + P^*_u B'_u(h;u_t) + [B'_u(\cdot;h)]^* P_u u_t - [B'_u(h;\cdot)]^* P_u u_t = 0. \end{gathered} \tag{4.57}$$

В данном случае

$$G_u \equiv P^{-1}_u, \qquad H[u] = -\int\limits_0^1 \left\langle Q(\tilde{u}(\lambda)), B_{\tilde{u}(\lambda)}(u - u_0)\right\rangle d\lambda + H[u_0], \tag{4.58}$$

где u_0 - фиксированный элемент из $D(N)$.

Пример 4.5. [11]

Рассмотрим уравнение

$$N(u) \equiv 2u_{tx} + u_x u_t + u^2 = 0, \qquad (4.59)$$

$$(x,t) \in Q_T = (a,b) \times (0,T).$$

Зададим $D(N)$ следующим образом:

$$D(N) =$$

$$= \{u \in U = C^2(\overline{Q}_T) : u|_{t=0} = \varphi_1(x),\ u|_{t=T} = \varphi_2(x)\ (x \in (a,b)),$$

$$u|_{x=a} = \psi_1(t),\ u|_{x=b} = \psi_2(t),$$

$$\int_a^b e^{u(y,t)/2} u(y,t)dy = \psi_3(t)\ (t \in (0,T))\}, \qquad (4.60)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ - заданные функции.

В данном случае $P_u = 2D_x + u_x,\ Q(u) = u^2$.

Пусть $B_u = e^u I$, где I - тождественный оператор. Покажем, что оператор N уравнения (4.59) является B_u-потенциальным на $D(N)$ вида (4.60) относительно классической билинейной формы

$$\Phi(v,g) = \int_0^T \int_a^b v(x,t)g(x,t)dxdt.$$

Имеем

$B_u^* = e^u I, \quad P_u^* = u_x - 2D_x, \quad Q'_u = 2u, \quad [B'_u(\cdot; g)]^* = e^u g,$
$[B'_u(h;\cdot)]^* = e^u h, \quad P_u^{*\prime}(g;h) = h_x g, \quad [P'_u(g;\cdot)]^* = -g_x - gD_x.$

Далее,

$(4.44) \implies 2e^u h_x + e^u u_x h + u_x h e^u - 2e^u u_x h - 2e^u h_x = 0,$

$(4.45) \implies e^u 2uh + e^u hu^2 - 2ue^u h - e^u hu^2 = 0,$

$(4.46) \implies e^u h_x u_t + e^u h(2u_{tx} + u_x u_t) + e^u h u_{tx} + u_x e^u h u_t - 2D_x(e^u h u_t) - (-u_{tx} e^u h - u_t D_x(e^u h)) - e^u h(2u_{tx} + u_x u_t) = e^u h_x u_t + 2e^u h u_{tx} + e^u h u_x u_t + e^u h u_{tx} + e^u h u_x u_t - 2e^u h u_x u_t - 2e^u h_x u_t - 2e^u h u_{tx} + e^u h u_{tx} + e^u h u_x u_t + e^u h_x u_t - 2e^u h u_{tx} - e^u h u_x u_t = 0.$

Отметим, что оператор P_u^{-1} имеет вид

$$P_u^{-1} v = \frac{1}{2} e^{-u/2} D_x^{-1} \left(e^{u/2} v \right),$$

где $D_x^{-1} h(x,t) = \int\limits_a^x h(y,t) dy$.

Покажем, что оператор $G_u \equiv P_u^{-1}$ является B_u-гамильтоновым относительно билинейной формы

$$\Phi_1(v,g) = \int\limits_a^b v(x,t) g(x,t) dx,$$

то есть проверим условия (4.4), (4.5).

Имеем

$$\Phi_1(B_u G_u h, g) = \Phi_1 \left(\frac{1}{2} e^{u/2} D_x^{-1} \left(e^{u/2} h \right), g \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \Phi_1 \left(D_x^{-1} \left(e^{u/2} h \right), e^{u/2} g \right) = -\frac{1}{2} \Phi_1 \left(e^{u/2} h, D_x^{-1} \left(e^{u/2} g \right) \right) =$$

$$= -\Phi_1 \left(h, \frac{1}{2} e^{u/2} D_x^{-1} \left(e^{u/2} g \right) \right) = -\Phi_1(h, B_u G_u g).$$

Учитывая, что

$$B_u'(G_u h; G_u g) = e^u \frac{1}{2} e^{-u/2} D_x^{-1} \left(e^{u/2} h \right) \frac{1}{2} e^{-u/2} D_x^{-1} \left(e^{u/2} g \right) =$$

$$= \frac{1}{4} D_x^{-1} \left(e^{u/2} h \right) D_x^{-1} \left(e^{u/2} g \right),$$

$$G_u'(h; g) = \frac{1}{2} e^{-u/2} \left(-\frac{g}{2} \right) D_x^{-1} \left(e^{u/2} h \right) + \frac{1}{2} e^{-u/2} D_x^{-1} \left(e^{u/2} h \frac{g}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} e^{-u/2} \left[D_x^{-1} \left(e^{u/2} g h \right) - g D_x^{-1} \left(e^{u/2} h \right) \right],$$

получаем

$$\Phi_1(v, B_u G_u'(g; G_u h)) + \Phi_1(v, B_u'(G_u h; G_u g)) +$$

$$+\Phi_1(g, B_u G_u'(h; G_u v)) + \Phi_1(g, B_u'(G_u v; G_u h)) +$$
$$+\Phi_1(h, B_u G_u'(v; G_u g)) + \Phi_1(h, B_u'(G_u g; G_u v)) =$$
$$= \Phi_1\left(v, \frac{1}{4}e^{u/2} D_x^{-1}\left(\frac{g}{2} D_x^{-1}\left(e^{u/2}h\right)\right)\right) -$$
$$-\Phi_1\left(v, \frac{1}{8} D_x^{-1}\left(e^{u/2}h\right) D_x^{-1}\left(e^{u/2}g\right)\right) +$$
$$+\Phi_1\left(v, \frac{1}{4} D_x^{-1}\left(e^{u/2}h\right) D_x^{-1}\left(e^{u/2}g\right)\right) +$$
$$+\Phi_1\left(g, \frac{1}{4} D_x^{-1}\left(e^{u/2}v\right) D_x^{-1}\left(e^{u/2}h\right)\right) +$$
$$+\Phi_1\left(g, \frac{1}{4}e^{u/2} D_x^{-1}\left(\frac{h}{2} D_x^{-1}\left(e^{u/2}v\right)\right)\right) -$$
$$-\Phi_1\left(v, \frac{1}{8} D_x^{-1}\left(e^{u/2}v\right) D_x^{-1}\left(e^{u/2}h\right)\right) +$$
$$+\Phi_1\left(h, \frac{1}{4}e^{u/2} D_x^{-1}\left(\frac{v}{2} D_x^{-1}\left(e^{u/2}g\right)\right)\right) -$$
$$-\Phi_1\left(v, \frac{1}{8} D_x^{-1}\left(e^{u/2}g\right) D_x^{-1}\left(e^{u/2}v\right)\right) +$$
$$+\Phi_1\left(h, \frac{1}{4} D_x^{-1}\left(e^{u/2}g\right) D_x^{-1}\left(e^{u/2}v\right)\right) =$$
$$= \Phi_1\left(\frac{1}{8}e^{u/2}v, D_x^{-1}\left(g D_x^{-1}\left(e^{u/2}h\right)\right)\right) -$$
$$-\frac{1}{8}\Phi_1\left(v, D_x^{-1}\left(e^{u/2}h\right) D_x^{-1}\left(e^{u/2}g\right)\right) +$$
$$+\frac{1}{4}\Phi_1\left(v, D_x^{-1}\left(e^{u/2}h\right) D_x^{-1}\left(e^{u/2}g\right)\right) +$$
$$+\frac{1}{4}\Phi_1\left(g, D_x^{-1}\left(e^{u/2}v\right) D_x^{-1}\left(e^{u/2}h\right)\right) +$$

$$+\Phi_1\left(\frac{1}{8}e^{u/2}g, D_x^{-1}\left(hD_x^{-1}\left(e^{u/2}v\right)\right)\right)-$$
$$-\frac{1}{8}\Phi_1\left(g, D_x^{-1}\left(e^{u/2}v\right)D_x^{-1}\left(e^{u/2}h\right)\right)+$$
$$+\Phi_1\left(\frac{1}{8}e^{u/2}h, D_x^{-1}\left(vD_x^{-1}\left(e^{u/2}g\right)\right)\right)-$$
$$-\frac{1}{8}\Phi_1\left(h, D_x^{-1}\left(e^{u/2}g\right)D_x^{-1}\left(e^{u/2}v\right)\right)+$$
$$+\frac{1}{4}\Phi_1\left(h, D_x^{-1}\left(e^{u/2}g\right)D_x^{-1}\left(e^{u/2}v\right)\right)=$$
$$-\frac{1}{8}\Phi_1\left(g, D_x^{-1}\left(e^{u/2}v\right)D_x^{-1}\left(e^{u/2}h\right)\right)+$$
$$+\frac{1}{8}\Phi_1\left(v, D_x^{-1}\left(e^{u/2}h\right)D_x^{-1}\left(e^{u/2}g\right)\right)+$$
$$+\frac{1}{8}\Phi_1\left(g, D_x^{-1}\left(e^{u/2}v\right)D_x^{-1}\left(e^{u/2}h\right)\right)-$$
$$-\frac{1}{8}\Phi_1\left(h, D_x^{-1}\left(e^{u/2}g\right)D_x^{-1}\left(e^{u/2}v\right)\right)-$$
$$-\frac{1}{8}\Phi_1\left(v, D_x^{-1}\left(e^{u/2}h\right)D_x^{-1}\left(e^{u/2}g\right)\right)+$$
$$+\frac{1}{8}\Phi_1\left(h, D_x^{-1}\left(e^{u/2}g\right)D_x^{-1}\left(e^{u/2}v\right)\right)=0.$$

Таким образом, условия B_u-гамильтоновости выполнены. Осталось заметить, что гамильтониан $H[u]$ имеет вид

$$H[u]=-\int\limits_a^b e^u(u^2-2u+2)dx.$$

Пример 4.6.

Рассмотрим систему эволюционных уравнений вида [11, 92]

$$\begin{cases} N^1(u) \equiv \frac{\partial u^1}{\partial t} - a_i^1 \frac{\partial^3 u^i}{\partial x^1 (\partial x^2)^2} - b_i^1 \frac{\partial^4 u^i}{\partial x^1 (\partial x^2)^2 \partial x^3} - c_i^1 \frac{\partial^5 u^i}{\partial x^1 (\partial x^2)^2 (\partial x^3)^2} = 0, \\ N^2(u) \equiv \frac{\partial u^2}{\partial t} - a_i^2 \frac{\partial^3 u^i}{\partial x^1 (\partial x^2)^2} - b_i^2 \frac{\partial^4 u^i}{\partial x^1 (\partial x^2)^2 \partial x^3} - c_i^2 \frac{\partial^5 u^i}{\partial x^1 (\partial x^2)^2 (\partial x^3)^2} = 0, \end{cases} \tag{4.61}$$

$$(x, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T),$$

где $u(x,t) = (u^1(x,t), u^2(x,t))^T$ - неизвестная вектор-функция, a_i^j, b_i^j, c_i^j $(i, j = 1, 2)$ - такие постоянные, что $a_1^1 = a_2^2$, $b_1^1 = b_2^2$, $c_1^1 = c_2^2$, $\Omega = (0, l^1) \times (0, l^2) \times (0, l^3)$, l^i $(i = \overline{1,3})$ - положительные постоянные.

Зададим область определения оператора $N = (N^1, N^2)^T$ в виде

$$D(N) = \big\{ u \in U = (U^1, U^2)^T : U^i = C^{5,1}(\overline{Q_T}), u^i|_{t=0} = \varphi_1^i(x), \tag{4.62}$$

$$u^i|_{t=T} = \varphi_2^i(x), \ x \in \Omega, \ u_\alpha^i|_{\Gamma_T} = \psi^i(x,t),$$

$$\int\limits_0^{l^1} u^i(y, x^2, x^3, t) dy = \phi(x^2, x^3, t) \ (i = 1, 2; \ |\alpha| = \overline{0,3}),$$

где $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0, T)$, φ_1^i, φ_2^i, ψ^i $(i = 1, 2)$, ϕ - заданные функции.

Введем классическую билинейную форму

$$\Phi(v, g) = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 v^i(x,t) g^i(x,t) dx dt. \tag{4.63}$$

Пусть

$$B = \begin{pmatrix} 0 & D_{x^1}^{-1} \\ D_{x^1}^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

где $Ah^i(x,t) = h^i(x^1, x^2, l^3 - x^3, t)$.

Покажем, что система уравнений (4.61) представима в виде B-гамильтонова уравнения, то есть проверим условия (4.55) - (4.57).

В данном случае
$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$
$$Q(u) = \begin{pmatrix} -a_i^1 \frac{\partial^3 u^i}{\partial x^1 (\partial x^2)^2} - b_i^1 \frac{\partial^4 u^i}{\partial x^1 (\partial x^2)^2 \partial x^3} - c_i^1 \frac{\partial^5 u^i}{\partial x^1 (\partial x^2)^2 (\partial x^3)^2}, \\ -a_i^2 \frac{\partial^3 u^i}{\partial x^1 (\partial x^2)^2} - b_i^2 \frac{\partial^4 u^i}{\partial x^1 (\partial x^2)^2 \partial x^3} - c_i^2 \frac{\partial^5 u^i}{\partial x^1 (\partial x^2)^2 (\partial x^3)^2}, \end{pmatrix},$$
где I - тождественный оператор.

Далее,
$$P^* = P, \quad B^* = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -D_{x^1}^{-1} \\ -D_{x^1}^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad A^* = A.$$

Отметим, что
$$P^* B h = \begin{pmatrix} D_{x^1}^{-1} A h^2 \\ D_{x^1}^{-1} A h^1 \end{pmatrix}, \qquad B^* P h = \begin{pmatrix} -D_{x^1}^{-1} A h^2 \\ -D_{x^1}^{-1} A h^1 \end{pmatrix},$$
поэтому заключаем, что условие (4.55) выполнено.

Условие (4.56) в данном случае приводится к виду $B^* Q'_u h - Q'^*_u B h = 0$. Проверим его.

Имеем
$$Q'_u h = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \end{pmatrix},$$
где
$$q_{11} = -a_1^1 \frac{\partial^3}{\partial x^1 (\partial x^2)^2} - b_1^1 \frac{\partial^4}{\partial x^1 (\partial x^2)^2 \partial x^3} - c_1^1 \frac{\partial^5}{\partial x^1 (\partial x^2)^2 (\partial x^3)^2},$$
$$q_{12} = -a_2^1 \frac{\partial^3}{\partial x^1 (\partial x^2)^2} - b_2^1 \frac{\partial^4}{\partial x^1 (\partial x^2)^2 \partial x^3} - c_2^1 \frac{\partial^5}{\partial x^1 (\partial x^2)^2 (\partial x^3)^2},$$
$$q_{21} = -a_1^2 \frac{\partial^3}{\partial x^1 (\partial x^2)^2} - b_1^2 \frac{\partial^4}{\partial x^1 (\partial x^2)^2 \partial x^3} - c_1^2 \frac{\partial^5}{\partial x^1 (\partial x^2)^2 (\partial x^3)^2},$$
$$q_{22} = -a_2^2 \frac{\partial^3}{\partial x^1 (\partial x^2)^2} - b_2^2 \frac{\partial^4}{\partial x^1 (\partial x^2)^2 \partial x^3} - c_2^2 \frac{\partial^5}{\partial x^1 (\partial x^2)^2 (\partial x^3)^2}.$$

Тогда

$$Q_u'^* h = \begin{pmatrix} \tilde q_{11} & \tilde q_{12} \\ \tilde q_{21} & \tilde q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde q_{11} = a_1^1 \frac{\partial^3}{\partial x^1 (\partial x^2)^2} - b_1^1 \frac{\partial^4}{\partial x^1 (\partial x^2)^2 \partial x^3} + c_1^1 \frac{\partial^5}{\partial x^1 (\partial x^2)^2 (\partial x^3)^2},$$

$$\tilde q_{12} = a_1^2 \frac{\partial^3}{\partial x^1 (\partial x^2)^2} - b_1^2 \frac{\partial^4}{\partial x^1 (\partial x^2)^2 \partial x^3} + c_1^2 \frac{\partial^5}{\partial x^1 (\partial x^2)^2 (\partial x^3)^2},$$

$$\tilde q_{21} = a_2^1 \frac{\partial^3}{\partial x^1 (\partial x^2)^2} - b_2^1 \frac{\partial^4}{\partial x^1 (\partial x^2)^2 \partial x^3} + c_2^1 \frac{\partial^5}{\partial x^1 (\partial x^2)^2 (\partial x^3)^2},$$

$$\tilde q_{22} = a_2^2 \frac{\partial^3}{\partial x^1 (\partial x^2)^2} - b_2^2 \frac{\partial^4}{\partial x^1 (\partial x^2)^2 \partial x^3} + c_2^2 \frac{\partial^5}{\partial x^1 (\partial x^2)^2 (\partial x^3)^2}.$$

Далее,

$$B^* Q_u' h = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -D_{x^1}^{-1} \\ -D_{x^1}^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} h^1 + q_{12} h^2 \\ q_{21} h^1 + q_{22} h^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix},$$

где

$$d_1 = a_1^2 A \frac{\partial^2 h^1}{(\partial x^2)^2} + b_1^2 A \frac{\partial^3 h^1}{(\partial x^2)^2 \partial x^3} + c_1^2 A \frac{\partial^4 h^1}{(\partial x^2)^2 (\partial x^3)^2} +$$

$$+ a_2^2 A \frac{\partial^2 h^2}{(\partial x^2)^2} + b_2^2 A \frac{\partial^3 h^2}{(\partial x^2)^2 \partial x^3} + c_2^2 A \frac{\partial^4 h^2}{(\partial x^2)^2 (\partial x^3)^2},$$

$$d_2 = a_1^1 A \frac{\partial^2 h^1}{(\partial x^2)^2} + b_1^1 A \frac{\partial^3 h^1}{(\partial x^2)^2 \partial x^3} + c_1^1 A \frac{\partial^4 h^1}{(\partial x^2)^2 (\partial x^3)^2} +$$

$$+ a_2^1 A \frac{\partial^2 h^2}{(\partial x^2)^2} + b_2^1 A \frac{\partial^3 h^2}{(\partial x^2)^2 \partial x^3} + c_2^1 A \frac{\partial^4 h^2}{(\partial x^2)^2 (\partial x^3)^2},$$

$$Q_u'^{*}Bh = \begin{pmatrix} \tilde{q}_{11} & \tilde{q}_{12} \\ \tilde{q}_{21} & \tilde{q}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & D_{x^1}^{-1} \\ D_{x^1}^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} d_3 \\ d_4 \end{pmatrix},$$

где

$$d_3 = a_1^1 A \frac{\partial^2 h^2}{(\partial x^2)^2} + b_1^1 A \frac{\partial^3 h^2}{(\partial x^2)^2 \partial x^3} + c_1^1 A \frac{\partial^4 h^2}{(\partial x^2)^2 (\partial x^3)^2} +$$

$$+ a_1^2 A \frac{\partial^2 h^1}{(\partial x^2)^2} + b_1^2 A \frac{\partial^3 h^1}{(\partial x^2)^2 \partial x^3} + c_1^2 A \frac{\partial^4 h^1}{(\partial x^2)^2 (\partial x^3)^2},$$

$$d_4 = a_2^2 A \frac{\partial^2 h^1}{(\partial x^2)^2} + b_2^2 A \frac{\partial^3 h^1}{(\partial x^2)^2 \partial x^3} + c_2^2 A \frac{\partial^4 h^1}{(\partial x^2)^2 (\partial x^3)^2} +$$

$$+ a_2^1 A \frac{\partial^2 h^2}{(\partial x^2)^2} + b_2^1 A \frac{\partial^3 h^2}{(\partial x^2)^2 \partial x^3} + c_2^1 A \frac{\partial^4 h^2}{(\partial x^2)^2 (\partial x^3)^2}.$$

В силу указанных выше свойств коэффициентов a_j^i, b_j^i, c_j^i заключаем, что условие (4.56) выполнено.

Операторы P и B не зависят от u, поэтому условие (4.57) также выполняется.

Из (4.58) следует, что

$$G = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$H[u] = -\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \left[\left(a_i^2 u^i + b_i^2 \frac{\partial u^i}{\partial x^3} + c_i^2 \frac{\partial^2 u^i}{(\partial x^3)^2} \right) D_{x^2}^2 A u^1 + \right.$$

$$\left. + \left(a_i^1 u^i + b_i^1 \frac{\partial u^i}{\partial x^3} + c_i^1 \frac{\partial^2 u^i}{(\partial x^3)^2} \right) D_{x^2}^2 A u^2 \right] dx.$$

Отметим, что найденный гамильтониан не принадлежит классу функционалов Эйлера-Лагранжа.

4.4 О прямом и косвенном представлении операторного уравнения со второй производной по времени в форме Гамильтона-допустимого уравнения

В настоящем параграфе преобразование Лежандра [27], известное в механике систем с конечным числом степеней свободы, распространено на случай систем с бесконечным числом степеней свободы для приведения (прямого и косвенного) их уравнений движения к виду Гамильтона-допустимых уравнений (в том числе уравнений Гамильтона).

Предположим, что оператор N уравнения (1.13) является квази-B_u-потенциальным на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы (1.7), причем $\Lambda_{2u} \equiv 0$.

Тогда из (1.119) - (1.122) получаем, что уравнение (1.13) имеет следующую структуру:

$$
\begin{gathered}
N(u) \equiv -(B_u^{-1})^*(u\tilde{\mathcal{R}}_{3u}^* B_u u_{tt}) - \tilde{\mathcal{R}}_{3u}(uu_{tt}) - (B_u^{-1})^* \mathcal{R}_{2u}^* B_u u_{tt} - \mathcal{R}_{2u} u_{tt} - \\
-(B_u^{-1})^* \left(u \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\mathcal{R}}_{3u}^* B_u) u_t \right) - (B_u^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} (B_u^* \tilde{\mathcal{R}}_{3u})(uu_t) - \\
-(B_u^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{R}_{2u}^* B_u) u_t + (B_u^{-1})^* \tilde{\mathcal{R}}_{1u}'^* B_u u_t + (B_u^{-1})^* [B_u'(u_t; \cdot)]^* \tilde{\mathcal{R}}_1(u) - \\
-(B_u^{-1})^* B_u^{*\prime}(\tilde{\mathcal{R}}_1(u); u_t) - \tilde{\mathcal{R}}_{1u}' u_t - (B_u^{-1})^* \left(\frac{\partial}{\partial t} B_u^{*\prime}(\mathcal{R}_{2u} u; \cdot) \right)^* u_t - \\
-(B_u^{-1})^* \left(\frac{\partial}{\partial t} B_u^* \mathcal{R}_{2u}'(u; \cdot) \right)^* u_t - (B_u^{-1})^* \left(\frac{\partial}{\partial t} B_u^* \mathcal{R}_{2u} \right)^* u_t + \\
+(B_u^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} B_u^{*\prime}(\mathcal{R}_{2u} u; u_t) + (B_u^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} B_u^* \mathcal{R}_{2u}'(u; u_t) + \Lambda_{1u} u_t + \\
+(B_u^{-1})^* (\tilde{\mathcal{R}}_{3u}'(u_t u; \cdot))^* B_u u_t - (B_u^{-1})^* (u \tilde{\mathcal{R}}_{3u}^{*\prime}(B_u u_t; u_t)) - \\
-(B_u^{-1})^* (u \tilde{\mathcal{R}}_{3u}^* B_u'(u_t; u_t)) - (B_u^{-1})^* B_u^{*\prime}(\tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_t u); u_t) - \tilde{\mathcal{R}}_{3u}'(u_t u; u_t) - \\
-\tilde{\mathcal{R}}_{3u} u_t^2 + (B_u^{-1})^* [B_u'(u_t; \cdot)]^* \tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_t u) + (B_u^{-1})^* [\mathcal{R}_{2u}'(u_t; \cdot)]^* B_u u_t -
\end{gathered}
$$

$$-(B_u^{-1})^*\mathcal{R}_{2u}^{*\prime}(B_u u_t;u_t)-(B_u^{-1})^*\mathcal{R}_{2u}^{*}B_u'(u_t;u_t)-\mathcal{R}_{2u}'(u_t;u_t)-$$
$$-(B_u^{-1})^*B_u^{*\prime}(\mathcal{R}_{2u}u_t;u_t)+(B_u^{-1})^*[B_u'(u_t;\cdot)]^*\mathcal{R}_{2u}u_t+\Lambda_{3u}u_t^2+\Lambda_4(u)+$$
$$+(B_u{-}grad)_{\Phi_1}\tilde{\mathcal{B}}[u]-(B_u^{-1})^*\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u)+(B_u^{-1})^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}(B_u^*\mathcal{R}_{2u})u=0, \tag{4.64}$$

а действие по Гамильтону F представимо в виде

$$F[u]=\int_{t_0}^{t_1}\Big\{\Big\langle\tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_t u),B_u u_t\Big\rangle+\langle\mathcal{R}_{2u}u_t,B_u u_t\rangle+\Big\langle\tilde{\mathcal{R}}_1(u),B_u u_t\Big\rangle-$$

$$-\left\langle\frac{\partial}{\partial t}(B_u^*\mathcal{R}_{2u})u,u_t\right\rangle+\tilde{\mathcal{B}}[u]\Big\}dt+F[u_0]\equiv\int_{t_0}^{t_1}L[u,u_t]dt+F[u_0],$$

где

$$\Phi(\tilde{\mathcal{R}}_1(u),B_u u_t)=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1\left\langle-\tilde{P}_{1\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0),B_{\tilde{u}(\lambda)}\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right\rangle d\lambda dt,$$

$$\Phi(\mathcal{R}_{2u}u_t,B_u u_t)=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1\left\langle-P_{2\tilde{u}(\lambda)}(u_t-u_{0_t}),B_{\tilde{u}(\lambda)}\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right\rangle d\lambda dt,$$

$$\Phi(\tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_t u),B_u u_t)=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1\left\langle-\tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)}\left(\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}(u-u_0)\right),B_{\tilde{u}(\lambda)}\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\right\rangle d\lambda dt,$$

$$\tilde{\mathcal{B}}[u]=\int_0^1\Big[\Big\langle\tilde{Q}(\tilde{u}(\lambda)),B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\Big\rangle+$$

$$+\lambda\left\langle\frac{\partial}{\partial t}(B_{\tilde{u}(\lambda)}^*\tilde{P}_{1\tilde{u}(\lambda)})(u-u_0),u-u_0\right\rangle-$$

$$-\lambda\left\langle\frac{\partial^2}{\partial t^2}(B^*_{\tilde u(\lambda)}P_{2\tilde u(\lambda)})(u-u_0),u-u_0\right\rangle\Bigg]\,d\lambda,$$

u_0 - фиксированный элемент из $D(N)$, $L[u,u_t]$ - обобщенный лагранжиан,

$$L[u,u_t]\equiv\left\langle\tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_tu),B_uu_t\right\rangle+\langle\mathcal{R}_{2u}u_t,B_uu_t\rangle+\left\langle\tilde{\mathcal{R}}_1(u),B_uu_t\right\rangle-$$

$$-\left\langle\frac{\partial}{\partial t}(B^*_u\mathcal{R}_{2u})u,u_t\right\rangle+\tilde{\mathcal{B}}[u].$$

Отметим, что в общем случае уравнение Лагранжа с не-B_u-потенциальной плотностью силы имеет вид

$$N(u)\equiv\tilde N(u)+\Lambda(u)=\left(B_u^{-1}\right)^*\left[\frac{\delta L}{\delta u}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta u_t}\right)\right]+\Lambda(u)=0. \tag{4.65}$$

Оно получается из равенства нулю вариации функционала

$$\delta\int\limits_{t_0}^{t_1}L[u,u_t]\,dt=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\left\langle\frac{\delta L}{\delta u},h\right\rangle+\left\langle\frac{\delta L}{\delta u_t},h_t\right\rangle\right]dt=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\left\langle\frac{\delta L}{\delta u},h\right\rangle-\left\langle\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta u_t}\right),h\right\rangle\right]dt=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left\langle\left(B_u^{-1}\right)^*\left[\frac{\delta L}{\delta u}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta u_t}\right)\right],B_uh\right\rangle dt=0.$$

Отсюда следует, что уравнение (1.13) с квази-B_u-потенциальным оператором N представимо в виде (4.65).

Далее, найдем $\frac{\delta L}{\delta u_t}$. Имеем

$$\left\langle\frac{\delta L}{\delta u_t},h\right\rangle=\left\langle\tilde{\mathcal{R}}_{3u}(hu),B_uu_t\right\rangle+\left\langle\tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_tu),B_uh\right\rangle+\langle\mathcal{R}_{2u}h,B_uu_t\rangle+$$

$$+\left\langle \mathcal{R}_{2u}u_t, B_u h\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathcal{R}}_1(u), B_u h\right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B_u^*\mathcal{R}_{2u})u, h\right\rangle =$$

$$= \Big\langle u\tilde{\mathcal{R}}_{3u}^* B_u u_t + B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_t u) + \mathcal{R}_{2u}^* B_u u_t + B_u^*\mathcal{R}_{2u}u_t +$$

$$+ B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u) - \frac{\partial}{\partial t}(B_u^*\mathcal{R}_{2u})u, h\Big\rangle .$$

Следовательно,

$$\frac{\delta L}{\delta u_t} = u\tilde{\mathcal{R}}_{3u}^* B_u u_t + B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_t u) + \mathcal{R}_{2u}^* B_u u_t +$$

$$+ B_u^*\mathcal{R}_{2u}u_t + B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u) - \frac{\partial}{\partial t}(B_u^*\mathcal{R}_{2u})u. \tag{4.66}$$

Введем плотность обобщенного импульса

$$p = \frac{\delta L}{\delta u_t} = \left(B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u(\cdot)) + u\tilde{\mathcal{R}}_{3u}^* B_u + \mathcal{R}_{2u}^* B_u + B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right) u_t +$$

$$+ B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u) - \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right) u = \mathcal{A}_u u_t + B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u) - \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right) u, \tag{4.67}$$

где обозначено

$$\mathcal{A}_u = B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u(\cdot)) + u\tilde{\mathcal{R}}_{3u}^* B_u + \mathcal{R}_{2u}^* B_u + B_u^*\mathcal{R}_{2u}.$$

Из (4.67) находим

$$u_t = \mathcal{A}_u^{-1}\left(p - B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u) + \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right) u\right) \equiv \mathcal{F}(u,p). \tag{4.68}$$

Построим гамильтониан $H[u,p]$. Имеем

$$H[u,p] = \left(\langle p, u_t\rangle - L[u,u_t]\right)\big|_{(4.68)} =$$

$$= \langle p, \mathcal{F}(u,p)\rangle - \left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{3u}\left(u\mathcal{F}(u,p)\right), B_u\mathcal{F}(u,p)\right\rangle -$$

$$- \langle \mathcal{R}_{2u}\mathcal{F}(u,p), B_u\mathcal{F}(u,p)\rangle - \left\langle \tilde{\mathcal{R}}_1(u), B_u\mathcal{F}(u,p)\right\rangle +$$

$$+\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)u, \mathcal{F}(u,p)\right\rangle - \tilde{\mathcal{B}}[u]. \qquad (4.69)$$

Найдем $\frac{\delta H}{\delta p}$.

$$\left\langle \frac{\delta H}{\delta p}, q\right\rangle = \langle q, \mathcal{F}(u,p)\rangle + \left\langle p, \mathcal{A}_u^{-1}q\right\rangle - \left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{3u}\left(u\mathcal{A}_u^{-1}q\right), B_u\mathcal{F}(u,p)\right\rangle -$$

$$-\left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{3u}\left(u\mathcal{F}(u,p)\right), B_u\mathcal{A}_u^{-1}q\right\rangle - \left\langle \mathcal{R}_{2u}\left(\mathcal{A}_u^{-1}q\right), B_u\mathcal{F}(u,p)\right\rangle -$$

$$-\left\langle \mathcal{R}_{2u}\mathcal{F}(u,p), B_u\mathcal{A}_u^{-1}q\right\rangle - \left\langle \tilde{\mathcal{R}}_1(u), B_u\mathcal{A}_u^{-1}q\right\rangle +$$

$$+\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)u, \mathcal{A}_u^{-1}q\right\rangle = \left\langle q, \mathcal{F}(u,p) + \left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* p - \right.$$

$$-\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\left(u\tilde{\mathcal{R}}_{3u}^*\left(B_u\mathcal{F}(u,p)\right)\right) - \left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_{3u}\left(u\mathcal{F}(u,p)\right) -$$

$$-\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\mathcal{R}_{2u}^*\left(B_u\mathcal{F}(u,p)\right) + \left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)u -$$

$$\left. -\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* B_u^*\mathcal{R}_{2u}\mathcal{F}(u,p) - \left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u)\right\rangle = \langle q, \mathcal{F}(u,p) +$$

$$+\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\left(p - B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u) + \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)u\right) -$$

$$-\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\left(u\tilde{\mathcal{R}}_{3u}^*\left(B_u\mathcal{F}(u,p)\right) + B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_{3u}\left(u\mathcal{F}(u,p)\right) + \right.$$

$$\left. + \mathcal{R}_{2u}^*\left(B_u\mathcal{F}(u,p)\right) + B_u^*\mathcal{R}_{2u}\mathcal{F}(u,p)\right)\rangle =$$

$$= \left\langle q, \mathcal{F}(u,p) + \left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\left(p - B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u) + \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)u\right) - \right.$$

$$\left. -\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\left(\mathcal{A}_u\mathcal{A}_u^{-1}\left(p - B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u) + \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)u\right)\right)\right\rangle =$$

$$= \langle q, \mathcal{F}(u,p)\rangle.$$

Таким образом,

$$\frac{\delta H}{\delta p} = \mathcal{A}_u^{-1}\left(p - B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u) + \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)u\right),$$

то есть

$$\frac{\delta H}{\delta p} = u_t.$$

Учитывая (4.65), уравнение (4.64) запишем в виде

$$N(u) \equiv \left(B_u^{-1}\right)^* \Big[u_t\tilde{\mathcal{R}}_{3u}^* B_u u_t + \Big[\tilde{\mathcal{R}}'_{3u}(u_t u;\cdot)\Big]^* B_u u_t +$$

$$+\left[B'_u(u_t;\cdot)\right]^* \tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_t u) + \left[\mathcal{R}'_{2u}(u_t;\cdot)\right]^* B_u u_t + \left[B'_u(u_t;\cdot)\right]^* \mathcal{R}_{2u} u_t +$$

$$+\tilde{\mathcal{R}}'^*_{1u} B_u u_t + \left[B'_u(u_t;\cdot)\right]^* \tilde{\mathcal{R}}_1(u) - \left(\frac{\partial}{\partial t}(B_u^* \mathcal{R}_{2u})\right)^* u_t -$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t} B_u^{*\prime}(\mathcal{R}_{2u} u;\cdot)\right)^* u_t - \left(\frac{\partial}{\partial t} B_u^* \mathcal{R}'_{2u}(u;\cdot)\right)^* u_t + grad_{\Phi_1}\tilde{\mathcal{B}}[u] -$$

$$-D_t \Big[u\tilde{\mathcal{R}}_{3u}^* B_u u_t + B_u^* \tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_t u) + \mathcal{R}_{2u}^* B_u u_t + B_u^* \mathcal{R}_{2u} u_t +$$

$$+B_u^* \tilde{\mathcal{R}}_1(u) - \frac{\partial}{\partial t}(B_u^* \mathcal{R}_{2u}) u\Big]\Big] + \Lambda_{1u} u_t + \Lambda_{3u} u_t^2 + \Lambda_4(u) = 0,$$

то есть

$$\frac{\delta L}{\delta u} = u_t\tilde{\mathcal{R}}_{3u}^* B_u u_t + \Big[\tilde{\mathcal{R}}'_{3u}(u_t u;\cdot)\Big]^* B_u u_t + \left[B'_u(u_t;\cdot)\right]^* \tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_t u) +$$

$$+\left[\mathcal{R}'_{2u}(u_t;\cdot)\right]^* B_u u_t + \left[B'_u(u_t;\cdot)\right]^* \mathcal{R}_{2u} u_t + \tilde{\mathcal{R}}'^*_{1u} B_u u_t + \left[B'_u(u_t;\cdot)\right]^* \tilde{\mathcal{R}}_1(u) -$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}(B_u^* \mathcal{R}_{2u})\right)^* u_t - \left(\frac{\partial}{\partial t} B_u^{*\prime}(\mathcal{R}_{2u} u;\cdot)\right)^* u_t -$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t} B_u^* \mathcal{R}'_{2u}(u;\cdot)\right)^* u_t + grad_{\Phi_1}\tilde{\mathcal{B}}[u], \qquad (4.70)$$

Принимая во внимание (4.67), отсюда получаем

$$p_t = \Big(u_t\tilde{\mathcal{R}}_{3u}^* B_u u_t + \Big[\tilde{\mathcal{R}}'_{3u}(u_t u;\cdot)\Big]^* B_u u_t + \left[B'_u(u_t;\cdot)\right]^* \tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_t u) +$$

$$+\left[\mathcal{R}'_{2u}(u_t;\cdot)\right]^* B_u u_t + \left[B'_u(u_t;\cdot)\right]^* \mathcal{R}_{2u} u_t + \tilde{\mathcal{R}}'^*_{1u} B_u u_t + \left[B'_u(u_t;\cdot)\right]^* \tilde{\mathcal{R}}_1(u) -$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}(B_u^* \mathcal{R}_{2u})\right)^* u_t - \left(\frac{\partial}{\partial t} B_u^{*\prime}(\mathcal{R}_{2u} u;\cdot)\right)^* u_t - \left(\frac{\partial}{\partial t} B_u^* \mathcal{R}'_{2u}(u;\cdot)\right)^* u_t +$$

$$+grad_{\Phi_1}\tilde{\mathcal{B}}[u] + B_u^*\left(\Lambda_{1u}u_t + \Lambda_{3u}u_t^2 + \Lambda_4(u)\right)\Big)\Big|_{(4.68)} =$$

$$= \mathcal{F}(u,p)\tilde{\mathcal{R}}_{3u}^* B_u\mathcal{F}(u,p) + \left[\tilde{\mathcal{R}}'_{3u}(u\mathcal{F}(u,p);\cdot)\right]^* B_u\mathcal{F}(u,p) +$$

$$+\left[B'_u(\mathcal{F}(u,p);\cdot)\right]^*\tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u\mathcal{F}(u,p)) + \left[\mathcal{R}'_{2u}(\mathcal{F}(u,p);\cdot)\right]^* B_u\mathcal{F}(u,p) +$$

$$+\left[B'_u(\mathcal{F}(u,p);\cdot)\right]^*\mathcal{R}_{2u}\mathcal{F}(u,p) + \tilde{\mathcal{R}}'^*_{1u}B_u\mathcal{F}(u,p) +$$

$$+\left[B'_u(\mathcal{F}(u,p);\cdot)\right]^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u) - \left(\frac{\partial}{\partial t}(B_u^*\mathcal{R}_{2u})\right)^*\mathcal{F}(u,p) -$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}(\mathcal{R}_{2u}u;\cdot)\right)^*\mathcal{F}(u,p) - \left(\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\mathcal{R}'_{2u}(u;\cdot)\right)^*\mathcal{F}(u,p) +$$

$$+grad_{\Phi_1}\tilde{\mathcal{B}}[u] + B_u^*\left(\Lambda_{1u}\mathcal{F}(u,p) + \Lambda_{3u}\left(\mathcal{F}(u,p)\right)^2 + \Lambda_4(u)\right).$$

Найдем $\frac{\delta H}{\delta u}$. Имеем

$$\left\langle\frac{\delta H}{\delta u}, h\right\rangle = \left\langle p, \left(\mathcal{A}^{-1}\right)'_u\left(p - B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u) + \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)u; h\right) +\right.$$

$$+\mathcal{A}_u^{-1}\left(-B_u^{*\prime}\left(\tilde{\mathcal{R}}_1(u); h\right) - B_u^*\tilde{\mathcal{R}}'_{1u}h + \frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}(\mathcal{R}_{2u}u; h) +\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\mathcal{R}'_{2u}(u; h) + \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)h\right)\right\rangle -$$

$$-\left\langle\tilde{\mathcal{R}}'_{3u}\left(u\mathcal{F}(u,p); h\right) + \tilde{\mathcal{R}}_{3u}\left(h\mathcal{F}(u,p)\right) +\right.$$

$$+\tilde{\mathcal{R}}_{3u}\left(u\left(\mathcal{A}^{-1}\right)'_u\left(p - B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u) + \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)u; h\right)\right) +$$

$$+\tilde{\mathcal{R}}_{3u}\left(u\mathcal{A}_u^{-1}\left(-B_u^{*\prime}\left(\tilde{\mathcal{R}}_1(u); h\right) - B_u^*\tilde{\mathcal{R}}'_{1u}h + \frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}(\mathcal{R}_{2u}u; h) +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\mathcal{R}'_{2u}(u; h) + \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)h\right), B_u\mathcal{F}(u,p)\right\rangle -$$

$$-\left\langle\tilde{\mathcal{R}}_{3u}\left(u\mathcal{F}(u,p)\right), B'_u\left(\mathcal{F}(u,p); h\right)\right\rangle -$$

$$
\begin{gathered}
-\left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{3u}\left(u\mathcal{F}(u,p)\right), B_u\left(\mathcal{A}^{-1}\right)'_u\left(p-B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u)+\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)u;h\right)+\right.\\
+B_u\mathcal{A}_u^{-1}\left(-B_u^{*\prime}\left(\tilde{\mathcal{R}}_1(u);h\right)-B_u^*\tilde{\mathcal{R}}'_{1u}h+\frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}(\mathcal{R}_{2u}u;h)+\right.\\
\left.\left.+\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\mathcal{R}'_{2u}(u;h)+\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)h\right)\right\rangle-\left\langle\mathcal{R}'_{2u}\left(\mathcal{F}(u,p);h\right)+\right.\\
+\mathcal{R}_{2u}\left(\mathcal{A}^{-1}\right)'_u\left(p-B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u)+\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)u;h\right)+\\
+\mathcal{R}_{2u}\mathcal{A}_u^{-1}\left(-B_u^{*\prime}\left(\tilde{\mathcal{R}}_1(u);h\right)-B_u^*\tilde{\mathcal{R}}'_{1u}h+\frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}(\mathcal{R}_{2u}u;h)+\right.\\
\left.\left.+\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\mathcal{R}'_{2u}(u;h)+\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)h\right), B_u\mathcal{F}(u,p)\right\rangle-\\
-\left\langle\mathcal{R}_{2u}\mathcal{F}(u,p), B'_u\left(\mathcal{F}(u,p);h\right)\right\rangle-\\
-\left\langle\mathcal{R}_{2u}\mathcal{F}(u,p), B_u\left(\mathcal{A}^{-1}\right)'_u\left(p-B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u)+\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)u;h\right)+\right.\\
+B_u\mathcal{A}_u^{-1}\left(-B_u^{*\prime}\left(\tilde{\mathcal{R}}_1(u);h\right)-B_u^*\tilde{\mathcal{R}}'_{1u}h+\frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}(\mathcal{R}_{2u}u;h)+\right.\\
\left.\left.+\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\mathcal{R}'_{2u}(u;h)+\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)h\right)\right\rangle-\left\langle\tilde{\mathcal{R}}'_{1u}h, B_u\mathcal{F}(u,p)\right\rangle-\\
-\left\langle\tilde{\mathcal{R}}_1(u), B'_u\left(\mathcal{F}(u,p);h\right)\right\rangle-\\
-\left\langle\tilde{\mathcal{R}}_1(u), B_u\left(\mathcal{A}^{-1}\right)'_u\left(p-B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u)+\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)u;h\right)+\right.\\
+B_u\mathcal{A}_u^{-1}\left(-B_u^{*\prime}\left(\tilde{\mathcal{R}}_1(u);h\right)-B_u^*\tilde{\mathcal{R}}'_{1u}h+\frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}(\mathcal{R}_{2u}u;h)+\right.\\
\left.\left.+\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\mathcal{R}'_{2u}(u;h)+\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)h\right)\right\rangle+\\
+\left\langle\frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}(\mathcal{R}_{2u}u;h)+\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\mathcal{R}'_{2u}(u;h)+\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)h, \mathcal{F}(u,p)\right\rangle+
\end{gathered}
$$

$$+\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)u, \left(\mathcal{A}^{-1}\right)'_u\left(p - B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u) + \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)u; h\right) + \right.$$

$$+\mathcal{A}_u^{-1}\left(-B_u^{*\prime}\left(\tilde{\mathcal{R}}_1(u); h\right) - B_u^*\tilde{\mathcal{R}}'_{1u}h + \frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}(\mathcal{R}_{2u}u; h) + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial}{\partial t}B_u^*\mathcal{R}'_{2u}(u; h) + \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)h\right)\right\rangle - \left\langle grad_{\Phi_1}\tilde{\mathcal{B}}[u], h\right\rangle =$$

$$= \left\langle h, \left[\left(\mathcal{A}^{-1}\right)'_u\left(p - B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u) + \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)u; \cdot\right)\right]^* p - \right.$$

$$- \left[B_u^{*\prime}\left(\tilde{\mathcal{R}}_1(u); \cdot\right)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* p - \tilde{\mathcal{R}}'^*_{1u}B_u\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* p +$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}(\mathcal{R}_{2u}u; \cdot)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* p + \left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\mathcal{R}'_{2u}(u; \cdot)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* p +$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* p -$$

$$- \left[\tilde{\mathcal{R}}'_{3u}\left(u\mathcal{F}(u,p); \cdot\right)\right]^* B_u\mathcal{F}(u,p) - \mathcal{F}(u,p)\cdot\tilde{\mathcal{R}}^*_{3u}B_u\mathcal{F}(u,p) -$$

$$- \left[\left(\mathcal{A}^{-1}\right)'_u\left(p - B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u) + \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)u; \cdot\right)\right]^*\left(u\tilde{\mathcal{R}}^*_{3u}B_u\mathcal{F}(u,p)\right) +$$

$$+ \left[B_u^{*\prime}\left(\tilde{\mathcal{R}}_1(u); \cdot\right)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\left(u\tilde{\mathcal{R}}^*_{3u}B_u\mathcal{F}(u,p)\right) +$$

$$+ \tilde{\mathcal{R}}'^*_{1u}B_u\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\left(u\tilde{\mathcal{R}}^*_{3u}B_u\mathcal{F}(u,p)\right) -$$

$$- \left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}(\mathcal{R}_{2u}u; \cdot)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\left(u\tilde{\mathcal{R}}^*_{3u}B_u\mathcal{F}(u,p)\right) -$$

$$- \left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\mathcal{R}'_{2u}(u; \cdot)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\left(u\tilde{\mathcal{R}}^*_{3u}B_u\mathcal{F}(u,p)\right) -$$

$$- \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\left(u\tilde{\mathcal{R}}^*_{3u}B_u\mathcal{F}(u,p)\right) -$$

$$- \left[B'_u\left(\mathcal{F}(u,p); \cdot\right)\right]^*\tilde{\mathcal{R}}_{3u}\left(u\mathcal{F}(u,p)\right) -$$

$$-\left[\left(\mathcal{A}^{-1}\right)'_u\left(p - B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_1(u) + \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathfrak{R}_{2u}\right)u;\cdot\right)\right]^* B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}\left(u\mathcal{F}(u,p)\right) +$$

$$+\left[B_u^{*\prime}\left(\tilde{\mathfrak{R}}_1(u);\cdot\right)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}\left(u\mathcal{F}(u,p)\right) +$$

$$+\tilde{\mathfrak{R}}_{1u}^{\prime *}B_u\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}\left(u\mathcal{F}(u,p)\right) -$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}(\mathfrak{R}_{2u}u;\cdot)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}\left(u\mathcal{F}(u,p)\right) -$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\mathfrak{R}'_{2u}(u;\cdot)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}\left(u\mathcal{F}(u,p)\right) -$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathfrak{R}_{2u}\right)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}\left(u\mathcal{F}(u,p)\right) -$$

$$-\left[\mathfrak{R}'_{2u}\left(\mathcal{F}(u,p);\cdot\right)\right]^* B_u\mathcal{F}(u,p) + \tilde{\mathfrak{R}}_{1u}^{\prime *}B_u\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\mathfrak{R}_{2u}^* B_u\mathcal{F}(u,p) -$$

$$-\left[\left(\mathcal{A}^{-1}\right)'_u\left(p - B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_1(u) + \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathfrak{R}_{2u}\right)u;\cdot\right)\right]^*\mathfrak{R}_{2u}^* B_u\mathcal{F}(u,p) +$$

$$+\left[B_u^{*\prime}\left(\tilde{\mathfrak{R}}_1(u);\cdot\right)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\mathfrak{R}_{2u}^* B_u\mathcal{F}(u,p) -$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}(\mathfrak{R}_{2u}u;\cdot)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\mathfrak{R}_{2u}^* B_u\mathcal{F}(u,p) -$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\mathfrak{R}'_{2u}(u;\cdot)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\mathfrak{R}_{2u}^* B_u\mathcal{F}(u,p) -$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathfrak{R}_{2u}\right)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\mathfrak{R}_{2u}^* B_u\mathcal{F}(u,p) -$$

$$-\left[B'_u\left(\mathcal{F}(u,p);\cdot\right)\right]^*\mathfrak{R}_{2u}\mathcal{F}(u,p) -$$

$$-\left[\left(\mathcal{A}^{-1}\right)'_u\left(p - B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_1(u) + \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathfrak{R}_{2u}\right)u;\cdot\right)\right]^* B_u^*\mathfrak{R}_{2u}\mathcal{F}(u,p) +$$

$$+\tilde{\mathfrak{R}}_{1u}^{\prime *}B_u\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* B_u^*\mathfrak{R}_{2u}\mathcal{F}(u,p) - \tilde{\mathfrak{R}}_{1u}^{\prime *}B_u\mathcal{F}(u,p) +$$

$$+\left[B_u^{*\prime}\left(\tilde{\mathfrak{R}}_1(u);\cdot\right)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* B_u^*\mathfrak{R}_{2u}\mathcal{F}(u,p) -$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}\left(\mathcal{R}_{2u}u;\cdot\right)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* B_u^*\mathcal{R}_{2u}\mathcal{F}(u,p)-$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\mathcal{R}_{2u}'\left(u;\cdot\right)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* B_u^*\mathcal{R}_{2u}\mathcal{F}(u,p)-$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* B_u^*\mathcal{R}_{2u}\mathcal{F}(u,p)-\left[B_u'\left(\mathcal{F}(u,p);\cdot\right)\right]^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u)-$$

$$-\left[\left(\mathcal{A}^{-1}\right)_u'\left(p-B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u)+\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)u;\cdot\right)\right]^* B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u)+$$

$$+\left[B_u^{*\prime}\left(\tilde{\mathcal{R}}_1(u);\cdot\right)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u)+\tilde{\mathcal{R}}_{1u}'^{*}B_u\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u)-$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}\left(\mathcal{R}_{2u}u;\cdot\right)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u)-$$

$$-\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\mathcal{R}_{2u}'\left(u;\cdot\right)\right]^*+\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)\right]^*\right)\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u)+$$

$$+\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}\left(\mathcal{R}_{2u}u;\cdot\right)\right]^*+\left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\mathcal{R}_{2u}'\left(u;\cdot\right)\right]^*\right)\mathcal{F}(u,p)+$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)\right]^*\mathcal{F}(u,p)-grad_{\Phi_1}\tilde{\mathcal{B}}[u]+$$

$$+\left[\left(\mathcal{A}^{-1}\right)_u'\left(p-B_u^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u)+\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)u;\cdot\right)\right]^*\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)u-$$

$$-\left[B_u^{*\prime}\left(\tilde{\mathcal{R}}_1(u);\cdot\right)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)u-$$

$$-\tilde{\mathcal{R}}_{1u}'^{*}B_u\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)u+$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}\left(\mathcal{R}_{2u}u;\cdot\right)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)u+$$

$$+\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\mathcal{R}_{2u}'\left(u;\cdot\right)\right]^*+\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)\right]^*\right)\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathcal{R}_{2u}\right)u\right\rangle=$$

$$= \left\langle h, -\left[\left(\mathcal{A}^{-1}\right)'_u\left(p - B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_1(u) + \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathfrak{R}_{2u}\right)u;\cdot\right)\right]^* \mathcal{A}_u\mathcal{F}(u,p) +\right.$$

$$+\left[\left(\mathcal{A}^{-1}\right)'_u\left(p - B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_1(u) + \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathfrak{R}_{2u}\right)u;\cdot\right)\right]^* p - \tilde{\mathfrak{R}}'^*_{1u}B_u\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* p -$$

$$-\left[B_u^{*\prime}\left(\tilde{\mathfrak{R}}_1(u);\cdot\right)\right]^* p + \left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}\left(\mathfrak{R}_{2u}u;\cdot\right)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* p +$$

$$+\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\mathfrak{R}'_{2u}\left(u;\cdot\right)\right]^* + \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathfrak{R}_{2u}\right)\right]^*\right)\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* p -$$

$$-\left[\tilde{\mathfrak{R}}'_{3u}\left(u\mathcal{F}(u,p);\cdot\right)\right]^* B_u\mathcal{F}(u,p) - \mathcal{F}(u,p)\cdot\tilde{\mathfrak{R}}^*_{3u}B_u\mathcal{F}(u,p) +$$

$$+\left[B_u^{*\prime}\left(\tilde{\mathfrak{R}}_1(u);\cdot\right)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\mathcal{A}_u\mathcal{F}(u,p) + \tilde{\mathfrak{R}}'^*_{1u}B_u\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\mathcal{A}_u\mathcal{F}(u,p) -$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}\left(\mathfrak{R}_{2u}u;\cdot\right)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\mathcal{A}_u\mathcal{F}(u,p) -$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\mathfrak{R}'_{2u}\left(u;\cdot\right)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\mathcal{A}_u\mathcal{F}(u,p) -$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathfrak{R}_{2u}\right)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\mathcal{A}_u\mathcal{F}(u,p) -$$

$$-\left[B'_u\left(\mathcal{F}(u,p);\cdot\right)\right]^*\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}\left(u\mathcal{F}(u,p)\right) - \tilde{\mathfrak{R}}'^*_{1u}B_u\mathcal{F}(u,p) -$$

$$-\left[\mathfrak{R}'_{2u}\left(\mathcal{F}(u,p);\cdot\right)\right]^* B_u\mathcal{F}(u,p) - \left[B'_u\left(\mathcal{F}(u,p);\cdot\right)\right]^*\mathfrak{R}_{2u}\mathcal{F}(u,p) -$$

$$-\left[B'_u\left(\mathcal{F}(u,p);\cdot\right)\right]^*\tilde{\mathfrak{R}}_1(u) -$$

$$-\left[\left(\mathcal{A}^{-1}\right)'_u\left(p - B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_1(u) + \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathfrak{R}_{2u}\right)u;\cdot\right)\right]^* B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_1(u) +$$

$$+\left[\left(\mathcal{A}^{-1}\right)'_u\left(p - B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_1(u) + \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathfrak{R}_{2u}\right)u;\cdot\right)\right]^*\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathfrak{R}_{2u}\right)u +$$

$$+\left[B_u^{*\prime}\left(\tilde{\mathfrak{R}}_1(u);\cdot\right)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_1(u) + \tilde{\mathfrak{R}}'^*_{1u}B_u\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_1(u) -$$

$$-\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}\left(\mathfrak{R}_{2u}u;\cdot\right)\right]^* + \left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\mathfrak{R}'_{2u}\left(u;\cdot\right)\right]^*\right)\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_1(u) -$$

$$
-\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathfrak{R}_{2u}\right)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^* B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_1(u)+
$$

$$
+\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}\left(\mathfrak{R}_{2u}u;\cdot\right)\right]^*+\left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\mathfrak{R}_{2u}'\left(u;\cdot\right)\right]^*\right)\mathcal{F}(u,p)+
$$

$$
+\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathfrak{R}_{2u}\right)\right]^*\mathcal{F}(u,p)-\tilde{\mathfrak{R}}_{1u}'^*B_u\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathfrak{R}_{2u}\right)u-
$$

$$
-\left[B_u^{*\prime}\left(\tilde{\mathfrak{R}}_1(u);\cdot\right)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathfrak{R}_{2u}\right)-grad_{\Phi_1}\tilde{\mathfrak{B}}[u]+
$$

$$
+\left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}\left(\mathfrak{R}_{2u}u;\cdot\right)\right]^*\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathfrak{R}_{2u}\right)u+
$$

$$
+\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\mathfrak{R}_{2u}'\left(u;\cdot\right)\right]^*+\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathfrak{R}_{2u}\right)\right]^*\right)\left(\mathcal{A}_u^{-1}\right)^*\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathfrak{R}_{2u}\right)u\right\rangle=
$$

$$
=\left\langle h,-\left[\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}'\left(u\mathcal{F}(u,p);\cdot\right)\right]^*B_u\mathcal{F}(u,p)-\mathcal{F}(u,p)\cdot\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}^*B_u\mathcal{F}(u,p)-\right.
$$

$$
-\left[B_u'\left(\mathcal{F}(u,p);\cdot\right)\right]^*\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}\left(u\mathcal{F}(u,p)\right)-\tilde{\mathfrak{R}}_{1u}'^*B_u\mathcal{F}(u,p)-
$$

$$
-\left[\mathfrak{R}_{2u}'\left(\mathcal{F}(u,p);\cdot\right)\right]^*B_u\mathcal{F}(u,p)-\left[B_u'\left(\mathcal{F}(u,p);\cdot\right)\right]^*\mathfrak{R}_{2u}\mathcal{F}(u,p)-
$$

$$
-\left[B_u'\left(\mathcal{F}(u,p);\cdot\right)\right]^*\tilde{\mathfrak{R}}_1(u)+\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^{*\prime}\left(\mathfrak{R}_{2u}u;\cdot\right)\right]^*+\right.
$$

$$
\left.+\left[\frac{\partial}{\partial t}B_u^*\mathfrak{R}_{2u}'\left(u;\cdot\right)\right]^*+\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\mathfrak{R}_{2u}\right)\right]^*\right)\mathcal{F}(u,p)-grad_{\Phi_1}\tilde{\mathfrak{B}}[u]\right\rangle.
$$

Таким образом,

$$
p_t=-\frac{\delta H}{\delta u}+s(u,p),
$$

где

$$
s(u,p)=B_u^*\left(\Lambda_{1u}\mathcal{F}(u,p)+\Lambda_{3u}\left(\mathcal{F}(u,p)\right)^2+\Lambda_4(u)\right). \tag{4.71}
$$

Следовательно,

$$
\begin{cases} u_t=\frac{\delta H}{\delta p}, \\ p_t=-\frac{\delta H}{\delta u}+s(u,p). \end{cases} \tag{4.72}
$$

Отметим, что полученные уравнения являются Гамильтона-допустимыми уравнениями (см. пример 4.1).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4.11. *Пусть существует*

$$\mathcal{A}_u^{-1} = \left(B_u^* \tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u(\cdot)) + u\tilde{\mathcal{R}}_{3u}^* B_u + \mathcal{R}_{2u}^* B_u + B_u^* \mathcal{R}_{2u} \right)^{-1}$$

и

$$\mathcal{A}_u^{-1} \left(p - B_u^* \tilde{\mathcal{R}}_1(u) + \frac{\partial}{\partial t} \left(B_u^* \mathcal{R}_{2u} \right) u \right) \neq 0.$$

Тогда уравнение (4.64) допускает косвенное представление в форме Гамильтона-допустимого уравнения.

Пример 4.7.

Рассматривается уравнение

$$N(u) \equiv 2uu_{tt} + 3u_t^2 + 2uu_{xx} + 3u_x^2 + u_x = 0, \tag{4.73}$$

$$(x,t) \in \mathcal{Q} = (a,b) \times (t_0, t_1).$$

Определим $D(N)$ следующим образом:

$$D(N) =$$

$$= \left\{ u \in U = C_{t,x}^{2,2}(\overline{\mathcal{Q}}) : u|_{t=t_0} = \varphi_1(x),\ u|_{t=t_1} = \varphi_2(x)\ (x \in (a,b)), \right.$$
$$\left. u|_{x=a} = \psi_1(t),\ u|_{x=b} = \psi_2(t)\ (t \in (t_0, t_1)) \right\}, \tag{4.74}$$

где φ_i, ψ_i $(i = 1, 2)$ - заданные функции.

Введем классическую билинейную форму

$$\Phi(v, g) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_a^b v(x,t) g(x,t) dx dt. \tag{4.75}$$

Отметим, что

$$P_{2u} = 2uI, \quad P_{1u} \equiv 0, \quad P_{3u} \equiv 3I, \quad Q(u) = 2uu_{xx} + 3u_x^2 + u_x,$$

I - тождественный оператор.

Оператор N (4.73) не является потенциальным на $D(N)$ (4.74) относительно билинейной формы (4.75). Условие (1.51) не выполняется, так как

$$P_{3u}^* \equiv 3I, \quad P_{2u}^* = P_{2u} = 2uI, \quad P_{2u}^{*\prime}(h; u_t) = 2hu_t.$$

Отметим, что уравнение (4.73) представимо в форме уравнения Лагранжа с не-B_u-потенциальной плотностью силы.

Пусть

$$B_u \equiv u^2 I, \quad \Lambda(u) = u_x.$$

Тогда

$$\tilde{P}_{2u} = 2uI, \ \tilde{P}_{1u} \equiv 0, \ \tilde{P}_{3u} \equiv 3I, \ \tilde{Q}(u) = 2uu_{xx} + 3u_x^2.$$

В данном случае условия (1.16) - (1.22) выполнены.

Действительно,

(1.16)$\Longrightarrow 2u^3 I - 2u^3 I = 0,$

(1.17)$\Longrightarrow 3u_t u^2 h - 2u^2 u_t h - 4u^2 u_t h + 3u^2 u_t h = 0,$

(1.18)$\Longrightarrow 0 = 0,$

(1.19)$\Longrightarrow 2uh(2uu_{xx} + 3u_x^2) - 2uh(2uu_{xx} + 3u_x^2) + u^2(2hu_{xx} + 2uh_{xx} + 6u_x h_x) + 2u_{xx}u^2 h + 2u_x(2uu_x h + u^2 h_x) - 2u(2u_x^2 h + 2uu_{xx}h + 4uu_x h_x + u^2 h_{xx}) = 2u^2 u_{xx} h + 2u^3 h_{xx} + 6u^2 u_x h_x + 2u_{xx} u^2 h + 4uu_x^2 h + 2u^2 u_x h_x - 4uu_x^2 h - 4u^2 u_{xx} h - 8u^2 u_x h_x - 2u^3 h_{xx} = 0,$

(1.20)$\Longrightarrow 0 = 0,$

(1.21)$\Longrightarrow 2u^2 u_{tt} h - 2u^2 h u_{tt} - 2u_{tt} u^2 h + 2u_{tt} 3u^2 h + 4hu^2 u_{tt} - 4u^2 h u_{tt} - 4hu^2 u_{tt} = 0,$

(1.22)$\Longrightarrow 6uhu_t^2 - 8uhu_t^2 - 4uu_t^2 h + 12uhu_t^2 - 6uhu_t^2 = 0.$

Из (1.95) - (1.98) получаем

$$\tilde{R}_{2u} = -\frac{2}{5}uI, \quad \tilde{R}_1 \equiv 0, \quad \tilde{R}_{3u} = -\frac{3}{5}I, \quad \tilde{B}[u] = -\int\limits_a^b u^3 u_x^2 dx.$$

Введем плотность обобщенного импульса по формуле (4.67), то есть

$$p = -\frac{3}{5}u^2 u u_t - \frac{3}{5}u u^2 u_t - \frac{2}{5}u u^2 u_t - \frac{2}{5}u^2 u u_t = -2u^3 u_t.$$

Предположим, что $u \neq 0$, $u_t \neq 0$. Тогда

$$\mathcal{A}_u = -2u^3 I$$

и, следовательно,

$$\mathcal{A}_u^{-1} = -\frac{1}{2u^3} I.$$

Отметим, что

$$\mathcal{A}_u^{-1}\left(p - B_u^* \tilde{\mathcal{R}}_1(u) + \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^* \mathcal{R}_{2u}\right) u\right) = -\frac{p}{2u^3} \neq 0.$$

По формуле (4.69) находим

$$H[u,p] = \int\limits_a^b \left(-\frac{p^2}{2u^3} + \frac{3p^2}{20u^3} + \frac{p^2}{10u^3} + u^3 u_x^2\right) dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left(-\frac{p^2}{4u^3} + u^3 u_x^2\right) dx.$$

Отсюда

$$\frac{\delta H}{\delta p} = -\frac{p}{2u^3}$$

и

$$\frac{\delta H}{\delta u} = \frac{3p^2}{4u^4} - 3u^2 u_x^2 - 2u^3 u_{xx}.$$

Таким образом, из (4.72) получаем

$$\begin{cases} u_t = -\frac{p}{2u^3}, \\ p_t = -\frac{3p^2}{4u^4} + 3u^2u_x^2 + 2u^3u_{xx} + u^2u_x, \end{cases}$$

то есть по теореме 4.11 уравнение (4.73) косвенно представимо в форме Гамильтона-допустимого уравнения.

Замечание 4.6. Если оператор N уравнения (1.13) является квазипотенциальным на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы (1.7), причем $\Lambda_{2u} \equiv 0$, то из (1.123) - (1.126) получаем, что уравнение (1.13) имеет следующую структуру:

$$N(u) \equiv -u\tilde{\mathcal{R}}_{3u}^* u_{tt} - \tilde{\mathcal{R}}_{3u}(uu_{tt}) - \mathcal{R}_{2u}^* u_{tt} - \mathcal{R}_{2u}u_{tt} - u\frac{\partial \tilde{\mathcal{R}}_{3u}^*}{\partial t}u_t -$$
$$-\frac{\partial \tilde{\mathcal{R}}_{3u}}{\partial t}(uu_t) - \frac{\partial \mathcal{R}_{2u}^*}{\partial t}u_t + \tilde{\mathcal{R}}_{1u}'^* u_t - \tilde{\mathcal{R}}_{1u}' u_t - \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{R}_{2u}'(u;\cdot)\right)^* u_t -$$
$$-\left(\frac{\partial \mathcal{R}_{2u}}{\partial t}\right)^* u_t + \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{R}_{2u}'(u;u_t) + \Lambda_{1u}u_t + [\tilde{\mathcal{R}}_{3u}'(u_tu;\cdot)]^* u_t -$$
$$-u\tilde{\mathcal{R}}_{3u}^{*\prime}(u_t;u_t) - \tilde{\mathcal{R}}_{3u}'(u_tu;u_t) - \tilde{\mathcal{R}}_{3u}u_t^2 + [\mathcal{R}_{2u}'(u_t;\cdot)]^* u_t - \mathcal{R}_{2u}^{*\prime}(u_t;u_t) -$$
$$-\mathcal{R}_{2u}'(u_t;u_t) + \Lambda_{3u}u_t^2 + \Lambda_4(u) + grad_{\Phi_1}\tilde{\mathcal{B}}[u] - \frac{\partial \tilde{\mathcal{R}}_1(u)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathcal{R}_{2u}}{\partial t^2}u = 0, \tag{4.76}$$

а действие по Гамильтону F представимо в виде

$$F[u] = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_tu), u_t \right\rangle + \langle \mathcal{R}_{2u}u_t, u_t \rangle + \left\langle \tilde{\mathcal{R}}_1(u), u_t \right\rangle - \right.$$

$$\left. - \left\langle \frac{\partial \mathcal{R}_{2u}}{\partial t}u, u_t \right\rangle + \tilde{\mathcal{B}}[u] \right\} dt + F[u_0] \equiv \int_{t_0}^{t_1} L[u, u_t]dt + F[u_0],$$

где

$$\Phi(\tilde{\mathcal{R}}_1(u), u_t) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_0^1 \left\langle -\tilde{P}_{1\tilde{u}(\lambda)}(u - u_0), \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} \right\rangle d\lambda dt,$$

$$\Phi(\mathcal{R}_{2u} u_t, u_t) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_0^1 \left\langle -P_{2\tilde{u}(\lambda)}(u_t - u_{0_t}), \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} \right\rangle d\lambda dt,$$

$$\Phi(\tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_t u), u_t) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_0^1 \left\langle -\tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)} \left(\frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}(u - u_0) \right), \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} \right\rangle d\lambda dt,$$

$$\tilde{\mathcal{B}}[u] = \int\limits_0^1 \left[\left\langle \tilde{Q}(\tilde{u}(\lambda)), u - u_0 \right\rangle + \lambda \left\langle \frac{\partial \tilde{P}_{1\tilde{u}(\lambda)}}{\partial t}(u - u_0), u - u_0 \right\rangle - \right.$$

$$\left. - \lambda \left\langle \frac{\partial^2 P_{2\tilde{u}(\lambda)}}{\partial t^2}(u - u_0), u - u_0 \right\rangle \right] d\lambda,$$

u_0 - фиксированный элемент из $D(N)$, $L[u, u_t]$ - обобщенный лагранжиан,

$$L[u, u_t] \equiv \left\langle \tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_t u), u_t \right\rangle + \langle \mathcal{R}_{2u} u_t, u_t \rangle + \left\langle \tilde{\mathcal{R}}_1(u), u_t \right\rangle -$$

$$- \left\langle \frac{\partial \mathcal{R}_{2u}}{\partial t} u, u_t \right\rangle + \tilde{\mathcal{B}}[u],$$

и теорема 4.11 в данном случае формулируется следующим образом.

Теорема 4.12. [20] *Пусть существует*

$$\mathcal{A}_u^{-1} = \left(\tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u(\cdot)) + u\tilde{\mathcal{R}}_{3u}^* + \mathcal{R}_{2u}^* + \mathcal{R}_{2u} \right)^{-1}$$

и

$$\mathcal{A}_u^{-1} \left(p - \tilde{\mathcal{R}}_1(u) + \frac{\partial \mathcal{R}_{2u}}{\partial t} u \right) \neq 0.$$

Тогда уравнение (4.76) является Гамильтона-допустимым уравнением.

Замечание 4.7. Если оператор N уравнения (1.13) является B_u-потенциальным на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы (1.7), то из (1.127) - (1.130) получаем, что уравнение (1.13) имеет следующую структуру:

$$N(u) \equiv -(B_u^{-1})^*(u\mathcal{R}_{3u}^* B_u u_{tt}) - \mathcal{R}_{3u}(uu_{tt}) - (B_u^{-1})^* \mathcal{R}_{2u}^* B_u u_{tt} - \mathcal{R}_{2u} u_{tt} -$$

$$-(B_u^{-1})^* \left(u \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{R}_{3u}^* B_u) u_t \right) - (B_u^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} (B_u^* \mathcal{R}_{3u})(uu_t) -$$

$$-(B_u^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{R}_{2u}^* B_u) u_t + (B_u^{-1})^* \mathcal{R}_{1u}'^* B_u u_t + (B_u^{-1})^* [B_u'(u_t; \cdot)]^* \mathcal{R}_1(u) -$$

$$-(B_u^{-1})^* B_u^{*\prime}(\mathcal{R}_1(u); u_t) - \mathcal{R}_{1u}' u_t - (B_u^{-1})^* \left(\frac{\partial}{\partial t} B_u^{*\prime}(\mathcal{R}_{2u} u; \cdot) \right)^* u_t -$$

$$-(B_u^{-1})^* \left(\frac{\partial}{\partial t} B_u^* \mathcal{R}_{2u}'(u; \cdot) \right)^* u_t - (B_u^{-1})^* \left(\frac{\partial}{\partial t} B_u^* \mathcal{R}_{2u} \right)^* u_t +$$

$$+(B_u^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} B_u^{*\prime}(\mathcal{R}_{2u} u; u_t) + (B_u^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} B_u^* \mathcal{R}_{2u}'(u; u_t) +$$

$$+(B_u^{-1})^* (\mathcal{R}_{3u}'(u_t u; \cdot))^* B_u u_t - (B_u^{-1})^* (u \mathcal{R}_{3u}^{*\prime}(B_u u_t; u_t)) -$$

$$-(B_u^{-1})^* (u \mathcal{R}_{3u}^* B_u'(u_t; u_t)) - (B_u^{-1})^* B_u^{*\prime}(\mathcal{R}_{3u}(u_t u); u_t) - \mathcal{R}_{3u}'(u_t u; u_t) -$$

$$-\mathcal{R}_{3u} u_t^2 + (B_u^{-1})^* [B_u'(u_t; \cdot)]^* \mathcal{R}_{3u}(u_t u) + (B_u^{-1})^* [\mathcal{R}_{2u}'(u_t; \cdot)]^* B_u u_t -$$

$$-(B_u^{-1})^* \mathcal{R}_{2u}^{*\prime}(B_u u_t; u_t) - (B_u^{-1})^* \mathcal{R}_{2u}^* B_u'(u_t; u_t) - \mathcal{R}_{2u}'(u_t; u_t) -$$

$$-(B_u^{-1})^* B_u^{*\prime}(\mathcal{R}_{2u} u_t; u_t) + (B_u^{-1})^* [B_u'(u_t; \cdot)]^* \mathcal{R}_{2u} u_t + (B_u - grad)_{\Phi_1} \mathcal{B}[u] -$$

$$-(B_u^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} B_u^* \mathcal{R}_1(u) + (B_u^{-1})^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} (B_u^* \mathcal{R}_{2u}) u = 0. \qquad (4.77)$$

Теорема 4.11 в данном случае формулируется следующим образом.

Теорема 4.13. *Пусть существует*

$$\left(B_u^*\mathcal{R}_{3u}(u(\cdot)) + u\mathcal{R}_{3u}^* B_u + \mathcal{R}_{2u}^* B_u + B_u^* \mathcal{R}_{2u}\right)^{-1}.$$

Тогда уравнение (4.77) допускает косвенное представление в форме уравнений Гамильтона

$$\begin{cases} u_t = \frac{\delta H}{\delta p}, \\ p_t = -\frac{\delta H}{\delta u}. \end{cases} \tag{4.78}$$

Замечание 4.8. Если оператор N уравнения (1.13) является потенциальным на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы (1.7), то из (1.131) - (1.134) получаем, что уравнение (1.13) имеет следующую структуру:

$$N(u) \equiv -u\mathcal{R}_{3u}^* u_{tt} - \mathcal{R}_{3u}(uu_{tt}) - \mathcal{R}_{2u}^* u_{tt} - \mathcal{R}_{2u} u_{tt} - u\frac{\partial \mathcal{R}_{3u}^*}{\partial t} u_t -$$

$$-\frac{\partial \mathcal{R}_{3u}}{\partial t}(uu_t) - \frac{\partial \mathcal{R}_{2u}^*}{\partial t} u_t + \mathcal{R}_{1u}'^* u_t - \mathcal{R}_{1u}' u_t - \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{R}_{2u}'(u;\cdot)\right)^* u_t -$$

$$-\left(\frac{\partial \mathcal{R}_{2u}}{\partial t}\right)^* u_t + \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{R}_{2u}'(u;u_t) + [\mathcal{R}_{3u}'(u_t u;\cdot)]^* u_t - u\mathcal{R}_{3u}^{*\prime}(u_t;u_t) -$$

$$-\mathcal{R}_{3u}'(u_t u; u_t) - \mathcal{R}_{3u} u_t^2 + [\mathcal{R}_{2u}'(u_t;\cdot)]^* u_t - \mathcal{R}_{2u}^{*\prime}(u_t;u_t) -$$

$$-\mathcal{R}_{2u}'(u_t;u_t) + grad_{\Phi_1}\mathcal{B}[u] - \frac{\partial \mathcal{R}_1(u)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathcal{R}_{2u}}{\partial t^2} u = 0. \tag{4.79}$$

Теорема 4.11 в данном случае формулируется следующим образом.

Теорема 4.14. *Пусть* $\exists\ \left(\mathcal{R}_{3u}(u(\cdot)) + u\mathcal{R}_{3u}^* + \mathcal{R}_{2u}^* + \mathcal{R}_{2u}\right)^{-1}$. *Тогда уравнение (4.79) представимо в форме уравнений Гамильтона (4.78).*

Глава 5

Интегралы уравнений движения непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы и их абсолютные интегральные инварианты первого порядка

В настоящей главе предложен еще один способ решения прямой задачи механики бесконечномерных систем – нахождения интегралов уравнений движения лагранжевых систем с непотенциальными силами, являющийся обобщением метода вариационных симметрий.

К прямым задачам механики бесконечномерных систем относится не только нахождение решений уравнений движения и их интегралов, но также и решение задач об определении качественных показателей и свойств движения по известной структуре и свойствам самих уравнений. Одними из качественных показателей, характеризующими свойства движения, являются интегральные инварианты – интегралы от параметрически зависящих от t функционалов, сохраняющие свое значение в процессе движения системы. Исследован вопрос о существовании абсолютного интегрального инварианта первого порядка операторного уравнения с первой производной по времени и установлена зависимость между первыми интегралами эволюционных уравнений и их абсолютными интегральными инвариантами первого порядка.

5.1 Интегралы уравнений Лагранжа с не-B_u-потенциальными плотностями сил

В настоящем параграфе предложен еще один способ нахождения интегралов уравнений Лагранжа с не-B_u-потенциальными плотностями сил.

Предположим, что оператор N вида (1.13) является квази-B_u-потенциальным на $D(N)$ относительно билинейной формы (1.7). Тогда функционал F имеет вид (1.94), а обобщенный лагранжиан L представим в виде (1.103).

В параграфе 4.4 было доказано, что в данном случае уравнение (1.13) имеет вид (4.65), а также найдены $\frac{\delta L}{\delta u_t}$ (4.66) и $\frac{\delta L}{\delta u}$ (4.70).

Теорема 5.1. *Если оператор N вида (1.13) является квази-B_u-потенциальным на $D(N)$ относительно билинейной формы (1.7), оператор B_u обратим, существуют $\mathcal{S} : D(N) \to C^1([t_0, t_1]; V_1)$ и $z : D(N) \to C^1[t_0, t_1]$ такие, что*

$$\Big\langle u\tilde{\mathcal{R}}^*_{3u}B_u u_t + B^*_u\tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_t u) + \tilde{\mathcal{R}}^*_{2u}B_u u_t + B^*_u\tilde{\mathcal{R}}_{2u}u_t + B^*_u\tilde{\mathcal{R}}_1(u) -$$
$$-\frac{\partial}{\partial t}(B^*_u\tilde{\mathcal{R}}_{2u})u, D_t\mathcal{S}(u)\Big\rangle + \Big\langle u_t\tilde{\mathcal{R}}^*_{3u}B_u u_t + \left[\tilde{\mathcal{R}}'_{3u}(u_t u;\cdot)\right]^* B_u u_t +$$
$$+\left[B'_u(u_t;\cdot)\right]^*\tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_t u) + \left[\tilde{\mathcal{R}}'_{2u}(u_t;\cdot)\right]^* B_u u_t + \left[B'_u(u_t;\cdot)\right]^*\tilde{\mathcal{R}}_{2u}u_t +$$
$$+\tilde{\mathcal{R}}'^*_{1u}B_u u_t + \left[B'_u(u_t;\cdot)\right]^*\tilde{\mathcal{R}}_1(u) - \left(\frac{\partial}{\partial t}(B^*_u\tilde{\mathcal{R}}_{2u})\right)^* u_t -$$
$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}B^{*\prime}_u(\tilde{\mathcal{R}}_{2u}u;\cdot)\right)^* u_t - \left(\frac{\partial}{\partial t}B^*_u\tilde{\mathcal{R}}'_{2u}(u;\cdot)\right)^* u_t +$$
$$+grad_{\Phi_1}\tilde{\mathcal{B}}[u], \mathcal{S}(u)\Big\rangle + \langle\Lambda(u), B_u\mathcal{S}(u)\rangle = D_t z[u], \qquad (5.1)$$

то

$$I[t,u] = z[u] - \left\langle u\tilde{\mathcal{R}}^*_{3u} B_u u_t + B^*_u \tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_t u) + \tilde{\mathcal{R}}^*_{2u} B_u u_t + B^*_u \tilde{\mathcal{R}}_{2u} u_t + \right.$$

$$\left. + B^*_u \tilde{\mathcal{R}}_1(u) - \frac{\partial}{\partial t}(B^*_u \tilde{\mathcal{R}}_{2u})u, \mathcal{S}(u) \right\rangle \qquad (5.2)$$

является интегралом уравнения (1.13).

Доказательство. В данном случае уравнение (1.13) имеет вид (4.65), поэтому

$$\left\langle \left(B_u^{-1}\right)^* \left[\frac{\delta L}{\delta u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta u_t}\right)\right] + \Lambda(u), B_u \mathcal{S}(u) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{\delta L}{\delta u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta u_t}\right), \mathcal{S}(u) \right\rangle + \langle \Lambda(u), B_u \mathcal{S}(u) \rangle =$$

$$= -\frac{d}{dt}\left\langle \frac{\delta L}{\delta u_t}, \mathcal{S}(u) \right\rangle + \left\langle \frac{\delta L}{\delta u_t}, D_t \mathcal{S}(u) \right\rangle +$$

$$+ \left\langle \frac{\delta L}{\delta u}, \mathcal{S}(u) \right\rangle + \langle \Lambda(u), B_u \mathcal{S}(u) \rangle . \qquad (5.3)$$

Подставляя в равенство (5.3) выражения (4.66) и (4.70) вместо $\frac{\delta L}{\delta u_t}$ и $\frac{\delta L}{\delta u}$ соответственно и учитывая условие (5.1), получаем интеграл вида (5.2). $\square$

Замечание 5.1. Если $B_u \equiv I$ - тождественный оператор, то теорема 5.1 формулируется следующим образом.

Теорема 5.2. *Если оператор N вида (1.13) является квазипотенциальным на $D(N)$ относительно билинейной формы (1.7), существуют $\mathcal{S} : D(N) \to C^1([t_0, t_1]; V_1)$ и $z : D(N) \to C^1[t_0, t_1]$ такие, что*

$$\left\langle u\tilde{\mathcal{R}}^*_{3u} u_t + \tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_t u) + \tilde{\mathcal{R}}^*_{2u} u_t + \tilde{\mathcal{R}}_{2u} u_t + \tilde{\mathcal{R}}_1(u) - \frac{\partial \tilde{\mathcal{R}}_{2u}}{\partial t} u, D_t \mathcal{S}(u) \right\rangle +$$

$$+\left\langle u_t\tilde{\mathcal{R}}^*_{3u}u_t+\left[\tilde{\mathcal{R}}'_{3u}(u_tu;\cdot)\right]^*u_t+\left[\tilde{\mathcal{R}}'_{2u}(u_t;\cdot)\right]^*u_t+\tilde{\mathcal{R}}'^*_{1u}u_t-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial\tilde{\mathcal{R}}_{2u}}{\partial t}\right)^*u_t-\left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathcal{R}}'_{2u}(u;\cdot)\right)^*u_t+grad_{\Phi_1}\tilde{\mathcal{B}}[u],\mathcal{S}(u)\right\rangle+$$

$$+\langle\Lambda(u),\mathcal{S}(u)\rangle=D_tz[u],\tag{5.4}$$

то

$$I[t,u]=z[u]-\left\langle u\tilde{\mathcal{R}}^*_{3u}u_t+\tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_tu)+\tilde{\mathcal{R}}^*_{2u}u_t+\tilde{\mathcal{R}}_{2u}u_t+\right.$$

$$\left.+\tilde{\mathcal{R}}_1(u)-\frac{\partial\tilde{\mathcal{R}}_{2u}}{\partial t}u,\mathcal{S}(u)\right\rangle\tag{5.5}$$

является интегралом уравнения (1.13).

Замечание 5.2. Если $\Lambda\equiv 0$, то теорема 5.1 формулируется следующим образом.

Теорема 5.3. *Если оператор N вида (1.13) является B_u-потенциальным на $D(N)$ относительно билинейной формы (1.7), оператор B_u обратим, существуют $\mathcal{S}:D(N)\to C^1([t_0,t_1];V_1)$ и $z:D(N)\to C^1[t_0,t_1]$ такие, что*

$$\langle u\mathcal{R}^*_{3u}B_uu_t+B^*_u\mathcal{R}_{3u}(u_tu)+\mathcal{R}^*_{2u}B_uu_t+B^*_u\mathcal{R}_{2u}u_t+B^*_u\mathcal{R}_1(u)-$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial t}(B^*_u\mathcal{R}_{2u})u,D_t\mathcal{S}(u)\right\rangle+\left\langle u_t\mathcal{R}^*_{3u}B_uu_t+\left[\mathcal{R}'_{3u}(u_tu;\cdot)\right]^*B_uu_t+\right.$$

$$+\left[B'_u(u_t;\cdot)\right]^*\mathcal{R}_{3u}(u_tu)+\left[\mathcal{R}'_{2u}(u_t;\cdot)\right]^*B_uu_t+\left[B'_u(u_t;\cdot)\right]^*\mathcal{R}_{2u}u_t+$$

$$+\mathcal{R}'^*_{1u}B_uu_t+\left[B'_u(u_t;\cdot)\right]^*\mathcal{R}_1(u)-\left(\frac{\partial}{\partial t}(B^*_u\mathcal{R}_{2u})\right)^*u_t-$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}B^{*\prime}_u(\mathcal{R}_{2u}u;\cdot)\right)^*u_t-\left(\frac{\partial}{\partial t}B^*_u\mathcal{R}'_{2u}(u;\cdot)\right)^*u_t+$$

$$+grad_{\Phi_1}\mathcal{B}[u], \mathcal{S}(u)\rangle = D_t z[u], \tag{5.6}$$

то

$$I[t,u] = z[u] - \langle u\mathcal{R}^*_{3u}B_u u_t + B^*_u\mathcal{R}_{3u}(u_t u) + \mathcal{R}^*_{2u}B_u u_t + B^*_u\mathcal{R}_{2u}u_t +$$

$$+B^*_u\mathcal{R}_1(u) - \frac{\partial}{\partial t}(B^*_u\mathcal{R}_{2u})u, \mathcal{S}(u)\Big\rangle \tag{5.7}$$

является интегралом уравнения (1.13).

Замечание 5.3. Если $\Lambda \equiv 0$, $B_u \equiv I$ - тождественный оператор, то теорема 5.1 формулируется следующим образом.

Теорема 5.4. *Если оператор N вида (1.13) является потенциальным на $D(N)$ относительно билинейной формы (1.7), существуют $\mathcal{S} : D(N) \to C^1([t_0,t_1];V_1)$ и $z : D(N) \to C^1[t_0,t_1]$ такие, что*

$$\Big\langle u\mathcal{R}^*_{3u}u_t + \mathcal{R}_{3u}(u_t u) + \mathcal{R}^*_{2u}u_t + \mathcal{R}_{2u}u_t + \mathcal{R}_1(u) - \frac{\partial\mathcal{R}_{2u}}{\partial t}u, D_t\mathcal{S}(u)\Big\rangle +$$

$$+\left\langle u_t\mathcal{R}^*_{3u}u_t + \left[\mathcal{R}'_{3u}(u_t u;\cdot)\right]^* u_t + \left[\mathcal{R}'_{2u}(u_t;\cdot)\right]^* u_t + \mathcal{R}'^*_{1u}u_t - \right.$$

$$\left. -\left(\frac{\partial\mathcal{R}_{2u}}{\partial t}\right)^* u_t - \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{R}'_{2u}(u;\cdot)\right)^* u_t + grad_{\Phi_1}\mathcal{B}[u], \mathcal{S}(u)\right\rangle = D_t z[u], \tag{5.8}$$

то

$$I[t,u] = z[u] - \langle u\mathcal{R}^*_{3u}u_t + \mathcal{R}_{3u}(u_t u) + \mathcal{R}^*_{2u}u_t + \mathcal{R}_{2u}u_t +$$

$$+\mathcal{R}_1(u) - \frac{\partial\mathcal{R}_{2u}}{\partial t}u, \mathcal{S}(u)\Big\rangle \tag{5.9}$$

является интегралом уравнения (1.13).

Замечание 5.4. Отметим, что метод нахождения первых интегралов уравнения движения (1.13), изложенный в параграфе 3.1, является частным случаем изложенного в настоящем параграфе метода.

Действительно, если дополнительно предположить, что $\mathcal{S}(u) \in D(N'_u, B_u)$, существуют $f_1 : D(N) \to C^1[t_0, t_1]$ и $f : D(N) \to C^1[t_0, t_1]$ такие, что

$$\langle \Lambda(u), B_u \mathcal{S}(u) \rangle = D_t f_1[u], \tag{5.10}$$

$$\Big\langle u\tilde{\mathfrak{R}}^*_{3u} B_u u_t + B^*_u \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_t u) + \tilde{\mathfrak{R}}^*_{2u} B_u u_t + B^*_u \tilde{\mathfrak{R}}_{2u} u_t + B^*_u \tilde{\mathfrak{R}}_1(u) -$$
$$- \frac{\partial}{\partial t}(B^*_u \tilde{\mathfrak{R}}_{2u})u, D_t \mathcal{S}(u) \Big\rangle + \Big\langle u_t \tilde{\mathfrak{R}}^*_{3u} B_u u_t + \Big[\tilde{\mathfrak{R}}'_{3u}(u_t u; \cdot)\Big]^* B_u u_t +$$
$$+ \left[B'_u(u_t; \cdot)\right]^* \tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_t u) + \Big[\tilde{\mathfrak{R}}'_{2u}(u_t; \cdot)\Big]^* B_u u_t + \left[B'_u(u_t; \cdot)\right]^* \tilde{\mathfrak{R}}_{2u} u_t +$$
$$+ \tilde{\mathfrak{R}}'^*_{1u} B_u u_t + \left[B'_u(u_t; \cdot)\right]^* \tilde{\mathfrak{R}}_1(u) - \left(\frac{\partial}{\partial t}(B^*_u \tilde{\mathfrak{R}}_{2u})\right)^* u_t -$$
$$- \left(\frac{\partial}{\partial t} B^{*\prime}_u(\tilde{\mathfrak{R}}_{2u} u; \cdot)\right)^* u_t - \left(\frac{\partial}{\partial t} B^*_u \tilde{\mathfrak{R}}'_{2u}(u; \cdot)\right)^* u_t +$$
$$+ grad_{\Phi_1} \tilde{\mathfrak{B}}[u], \mathcal{S}(u) \Big\rangle = D_t f[u], \tag{5.11}$$

то есть $z = f_1 + f$, то условие (5.11) является условием инвариантности до дивергенции функционала (1.94) (см. условие (3.4)). В этом случае интеграл (5.2) совпадает с интегралом (3.6) (выражения (5.2) и (3.6) отличаются только знаком).

Замечание 5.5. Пусть $B_u \equiv I$ - тождественный оператор. Если дополнительно предположить, что $\mathcal{S}(u) \in D(N'_u)$, существуют $f_1 : D(N) \to C^1[t_0, t_1]$ и $f : D(N) \to C^1[t_0, t_1]$ такие, что

$$\langle \Lambda(u), \mathcal{S}(u) \rangle = D_t f_1[u], \tag{5.12}$$

$$\left\langle u\tilde{\mathcal{R}}^*_{3u}u_t+\tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_tu)+\tilde{\mathcal{R}}^*_{2u}u_t+\tilde{\mathcal{R}}_{2u}u_t+\tilde{\mathcal{R}}_1(u)-\frac{\partial\tilde{\mathcal{R}}_{2u}}{\partial t}u, D_t\mathcal{S}(u)\right\rangle+$$
$$+\left\langle u_t\tilde{\mathcal{R}}^*_{3u}u_t+\left[\tilde{\mathcal{R}}'_{3u}(u_tu;\cdot)\right]^*u_t+\left[\tilde{\mathcal{R}}'_{2u}(u_t;\cdot)\right]^*u_t+\tilde{\mathcal{R}}'^*_{1u}u_t-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\partial\tilde{\mathcal{R}}_{2u}}{\partial t}\right)^*u_t-\left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathcal{R}}'_{2u}(u;\cdot)\right)^*u_t+grad_{\Phi_1}\tilde{\mathcal{B}}[u],\mathcal{S}(u)\right\rangle=D_tf[u], \tag{5.13}$$

то есть $z=f_1+f$, то условие (5.13) является условием инвариантности до дивергенции функционала (1.104). В этом случае интеграл (5.5) совпадает с интегралом (3.9) (выражения (5.5) и (3.9) отличаются только знаком).

Замечание 5.6. Пусть $\Lambda\equiv 0$. Если дополнительно предположить, что $\mathcal{S}(u)\in D(N'_u,B_u)$, существует $f:D(N)\to C^1[t_0,t_1]$ такой, что

$$\langle u\mathcal{R}^*_{3u}B_uu_t+B^*_u\mathcal{R}_{3u}(u_tu)+\mathcal{R}^*_{2u}B_uu_t+B^*_u\mathcal{R}_{2u}u_t+B^*_u\mathcal{R}_1(u)-$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial t}(B^*_u\mathcal{R}_{2u})u, D_t\mathcal{S}(u)\right\rangle+\left\langle u_t\mathcal{R}^*_{3u}B_uu_t+\left[\mathcal{R}'_{3u}(u_tu;\cdot)\right]^*B_uu_t+\right.$$
$$+\left[B'_u(u_t;\cdot)\right]^*\mathcal{R}_{3u}(u_tu)+\left[\mathcal{R}'_{2u}(u_t;\cdot)\right]^*B_uu_t+\left[B'_u(u_t;\cdot)\right]^*\mathcal{R}_{2u}u_t+$$
$$+\mathcal{R}'^*_{1u}B_uu_t+\left[B'_u(u_t;\cdot)\right]^*\mathcal{R}_1(u)-\left(\frac{\partial}{\partial t}(B^*_u\mathcal{R}_{2u})\right)^*u_t-$$
$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}B^{*\prime}_u(\mathcal{R}_{2u}u;\cdot)\right)^*u_t-\left(\frac{\partial}{\partial t}B^*_u\mathcal{R}'_{2u}(u;\cdot)\right)^*u_t+$$
$$+grad_{\Phi_1}\mathcal{B}[u],\mathcal{S}(u)\rangle=D_tf[u], \tag{5.14}$$

то есть $z=f$, то условие (5.14) является условием инвариантности до дивергенции функционала (1.109). В этом случае интеграл (5.7) совпадает с интегралом (3.11) (выражения (5.7) и (3.11) отличаются только знаком).

Замечание 5.7. Пусть $\Lambda \equiv 0$, $B_u \equiv I$ - тождественный оператор. Если дополнительно предположить, что $\mathcal{S}(u) \in D(N'_u)$, существует $f : D(N) \to C^1[t_0, t_1]$ такой, что

$$\left\langle u\mathcal{R}^*_{3u}u_t + \mathcal{R}_{3u}(u_t u) + \mathcal{R}^*_{2u}u_t + \mathcal{R}_{2u}u_t + \mathcal{R}_1(u) - \frac{\partial \mathcal{R}_{2u}}{\partial t}u, D_t\mathcal{S}(u)\right\rangle +$$
$$+ \Big\langle u_t\mathcal{R}^*_{3u}u_t + \left[\mathcal{R}'_{3u}(u_t u; \cdot)\right]^* u_t + \left[\mathcal{R}'_{2u}(u_t; \cdot)\right]^* u_t + \mathcal{R}'^*_{1u}u_t -$$
$$- \left(\frac{\partial \mathcal{R}_{2u}}{\partial t}\right)^* u_t - \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{R}'_{2u}(u; \cdot)\right)^* u_t + grad_{\Phi_1}\mathcal{B}[u], \mathcal{S}(u)\Big\rangle = D_t f[u], \tag{5.15}$$

то есть $z = f$, то условие (5.15) является условием инвариантности до дивергенции функционала (1.114). В этом случае интеграл (5.9) совпадает с интегралом (3.13) (выражения (5.9) и (3.13) отличаются только знаком).

Пример 5.1.

Рассмотрим уравнение движения

$$N(u) \equiv u_{tt} + u_{xx} + u_t u_{tx} = 0, \tag{5.16}$$
$$(x, t) \in \mathcal{Q} = (a, b) \times (t_0, t_1).$$

Положим

$$D(N) = D(N'_u) = \Big\{ u \in U = C^{\infty,2}_{t,x}(\overline{\mathcal{Q}}) : \; u|_{t=t_0} = 0, \;\; u|_{t=t_1} = 0,$$
$$u|_{x=a} = 0, \;\; u|_{x=b} = 0 \Big\}. \tag{5.17}$$

Введем обозначение $V = C(\overline{\mathcal{Q}})$ и зададим билинейную форму $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ в виде

$$\Phi(v, g) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_a^b v(x, t) g(x, t) dx dt. \tag{5.18}$$

В данном случае

$$P_{2u} \equiv I,\ P_{3u} \equiv \frac{1}{2}D_x,\ P_{1u} \equiv 0,\ Q(u) = u_{xx},$$

I - тождественный оператор.

Оператор N (5.16) не является потенциальным на $D(N)$ (5.17) относительно билинейной формы (5.18). Условие (1.51) не выполняется, так как

$$u_t P^*_{3u} h = -\frac{1}{2} u_t h_x, \quad P^*_{2u} \equiv I, \quad P^{*\prime}_{2u}(h; u_t) = 0,$$

$$P_{3u}(u_t h) = \frac{1}{2} D_x(u_t h) = \frac{1}{2} u_{tx} h + \frac{1}{2} u_t h_x.$$

Отметим, что уравнение (5.16) представимо в форме уравнения Лагранжа с непотенциальной плотностью силы.

Положим $B_u \equiv I,\ \Lambda(u) = u_t u_{tx}$.

Тогда

$$\tilde{P}_{2u} \equiv I,\ \tilde{P}_{3u} \equiv 0,\ \tilde{P}_{1u} \equiv 0,\ \tilde{Q}(u) = u_{xx}$$

и условия (1.36)–(1.42) выполняются.

Действительно,

(1.36)$\Longrightarrow I = I$,

(1.37)$\Longrightarrow 0 = 0$,

(1.38)$\Longrightarrow 0 = 0$,

(1.39)$\Longrightarrow D_{xx} - D_{xx} = 0$,

(1.40)$\Longrightarrow 0 = 0$,

(1.41)$\Longrightarrow 0 = 0$,

(1.42)$\Longrightarrow 0 = 0$.

Далее,

$$\tilde{\mathfrak{R}}_1 \equiv 0, \quad \tilde{\mathfrak{R}}_{2u} \equiv -\frac{1}{2} I, \quad \tilde{\mathfrak{R}}_{3u} \equiv 0, \quad \tilde{\mathfrak{B}}[u] = -\frac{1}{2} \int\limits_a^b u_x^2 dx.$$

Пусть $\mathcal{S}(u) = u_t$. Из условия (5.4) находим

$$\int_a^b \left[\left(-\frac{1}{2}u_t - \frac{1}{2}u_t\right) u_{tt} + u_{xx}u_t + u_t u_{tx} u_t\right] dx =$$

$$= \int_a^b \left[-u_t u_{tt} - u_x u_{tx} + u_t^2 u_{tx}\right] dx =$$

$$= \int_a^b \left[-\frac{1}{2}D_t u_t^2 - \frac{1}{2}D_t u_x^2 + \frac{1}{3}D_x u_t^3\right] dx = -\frac{1}{2}\int_a^b D_t\left(u_t^2 + u_x^2\right) dx,$$

то есть

$$z[u] = -\frac{1}{2}\int_a^b \left(u_t^2 + u_x^2\right) dx.$$

По формуле (5.5) получаем интеграл уравнения (5.16)

$$I[t,u] = \int_a^b \left(u_t^2 - u_x^2\right) dx. \tag{5.19}$$

Предположим, что $u_t \in D(N'_u)$.

Отметим, что в данном случае

$$\langle \Lambda(u), \mathcal{S}(u)\rangle = \int_a^b u_t^2 u_{tx} dx = \frac{1}{3}\int_a^b D_x u_t^3 dx = 0,$$

то есть $f_1[u] \equiv 0$,

$$\left\langle u\tilde{\mathcal{R}}^*_{3u}u_t + \tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_t u) + \tilde{\mathcal{R}}^*_{2u}u_t + \tilde{\mathcal{R}}_{2u}u_t + \tilde{\mathcal{R}}_1(u) - \frac{\partial\tilde{\mathcal{R}}_{2u}}{\partial t}u, D_t\mathcal{S}(u)\right\rangle +$$

$$+\left\langle u_t\tilde{\mathcal{R}}^*_{3u}u_t + \left[\tilde{\mathcal{R}}'_{3u}(u_t u;\cdot)\right]^* u_t + \left[\tilde{\mathcal{R}}'_{2u}(u_t;\cdot)\right]^* u_t + \tilde{\mathcal{R}}'^*_{1u}u_t - \right.$$

$$-\left(\frac{\partial\tilde{\mathcal{R}}_{2u}}{\partial t}\right)^{*} u_t - \left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathcal{R}}'_{2u}(u;\cdot)\right)^{*} u_t + grad_{\Phi_1}\tilde{\mathcal{B}}[u], \mathcal{S}(u)\right\rangle =$$

$$= \int\limits_a^b \left[-u_t u_{tt} + u_{xx}u_t\right] dx = \int\limits_a^b \left[-\frac{1}{2}D_t u_t^2 - u_x u_{tx}\right] dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left[-\frac{1}{2}D_t u_t^2 - \frac{1}{2}D_t u_x^2\right] dx = -\frac{1}{2}\int\limits_a^b D_t\left(u_t^2 + u_x^2\right) dx,$$

то есть

$$f[u] = -\frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(u_t^2 + u_x^2\right) dx.$$

Следовательно, условия (5.12) и (5.13) выполнены, и интеграл (5.19) может быть также найден по формуле (3.9).

Пример 5.2.

Рассмотрим уравнение движения

$$N(u) \equiv u_{tx} + u_{xx} + \frac{1}{2}u_x u_{tx} = 0, \qquad (5.20)$$

$$(x,t) \in \mathcal{Q} = (a,b) \times (t_0, t_1).$$

Положим

$$D(N) = D(N'_u) = \left\{u \in U = C^2(\overline{\mathcal{Q}}) : \; u|_{t=t_0} = 0, \;\; u|_{t=t_1} = 0,\right.$$

$$\left. u|_{x=a} = 0, \;\; u|_{x=b} = 0, \;\; u_x|_{x=a} = 0, \;\; u_x|_{x=b} = 0\right\}. \qquad (5.21)$$

Введем обозначение $V = C(\overline{\mathcal{Q}})$ и зададим билинейную форму $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ в виде

$$\Phi(v,g) = \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^b v(x,t)g(x,t)dxdt. \qquad (5.22)$$

В данном случае

$$P_{2u} \equiv 0,\ P_{3u} \equiv 0,\ P_{1u} = D_x + \frac{1}{2}u_x D_x,\ Q(u) = u_{xx},$$

I - тождественный оператор.

Оператор N (5.20) не является потенциальным на $D(N)$ (5.21) относительно билинейной формы (5.22). Условие (1.52) не выполняется, так как

$$\frac{\partial P^*_{2u}}{\partial t} \equiv 0, \quad P^*_{1u} = -D_x - \frac{1}{2}u_{xx}I - \frac{1}{2}u_x D_x.$$

Отметим, что уравнение (5.20) представимо в форме уравнения Лагранжа с непотенциальной плотностью силы.

Положим $B_u \equiv I,\ \Lambda(u) = \frac{1}{2}u_x u_{tx}$.

Тогда

$$\tilde{P}_{2u} \equiv 0,\ \tilde{P}_{3u} \equiv 0,\ \tilde{P}_{1u} \equiv D_x,\ \tilde{Q}(u) = u_{xx}$$

и условия (1.36)–(1.42) выполняются.

Действительно,
(1.36)$\Longrightarrow 0 = 0,$
(1.37)$\Longrightarrow 0 = 0,$
(1.38)$\Longrightarrow -D_x + D_x = 0,$
(1.39)$\Longrightarrow D_{xx} - D_{xx} = 0,$
(1.40)$\Longrightarrow 0 = 0,$
(1.41)$\Longrightarrow 0 = 0,$
(1.42)$\Longrightarrow 0 = 0.$

Далее,

$$\tilde{\mathfrak{R}}_1(u) = -\frac{1}{2}u_x, \quad \tilde{\mathfrak{R}}_{2u} \equiv 0, \quad \tilde{\mathfrak{R}}_{3u} \equiv 0, \quad \tilde{\mathfrak{B}}[u] = -\frac{1}{2}\int\limits_a^b u_x^2 dx.$$

Пусть $\mathcal{S}(u) = e^{u_x}$. Из условия (5.4) находим

$$\int\limits_a^b \left[-\frac{1}{2}u_x e^{u_x} u_{tx} + \frac{1}{2}u_{tx}e^{u_x} + u_{xx}e^{u_x} + \frac{1}{2}u_x u_{tx} e^{u_x}\right] dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left[\frac{1}{2}D_t e^{u_x} + D_x e^{u_x}\right] dx = \frac{1}{2}\int\limits_a^b D_t e^{u_x} dx,$$

то есть

$$z[u] = \frac{1}{2}\int\limits_a^b e^{u_x} dx.$$

По формуле (5.5) получаем интеграл уравнения (5.20)

$$I[t,u] = \int\limits_a^b e^{u_x}\left(1 + u_x\right) dx.$$

Отметим, что в данном случае

$$\langle \Lambda(u), \mathcal{S}(u)\rangle = \frac{1}{2}\int\limits_a^b u_x u_{tx} e^{u_x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_a^b u_x D_t e^{u_x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_a^b \left[D_t\left(u_x e^{u_x}\right) - u_{tx} e^{u_x}\right] dx = \frac{1}{2}\int\limits_a^b D_t\left[\left(u_x - 1\right) e^{u_x}\right] dx,$$

то есть

$$f_1[u] = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(u_x - 1\right) e^{u_x} dx,$$

$$\left\langle u\tilde{\mathcal{R}}^*_{3u} u_t + \tilde{\mathcal{R}}_{3u}(u_t u) + \tilde{\mathcal{R}}^*_{2u} u_t + \tilde{\mathcal{R}}_{2u} u_t + \tilde{\mathcal{R}}_1(u) - \frac{\partial \tilde{\mathcal{R}}_{2u}}{\partial t} u, D_t \mathcal{S}(u)\right\rangle +$$

$$+ \left\langle u_t \tilde{\mathcal{R}}^*_{3u} u_t + \left[\tilde{\mathcal{R}}'_{3u}(u_t u; \cdot)\right]^* u_t + \left[\tilde{\mathcal{R}}'_{2u}(u_t; \cdot)\right]^* u_t + \tilde{\mathcal{R}}'^*_{1u} u_t - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{R}}_{2u}}{\partial t}\right)^* u_t - \left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathcal{R}}'_{2u}(u; \cdot)\right)^* u_t + grad_{\Phi_1}\tilde{\mathcal{B}}[u], \mathcal{S}(u)\right\rangle =$$

$$= \int_a^b \left[-\frac{1}{2} u_x e^{u_x} u_{tx} + \frac{1}{2} u_{tx} e^{u_x} + u_{xx} e^{u_x} \right] dx =$$

$$= \int_a^b \left[-\frac{1}{2} D_t \left(\left(u_x - 1 \right) e^{u_x} \right) + \frac{1}{2} D_t e^{u_x} + D_x e^{u_x} \right] dx =$$

$$= \int_a^b D_t \left[e^{u_x} \left(1 - \frac{1}{2} u_x \right) \right] dx,$$

то есть

$$f[u] = \int_a^b e^{u_x} \left(1 - \frac{1}{2} u_x \right) dx.$$

Следовательно, условия (5.12) и (5.13) выполнены, но теорема 3.4 не может быть применена для нахождения интеграла уравнения (5.20), так как

$$e^{u_x}\big|_{x=a} = 1 \neq 0, \qquad e^{u_x}\big|_{x=b} = 1 \neq 0.$$

Пример 5.3.

Рассмотрим уравнение движения

$$N(u) \equiv u\ddot{u} + 3\dot{u}^2 = 0, \qquad t \in (t_0, t_1). \tag{5.23}$$

Отметим (см. [40]), что уравнение (5.23) является частным случаем уравнения

$$u\ddot{u} = f(t)\dot{u}^2,$$

которое с помощью замены

$$w(t) = \frac{t\dot{u}}{u}$$

приводится к уравнению Бернулли

$$t\dot{w} = w + [f(t) - 1]w^2.$$

Положим

$$D(N) = \left\{ u \in U = C^2[t_0, t_1] : \ u|_{t=t_0} = u_0, \ \ u|_{t=t_1} = u_1 \right\}, \qquad (5.24)$$

где $u_0, \ u_1$ - постоянные.

Введем обозначение $V = C[t_0, t_1]$ и зададим билинейную форму $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ в виде

$$\Phi(v, g) = \int\limits_{t_0}^{t_1} v(t)g(t)dt. \qquad (5.25)$$

В данном случае

$$P_{2u} = uI, \ P_{3u} \equiv 3I, \ P_{1u} \equiv 0, \ Q \equiv 0,$$

I - тождественный оператор.

Оператор N (5.23) не является потенциальным на $D(N)$ (5.24) относительно билинейной формы (5.25). Условие (1.51) не выполняется, так как

$$\dot{u}P^*_{3u}h = 3\dot{u}h, \quad P^*_{2u} = uI, \quad P^{*\prime}_{2u}(h; \dot{u}) = h\dot{u}, \quad P_{3u}(\dot{u}h) = 3\dot{u}h.$$

Отметим, что уравнение (5.23) представимо в форме уравнения Лагранжа с не-B_u-потенциальной плотностью силы.

Положим $B_u = uI, \ \Lambda(u) = 2\dot{u}^2$.

Тогда

$$\tilde{P}_{2u} = uI, \ \tilde{P}_{3u} \equiv I, \ \tilde{P}_{1u} \equiv 0, \ \tilde{Q} \equiv 0$$

и условия (1.16)–(1.22) выполняются.

Действительно,

(1.16)$\Longrightarrow u^2I - u^2I = 0,$

(1.17)$\Longrightarrow \dot{u}uh - uh\dot{u} - uh\dot{u} + uh\dot{u} = 0,$

(1.18)$\Longrightarrow 0=0,$
(1.19)$\Longrightarrow 0=0,$
(1.20)$\Longrightarrow 0=0,$
(1.21)$\Longrightarrow u\ddot{u}h - uh\ddot{u} - \ddot{u}uh + 2\ddot{u}uh + hu\ddot{u} - uh\ddot{u} - hu\ddot{u} = 0,$
(1.22)$\Longrightarrow h\dot{u}^2 - 2h\dot{u}^2 + 2\dot{u}^2h - h\dot{u}^2 = 0.$

Далее,

$$\tilde{\mathfrak{R}}_1 \equiv 0, \quad \tilde{\mathfrak{R}}_{2u} = -\frac{1}{4}uI, \quad \tilde{\mathfrak{R}}_{3u} = -\frac{1}{4}I, \quad \tilde{\mathfrak{B}} \equiv 0.$$

Пусть $\mathcal{S}(u) = u$. Из условия (5.1) находим

$$\left(-\frac{1}{4}u^2\dot{u} - \frac{1}{4}u^2\dot{u} - \frac{1}{4}u^2\dot{u} - \frac{1}{4}u^2\dot{u}\right)\dot{u} +$$
$$+\left(-\frac{1}{4}u\dot{u}^2 - \frac{1}{4}u\dot{u}^2 - \frac{1}{4}u\dot{u}^2 - \frac{1}{4}u\dot{u}^2\right)u + 2\dot{u}^2u^2 =$$
$$= -u^2\dot{u}^2 - u^2\dot{u}^2 + 2u^2\dot{u}^2 = 0,$$

то есть $z \equiv 0$.

По формуле (5.2) получаем интеграл уравнения (5.23)

$$I[t,u] = u^3\dot{u}.$$

Отметим, что в данном случае условия (5.10) и (5.11) не выполняются, поэтому теорема 3.2 не может быть применена для нахождения интеграла уравнения (5.23).

5.2 Интегральные инварианты

Цель настоящего параграфа - установить связь между первыми интегралами уравнений движения непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы и их абсолютными интегральными инвариантами первого порядка.

Рассмотрим уравнения движения материальной системы вида

$$\tilde{N}(u) \equiv u_t - N(u) = 0, \tag{5.26}$$

$$t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R},\ u \in D(\tilde{N}) \subseteq U \subseteq V,$$

$U = C^1([t_0, t_1], U_1)$, $V = C([t_0, t_1], V_1)$, U_1, V_1 - действительные линейные нормированные пространства, $U_1 \subseteq V_1$.

Пусть $u = u(\lambda, t) \in D(\tilde{N})$ есть семейство решений уравнения (5.26) при $\lambda \in \Delta \subset [0, 1]$, где Δ - интервал.

Пусть задан оператор $\mathcal{A} : D(\tilde{N}) \to V$ и симметрическая невырожденная билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle : V_1 \times V_1 \to \mathbb{R}$. Тогда интеграл $\int\limits_{\Delta} \langle \mathcal{A}(u), \partial u / \partial \lambda \rangle \, d\lambda$ может зависеть от t.

Определение 5.1. [92] Интеграл $\int\limits_{\Delta} \langle \mathcal{A}(u), \partial u / \partial \lambda \rangle \, d\lambda$ называется абсолютным интегральным инвариантом первого порядка уравнения (5.26), если для любого интервала $\Delta \subset [0, 1]$ его значения не зависят от t.

Теорема 5.5. *Интеграл*

$$\int\limits_{\Delta} \left\langle \mathcal{A}(u), \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right\rangle d\lambda \tag{5.27}$$

является абсолютным интегральным инвариантом уравнения (5.26) тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial \mathcal{A}(u)}{\partial t} + \mathcal{A}'_u N(u) + N'^*_u \mathcal{A}(u) = 0 \qquad \forall u \in D(\tilde{N}). \tag{5.28}$$

Доказательство. Пусть выражение (5.27) есть абсолютный интегральный инвариант уравнения (5.26). Тогда в силу произвольности интервала Δ имеем

$$\frac{d}{dt} \left\langle \mathcal{A}(u), \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right\rangle = 0.$$

Из последнего равенства получаем

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{A}(u)}{\partial t} + \mathcal{A}'_u N(u) + N'^*_u \mathcal{A}(u), \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right\rangle = 0,$$

то есть условие (5.28) является необходимым.

Достаточность доказывается обратным ходом рассуждений. □

Теорема 5.6. *Если функционал $I[t,u]$ является интегралом уравнения (5.26), то*

$$\int\limits_{\Delta} \left\langle gradI[t,u], \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right\rangle d\lambda \tag{5.29}$$

есть абсолютный интегральный инвариант этого уравнения.

Доказательство. Имеем

$$\frac{d}{dt} I[t,u]\bigg|_{(5.26)} = \frac{\partial I}{\partial t} + \langle gradI[t,u], N(u)\rangle = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{d}{dt} I[t,u]\bigg|_{(5.26)}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} gradI[t,u] + (gradI[t,u])'_u N(u) + N'^{*}_u gradI[t,u] = 0$$

$$\forall u \in D(\tilde{N}).$$

Так как это соотношение совпадает с условием (5.28), то отсюда следует справедливость сформулированного утверждения. □

Пример 5.4.

Рассмотрим уравнение

$$\tilde{N}(u) \equiv u_t + u_x - u^n = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \ \ n \neq 1, \tag{5.30}$$

$$(x,t) \in \mathcal{Q} = (a,b) \times (t_0, t_1).$$

Отметим, что уравнение (5.30) является частным случаем уравнения переноса [47]

$$u_t + cu_x = \phi(u, x, t), \tag{5.31}$$

где c - скорость переноса.

Уравнения вида (5.31) описывают процессы переноса частиц в средах, распространения возмущений и т.д.

Положим

$$D(\tilde{N}) = \left\{ u \in U = C^1(\overline{\mathbb{Q}}) : \; u|_{x=a} = u|_{x=b} = \varphi(t), \;\; t \in (t_0, t_1) \right\},$$

где φ - заданная непрерывная функция, $\varphi(t) \neq 0 \;\; \forall t \in (t_0, t_1)$.

Зададим билинейную форму $\langle \cdot, \cdot \rangle : V_1 \times V_1 \to \mathbb{R}$ в виде

$$\langle v, g \rangle = \int\limits_a^b v(x,t) g(x,t) dx.$$

В данном случае

$$N(u) = -u_x + u^n, \quad N'_u = -D_x + nu^{n-1} I, \quad N'^*_u = D_x + nu^{n-1} I,$$

где I - тождественный оператор.

Пусть

$$\mathcal{A}(u) = u^{-n}.$$

Тогда

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \equiv 0, \qquad \mathcal{A}'_u = -nu^{-n-1} I.$$

Условие (5.28) в данном случае выполнено. Действительно,

$$\frac{\partial \mathcal{A}(u)}{\partial t} + \mathcal{A}'_u N(u) + N'^*_u \mathcal{A}(u) =$$

$$= -nu^{-n-1} \left(-u_x + u^n \right) + D_x u^{-n} + nu^{n-1} u^{-n} =$$

$$= nu^{-n-1} u_x - nu^{-1} - nu^{-n-1} u_x + nu^{-1} = 0.$$

По формуле (5.27) получаем абсолютный интегральный инвариант уравнения (5.30) вида

$$\int\limits_{\Delta}\int\limits_{a}^{b}\frac{1}{u^n}\cdot\frac{\partial u}{\partial\lambda}\,dxd\lambda.$$

Замечание 5.8. Отметим, что

$$\mathcal{A}(u)=u^{-n}=gradI[t,u],$$

где

$$I[t,u]=\frac{1}{1-n}\int\limits_a^b u^{1-n}dx. \tag{5.32}$$

Выражение (5.32) не является первым интегралом уравнения (5.30), так как

$$\frac{d}{dt}I[t,u]\bigg|_{(5.30)}=\frac{1}{1-n}\cdot\frac{d}{dt}\int\limits_a^b u^{1-n}dx\Bigg|_{(5.30)}=$$

$$=\frac{1}{1-n}\int\limits_a^b(1-n)u^{-n}u_tdx\Bigg|_{(5.30)}=\int\limits_a^b u^{-n}\left(-u_x+u^n\right)dx=$$

$$=\int\limits_a^b\left(-u^{-n}u_x+1\right)dx=\frac{1}{n-1}\int\limits_a^b D_xu^{1-n}dx+b-a=b-a\neq 0.$$

Пример 5.5.

Рассмотрим уравнение движения

$$\tilde{N}(u)\equiv u_t+u_{xxx}+\alpha u_{xx}u_{xxx}=0, \tag{5.33}$$

$$(x,t) \in \mathcal{Q} = (a,b) \times (t_0,t_1),$$

где α - постоянная.

Отметим, что при $\alpha = 0$ уравнение (5.33) является линеаризованным уравнением Кортевега-де Фриза [1].

Положим

$$D(N) = D(N'_u) = \Big\{ u \in U = C^4\left(\overline{\mathcal{Q}}\right) : \; u|_{t=t_0} = 0, \;\; u|_{t=t_1} = 0,$$

$$u|_{x=a} = 0, \;\; u|_{x=b} = 0, \;\; u_x|_{x=a} = 0, \;\; u_x|_{x=b} = 0,$$

$$\left. u_{xx}|_{x=a} = 0, \;\; u_{xx}|_{x=b} = 0, \;\; \int\limits_a^b u(y,t)dy = 0 \right\}. \tag{5.34}$$

Введем обозначение $V = C\left(\overline{\mathcal{Q}}\right)$ и зададим билинейную форму $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ в виде

$$\Phi(v,g) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_a^b v(x,t) g(x,t) dx dt. \tag{5.35}$$

В данном случае

$$P_{2u} \equiv 0, \;\; P_{3u} \equiv 0, \;\; P_{1u} \equiv I, \;\; Q(u) = u_{xxx} + \alpha u_{xx} u_{xxx},$$

I - тождественный оператор.

Оператор N (5.33) не является потенциальным на $D(N)$ (5.34) относительно билинейной формы (5.35). Условие (1.52) не выполняется, так как

$$\frac{\partial P^*_{2u}}{\partial t} \equiv 0, \quad P_{1u} \equiv I, \quad P^*_{1u} \equiv I.$$

Отметим, что уравнение (5.33) представимо в форме уравнения Лагранжа с не-B-потенциальной плотностью силы.

Положим

$$B_u \equiv B = D_x^{-1}, \quad \Lambda(u) = \alpha u_{xx} u_{xxx},$$

где

$$D_x^{-1}v(x,t) = \int\limits_a^x v(y,t)dy.$$

Тогда

$$\tilde{P}_{2u} \equiv 0, \ \tilde{P}_{3u} \equiv 0, \ \tilde{P}_{1u} \equiv I, \ \tilde{Q}(u) = u_{xxx}$$

и условия (1.16)–(1.22) выполняются.

Действительно,
(1.16)$\Longrightarrow 0 = 0,$
(1.17)$\Longrightarrow 0 = 0,$
(1.18)$\Longrightarrow D_x^{-1} - D_x^{-1} = 0,$
(1.19)$\Longrightarrow -D_x^{-1}D_x^3 + D_x^3 D_x^{-1} = -D_x^2 + D_x^2 = 0,$
(1.20)$\Longrightarrow 0 = 0,$
(1.21)$\Longrightarrow 0 = 0,$
(1.22)$\Longrightarrow 0 = 0.$

Далее,

$$\tilde{\mathfrak{R}}_1(u) = -\frac{u}{2}, \quad \tilde{\mathfrak{R}}_{2u} \equiv 0, \quad \tilde{\mathfrak{R}}_{3u} \equiv 0, \quad \tilde{\mathfrak{B}}[u] = \frac{1}{2}\int\limits_a^b u_x^2 dx.$$

Пусть $\mathcal{S}(u) = u_{xxx}$.

Из условия (5.1) находим

$$\int\limits_a^b \left(\frac{1}{2}D_x^{-1}u \cdot u_{txxx} - \frac{1}{2}D_x^{-1}u_t \cdot u_{xxx} - u_{xx}u_{xxx} + \right.$$

$$\left. + \alpha u_{xx}u_{xxx}D_x^{-1}u_{xxx}\right) dx = \int\limits_a^b \left(-\frac{1}{2}u_{xx}u_t + \frac{1}{2}u_t u_{xx} - \frac{1}{2}D_x u_{xx}^2 + \right.$$

$$\left. + \alpha u_{xx}^2 u_{xxx}\right) dx = \int\limits_a^b \left(-\frac{1}{2}D_x u_{xx}^2 + \frac{\alpha}{3}D_x u_{xx}^3\right) dx = 0,$$

то есть $z \equiv 0$.

По формуле (5.2) получаем интеграл уравнения (5.33)

$$I[t,u] = -\frac{1}{2}\int\limits_a^b D_x^{-1} u u_{xxx} dx = -\frac{1}{2}\int\limits_a^b u_x^2 dx.$$

Тогда

$$gradI[t,u] = u_{xx}$$

и по формуле (5.29) получаем абсолютный интегральный инвариант уравнения (5.33) вида

$$\int\limits_\Delta \int\limits_a^b u_{xx} \cdot \frac{\partial u}{\partial \lambda} dx d\lambda. \tag{5.36}$$

Замечание 5.9. Интеграл (5.36) является также абсолютным интегральным инвариантом линеаризованного уравнения Кортевега-де Фриза.

Пример 5.6.

Рассмотрим уравнение Гарри-Дима

$$N(u) \equiv u_t - \left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)_{xxx} = 0, \tag{5.37}$$

$$(x,t) \in \mathcal{Q} = (a,b) \times (t_0, t_1).$$

Известно (см., например, [108]), что функционал

$$I[t,u] = 2\int\limits_a^b \sqrt{u}\, dx \tag{5.38}$$

является интегралом уравнения (5.37).

Тогда

$$gradI[t,u] = \frac{1}{\sqrt{u}}$$

и по формуле (5.29) получаем абсолютный интегральный инвариант уравнения (5.37) вида

$$\int\limits_{\Delta}\int\limits_{a}^{b} \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \lambda} dx d\lambda.$$

Глава 6

Исследование движения шарнирно-опертого на обоих концах призматического стержня

В настоящей главе рассматривается шарнирно-опертый на обоих концах призматический стержень, одна опора которого ($x = 0$) неподвижна, а другая, первоначально находившаяся в точке $x = l$, сначала смещена на отрезок w_0 в направлении x, а затем периодически перемещается с круговой частотой γ вдоль оси x около точки с абсциссой $x = l + w_0$.

Будем предполагать (см. [46]), что ось призматического стержня с поперечным сечением Q, имеющим площадь F, в недеформированном состоянии совпадает с осью x прямоугольной системы координат (x, y, z); концам стержня соответствуют координаты $x = 0$ и $x = l$; главные оси инерции поперечного сечения стержня параллельны осям y и z; ось стержня может изгибаться только в плоскости (x, z). Компоненты перемещения той точки оси стержня, которая в недеформированном состоянии имела абсциссу x, в момент времени t в направлениях x и z обозначены соответственно $w(x, t)$ и $u(x, t)$, причем

$$w(0, t) = 0, \qquad w(l, t) = w_0 + w_1(t),$$

где $w_1(t)$ – периодическая функция времени с круговой частотой γ. Составляющая в направлении x вектора скорости, с которой движется некоторая точка срединного волокна балки, то есть производная $\partial w/\partial t$, всегда настолько мала, что абсолютное значение этого вектора с достаточной точностью можно определить абсолютным значением его составляющей в направлении z, то есть производной $\partial u/\partial t$. Закон движения правого конца стержня, то есть перемещения $w(l,t)$, считается заданным.

6.1 Случай потенциального оператора

При указанных предположениях уравнение движения имеет вид [46]

$$N(u) \equiv a u_{tt} + b u_{xxxx} + c(t) u_{xx} + d u_{xx} \int\limits_0^l u_y^2(y,t)\,dy = 0, \qquad (6.1)$$

$$(x,t) \in Q_T = (0,l)\times(0,T).$$

Здесь

$$a = \mu,\ b = EJ,\ c(t) = -\frac{EF}{l}\left[w_0 + w_1(t)\right],\ d = -\frac{EF}{2l},$$

$\mu = \rho F$ – масса единицы длины стержня, ρ – плотность его материала, E – модуль упругости материала, EJ – изгибная жесткость стержня, осевой момент инерции поперечного сечения стержня

$$J = \iint\limits_Q z^2 dydz,$$

l – длина стержня.

Положим

$$D(N) = \Big\{ u \in U = C_{t,x}^{2,\infty}(\overline{\mathrm{Q}}) : u|_{t=0} = \varphi_1(x),\ u|_{t=T} = \varphi_2(x)$$

$$(x \in (0,l)),\ u|_{x=0} = \psi_1(t),\ u|_{x=l} = \psi_2(t),\ u_x|_{x=0} = \psi_3(t),$$

$$u_x|_{x=l} = \psi_4(t),\ u_t|_{x=0} = \psi_5(t),\ u_t|_{x=l} = \psi_6(t),$$
$$u_{tx}|_{x=0} = \psi_7(t),\ u_{tx}|_{x=l} = \psi_8(t)\ (t \in (0,T))\}\,, \tag{6.2}$$

где $\varphi_i \in C[0,l]$ $(i = 1,2)$, $\psi_j \in C[0,T]$ $(j = \overline{1,8})$.

Введем классическую билинейную форму

$$\Phi(v,g) = \int\limits_0^T \int\limits_0^l v(x,t)g(x,t)dxdt. \tag{6.3}$$

Покажем, что оператор N уравнения (6.1) является потенциальным на множестве $D(N)$ (6.2) относительно билинейной формы (6.3).

Отметим, что

$$P_{2u} \equiv aI,\ P_{1u} \equiv 0,\ P_{3u} \equiv 0,$$

$$Q(u) = bu_{xxxx} + c(t)u_{xx} + du_{xx}\int\limits_0^l u_y^2(y,t)dy,$$

где I – тождественный оператор.

Условия (1.50)–(1.52), (1.54)–(1.56), очевидно, выполнены, а условие (1.53) в данном случае принимает вид

$$Q'_u - Q'^*_u = 0.$$

Найдем Q'_u и Q'^*_u. Имеем

$$Q'_u h =$$

$$= bh_{xxxx} + c(t)h_{xx} + dh_{xx}\int\limits_0^l u_y^2(y,t)dy + 2du_{xx}\int\limits_0^l u_y(y,t)h_y(y,t)dy,$$

$$\Phi(Q'_u h, g) = \int\limits_0^T\int\limits_0^l \Bigg(bh_{xxxx}g + c(t)h_{xx}g + dh_{xx}g\int\limits_0^l u_y^2(y,t)dy +$$

$$+ 2du_{xx}g\int\limits_0^l u_y(y,t)h_y(y,t)dy\Bigg)\,dxdt =$$

$$= \int\limits_0^T\int\limits_0^l \left(bhg_{xxxx} + c(t)hg_{xx} + dhg_{xx}\int\limits_0^l u_y^2(y,t)dy\right)dxdt+$$

$$+2d\int\limits_0^T\int\limits_0^l\int\limits_0^l u_{xx}(x,t)g(x,t)u_y(y,t)h_y(y,t)dydxdt =$$

$$= \int\limits_0^T\int\limits_0^l \left(bhg_{xxxx} + c(t)hg_{xx} + dhg_{xx}\int\limits_0^l u_y^2(y,t)dy\right)dxdt+$$

$$+2d\int\limits_0^T\int\limits_0^l\int\limits_0^l u_y(y,t)g_y(y,t)u_{xx}(x,t)h(x,t)dydxdt =$$

$$= \int\limits_0^T\int\limits_0^l h\Bigg(bg_{xxxx} + c(t)g_{xx} + dg_{xx}\int\limits_0^l u_y^2(y,t)dy+$$

$$+2du_{xx}\int\limits_0^l u_y(y,t)g_y(y,t)dy\Bigg)\,dxdt = \Phi(h, Q'_u g),$$

то есть $Q'_u = Q'^*_u$, поэтому условие (1.53) также выполнено.

Построим функционал F_N. По формулам (1.115)–(1.118) находим

$$\mathcal{R}_1 \equiv 0, \quad \mathcal{R}_{2u} \equiv -\frac{a}{2}I, \quad \mathcal{R}_{3u} \equiv 0,$$

$$\mathcal{B}[u] = -\frac{1}{2}\int\limits_0^l \left(c(t)u_x^2 + \frac{d}{2}u_x^2\int\limits_0^l u_y^2dy - bu_{xx}^2\right)dx.$$

Тогда по формуле (1.114) получаем

$$F_N^T[u] = -\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^l \left(au_t^2 + c(t)u_x^2 + \frac{d}{2}u_x^2\int\limits_0^l u_y^2 dy - bu_{xx}^2 \right) dxdt. \tag{6.4}$$

Отметим, что действие по Гамильтону (6.4) не принадлежит классу функционалов Эйлера-Лагранжа.

Найдем интегралы уравнения (6.1).

Предположим, что $\psi_j = 0$ $(j = \overline{1,8})$ в (6.2).

Операторы $S_n = D_x^{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ являются генераторами симметрий функционала (6.4).

Действительно,

$$F_N^{T_1}[u + \varepsilon D_x^{2n-1}u] = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{T_1}\int\limits_0^l \left[a(u_t + \varepsilon D_x^{2n-1}u_t)^2 + \right.$$

$$+c(t)(u_x + \varepsilon D_x^{2n}u)^2 + \frac{d}{2}(u_x + \varepsilon D_x^{2n}u)^2 \int\limits_0^l (u_y + \varepsilon D_y^{2n}u)^2 dy -$$

$$\left. -b(u_{xx} + \varepsilon D_x^{2n+1}u)^2\right] dxdt = F_N^{T_1}[u] -$$

$$-\varepsilon \int\limits_0^{T_1}\int\limits_0^l \left[au_t D_x^{2n-1}u_t + c(t)u_x D_x^{2n}u + \frac{d}{2}u_x^2 \int\limits_0^l u_y D_y^{2n}u dy + \right.$$

$$\left. + \frac{d}{2}u_x D_x^{2n}u \int\limits_0^l u_y^2 dy - bu_{xx}D_x^{2n+1}u \right] dxdt + o(\varepsilon) = F_N^{T_1}[u] -$$

$$-\varepsilon(-1)^n \int\limits_0^{T_1}\int\limits_0^l \left[aD_x^n u_t D_x^{n-1}u_t + c(t)D_x^{n+1}uD_x^n u + \right.$$

$$+\frac{d}{2}u_x^2\int\limits_0^l D_y^{n+1}uD_y^n u dy+\frac{d}{2}D_x^{n+1}uD_x^n u\int\limits_0^l u_y^2 dy-$$

$$-bD_x^{n+2}uD_x^{n+1}u\big]\,dxdt+o(\varepsilon)=F_N^{T_1}[u]-$$

$$-\frac{\varepsilon}{2}(-1)^n\int\limits_0^{T_1}\int\limits_0^l\Big(D_x\Big[a\left(D_x^{n-1}u_t\right)^2+c(t)\left(D_x^n u\right)^2+$$

$$+\frac{d}{2}\left(D_x^n u\right)^2\int\limits_0^l u_y^2 dy-b\left(D_x^{n+1}u\right)^2\Big]+\frac{d}{2}u_x^2\int\limits_0^l D_y\left(D_y^n u\right)^2 dy\Big)\,dxdt+$$

$$+o(\varepsilon)=F_N^{T_1}[u]+o(\varepsilon)\quad\forall T_1:0\le T_1\le T,$$

то есть имеет место абсолютная инвариантность.

Таким образом, по формуле (3.13) получаем интегралы уравнения (6.1) вида

$$I_n[t,u]=\int\limits_0^l D_x^n u_t D_x^{n-1}u dx,\ n\in\mathbb{N}.$$

Представим уравнение (6.1) в форме уравнений Гамильтона. Отметим, что

$$L[u,u_t]=-\frac{1}{2}\int\limits_0^l\left(au_t^2+c(t)u_x^2+\frac{d}{2}u_x^2\int\limits_0^l u_y^2 dy-bu_{xx}^2\right)dx.$$

По формуле (4.67) находим

$$p=-au_t,$$

поэтому

$$u_t=-\frac{p}{a}.$$

Далее, по формуле (4.69) получаем

$$H[u,p] = -\frac{1}{2}\int\limits_0^l \left[\frac{p^2}{a} - c(t)u_x^2 - \frac{d}{2}u_x^2\int\limits_0^l u_y^2 dy + bu_{xx}^2\right] dx. \qquad (6.5)$$

Уравнения Гамильтона (4.78) в данном случае имеют вид

$$\begin{cases} u_t = -\frac{p}{a}, \\ p_t = c(t)u_{xx} + du_{xx}\int\limits_0^l u_y^2(y,t)dy + bu_{xxxx}. \end{cases} \qquad (6.6)$$

Замечание 6.1. Отметим, что гамильтониан (6.5) не принадлежит классу функционалов Эйлера-Лагранжа.

Замечание 6.2. Если $c(t) \equiv c$ - постоянная, то гамильтониан (6.5) является интегралом системы уравнений (6.6).

6.2 Случай квазипотенциального оператора

Дополним уравнение движения (6.1) членом, учитывающим демпфирование, пропорциональное скорости u_t, причем постоянную демпфирования обозначим через β. В результате получим уравнение [46]

$$N(u) \equiv au_{tt} + \beta u_t + bu_{xxxx} + c(t)u_{xx} + du_{xx}\int\limits_0^l u_y^2(y,t)dy = 0. \quad (6.7)$$

В данном случае

$$P_{2u} \equiv aI, \ P_{1u} \equiv \beta I, \ P_{3u} \equiv 0,$$

$$Q(u) = bu_{xxxx} + c(t)u_{xx} + du_{xx}\int\limits_0^l u_y^2(y,t)dy.$$

Оператор N уравнения (6.7) не является потенциальным на множестве $D(N)$ (6.2) относительно билинейной формы (6.3), так как условие (1.52) не выполняется.

Отметим, что уравнение (6.7) представимо в форме уравнения Лагранжа с непотенциальной плотностью силы, где

$$\Lambda(u) = \beta u_t.$$

Тогда

$$\tilde{P}_{2u} = aI, \ \ \tilde{P}_{1u} \equiv 0, \ \ \tilde{P}_{3u} \equiv 0,$$

$$\tilde{Q}(u) = bu_{xxxx} + c(t)u_{xx} + du_{xx}\int\limits_0^l u_y^2(y,t)dy$$

и условия (1.29) - (1.35) выполняются.

Действительно,

(1.29)$\Longrightarrow$ $aI - aI = 0,$

(1.30)$\Longrightarrow$ $0 = 0,$

(1.31)$\Longrightarrow$ $0 = 0,$

(1.32)$\Longrightarrow$ $dh_{xx}\int\limits_0^l u_y^2(y,t)dy + c(t)h_{xx} + 2du_{xx}\int\limits_0^l u_y(y,t)h_y(y,t)dy +$ $bh_{xxxx} - dh_{xx}\int\limits_0^l u_y^2(y,t)dy - 2du_{xx}\int\limits_0^l u_y(y,t)h_y(y,t)dy - bh_{xxxx} -$ $c(t)h_{xx} = 0,$

(1.33)$\Longrightarrow$ $0 = 0,$

(1.34)$\Longrightarrow$ $0 = 0,$

(1.35)$\Longrightarrow$ $0 = 0.$

Из (1.105) - (1.108) получаем

$$\tilde{\mathfrak{R}}_{2u} = -\frac{a}{2}I, \quad \tilde{\mathfrak{R}}_{1} \equiv 0, \quad \tilde{\mathfrak{R}}_{3u} \equiv 0,$$

$$\tilde{\mathfrak{B}}[u] = -\frac{1}{2}\int\limits_0^l \left(c(t)u_x^2 + \frac{d}{2}u_x^2\int\limits_0^l u_y^2 dy - bu_{xx}^2 \right) dx.$$

Соответствующее действие по Гамильтону находится по формуле (1.104) и имеет вид

$$F^T[u] = -\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^l \left(au_t^2 + c(t)u_x^2 + \frac{d}{2}u_x^2\int\limits_0^l u_y^2 dy - bu_{xx}^2\right) dxdt,$$

то есть совпадает с (6.4).

Пусть $\mathcal{S}_n = e^{\frac{\beta t}{a}} D_x^{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Из условия (5.4) находим

$$\int\limits_0^l \left[\left(-\frac{a}{2}u_t - \frac{a}{2}u_t\right)\left[\frac{\beta}{a}e^{\frac{\beta t}{a}}D_x^{2n-1}u + e^{\frac{\beta t}{a}}D_x^{2n-1}u_t\right] + bD_x^4 u e^{\frac{\beta t}{a}}D_x^{2n-1}u + \right.$$

$$+c(t)u_{xx}e^{\frac{\beta t}{a}}D_x^{2n-1}u + du_{xx}e^{\frac{\beta t}{a}}D_x^{2n-1}u\int\limits_0^l u_y^2(y,t)dy +$$

$$\left. +\beta u_t e^{\frac{\beta t}{a}}D_x^{2n-1}u\right] dx = (-1)^n e^{\frac{\beta t}{a}}\int\limits_0^l \left[-\beta D_x^n u_t D_x^{n-1}u - \right.$$

$$-aD_x^n u_t D_x^{n-1}u_t + bD_x^{n+2}uD_x^{n+1}u - c(t)D_x^{n+1}uD_x^n u -$$

$$\left. -dD_x^{n+1}uD_x^n u\int\limits_0^l u_y^2(y,t)dy + \beta D_x^n u_t D_x^{n-1}u\right] dx =$$

$$= (-1)^n e^{\frac{\beta t}{a}}\int\limits_0^l D_x\left[\frac{b}{2}\left(D_x^{n+1}u\right)^2 - \frac{a}{2}\left(D_x^{n-1}u_t\right)^2 - \right.$$

$$\left. -\frac{c(t)}{2}\left(D_x^n u\right)^2 - \frac{d}{2}\left(D_x^n u\right)^2\int\limits_0^l u_y^2(y,t)dy\right] dx = 0,$$

то есть $z[u] = 0$.

По формуле (5.5) получаем интегралы уравнения (6.7)

$$I_n[t,u] = e^{\frac{\beta t}{a}} \int\limits_0^l D_x^n u_t D_x^{n-1} u dx, \ n \in \mathbb{N}.$$

Представим уравнение (6.7) в форме Гамильтона-допустимых уравнений.

Отметим, что

$$p = -au_t,$$

то есть

$$u_t = -\frac{p}{a},$$

а гамильтониан H совпадает с (6.5).

По формуле (4.71) находим

$$s(u,p) = -\frac{\beta p}{a}.$$

Следовательно, Гамильтона-допустимые уравнения (4.72) в данном случае имеют вид

$$\begin{cases} u_t = -\frac{p}{a}, \\ p_t = c(t)u_{xx} + du_{xx} \int\limits_0^l u_y^2(y,t)dy + bu_{xxxx} - \frac{\beta p}{a}. \end{cases} \tag{6.8}$$

Функционал

$$I[t,u] = e^{\frac{\beta t}{a}} \int\limits_0^l p dx$$

является интегралом системы уравнений (6.8), так как условие (4.28) в данном случае выполнено.

Замечание 6.3. Функционал

$$I[t,u] = e^{\frac{\beta t}{a}} \int\limits_0^l u_t dx$$

является интегралом уравнения (6.7).

Заключение

В диссертационной работе впервые получены следующие результаты.

1. Получены необходимые и достаточные условия представимости достаточно общих уравнений движения систем с бесконечным числом степеней свободы со второй производной по времени в форме уравнений Лагранжа с не-B_u-потенциальными плотностями сил, то есть, другими словами, необходимые и достаточные условия квази-B_u-потенциальности операторов рассматриваемых уравнений движения (в качестве следствий получены необходимые и достаточные условия квазипотенциальности, B_u-потенциальности, потенциальности операторов рассматриваемых уравнений движения).
2. Разработан конструктивный прием построения действий по Гамильтону, в общем случае не принадлежащих классу функционалов Эйлера-Лагранжа.
3. В терминах необходимых и достаточных условий определена структура уравнений движения квази-B_u-потенциальных (квазипотенциальных, B_u-потенциальных, потенциальных) систем с бесконечным числом степеней свободы со второй производной по времени.
4. Доказано, что при определенных условиях уравнения движения потенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы с первой производной по времени имеют структуру классических

уравнений Биркгофа, а действия по Гамильтону являются известными функционалами Пфаффа.

5. Используя подходы, в том числе основанные на применении теории преобразований переменных для установления инвариантности уравнений движения, получены формулы для нахождения интегралов уравнений движения квази-B_u-потенциальных (квазипотенциальных, B_u-потенциальных, потенциальных) систем с бесконечным числом степеней свободы со второй производной по времени.

6. Получено условие инвариантности до дивергенции действий по Гамильтону и дан общий вид интегралов уравнений движения квази-B_u-потенциальных (квазипотенциальных, B_u-потенциальных, потенциальных) систем с бесконечным числом степеней свободы со второй производной по времени.

7. Установлена связь симметрий (уравнений, функционалов) с Ли-допустимыми алгебрами (в том числе алгебрами Ли). Установлена также взаимосвязь между симметриями уравнений движения и вариационными симметриями.

8. Исследован вопрос о распознавании B-гамильтоновости систем с бесконечным числом степеней свободы.

9. Уравнения движения B_u-потенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы с первой производной по времени представлены в форме B_u-гамильтоновых уравнений. Уравнения движения квази-B_u-потенциальных (квазипотенциальных) систем с бесконечным числом степеней свободы со второй производной по времени представлены в форме Гамильтона-допустимых уравнений. Уравнения движения B_u-потенциальных (потенциальных) систем с бесконечным числом степеней свободы со второй производной по времени представлены в форме уравнений Гамильтона.

10. Установлена взаимосвязь между интегралами уравнений движе-

ния систем с бесконечным числом степеней свободы с первой производной по времени и их абсолютными интегральными инвариантами первого порядка.

Теоретические результаты иллюстрируются конкретными примерами: уравнением Бюргерса; системой уравнений, описывающей движение жидкости в пористой среде; уравнением малых поперечных колебаний шарнирно закрепленного прямолинейного трубопровода, по которому течет идеальная жидкость со скоростью $v(t)$ при отсутствии внутреннего и внешнего трения; уравнением Эмдена равновесия для политропного газа; уравнением переноса; уравнением Кортевега-де Фриза-Бюргерса и др., а также рядом модельных примеров.

Обозначения и терминология

Приведем следующие обозначения и терминологию из монографии [92].

1. Бесконечномерными называются системы, состояние которых не может быть определено конечным числом обобщенных координат.
2. Классические билинейные формы – это билинейные формы вида
$$\Phi(v, g) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} v^i(x,t) \cdot g^i(x,t)\, dxdt.$$
3. $\mathbb{R}$ – поле действительных чисел.
4. $\mathbb{R}^m$ – m-мерное евклидово пространство точек $(x^1, ..., x^m)$.
5. Запись $i = \overline{1, n}$ означает, что величина i принимает целые значения от 1 до n.
6. A^T – матрица, транспонированная к матрице A.
7. $\mathbb{Z}_+^m$ – множество, элементами которого являются m-мерные векторы $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$ с неотрицательными целыми числами $\alpha_1, ..., \alpha_m$.
8. $C^s(\Omega)$ – множество функций, непрерывных в области Ω вместе со всеми частными производными до s-го порядка включительно.
9. Запись $u \in C^s([t_0, t_1]; U_1)$ означает, что функция $u : [t_0, t_1] \to U_1$ непрерывна со всеми прозводными до s-го порядка включительно.

10. Если Q_T – некоторая область в пространстве переменных $(x^1, ..., x^m, t)$, то $C^{p,q}(Q_T)$ – это класс функций, которые на множестве Q_T имеют все непрерывные производные по $x^1, ..., x^m$ порядка $\leq p$ и непрерывные производные по t порядка $\leq q$.
11. $u_\alpha(x) = \partial^{|\alpha|}u/(\partial x^1)^{\alpha_1}...(\partial x^m)^{\alpha_m}$ – частная производная, соответствующая мультииндексу α, $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i$.
12. $D_i^{\alpha_i}$ – полная производная α_i-го порядка по переменной x^i.
    $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}...D_m^{\alpha_m}$ – полная производная, соответствующая мультииндексу α.
    $D_\alpha = D^\alpha$.
13. В работе принято стандартное правило тензорного исчисления: по повторяющимся индексам сомножителей, расположенным на разных уровнях, подразумевается суммирование. Пределы изменения индексов определяются из текста.
14. $\delta/\delta u$ – функциональная производная по u, определяемая равенством
    $$\frac{\delta L}{\delta u} = (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\alpha},$$
    где $L[u] = \int\limits_\Omega \mathcal{L}(u_\alpha)dx$, $|\alpha| = \overline{0, s}$.
15. $D(N)$ – область определения, $R(N)$ – область значений оператора N.
    Линейность оператора N понимается в следующем смысле:
    $$N(\lambda_1 u^1 + \lambda_2 u^2) = \lambda_1 N u^1 + \lambda_2 N u^2$$
    $$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \forall u^1, u^2 \in D(N).$$
16. $D(N, B) = \{u : u \in D(N) \cap D(B)\}$.
17. $\mathcal{N}^*$ – сопряженный относительно рассматриваемой билинейной формы оператор, $\mathcal{N}^{-1}$ – обратный оператор, I – тождественный (единичный) оператор.

18. N'_u – производная Гато оператора N в точке $u \in D(N)$.
19. $P_u h$ – линейный по h оператор, произвольным образом зависящий от u.
20. Формула Лейбница

$$D^{\alpha}(f \cdot g) = \binom{\alpha}{\beta}\left(D^{\alpha-\beta} f\right) \cdot \left(D^{\beta} g\right).$$

В данном случае биномиальный коэффициент $\binom{\alpha}{\beta}$ определяется формулой

$$\binom{\alpha}{\beta} = \begin{cases} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \ldots \binom{\alpha_m}{\beta_m}, & \text{если } \ \alpha \geq \beta, \\ 0, & \text{если } \ \alpha < \beta, \end{cases}$$

где

$$\binom{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{\alpha_i!}{\beta_i!(\alpha_i - \beta_i)!}.$$

Запись $\alpha \geq \beta$ означает, что $\alpha_i \geq \beta_i \ \ \forall i = \overline{1, m}$.

21. Через U, V всюду обозначаются линейные нормированные пространства над полем действительных чисел $\mathbb{R}$.
$0_U, 0_V$ – нулевые элементы в U и V соответственно.
22. Класс функционалов Эйлера-Лагранжа, или эйлеров класс функционалов, $E^{m,n,s}$ – это множество интегральных функционалов, определенных формулами вида

$$F[u] = \int\limits_{\Omega} f(x, u_{\alpha}(x)) dx,$$

где $x = (x^1, ..., x^m)$, $u(x) = (u^1(x), ..., u^n(x))$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$, s – наивысший порядок производных, входящих в подынтегральное выражение.

23. Дифференциальными уравнениями с отклоняющимися аргументами называются дифференциальные уравнения, в которые неизвестная функция и ее производные входят при различных значениях аргументов (см. [43]).

24. Если действующие на рассматриваемую систему силы аналитически представлены оператором $f = (f_1, ..., f_n) : D(f) \subset U \to V$, который может произвольным образом зависеть от u, то выражение $f(u)$ называется плотностью сил.

В диссертационной работе классификация сил связана с исследованием квази-B_u-потенциальности рассматриваемого оператора N, поэтому в приведенных ниже определениях оператор $B_u : D(B_u) \subset V \to V$ будем считать известным.

Силы с плотностью $f(u)$ называются B_u-потенциальными (не-B_u-потенциальными) на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$, если существует (не существует) функционал W_f такой, что

$$\delta W_f[u, h] = \Phi(f(u), B_u h) \;\; \forall u \in D(N), \;\; \forall h \in D(N'_u, B_u).$$

Силы с плотностью $f(u)$ называются гироскопическими на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы $\Phi_1 : V_1 \times V_1 \to \mathbb{R}$, если

$$\Phi_1(f(u), B_u u_t) = 0 \qquad \forall u \in D(N).$$

Силы с плотностью $f(u)$ называются диссипативными на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы $\Phi_1 : V_1 \times V_1 \to \mathbb{R}$, если на $D(N)$

$$\Phi_1(f(u), B_u u_t) \neq 0.$$

Силы с плотностью $f(u)$ называются циркуляционными на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы $\Phi_1 : V_1 \times V_1 \to \mathbb{R}$, если оператор f не содержит операцию дифференцирования по t и выполняется равенство

$$\Phi_1(f(u), B_u u) = 0 \quad \forall u \in D(N).$$

Будем называть плотности сил B_u-потенциальными, гироскопическими, диссипативными или циркуляционными, если таковыми являются соответствующие им силы.

25. Пусть $\hat{G}$ – линейное пространство генераторов симметрий (уравнения, функционала). Линейный оператор $\mathcal{R} : \hat{G} \to \hat{G}$ называется оператором рекурсии.

Список литературы

[1] Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.

[2] Авдонина Е. Д., Ибрагимов Н. Х. Группа эквивалентности и нелинейная самосопряженность обобщенного уравнения Компанейца // Уфимский математический журнал, 2012, т. 4, №1, стр. 6-16.

[3] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Едиториал УРСС, 2003.

[4] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1985, т. 3, стр. 5-304.

[5] Арнольд В. И. Гамильтоновость уравнений Эйлера динамики твердого тела и идеальной жидкости // Успехи математических наук, 1969, т. 24, вып. 3, стр. 225-226.

[6] Артамонов Н. В. Об устойчивости решений одного уравнения, возникающего в гидромеханике // Математические заметки, 2000, т. 67, вып. 1, стр. 15-24.

[7] Бердичевский В. Л. Вариационное уравнение в механике сплошных сред // Проблемы механики твердого деформированного тела: К 70-летию акад. В.В. Новожилова. Л.: Судостроение, 1970, стр. 55-56.

[8] Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983.

[9] Биркгоф Дж. Динамические системы. Ижевск: Издательский дом "Удмуртский университет", 1999.

[10] Борисов А. В., Мамаев И. С. Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. Ижевск: Удмурт. ун-т; Ред. журнала "Регулярная и хаотическая динамика", 1999.

[11] Будочкина С. А. О представлении одного операторного уравнения с первой производной по времени в форме B_u-гамильтонова уравнения // Дифференциальные уравнения, 2013, т. 49, №2, стр. 175-185.
(Eng. transl.: On a representation of an operator equation with first time derivative in the form of a B_u-Hamiltonian equation // Differential Equations, 2013, vol. 49, No. 2, pp. 176-186).

[12] Будочкина С.А. О вариационности системы дифференциальных уравнений, описывающей движение жидкости в пористой среде // Современная наука: актуальные проблемы и пути их решения, 2015, №9 (22), стр. 6-7.

[13] Будочкина С.А. B_u-гамильтоновы и Гамильтона-допустимые уравнения в механике бесконечномерных систем // Материалы Всероссийской конференции с международным участием "Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем". М.: РУДН, 2016, стр. 233-235.

[14] Будочкина С. А. О Гамильтона-допустимых уравнениях, их первых интегралах и алгебраических структурах в механике бесконечномерных систем // Continuum. Математика. Информатика. Образование, 2019, №2 (14), стр. 16-21.

[15] Будочкина С. А. О взаимосвязи вариационных симметрий с алгебраическими структурами // Уфимский математический журнал, 2021, т. 13, №1, стр. 46-55.
(Eng. transl.: On connection between variational symmetries and algebraic structures // Ufa Mathematical Journal, 2021, vol. 13, No. 1, pp. 46-55).

[16] Будочкина С. А., Савчин В. М. Вариационные симметрии эйлеровых и неэйлеровых функционалов // Дифференциальные уравнения, 2011, т. 47, №6, стр. 811-818.
(Eng. transl.: Variational symmetries of Euler and non-Euler functionals // Differential Equations, 2011, vol. 47, No. 6, pp. 814-821).

[17] Будочкина С. А., Савчин В. М. О B_u-гамильтоновых уравнениях в механике бесконечномерных систем // Доклады Академии наук, 2011, т. 439, №4, стр. 583-584.
(Eng. transl.: On B_u-Hamiltonian equations in mechanics of infinite-dimensional systems // Doklady Mathematics, 2011, vol. 84, No. 1, pp. 525- 526).

[18] Будочкина С. А., Савчин В. М. О бесконечномерных лагранжевых системах с непотенциальными силами // Доклады Академии наук, 2013, т. 448, №5, стр. 518-519.
(Eng. transl.: On infinite-dimensional Lagrangian systems with nonpotential forces // Doklady Mathematics, 2013, vol. 87, No. 1, pp. 110-111).

[19] Будочкина С. А., Савчин В. М. О квазипотенциальных операторах и Гамильтона-допустимых уравнениях в механике бесконечномерных систем // Доклады Академии наук, 2015, том 464, №3, стр. 267-269.
(Eng. transl.: On quasipotential operators and Hamiltonian-admissible equations in the mechanics of infinite-dimensional

systems // Doklady Mathematics, 2015, vol. 92, No. 2, pp. 554-555).

[20] Будочкина С. А., Савчин В. М. Операторное уравнение со второй производной по времени и Гамильтона-допустимые уравнения // Доклады Академии наук, 2016, том 470, №1, стр. 7-9.
(Eng. transl.: An operator equation with the second time derivative and Hamiltonian-admissible equations // Doklady Mathematics, 2016, Vol. 94, No. 2, pp. 487-489).

[21] Вайнберг М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М.: Гостехиздат, 1956.

[22] Вайнберг М. М. Функциональный анализ. М.: Наука, 1979.

[23] Вильке В. Г. Аналитические и качественные методы механики систем с бесконечным числом степеней свободы. М.: Изд-во МГУ, 1986.

[24] Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.

[25] Галиуллин А. С. Обратные задачи динамики и задачи управления движениями материальных систем // Дифференциальные уравнения, 1972, т. 8, №9, стр. 1535-1541.

[26] Галиуллин А. С. Системы Гельмгольца. М.: РУДН, 1995.

[27] Галиуллин А. С. Аналитическая динамика. М.: РУДН, 1998.

[28] Галиуллин А. С. Избранные труды в двух томах. Т. 2. М.: РУДН, 2009.

[29] Галиуллин А. С., Гафаров Г. Г., Малайшка Р. П., Хван А. М. Аналитическая динамика систем Гельмгольца, Биркгофа, Намбу. М.: Редакция журнала "Успехи физических наук", 1997.

[30] Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г., Фурасов В. Д. Построение систем программного движения. М.: Наука, 1971.

[31] Гельмгольц Г. О физическом значении принципа наименьшего действия. Сб. Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959, стр. 430-459.

[32] Гельфанд И. М., Дорфман И. Я. Гамильтоновы операторы и бесконечномерные алгебры Ли // Функц. анализ и его прил., 1981, т. 15, вып. 3, стр. 23-40.

[33] Голдстейн Г. Классическая механика. М.: Гостехиздат, 1959.

[34] Гоф Дж., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Рандомизированное квантование гамильтоновых систем // Доклады Российской Академии наук. Математика, информатика, процессы управления, 2021, т. 498, стр. 31-36.

[35] Гурский В. В., Самсонов А. М., Шварц Ф. Классические и неклассические симметрии нелинейного уравнения с дисперсией и диссипацией // Журнал технической физики, 2003, т. 73, вып. 11, стр. 1-5.

[36] Диденко В. П. Вариационный метод решения краевых задач, оператор которых не является симметрическим // Доклады АН СССР, 1978, т. 240, №6, стр. 1277-1280.

[37] Дружинина О. В., Лисовский Е. В., Воронцова В. Л. Экспоненциальная устойчивость по нестационарному линейному приближению нелинейных систем с распреде-

ленными параметрами // Нелинейный мир, 2016, т. 14, №7, стр. 47-54.

[38] Дубровин Б. А., Новиков С. П. О скобках Пуассона гидродинамического типа // Доклады АН СССР, 1984, т. 279, №2, стр. 294-297.

[39] Задорожний В. Г. Обратная задача вариационного исчисления для систем дифференциальных уравнений // Известия высших учебных заведений. Математика, 1989, №9, стр. 79-82.

[40] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001.

[41] Заплатный В. И. Экстремальные свойства движения некоторых механических систем с конечным числом степеней свободы и континуальных систем: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Киев: Киевский политехнический ин-т, 1980.

[42] Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д. Уравнение Кортевега-де Фриза - вполне интегрируемая гамильтонова система // Функциональный анализ и его приложения, 1971, т. 5, вып. 4, стр. 18-27.

[43] Зверкин А. М., Каменский Г. А., Норкин С. Б., Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом // Успехи математических наук, 1962, т. 17, вып. 2 (104), стр. 77-164.

[44] Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.

[45] Картан Э. Интегральные инварианты, Козлов В.В. Интегральные инварианты после Пуанкаре и Картана. М.: Едиториал УРСС, 2005.

[46] Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: Изд. иностр. лит., 1961.

[47] Кирьянов Д.В., Кирьянова Е.Н. Вычислительная физика. М.: Полибук Мультимедиа, 2006.

[48] Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1995.

[49] Козлов В. В. Избранные работы по математике, механике и математической физике. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика"; Ин-т компьют. исслед., 2010.

[50] Козлов В. В. Общая теория вихрей. 2-ое изд. М.-Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2013.

[51] Корпусов М. О., Панин А. А. Лекции по линейному и нелинейному функциональному анализу. Часть III. Нелинейный анализ. М.: Физический факультет МГУ, 2016.

[52] Кудряшов Н. А., Синельщиков Д.И. Классические и неклассические симметрии нелинейного дифференциального уравнения для описания волн в жидкости с пузырьками газа // Модел. и анализ информ. систем, 2014, т. 21, №1, стр. 45-52.

[53] Курант Р. Уравнения с частными производными. М.-Мир, 1964.

[54] Кутепов С. А., Яковенко Г. Н. Учет симметрий при исследовании устойчивости // Механика твердого тела, 2007, вып. 37, стр. 136-144.

[55] Лагранж Ж. Л. Аналитическая механика. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.

[56] Лукьяненко Д. В., Волков В. Т., Нефедов Н. Н., Ягола А. Г. Применение асимптотического анализа для

решения обратной задачи определения коэффициента линейного усиления в уравнении типа Бюргерса // ВМУ. Серия 3. Физика. Астрономия, 2019, №2, стр. 38-43.

[57] Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961.

[58] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.

[59] Ляшко А. Д. О вариационном методе для нелинейных операторных уравнений. Ученые записки Казанского ун-та. Т. 125, кн. 2, 1965, стр. 95-101.

[60] Марчук Г. И., Агошков В. И., Шутяев В. П. Сопряженные уравнения и методы возмущений в нелинейных задачах математической физики. М.: Наука, 1993.

[61] Мартынюк А. Е. О некотором обобщении вариационного метода // Доклады АН СССР, 1957, т. 117, №3, стр. 374-377.

[62] Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Гостехиздат, 1957.

[63] Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. СПб.: Изд-во "Лань", 2003.

[64] Моисеев Н. Я., Силантьева И. Ю. Разностные схемы произвольного порядка аппроксимации для решения линейных уравнений переноса с постоянными коэффициентами методом Годунова с антидиффузией // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2008, т. 48, №7, стр. 1282-1293.

[65] Мухаметзянов И. А. Построение систем асимптотически устойчивого в целом программного движения // Вест-

ник РУДН. Сер. Прикладная математика и информатика, 1998, №1, стр. 16-21.

[66] Мухаметзянов И. А. О построении семейства функций Ляпунова для обобщенных систем // Механика твердого тела: Межвед. сб. науч. тр., 2000, вып. 30, стр. 220-229.

[67] Мухаметзянов И. А. Построение и применение семейства функций Ляпунова для нелинейных неавтономных систем // Автоматика и телемеханика, 2000, №10, стр. 37-49.

[68] Мухаметзянов И. А. О применениях семейства функций Ляпунова // Прикладная математика и механика, 2000, т. 64, вып. 5, стр. 869-880.

[69] Мухаметзянов И. А. Методы безударной стабилизации программных многообразий. М.: РУДН, 2018.

[70] Мухарлямов Р. Г. О численном решении уравнений экстремалей вариационной задачи с ограничениями // Известия высших учебных заведений. Математика, 2002, №4, стр. 36-44.

[71] Мухарлямов Р. Г. Обратные задачи и уравнения динамики систем различной физической природы // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы, 2006, №38, стр. 87-103.

[72] Мухарлямов Р. Г. Приведение к заданной структуре уравнений динамики систем со связями // Прикладная математика и механика, 2007, т. 71, №3, стр. 401-410.

[73] Мухарлямов Р. Г. Дифференциально-алгебраические уравнения программных движений лагранжевых динамических систем // Известия РАН. Механика твердого тела, 2011, №4, стр. 50-61.

[74] Мухарлямов Р. Г. Моделирование процессов управления, устойчивость и стабилизация систем с программными связями // Известия РАН. Теория и системы управления, 2015, №1, стр. 15-28.

[75] Нетер Э. Инвариантные вариационные задачи // Вариационные принципы механики, под редакцией Полака Л.С. М.: Физматгиз, 1959, стр. 611-630.

[76] Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // Успехи мат. наук, 1982, т. 15, вып. 2, стр. 3-49.

[77] Новоселов В. С. Вариационные методы в механике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1966.

[78] Нуман Эльшейх М. Х., Огун Д. О., Орлов Ю. Н., Плешаков Р. В., Сакбаев В. Ж. Усреднение случайных полугрупп и неоднозначность квантования гамильтоновых систем // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2014, 019, 28 с.

[79] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[80] Олвер П. Применение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.

[81] Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Рандомизированная гамильтонова механика // Доклады Академии наук, 2019, т. 486, №6, стр. 653-658.

[82] Павленко Ю. Г. Гамильтоновы методы в электродинамике и квантовой механике. М.: Изд-во МГУ, 1985.

[83] Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001.

[84] Попов А. М. Условия потенциальности Гельмгольца для систем дифференциально-разностных уравнений // Математические заметки, 1998, т. 64, №3, стр. 437-442.

[85] Попов А. М. Условия потенциальности дифференциально-разностных уравнений // Дифференциальные уравнения, 1998, т. 34, №3, стр. 422-424.

[86] Попов А. М. Обратная задача вариационного исчисления для систем дифференциально-разностных уравнений второго порядка // Математические заметки, 2002, т. 72, №5, стр. 745-749.

[87] Пуанкаре А. Новые методы небесной механики // Избранные труды. М.: Наука, 1972. Т. 2, стр. 9-452.

[88] Рапопорт И. М. Обратная задача вариационного исчисления // Изв. физ.-мат. об-ва при Казанском ун-те. Т. 10, сер. 3, 1938, стр. 93-135; Т. 11, сер. 3, 1938, стр. 47-69.

[89] Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985.

[90] Розенхаус Ф. О существенных законах сохранения для уравнений с бесконечными симметриями // Теоретическая и математическая физика, 2005, т. 144, №1, стр. 190-198.

[91] Румянцев В. В. О некоторых вариационных принципах в механике сплошных сред // Прикл. мат. и мех., 1973, т. 37, вып. 6, стр. 963-973.

[92] Савчин В. М. Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем. М.: Изд-во УДН, 1991.

[93] Савчин В. М. О структуре вариационных уравнений с симметрическим оператором d/dt // Дифференциальные уравнения, 1993, т. 29, стр. 1425-1432.

[94] Савчин В. М. Критерий существования обобщенных интегральных вариационных принципов для заданных уравнений // Дифференциальные уравнения, 1993, т. 29, стр. 1765-1771.

[95] Савчин В. М. Построение полуограниченного функционала для краевой задачи для нелинейных нестационарных уравнений Навье-Стокса // Дифференциальные уравнения, 1994, т. 30, №1, стр. 162-168.

[96] Савчин В. М. Об одной структуре Ли-допустимой алгебры в пространстве дифференцируемых по Гато операторов // Математические заметки, 1994, т. 55, №1, стр. 152-153.

[97] Савчин В. М. Потенциальные операторы с первой производной по "времени" и системы Гамильтона // Труды Международной конференции, посвященной 75-летию члена-корреспондента РАН, профессора Л.Д.Кудрявцева. М.: РУДН, 1998, т. 2, стр. 147-151.

[98] Савчин В. М. Симметрии ДУЧП с отклоняющимися аргументами // Тезисы докладов XXXVII Всероссийской научной конференции по проблемам математики, информатики, физики, химии и методики преподавания естественнонаучных дисциплин. М.: РУДН, 2001, стр. 7-8.

[99] Савчин В. М., Будочкина С. А. О структуре вариационного уравнения эволюционного типа со второй производной по t // Дифференциальные уравнения, 2003, т. 39, №1, стр. 118-124.
(Eng. transl.: On the structure of a variational equation of evolution type with the second t-derivative // Differential Equations, 2003, vol. 39, No. 1, pp. 127-134).

[100] Савчин В. М., Будочкина С. А. О существовании вариационного принципа для операторного уравнения со второй производной по "времени"// Математические заметки, 2006, т. 80, вып. 1, стр. 87-94.
(Eng. transl.: On the existence of a variational principle for an operator equation with the second derivative with respect to "time"// Mathematical Notes, 2006, vol. 80, No. 1, pp. 83-90).

[101] Савчин В. М., Будочкина С. А. Уравнения Гамильтона для бесконечномерных систем и их уравнения в вариациях // Дифференциальные уравнения, 2008, т. 44, №4, стр. 570-573.
(Eng. transl.: Hamilton equations for infinite-dimensional systems and their variational equations // Differential Equations, 2008, vol. 44, No. 4, pp. 593-596).

[102] Савчин В. М., Будочкина С. А. Об одной прямой задаче механики бесконечномерных диссипативных систем // Вестник РУДН, Серия "Математика. Информатика. Физика", 2008, №3, стр. 22-30.

[103] Савчин В. М., Будочкина С. А. Симметрии и первые интегралы в механике бесконечномерных систем // Доклады Академии наук, 2009, т. 425, №2, стр. 169-171.
(Eng. transl.: Symmetries and first integrals in the mechanics of infinite-dimensional systems // Doklady Mathematics, 2009, vol. 79, No. 2, pp. 189-190).

[104] Савчин В. М., Будочкина С. А. О взаимосвязи симметрий функционалов и уравнений // Доклады Академии наук, 2014, т. 458, №2, стр. 148-149.
(Eng. transl.: On connection between symmetries of functionals and equations // Doklady Mathematics, 2014, vol. 90, No. 2, pp. 626-627).

[105] Савчин В. М., Будочкина С. А. Об инвариантности функционалов и соответствующих им уравнений Эйлера-Лагранжа // Известия вузов. Математика, 2017, №2, стр. 58-64.
(Eng. transl.: Invariance of functionals and related Euler-Lagrange equations // Russian Mathematics, 2017, vol. 61, No. 2, pp. 49-54).

[106] Савчин В. М., Будочкина С. А. Ли-допустимые алгебры, связанные с динамическими системами // Сибирский математический журнал, 2019, т. 60, №3, стр. 655-663.
(Eng. transl.: Lie-admissible algebras associated with dynamical systems // Siberian Mathematical Journal, 2019, vol. 60, No. 3, pp. 508-515).

[107] Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. II. М.: ИЛ, 1954.

[108] Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / Под ред. Виноградова А.М. и Красильщика И.С. М.: Факториал, 1997.

[109] Суслов Г. К. О кинетическом потенциале Гельмгольца // Математический сборник, 1896, т. 19, №1, стр. 197-210.

[110] Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. М.: Эдиториал УРСС, 2001.

[111] Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.

[112] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.

[113] Уиттекер Э. Т. Аналитическая динамика. М.: Едиториал УРСС, 2004.

[114] Филиппов В. М. Вариационный метод решения краевых задач математической физики и функциональные пространства // Дифференциальные уравнения, 1979, т. 15, №11, стр. 2056-2065.

[115] Филиппов В. М. Об одном общем подходе к симметризации дифференциальных операторов // Дифференциальные уравнения, 1985, т. 21, №3, стр. 539-541.

[116] Филиппов В. М. Вариационные принципы для непотенциальных операторов. М.: Изд-во УДН, 1985.

[117] Филиппов В. М., Савчин В. М., Будочкина С. А. О существовании вариационных принципов для эволюционных дифференциально-разностных уравнений // Труды МИАН, 2013, т. 283, стр. 25-39.
(Eng. transl.: On the existence of variational principles for differential-difference evolution equations // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2013, vol. 283, pp. 20-34).

[118] Филиппов В. М., Савчин В. М., Будочкина С. А. Бивариационность, симметрии и приближенные решения // Современная математика. Фундаментальные направления, 2021, т. 67, №3, стр. 596-608.

[119] Филиппов В. М., Савчин В. М., Шорохов С. Г. Вариационные принципы для непотенциальных операторов // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 40. М.: ВИНИТИ, 1992.

[120] Филиппов В. М., Скороходов А. Н. О квадратичном функционале для уравнения теплопроводности // Дифференциальные уравнения, 1977, т. 13, №6, стр. 1113-1123.

[121] Филиппов В. М., Тищенко А. Н. Прямой вариационный метод для операторных уравнений $u^{(k)} + C^m u = f$, $k =$

$1, 2$; $m \in \mathbb{N}$ // Дифференциальные уравнения, 1992, т. 28, №9, стр. 1642-1643.

[122] Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973.

[123] Шалов В. М. Решение несамосопряженных уравнений вариационным методом // Доклады АН СССР, 1963, т. 151, №3, стр. 511-512.

[124] Шалов В. М. Принцип минимума квадратичного функционала для гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения, 1965, т. 1, №10, стр. 1338-1365.

[125] Шестаков А. А. Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. Изд. 2-е, доп. – М.: КомКнига, 2007.

[126] Шорохов С. Г. Представимость систем обыкновенных дифференциальных уравнений в виде уравнений механики с заданной структурой сил // Дифференциальные уравнения, 1988, №10, стр. 1738-1746.

[127] Эльсгольц Л. Э. Вариационные задачи с запаздывающим аргументом // УМН, 1957, т. 12, №1 (73), стр. 257-258.

[128] Яковенко Г. Н. Блуждающие симметрии уравнений Лагранжа // Компьютерные исследования и моделирование, 2010, т. 2, №1, стр. 13-17.

[129] Alliney S., Strozzi A., Tralli A. "Extended" variational formulations and finite element models for the elastohydrodynamic lubrication problem // Eng. Comput., 1985, vol. 2, pp. 145-150.

[130] Alliney S., Tralli A. Extended variational formulations and F.E. models for nonlinear beams under nonconservative

loading // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1984, vol. 46, pp. 177-194.

[131] Bampi F., Morro A. Topics in the inverse problem of the calculus of variations // Suppl. Boll. Unione Mat. Ital., Fis., Mat., 1986, vol. 5, pp. 93-115.

[132] Bluman G. W., Temuerchaolu. Conservation laws for nonlinear telegraph equations // J. Math. Anal. Appl., 2005, vol. 310, pp. 459-476.

[133] Bluman G. W., Temuerchaolu. Comparing symmetries and conservation laws of nonlinear telegraph equations // Journal of Mathematical Physics, 2005, vol. 46, 073513.

[134] Bluman G. W., Cheviakov A. F., Anco S. C. Applications of symmetry methods to partial differential equations. Applied Mathematical Sciences, vol. 168, Springer, 2010.

[135] Boyko V. On new generalizations of the Burgers and Korteweg-de Vries equations // Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics, 1997, vol. 1, pp. 122-129.

[136] Budochkina S. A. Symmetries and first integrals of a second order evolutionary operator equation // Eurasian Mathematical Journal, 2012, vol. 3, No. 1, pp. 18-28.

[137] Budochkina S. A. On Poisson brackets in spaces of B_u-potentials // Материалы Всероссийской конференции с международным участием "Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем". М.: РУДН, 2018, стр. 300-301.

[138] Budochkina S. A., Dekhanova E. S. On the potentiality of a class of operators relative to local bilinear

forms // Ural Mathematical Journal, 2021, vol. 7, No. 1, pp. 26-37.

[139] Budochkina S. A., Luu T. H. On connection between variationality of a six-order ordinary differential equation and Hamilton-Ostrogradskii equations // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, vol. 42, No. 15, pp. 3594-3605.

[140] Budochkina S. A., Savchin V. M. On direct variational formulations for second order evolutionary equations // Eurasian Mathematical Journal, 2012, vol. 3, No. 4, pp. 23-34.

[141] Budochkina S. A., Savchin V. M. An operator approach to the investigation of potentiality of some differential-difference equations // Contemporary Analysis and Applied Mathematics, 2013, vol. 1, No. 1, pp. 20-33.

[142] Budotchkina S. A., Savchin V. M. On indirect variational formulations for operator equations // Journal of Function Spaces and Applications, 2007, vol. 5, No. 3, pp. 231-242.

[143] Budochkina S. A., Vu H. P. On an indirect representation of evolutionary equations in the form of Birkhoff's equations // Eurasian Mathematical Journal, 2022, vol. 13, No. 3, pp. 23-32.

[144] Cai J.-L. Conformal invariance and conserved quantities of Mei symmetry for Lagrange systems // Acta Physica Polonika A, 2009, vol. 115, No. 5, pp. 854-856.

[145] Caviglia G. Symmetry transformations, isovectors, and conservation laws // J. Math. Phys., 1986, vol. 27, No. 4, pp. 972-978.

[146] Chien N., Honein T., Herrmann G. Dissipative systems, conservation laws and symmetries // Int. J. Solids Structures, 1996, vol. 33, No. 20-22, pp. 2959-2968.

[147] Cicogna G., Ceccherini F., Pegoraro F. Applications of symmetry methods to the theory of plasma physics // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 2006, vol. 2, Paper 017, 17 pages.

[148] Crampin M., Mestdag T., Sarlet W. On the generalized Helmholtz conditions for Lagrangian systems with dissipative forces // Z. Angew. Math. Mech., 2010, vol. 90, pp. 502-508.

[149] Dirac P. A. M. Generalized Hamiltonian dynamics // Canad. J. Math., 1950, vol. 2, pp. 129-148.

[150] Douglas J. Solution of the inverse problem of the calculus of variations // Proceedings of the National Academy of Sciences, 1939, 25 (12), pp. 631-637.

[151] Douglas J. Theorems in the inverse problem in the calculus of variations // Proceedings of the National Academy of Sciences, 1940, 26 (3), pp. 215-221.

[152] Fang J.-H., Wang P., Ding N. Noether-Mei symmetry of mechanical system in phase space // Commun. Theor. Phys., 2006, vol. 45, No. 5, pp. 882-884.

[153] Freire I. L. New classes of nonlinearly self-adjoint evolution equations of third- and fifth-order // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2013, vol. 18, No. 3, pp. 493-499.

[154] Gardner C. S. Korteweg-de Vries equation and generalizations. IV. The Korteweg-de Vries equation as a

Hamiltonian system // J. Math. Phys., 1971, vol. 12, pp. 1548-1551.

[155] Gu S.-L., Zhang H.-B. On the form invariance and Lie symmetry of Birkhoffian systems // Journal of Electronic Science and Technology of China, 2004, vol. 2, No. 2, pp. 73-78.

[156] Henneaux M. Equations of motion, commutation relations and ambiguities in the Lagrangian formalism // Annals of Physics, 1982, vol. 140, pp. 45-64.

[157] Holm D.D., Marsden J.E., Ratiu T., Weinstein A. Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria // Physics Reports, 1985, vol. 123, No. 1,2, pp. 1-116.

[158] Ibragimov N.H. Nonlinear self-adjointness in constructing conservation laws // Archives of ALGA, 2010-2011, vol. 7/8, pp. 1-99.

[159] Jin S.-X., Zhang Y. Noether symmetries for non-conservative Lagrange systems with time delay based on fractional model // Nonlinear Dyn., 2015, vol. 79, pp. 1169-1183.

[160] Jungnickel U., Kielau G., Maisser P., Müller A. A generalization of the Helmholtz conditions for the existence of a first-order Lagrangian using nonholonomic velocities // Z. Angew. Math. Mech., 2009, vol. 89, No. 1, pp. 44-53.

[161] Kielau G., Maisser P. A generalization of the Helmholtz conditions for the existence of a first-order Lagrangian // Z. Angew. Math. Mech., 2006, vol. 86, pp. 722-735.

[162] Kolesnikova I. A., Popov A. M., Savchin V. M. On variational formulations for functional differential equations // Journal of Function Spaces and Applications, 2007, vol. 5, No. 1, pp. 89-101.

[163] Kolesnikova I. A., Savchin V. M. On the existence of variational principles for a class of evolutionary differential-difference equations // Journal of Function Spaces and Applications, 2012, vol. 2012, article ID 780382, 9 pages.

[164] Kulyabov D. S., Korolkova A. V., Sevastianov L. A., Eferina E. G., Velieva T. R., Zaryadov I. S. Maxwell's equations instantaneous Hamiltonian, Proc. SPIE 10337, Saratov Fall Meeting 2016: Laser Physics and Photonics XVII; and Computational Biophysics and Analysis of Biomedical Data III, 103370L (14 April 2017); https://doi.org/10.1117/12.2267938.

[165] Kulyabov D. S., Korolkova A. V., Gevorkyan M. N., Sevastianov L. A. Constrained Hamiltonian approach to the Maxwell theory. Proc. SPIE 11066, Saratov Fall Meeting 2018: Laser Physics, Photonic Technologies, and Molecular Modeling, 2019, vol. 11066, pp. 158-162.

[166] Lax P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Communications on Pure and Applied Mathematics, 1968, vol. XXI, pp. 467-490.

[167] Lax P. D. Almost periodic solutions of the KdV equation // S.I.A.M. Review, 1976, vol. 18, No. 3, pp. 351-375.

[168] Levi D., Winternitz P., Yamilov R.I. Lie point symmetries of differential-difference equations // J. Phys. A: Math. Theor., 2010, vol. 43, 292002 (14pp).

[169] Li J.-N., Feng W., Qi X.-L., Zhang S.-L. Symmetry reduction of initial-value problems for a class of third-order evolution equations // Commun. Theor. Phys., 2009, vol. 52, No. 1, pp. 55-59.

[170] Logan J. D. Invariant variational principles // Mathematics in Science and Engineering. Vol. 138. New York, San Francisco, London: Acad. Press, 1977.

[171] Luo Y. Large unified symmetries of Emden dynamics systems // Adv. Theor. Appl. Mech., 2010, vol. 3, No. 8, pp. 385-395.

[172] Magri F. An operator approach to Poisson brackets // Ann. Phys., 1976, vol. 99, pp. 196-228.

[173] Mayer A. Die Existenzbedingungen eines kinetischen Potentials. Berl. Ges. Wiss., Leipzig, 1896, s. 519-529.

[174] Mei F., Xu X., Zhang Y. A unified symmetry of Lagrangian systems // Acta Mechanica Sinica, 2004, vol. 20, No. 6, pp. 668-671.

[175] Mestdag T., Sarlet W., Crampin M. The inverse problem for Lagrangian systems with certain non-conservative forces // Differential Geometry and its Application, 2011, vol. 29, pp. 55-72.

[176] Mestdag T., Sarlet W., Crampin M. Second-order dynamical systems of Lagrangian type with dissipation // Differential Geometry and its Application, 2011, vol. 29, S156-S163.

[177] Mimura F., Nôno T. The inverse problem of Lagrangian dynamics in the multiple variational principle: revisited with some reductions // Bull. Kyushu Inst. Tech., Pure. Appl. Math., 2009, No. 56, pp. 1-9.

[178] Morro A., Caviglia G. Conservation laws for systems with memory // Math. Comput. Modelling, 1988, vol. 11, pp. 1090-1092.

[179] Motsepa T., Khalique C.M. On the conservation laws and solutions of a (2+1) dimensional KdV-mKdV equation of mathematical physics // Open Phys., 2018, 16: 211-214.

[180] Nadjafikhah M., Kabi-Nejad P. Conservation laws and Hamiltonian symmetries of Whitham-Broer-Kaup equations // Indian Journal of Science and Technology, 2015, vol. 8(2), pp. 178-184.

[181] Nadjafikhah M., Mokhtary A. Approximate Hamiltonian symmetry groups and recursion operators for perturbed evolution equations // Advances in Mathematical Physics, 2013, vol. 2013, Article ID 568632, 9 pages.

[182] Narain R., Kara A.H. On the redifinition of the variational and 'partial' variational conservation laws in a class of nonlinear PDEs with mixed derivatives // Mathematical and Computational Applications, 2010, vol. 15, No. 4, pp. 732-741.

[183] Nucci M. C. Lie symmetries of a Painlevé-type equation without Lie symmetries // Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 2008, vol. 15, No. 2, pp. 205-211.

[184] Nucci M. C., Tamizhmani K. M. Lagrangians for dissipative nonlinear oscillators: the method of Jacobi last multiplier // Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 2010, vol. 17, No. 2, pp. 167-178.

[185] Olver P. J. Euler operators and conservation laws of BBM equation // Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1979, vol. 85, pp. 143-160.

[186] Petryshyn W. V. Direct and iterative methods for the solution of linear operator equations in Hilbert space // Trans. Amer. Math. Soc., 1962, vol. 105, pp. 136-175.

[187] Santilli R. M. Foundations of theoretical mechanics, I: The inverse problems in Newtonian mechanics. New-York - Berlin: Springer-Verlag, 1977.

[188] Santilli R. M. Introduction to the Lie-admissible treatment of non-potential interactions in Newtonian, statistical and particle mechanics // Hadronic Journal, 1982, vol. 5, pp. 264-359.

[189] Santilli R. M. Foundations of theoretical mechanics, II: Birkhoffian generalization of Hamiltonian mechanics. New-York - Berlin: Springer-Verlag, 1983.

[190] Savchin V. M. A possible generalization of the field theoretical Hamilton's equations // Hadronic Journal, 1988, vol. 11, No. 6, pp. 279-286.

[191] Savchin V. M. An operator approach to Birkhoff's equations // Вестник РУДН. Сер. Математика, 1995, №2 (2), стр. 111-123.

[192] Savchin V. M., Budochkina S.A. Nonclassical Hamilton's actions and the numerical performance of variational methods for some dissipative problems // In: Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2016. Communications in Computer and Information Science, Springer, Cham, 2016, vol. 678, pp. 624-634.

[193] Savchin V. M., Budochkina S. A., Yake Gondo, Slavko A. V. On the connection between first integrals, integral invariants and potentiality of evolutionary equations // Eurasian Mathematical Journal, 2018, vol. 9, No. 4, pp. 82-90.

[194] Savchin V. M., Budochkina S. A. Bi-variational evolutionary systems and approximate solutions // Journal

of Mechanics of Continua and Mathematical Sciences, 2019, Special Issue-1, pp. 474-482.

[195] Tleubergenov M. I., Azhymbaev D. T. Stochastical problem of Helmholtz for Birkhoff systems // Вестник Карагандинского университета, Серия "Математика", 2019, т. 1 (93), стр. 78-87.

[196] Tonti E. Variational formulation of nonlinear differential equations // Bull. Acad. Roy. Belg. Cl. Sci., 1969, vol. 55, pp. 137-165 (Pt.I); 1969, vol. 55, pp. 262-278 (Pt.II).

[197] Tonti E. On the variational formulation for linear initial value problem // Annali di Matematica pura ed applicata (IV), 1973, vol. XCV, pp. 331-360.

[198] Tonti E. A general solution of the inverse problem of the calculus of variations // Hadronic J., 1982, vol. 5, pp. 1404-1450.

[199] Tonti E. Variational formulation for every nonlinear problem // Int. J. Engng. Sci., 1984, vol. 22, No. 11/12, pp. 1343-1371.

[200] Tonti E. Extended variational formulation // Вестник РУДН. Сер. Математика, 1995, №2 (2), стр. 148-162.

[201] Tsamparlis M., Paliathanasis A. Generalizing the autonomous Kepler-Ermakov system in a Riemannian space // J. Phys. A: Math. Theor., 2012, vol. 45, 275202 (22pp).

[202] Volterra V. Sopra le fonzioni che dipendano da altre funzioni // Rend. Acc. Lincei., 1887, vol. 3, pp. 97-105 (Pt.I), pp. 141-147 (Pt. II), pp. 153-158 (Pt. III).

[203] Volterra V. Leçons sur les Fonctions de Lignes. Gautier - Villars, Paris, 1913.

[204] Vorontsova V. L., Vorontsova A. V., Druzhinina O. V., Lisovsky E. V. Convergence and stability analysis of Kolmogorov system solutions in infinite-dimensional space // Journal of Engineering and Applied Sciences, 2017, vol. 12, No. 4, pp. 898-902.

[205] Zhai X.-H., Zhang Y. Noether symmetries and conserved quantities for Birkhoffian systems with time delay // Nonlinear Dynam., 2014, vol. 77, No. 1-2, pp. 73-86.

[206] Zhang M.-J., Fang J.-H., Lu K. Perturbation to Mei symmetry and generalized Mei adiabatic invariants for Birkhoffian systems // Int. J. Theor. Phys., 2010, vol. 49, pp. 427-437.

[207] Zhang Y. A new conservation law derived from Mei symmetry for the system of generalized classical mechanics // Commun. Theor. Phys., 2004, vol. 42, No. 6, pp. 899-902.

[208] Zhang Z.-Y., Chen Y.-F. Group analysis and nonlinear self-adjointness for a generalized breaking soliton equation // Reports on Mathematical Physics, 2015, vol. 75, No. 1, pp. 85-100.