

Отзыв официального оппонента

на диссертацию Баддура Али «Исследование консервативных разностных схем в моделях движения многих тел», представленную к защите в диссертационном совете ПДС 0200.006 при федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Российский университет дружбы народов» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.2.2 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Актуальность темы диссертационной работы.

Диссертация Баддура Али посвящена исследованию классической задачи многих тел в небесной механике конечно-разностными методами и конструированию разностных схем, сохраняющих первые алгебраические интегралы движения на каждом шаге вычислений. Законы сохранения в математическом моделировании реальных явлений имеют принципиальное значение, однако обычно они нарушаются при переходе от аналитических методов исследования к конечно-разностным. В частности, стандартные явные конечно-разностные схемы Рунге-Кутты не сохраняют интегралы движения, позволяя получить лишь приближенное решение, которое может быть весьма близким к точному решению, однако при этом приближенное решение может иметь критические отличия от точного, качественно меняя его тип. Как известно, это явление имеет место, например, для условно устойчивых движений и решений типа аттрактора. Кроме того, для приближенных решений гамильтоновых систем, полученных по явным схемам, не сохраняющих интеграл энергии, энергия может неограниченно возрастать с течением времени, поэтому на больших интервалах времени приближенное решение далеко уходит от точного.

Следует отметить, что проблема построения консервативных разностных схем для гамильтоновых систем и, в частности, в задаче многих тел имеет не очень давнюю историю. В задаче n тел фазовый поток гамильтоновой системы преобразует с течением времени начальное состояние с сохранением симплектической структуры в фазовом пространстве размерности $6n$. В 1990-х годах для исследования гамильтоновых систем стали применять неявные разностные схемы, сохраняющие симплектическую структуру исходной системы. В 2000-х годах активно разрабатывались симплектические схемы Рунге-Кутты, которые хорошо зарекомендовали себя во многих задачах небесной механики. Купер доказал, что эти разностные схемы наследуют линейные и квадратичные интегралы движения исходной системы. Среди интегралов движения задачи многих тел только интеграл полной механической

энергии не принадлежит к этому классу. Поэтому приближенные решения, найденные по схемам, сохраняющим симплектическую структуру, могут не обладать сохраняющейся полной механической энергией. Впоследствии были построены разностные схемы, сохраняющую все алгебраические интегралы задачи многих тел. Недавно Янг и Джу предложили новую концепцию для интеграла энергии: в рамках этой концепции предлагается угадать такое преобразование координат, при котором энергия стала бы квадратичной функцией; тогда любая симплектическая схема, записанная в новых координатах, будет сохранять энергию. В 2020-м этот прием был использован Джангом для исследования задачи Кеплера. Поэтому симплектические схемы Рунге-Кутты могут в будущем стать базой, на основе которой будут строиться вообще все консервативные схемы.

Таким образом, актуальность темы диссертации не вызывает сомнений.

Цели и задачи диссертационной работы.

Основной целью диссертационного исследования является построение разностных схем для задачи многих тел в небесной механике, которые сохраняют все алгебраические интегралы движения и, кроме того, по возможности, обладают точной симметрией относительно перестановки тождественных частиц и симметрией относительно обращения времени. В этом контексте диссертант, встретившись с задачей выбора метода проектирования таких схем, выбрал метод Янга и Джу «квадратизации» интеграла энергии и реализовал его посредством введения в задачу дополнительных переменных. Для практического применения в задаче многих тел диссертант практически реализовал построенные разностные схемы путем добавления новых подпрограмм в пакет `fdm for sage` – интегратор (систем) дифференциальных уравнений – для системы компьютерной алгебры Sage, которая, в то же время поддерживает и многие стандартные функции вычислительной математики. Таким образом, задача может быть разделена, если это возможно, на аналитическую и конечно-разностную части, причем аналитически вычисляется все, что допускается постановкой задачи. Тестирование новых функций пакета `fdm` выполнено для задачи двух тел, которая, как известно, имеет явное решение в виде квадратур, а также для задачи трех тел. Отметим, что в последнем случае фазовый поток уже не определяется первыми интегралами движения и в этом смысле все сложности численного решения те же самые, что и в задаче n тел при $n > 3$. Конкретно в работе рассмотрены частные периодические решения плоской задачи трех тел для треугольника Лагранжа и плоской задачи для стационарной конфигурации Эйлера.

Характеристика содержания диссертационной работы.

Диссертация содержит Введение, пять глав, Заключение, список литературы из 97 источников, и список иллюстраций – всего 116 стр.

Во Введении обосновывается актуальность проектирования и исследования разностных схем, сохраняющих все алгебраические интегралы движения динамических систем, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель и ставятся задачи работы. В последующих главах сначала описывается общий подход, позволяющий проектировать такие схемы, на его основе конструируются разностные схемы, сохраняющие все алгебраические интегралы многих тел, затем идет апробация на тестовых примерах — плоских задач двух и трех тел.

В первой главе дан обзор конечно-разностных методов интегрирования динамических систем и описана оригинальная реализация метода конечных разностей в Sage — пакет `fdm for sage`. В нем собраны наработки последних лет, в том числе и выполненные в рамках настоящего диссертационного исследования. Реализация численных методов в системе компьютерной алгебры позволяет использовать символьные выражения при описании метода (записывать таблицы Бутчера в радикалах) и работать в различных числовых полях, быстро менять число бит, отводимых на одну десятичную дробь.

Во второй главе описана оригинальная реализация метода Калиткина-Ричардсона в пакете `fdm`. Показано, как по наклону диаграммы Ричардсона определить порядок аппроксимации системы дифференциальных уравнений разностной схемой. Этот инструмент используется далее для проверки реализации численных методов в пакете `fdm`.

В третьей главе описана реализация неявного метода Рунге-Кутты в пакете `fdm`. При вычислении приближенного решения по неявным схемам на каждом шаге возникает система алгебраических уравнений относительно наклонов. Для ее решения необходимо использовать тот или иной численный метод, в выборе которого имеется некоторый произвол. В использованной в диссертации реализации используется метод простых итераций. В качестве нулевого приближения для наклонов используется уже найденный наклон на предыдущем шаге. Для простейшего из симплектических методов — метода средней точки — проведено исследование сходимости итерационного метода. Найдены ограничения на величину шага, которые используются далее для всех симплектических методов. Отметим, что для организации расчетов по неявным схемам на каждом шаге по времени требуется решать систему нелинейных алгебраических уравнений. Поскольку значения рассматриваемых переменных в предыдущий момент времени можно рассматривать как хорошее приближение к текущим, естественный метод решения этих систем —

итерационный. Если взять несколько итераций и никак не контролировать точность решения этой системы получится алгоритм, расчеты по которому будут почти так же быстрыми, как по явным схемам, но интегралы, которые в теории сохранялись бы точно, перестают сохраняться. Поэтому вопрос об организации вычислений по неявным консервативным схемам не является тривиальным и допускает различные подходы.

В четвертой главе описано новое семейство консервативных разностных схем для задачи многих тел. Их основная особенность заключается в добавлении к координатам и скоростям тел дополнительных переменных – расстояний между телами и обратных расстояний. Соискателем доказано, что при этом порядок рассматриваемой системы дифференциальных уравнений увеличился, но ее интегралы движения, включая интеграл движения, стали квадратичными. Любая симплектическая разностная схема Рунге-Кутты сохраняет эти интегралы точно, что дает целое семейство консервативных разностных схем. При желании в этом приеме можно видеть развитие метода квадратизации энергии.

Пятая глава посвящена тестированию семейства консервативных разностных схем для задачи многих тел при помощи реализации неявного метода Рунге-Кутты, описанной в 3-ей главе, и с использованием инструментов для оценки точности, описанных во 2-й главе диссертации.

В Заключение перечислены основные результаты диссертации.

Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, их достоверность.

Все приведенные в диссертации оригинальные утверждения сопровождаются подробными доказательствами, которые были своевременно опубликованы в научных журналах, индексируемых в РИНЦ и Скопус. Эти результаты были своевременно и достаточно полно представлены на международных конференциях, в том числе на РСА'2020 и РСА'2021, ПОМИ, Санкт-Петербург, всероссийских конференциях с международным участием ИТТМ'2019 и ИТТМ'2021, РУДН, а также на научных семинарах: по вычислительной и прикладной математике ЛИТ ОИЯИ (Дубна, сентябрь 2021 г.) и «Математические методы в естественных науках» (МГУ, март 2022 г.).

Практическая значимость исследований. Разработанные в диссертации приемы могут быть полезны для исследования динамических систем в различных областях науки и техники, поскольку всюду важно выполнение законов сохранения и баланса.

Недостатки работы. В диссертации имеется ряд недостатков.

1. Оценка сверху для шага разностной схемы, гарантирующая сходимость метода простых итераций, найдена для простейшей симплектической схемы – схемы средней точки, а далее она применяется ко всем симплектическим схемам. Это требует обоснования.
2. Вместо метода простых итераций можно применить метод Ньютона и тем самым сократить число итераций.
3. При проведении компьютерных экспериментов возникают случаи, когда возникают вычислительные особенности. В алгоритме расчетов по неявной схеме следовало предусмотреть останов в том случае, когда получается слишком малый шаг. Следовало пояснить, происходит ли при этом настоящее столкновение тел. Вероятно, будет полезно выполнить в таких случаях регуляризующее преобразование.
4. Значительная часть работы, почти треть, содержит изложение (следует отметить – оригинальное и очень ясное) материала из стандартных учебных курсов, а также подробное описание ряда тривиальных примеров (например, равноускоренного движения точки по окружности).

Тем не менее, указанные недостатки не снижают ценности полученных результатов и не влияют на общую положительную оценку диссертации.

Заключение. Диссертационное представляет собой законченное и самостоятельное исследование, в котором решена актуальная задача проектирования консервативных разностных схем, аппроксимирующих задачу многих тел, имеющая важное научное значение.

Диссертационное исследование соответствует паспорту специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, а именно п. 1 «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений» в части разработки новых математических методов моделирования объектов и явлений — разностных схем высокого порядка для задачи многих тел, сохраняющих все алгебраические интегралы движения; п. 2 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий» в части разработки, обоснования и тестирования эффективных числительных методов исследования классической модели многих тел с применением современных компьютерных технологий; п. 3 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента» в части реализации названных численных методов и алгоритмов в системе компьютерной алгебры Sage и проведения численных экспериментов.

Полученные автором результаты достоверны, основные выводы и заключения обоснованы. Автореферат корректно отражает результаты диссертационного исследования. Основные научные результаты диссертации достаточно полно изложены в 8 печатных изданиях, 3 из которых изданы в периодических научных журналах, индексируемых МБЦ Scopus, 2 — в журналах, включенных в Перечень ВАК/РУДН, 3 — в тезисах докладов.

На основании вышеизложенного считаю, что диссертационная работа «Исследование консервативных разностных схем в моделях движения многих тел» полностью соответствует требованиям п. 2.2 разделы II Положения о присуждении ученых степеней в ФГАУ ВО Российский университет дружбы народов, утвержденного Ученым советом РУДН, протокол № 12 от 23 сентября 2019 г., предъявляемых к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, а ее автор — Баддур Али — степени кандидата физико-математических наук.

Официальный оппонент: доктор физико-математических наук (специальность 05.13.18 — «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»), ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет», доцент, профессор кафедры общей математики и математической физики



Цирулев Александр Николаевич

30 января 2023

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тверской государственный университет»

170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33

Тел.: (4822) 34-24-52

Электронная почта: tsirulev.an@tversu.ru

Подпись А.Н. Цирулева удостоверяю.

Проректор по научной и инновационной деятельности



А.В. Зиновьев