На правах рукописи

Васильева Ирина Ивановна

КАЧЕСТВЕННОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОМЕРНЫХ МИГРАЦИОННО-ПОПУЛЯЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ С КОНКУРЕНЦИЕЙ

Специальность 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2025

Работа выполнена на кафедре математического моделирования, компьютерных технологий и информационной безопасности Елецкого государственного университета имени И.А. Бунина

Научный руководитель:

Масина Ольга Николаевна
доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического моделирования, компьютерных технологий и информационной безопасности Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина.

Официальные оппоненты:

Разжевайкин Валерий Николаевич
доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук.

Малых Михаил Дмитриевич
доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического моделирования и искусственного интеллекта Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы.

Лискина Екатерина Юрьевна
кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математики и методики преподавания математических дисциплин Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина.

Защита диссертации состоится «13» февраля 2026 г. в 14 часов 00 минут на заседании диссертационного совета ПДС 0200.006 при Российском университете дружбы народов имени Патриса Лумумбы по адресу: г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд. 208.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6.
Автореферат разослан «__» декабря 2025 г.
Ученый секретарь
диссертационного совета ПДС 0200.006
к.ф.-м.н., доцент М.Н. Геворкян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Актуальность анализа качественного поведения и исследования динамики траекторий популяционных моделей связана с необходимостью изучения свойств многомерных экологических систем. Одним из классических направлений исследования является построение траекторий и фазовых портретов для моделей динамики популяций с применением теории устойчивости динамических систем. С учетом того, что характер развития и взаимодействия видов, их конкуренция и миграция в другие ареалы обитания оказывают значимое влияние на эволюцию экосистем, возникает потребность в моделировании систем высокой размерности. В процессе построения и анализа многомерных популяционных моделей могут выявляться существенные особенности, понимание которых требует разработки новых методов исследования, создания алгоритмов численного анализа и программных средств.

Направление, связанное с исследованием многомерных популяционных моделей, является актуальным в связи с недостаточной изученностью нелинейных моделей размерности n ($n > 3$) и в связи с прикладной значимостью для описания экосистем. В частности, представляет интерес задача построения и анализа конечномерных математических моделей популяционной динамики с учетом конкуренции и миграционных потоков. В процессе решения указанной задачи возникают вычислительные трудности, связанные с большим количеством таких параметров, как скорости миграции каждого из видов, параметры внутривидовой и межвидовой конкуренции, параметры естественного роста популяций, параметры взаимодействия хищников и жертв.

Решение задач стохастизации и изучение стохастических вариантов популяционных моделей с учетом миграционных потоков являются важными направлениями исследований. При детерминистическом описании модели не учитываются вероятностные факторы, влияющие на траекторную динамику модели. Самым распространенным методом введения стохастики в модель является аддитивное добавление стохастического члена, который описывает лишь внешнее воздействие и не связан со структурой самой модели. Эффективными методами стохастизации являются введение мультипликативных и параметрических шумов, а также метод построения самосогласованных стохастических моделей. Следует отметить актуальность проведения сравнительного анализа динамики детерминированных и стохастических миграционно-популяционных моделей, построенных на основе введения аддитивных, мультипликативных и параметрических шумов, а также с использованием самосогласованных одношаговых процессов.

В настоящее время моделирование миграционно-популяционных систем можно осуществлять с применением различных программных средств, обладающих достаточно эффективным набором инструментов для построения компьютерных моделей и проведения вычислительных экспериментов. Тем не менее, применение известных программных продуктов имеет ограниченные возможности для моделирования отдельных классов систем. В связи с этим следует отметить актуальность применения языков программирования общего назначения для исследования миграционно-популяционных моделей. Компьютерное моделирование с использованием языков программирования общего назначения позволяет разрабатывать специализированные интерфейсы и получать результаты в случае достаточно высокой размерности с учетом увеличения количества фазовых переменных.

Диссертация посвящена построению и анализу многомерных математических моделей популяционной динамики в детерминированном и стохастическом случаях с учетом трофических взаимодействий, конкуренции видов и миграционных потоков, а также разработке алгоритмов и компьютерных программ для изучения динамики и устойчивости рассматриваемых моделей.

Степень разработанности темы. Начиная с классических трудов А. Пуанкаре и А.М. Ляпунова, вопросами исследования систем дифференциальных уравнений и их приложений к моделированию в естествознании занимались многие отечественные и зарубежные ученые, среди которых Н.Г. Четаев, Н.Н. Красовский, Е.А. Барбашин, В.В. Румянцев, В.В. Степанов, И.Г. Малкин, В.И. Зубов, Н.П. Еругин, А.А. Шестаков, В.А. Якубович, Г.А. Леонов, Б.С. Разумихин, Б.П. Демидович, В.М. Матросов, С.Н. Васильев, Е.А. Гребеников, Ж.П. Ла Салль, С. Лефшец, Дж. Биркгоф, Ф. Хартман, Ч. Олех, Дж. Хейл, Л. Хатвани, А. Денес, Л.Л. Стачо, М.Т. Терехин, С.С. Мамонов, А.С. Андреев, В.Н. Щенников, Ю.Н. Меренков, М.Д. Малых, Н.О. Седова, Е.Ю. Лискина, С.В. Павликов.

Формализации и аналитическому исследованию популяционных моделей, описываемых системами дифференциальных уравнений, посвящены классические работы А. Лотки и В. Вольтерры. Вопросы построения и устойчивости популяционных моделей рассмотрены в трудах таких известных исследователей, как Ю.М. Свирежев, Д.О. Логофет, А.Д. Базыкин, В.Н. Разжевайкин, Н.В. Белотелов, А.С. Братусь, А.С. Новожилов, А.Ю. Александров, Ю.А. Пых и др. Популяционные модели, учитывающие различные типы взаимодействия в популяционном сообществе, изучены в работах таких ученых, как В. Хатсон, Г.Т. Викерс, Г. Кирлингер, Х.И. Фридман, Б. Рей, Л. Чен, Дж. Жанг, В.Г. Цыбулин, Х.К. Таквелл, Л.Дж. Аллен, Я. Такеучи. Системы популяционной динамики с конкуренцией и мутуализмом, миграцией представлены в трудах О.В. Дружининой, А.В. Демидовой, М. Ячимовича, О.Н. Масиной, А.А. Петрова.

Аналитическое исследование нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений размерности $n > 3$ часто вызывает существенные трудности. В частности, при поиске стационарных состояний возникают трудности ввиду большого количества параметров, которые могут включать в себя скорости миграции каждого из видов, параметры внутривидовой и межвидовой конкуренции, параметры естественного роста популяций, параметры взаимодействия хищников и жертв и другие параметры. В связи с этим исследования последних десятилетий часто связаны с применением численных методов, методов оптимизации, методов искусственного интеллекта.

В работах К.В. Гардинера и Н.Г. Ван Кампена разработана комбинаторная методология стохастизации моделей и рассмотрены приложения теории стохастических дифференциальных уравнений в физике, химии и других естественных и технических науках. Согласно указанной методологии, эволюция во времени многомерных систем рождения–гибели может быть рассмотрена как результат индивидуальных взаимодействий между элементами этой системы. Для описания системы используется основное кинетическое уравнение, учитывающее распределение вероятностей перехода из одного состояния системы в другое. Рассмотренная методология лежит в основе метода построения самосогласованных стохастических моделей. Развитию этого метода, моделированию динамических систем с его применением и разработке программных средств для реализации метода посвящены работы ученых: Л.А. Севастьянов, Д.С. Кулябов, А.В. Демидова, М.Н. Геворкян, А.В. Королькова, Т.Р. Велиева. Для различных типов многомерных популяционных моделей с учетом внутривидовых взаимодействий, межвидовых взаимодействий и миграционных потоков метод построения самосогласованных стохастических моделей использован в трудах А.В. Демидовой, О.В. Дружининой, О.Н. Масиной.

Цикл статей И.Н. Синицына, В.И. Синицына посвящен разработке методов аналитического моделирования, методов фильтрации и экстраполяции процессов в вольтерровских стохастических системах. Авторами изучено условно-оптимальное линейное оценивание нормальных процессов, а также исследованы распределения с инвариантной мерой в вольтерровских стохастических системах.

Исследование многомерных миграционно-популяционных моделей требует привлечения численных методов оптимизации для оценки параметров. Применение эволюционных алгоритмов, инспирированных природой, изложено в работах А.П. Карпенко, Д. Саймона. Одним из эффективных эволюционных алгоритмов оптимизации является дифференциальная эволюция. Дифференциальная эволюция базируется на алгоритме генетического отжига, разработанного К. Прайсом и дополненного Р. Сторном. На основе дифференциальной эволюции З.Б. Новиков, А.В. Вахнин, Л.Д. Егорова, Л.А. Казаковцев, В.Н. Крутиков, Е.М. Товбис, А.В. Федорова разработали модификации алгоритмов оптимизации с применением гибридного эволюционного подхода. В ряде работ О.В. Дружининой, О.Н. Масиной, А.А. Петрова модификации алгоритма дифференциальной эволюции использовались для поиска оптимальных параметров некоторых типов популяционных моделей.

В настоящее время требуется дальнейшее развитие методов оптимизации параметров на основе создания новых модификаций дифференциальной эволюции с учетом адаптации к миграционно-популяционным моделям, а также проведение анализа влияния миграционных потоков и случайных колебаний различного характера на динамику многомерных систем.

Целью диссертационной работы является развитие методов моделирования систем с миграционными потоками, исследование свойств моделей на основе анализа динамического поведения и численной оптимизации, а также создание алгоритмов и специализированного программного комплекса для изучения траекторной динамики, поиска оптимальных параметров и выявления особенностей влияния миграционных потоков на поведение систем.

Для достижения этой цели в диссертационной работе решаются следующие **задачи**:

– систематизация построения многомерных миграционно-популяционных моделей с конкуренцией;

– разработка критериев оптимальности, направленных на обеспечение сосуществования видов в основном ареале и существования видов в ареалах миграции (интегральный критерий и критерий по норме отклонения);

– разработка численного метода поиска оптимальных параметров миграционно-популяционных моделей;

– анализ траекторной динамики детерминированных и стохастических миграционно-популяционных моделей;

– исследование устойчивости состояний равновесия трехмерных миграционно-популяционных моделей с применением метода функций Ляпунова;

– проведение вычислительных экспериментов с учетом вариативности параметров миграционно-популяционных моделей и обоснование результатов сравнительного анализа в детерминированном и стохастическом случаях.

Научная новизна диссертационной работы.

1. Построены обобщенные конечномерные динамические миграционно-популяционные модели.

2. Получены новые условия сосуществования видов для модели «два конкурента – один ареал миграции» с одинаковыми и различными скоростями миграции. Предложены условия асимптотической устойчивости положительных состояний равновесия на основе метода функций Ляпунова.

3. Впервые разработаны критерии оптимальности, обеспечивающие как сосуществование видов в основном ареале, так и существование видов в убежищах.

4. Предложена новая модификация метода дифференциальной эволюции с учетом специфики миграционно-популяционных моделей.

5. С учетом рассматриваемых условий найдены оптимальные параметры миграционно-популяционных моделей на основе модифицированной дифференцированной эволюции и других численных методов оптимизации.

6. Изучено влияние вариативности параметров на траекторную динамику, что позволило выявить новые качественные эффекты детерминированных миграционно-популяционных систем.

7. Применение алгоритма стохастизации на основе возмущения аддитивными, мультипликативными и параметрическими случайными шумами позволило провести сравнительный анализ детерминированных и соответствующих им стохастических моделей миграционно-популяционного типа.

8. Для изучения динамики детерминированных и стохастических миграционно-популяционных моделей и поиска оптимальных параметров разработан программный комплекс.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты исследования могут быть использованы для моделирования и прогнозирования динамики популяций в природных экосистемах. Это особенно важно для понимания механизмов конкуренции между видами, миграционных процессов и их влияния на устойчивость экосистем. Полученные результаты могут найти применение при решении задач компьютерного моделирования, задач устойчивости, стабилизации и обеспечения сосуществования видов для популяционных моделей, задач прогнозирования динамического поведения экологических систем. Численные методы и алгоритмы, разработанные в ходе исследования, могут быть использованы для создания специализированного программного обеспечения, предназначенного для анализа сложных многомерных систем. Алгоритмы поиска оптимальных параметров могут быть использованы при решении задач глобальной параметрической оптимизации, компьютерного моделирования многомерных экологических систем. Результаты могут найти применение при решении задач вычислительной биологии и биоинформатики, а также при решении задач анализа сложных динамических систем с учетом случайных факторов.

Методы исследования. В диссертации использованы методы математического моделирования, теории устойчивости динамических систем, качественной теории дифференциальных уравнений, численные методы решения нелинейных дифференциальных уравнений; численные методы оптимизации.

Положения, выносимые на защиту

1. Построены миграционно-популяционные модели с трофическими взаимодействиями, конкуренцией видов и миграционными потоками.
2. Осуществлен поиск оптимальных параметров детерминированных моделей с учетом предложенных критериев качества и поиск на их основе приближенных состояний равновесия.
3. Получены результаты исследования траекторной динамики детерминированных моделей. Построены фазовые портреты и их проекции для моделей высокой размерности и проведен анализ устойчивости. Выполнена оценка влияния вариативности параметров на траекторную динамику.
4. Разработан алгоритм перехода от детерминированной к стохастической модели.
5. Получены результаты исследования траекторной динамики стохастических моделей с учетом аддитивных и мультипликативных гауссовых шумов.
6. Разработан комплекс проблемно-ориентированных компьютерных программ для поиска оптимальных параметров на основе модифицированного алгоритма дифференциальной эволюции.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов исследования подтверждается их согласованностью с результатами вычислений, полученными в ходе тестирования. Результаты диссертации докладывались и обсуждались:

– на научно-практических конференциях Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина (Елец, 2023, 2025 гг.);

– научно-практическом семинаре «Качественная теория дифференциальных уравнений, теория устойчивости движения, теория управления и их приложения к математике, физике, информатике и техническим наукам» (Елец, ЕГУ им. И. А. Бунина, 11 ноября 2022 г.);

– Всероссийских конференциях с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» (Москва, РУДН, 2023, 2024, 2025 гг.);

– Всероссийском молодежном научно-практическом семинаре «Математическое моделирование управляемых систем, компьютерные технологии, программирование и информационная безопасность» (MMCSCTPIS-2023), Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина, 15 сентября 2023 г.;

– Всероссийской научно-практической конференции аспирантов и молодых ученых «Научные исследования и разработки молодых ученых», посвященной Дню аспиранта (Ульяновск, УлГУ, 19 января 2024 г.);

– национальной (с международным участием) научно-практической конференции «Цифровые системы и модели: теория и практика проектирования, разработки и применения» (Казань, КГЭУ, 10–11 апреля 2024 г.);

– Всероссийских научных конференциях «Дифференциальные уравнения и их приложения» (Рязань, РГУ имени С.А. Есенина, 2024, 2025 гг.);

– круглом столе «Вклад молодых исследователей в развитие Российской науки и методики ее преподавания» в рамках X международной научно-практической конференции «Фундаментальные проблемы обучения математике, информатике и информатизации образования» (Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина, 21 сентября 2024 г.);

– Всероссийском молодежном научно-практическом семинаре «Математическое моделирование управляемых систем, компьютерные технологии, программирование и информационная безопасность», Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина, 27 сентября 2024 г.;

– X Международной конференции «Математическая биология и биоинформатика» (институт математических проблем биологии РАН - филиал Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Пущино, 14-17 октября 2024 г.);

– научно-исследовательском семинаре «Методическое обеспечение и средства моделирования динамических систем с применением архитектур СВТ на отечественной аппаратно-программной платформе» (Москва, ФИЦ ИУ РАН, 12 ноября 2024 г.);

– семинаре по теории дифференциальных уравнений (Рязань, РГУ имени С.А. Есенина, 27 ноября 2024 г.);

– семинаре «Дифференциальные уравнения», (Воронеж, ВГУ, 09 декабря 2024 г.);

– объединенном научном семинаре Института прикладной математики и телекоммуникаций (Секция по математическому моделированию), Москва, РУДН, 26 февраля 2025 г.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 24 работы, из которых 3 работы ([1–3]) – в изданиях Scopus, 1 работа ([4]) – в ведущем рецензируемом журнале ВАК, 1 свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Работы [1, 2, 6, 7, 11, 12, 13] посвящены построению и исследованию четырехмерной нелинейной популяционной модели с миграционными потоками «два конкурента – два ареала миграции» и ее модификаций. В [1, 2, 12] осуществлена стохастизация модели «два конкурента – два ареала миграции» на основе метода построения самосогласованных одношаговых моделей. Выполнен переход к стохастическому дифференциальному уравнению в форме Ланжевена. В детерминированном и стохастическом случаях изучена динамика траекторий популяционно-миграционных систем. Проведен сравнительный анализ детерминированных и стохастических моделей.

В [7, 14] представлено описание базовой динамической модели «три конкурента – три ареала миграции» с учетом конкурентных взаимодействий и двунаправленных миграционных потоков относительно трех убежищ. Рассмотрен ряд модификаций базовой нелинейной модели. В [4, 8, 17, 19, 20] изучена популяционная модель «два конкурента – один ареал миграции» и ее модификации. Изучены случаи равномерной и неравномерной миграции. Получены условия сосуществования видов, проанализирована устойчивость положительных состояний равновесия с применением функций Ляпунова. В [15, 16] представлены результаты исследований популяционной динамической модели «три конкурента – два ареала миграции», в которой учитывается межвидовая конкуренция в трех популяциях попарно, двунаправленная неравномерная миграция двух популяций с учетом двух убежищ.

В [18, 21] представлены модели, в которых учитывается межвидовая конкуренция хищников и межвидовая конкуренция жертв. В [9, 24] построены детерминированные и стохастические модели «две жертвы – один ареал миграции – хищник – суперхищник». Проведено моделирование процессов взаимодействия видов в условиях трофических взаимодействий и миграционных потоков. В [3, 22–24] рассматривается популяционная модель «жертва – ареал миграции – хищник – суперхищник», в которой учитываются трофические взаимодействия, внутривидовая и межвидовая конкуренция, а также миграция жертвы в убежище. Выполнена стохастизация на основе аддитивных шумов, мультипликативных шумов и метода построения самосогласованных моделей. Проведен сравнительный анализ детерминированных и соответствующих стохастических моделей.

В [4, 17] разработан подход к построению и исследованию динамических миграционно-популяционных моделей с применением интеллектуальных технологий поиска параметров основе дифференциальной эволюции. В [1, 4, 9, 11, 13–18, 21, 23, 24] приведены результаты разработки алгоритмического обеспечения для решения задач моделирования, а также описана структура модулей программного комплекса для исследования миграционно-популяционных моделей.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи работы, аргументирована научная новизна, представлено содержание глав, охарактеризована практическая значимость полученных результатов.

В первой главе представлен аналитический обзор методов и результатов математического моделирования систем популяционной динамики, перечислены аспекты применения методов математического моделирования для исследования систем популяционной динамики, описаны обобщения и модификации классических моделей Лотки–Вольтерры. В главе также рассмотрены прикладные задачи, связанные с построением конечномерных моделей с конкуренцией и миграцией, описаны численные методы поиска оптимальных параметров, охарактеризованы методы вероятностного анализа стохастических систем популяционной динамики. В разделе 1.5 описана методология применения дифференциальной эволюции к задачам поиска оптимальных параметров. В разделе 1.6 приведен алгоритм стохастизации методом построения самосогласованных стохастических моделей.

Во второй главе описано построение, компьютерное исследование и анализ устойчивости миграционно-популяционных моделей с конкуренцией. В **разделе 2.2** рассмотрен метод дифференциальной эволюции для поиска оптимальных параметров моделей. Методология дифференциальной эволюции может применяться к широкому спектру алгоритмов оптимизации, в то же время в отдельных задачах требуется дополнительный анализ производительности и адаптация к изучаемым моделям. При реализации алгоритма дифференциальной эволюции для миграционно-популяционных моделей необходимо учитывать диапазоны параметров, неотрицательность фазовых переменных, расположение траекторий в неотрицательном ортанте фазового пространства, экологический смысл критериев. Алгоритм дифференциальной эволюции базируется на циклическом выполнении этапов, представленных на рис. 1.

В диссертации использована модифицированная стратегия best1bin дифференциальной эволюции с учетом коэффициента биномиального распределения. Указанная стратегия обеспечивает наилучшее решение, найденное в родительской популяции, а также более быстрое приближение к оптимальному решению. В случае популяционно-миграционных динамических моделей высокой размерности целесообразно управлять такими параметрами, как погрешность вычислений, оптимальный выбор масштабного коэффициента F и вероятности распределения пробного вектора C_r.

Рис. 1. Схема метода дифференциальной эволюции

В **разделе 2.3** приводится построение и анализ популяционных динамических моделей типа «*n* конкурентов – *n* ареалов миграции». Рассмотрена модель вида

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i = x_i \cdot (a_i - \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \cdot x_j) + \mu_{i+1} \cdot x_{i+1} - \mu_i \cdot x_i, \quad i = 1,\ 3,\ \ldots,\ 2m-1,\ j = 1,\ 3,\ \ldots,\ 2m-1, \\ &\dot{x}_i = x_i \cdot (a_i - p_{ii} \cdot x_i) + \mu_{i-1} \cdot x_{i-1} - \mu_i \cdot x_i, \quad i = 2, 4, \ldots, 2m, \end{aligned} \tag{1}$$

где $m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n/2,$ x_i с нечетными индексами – плотности конкурирующих популяций, x_i с четными индексами – плотности соответствующих популяций с учетом мигрирования в убежища. Модель (1) представляет собой модель типа «*k* конкурентов – *k* ареалов миграции», где $k = n/2$, а четное число *n* соответствует размерности модели. Параметры, фигурирующие в модели (1), представлены в табл. 1.

Таблица 1. Переменные и параметры модели (1)

Переменные / параметры	Пояснение переменных / параметров
x_i $(i = 1, 3, 5, \ldots)$	плотность конкурирующей популяции *i*-го вида в основном ареале
x_i $(i = 2, 4, 6, \ldots)$	плотность популяции (*i*–1)-го вида в (*i*–1)-м убежище
a_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$	коэффициент естественного прироста
p_{ij} $(i \neq j)$	коэффициент межвидовой конкуренции
p_{ij} $(i = j)$	коэффициент внутривидовой конкуренции
μ_i $(i = 2, 4, 6, \ldots)$	коэффициент миграции (*i*–1)-го вида из основного ареала в (*i*–1)-е убежище
μ_i $(i = 1, 3, 5, \ldots)$	коэффициент миграции *i*-го вида из *i*-го убежища в основной ареал

Таким образом, модель (1) описывает такие взаимодействия, при которых число конкурирующих видов совпадает с количеством ареалов миграции. Очевидно, что $k \geq 2, n \geq 4$. В качестве примера рассмотрена модификация модели (1) вида «два конкурента – два ареала миграции» (при $n = 4$) с равными между собой коэффициентами роста и внутривидовой конкуренции. Указанная модель описывается системой уравнений вида

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= ax_1 - px_1^2 - p_{13}x_1x_3 + \beta x_2 - \gamma x_1, \\
\dot{x}_2 &= ax_2 - px_2^2 + \gamma x_1 - \beta x_2, \\
\dot{x}_3 &= ax_3 - px_3^2 - p_{31}x_1x_3 + \varepsilon x_4 - \delta x_3, \\
\dot{x}_4 &= ax_4 - px_4^2 + \delta x_3 - \varepsilon x_4,
\end{aligned} \tag{2}$$

где $p_{11} = p_{22} = p_{33} = p_{44} = p,\ a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a,\ \mu_1 = \beta, \mu_2 = \gamma,\ \mu_3 = \varepsilon, \mu_4 = \delta.$

С помощью дифференциальной эволюции получены значения параметров модели (2): $a = 10.00$, $p = 0.10$, $p_{13} = 0.70$, $p_{31} = 0.50$, $\beta = 7.32$, $\delta = 9.99, \gamma = 9.97$, $\varepsilon = 7.03$. Соответствующий результат с учетом начальных условий $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0))$ = $= (0.5,\ 0.5,\ 1,\ 7)$ приведен на рис. 2.

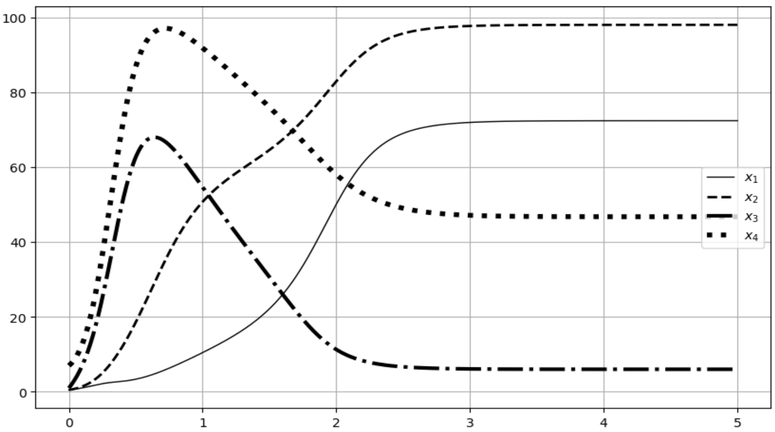

Рис. 2. Траектории решений для модели (2)

В разделе 2.3 также построены проекции фазовых портретов различных модификаций модели «два конкурента – два ареала миграции» на плоскости и в пространстве. Вычислительные эксперименты, которые проведены с учетом варьирования начальных условий, коэффициентов роста, межвидовой конкуренции и скоростей миграции, показывают, что наблюдается соответствующее стационарному режиму как сосуществование всех видов в основном ареале, так и существование мигрирующих видов в убежищах. Найденное состояние равновесия $x_1 = 71.34,\ x_2 = 98.80,\ x_3 = 6.06,\ x_4 = 43.60$ имеет характер устойчивого узла.

Далее в разделе построены и изучены модификации модели (1) при $n=6, k=3$. В моделях типа «три конкурента – три ареала миграции» учитывается влияние попарной межвидовой конкуренции в трех популяциях с двунаправленной миграцией всех популяций. Проведенное компьютерное исследование различных модификаций моделей вида «три конкурента – три ареала миграции» позволило выявить параметры, обеспечивающие условия коэволюции видов и провести анализ траекторной динамики. Сравнительный анализ поведения траекторий модели «три конкурента – три ареала миграции» с учетом различных критериев оптимальности метода дифференциальной эволюции показал, что наблюдается соответствующее стационарному режиму как сосуществование всех видов в основном ареале, так и существование мигрирующих видов в убежищах, плотности популяций x_1, x_4, x_5, x_6 изменяются незначительно при изменении критерия оптимальности.

В **разделе 2.4** выполнено построение и качественное исследование популяционных динамических моделей типа «*n* конкурентов – (*n*–1) ареалов миграции». Предложена обобщенная нелинейная многомерная миграционно-популяционная модель, в которой *k* видов мигрирует в 2*k* ареалов в условиях наличия *k* конкурентов размерности $n=3k$, причем $n \geq 3$. Указанная модель имеет достаточно сложную структуру, и в настоящее время изучены отдельные частные случаи этой многомерной модели. Далее приведено описание миграционно-популяционной модели в случае $n=3, k=1$, которая задается системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1x_1 - p_{11}x_1^2 - p_{13}x_1x_3 + \beta_2F_2(x_1,t)\cdot x_2 - \gamma_1F_1(x_1,t)\cdot x_1, \\ \dot{x}_2 &= a_2x_2 - p_{22}x_2^2 + \gamma_2F_2(x_2,t)\cdot x_1 - \beta_1F_1(x_2,t)\cdot x_2, \\ \dot{x}_3 &= a_3x_3 - p_{33}x_3^2 - p_{31}x_1x_3, \end{aligned} \tag{3}$$

где x_1 и x_3 – плотности популяций конкурирующих видов в первом ареале, x_2 – плотность популяции в убежище, p_{ij} $(i \neq j)$ – коэффициенты межвидовой конкуренции, p_{ii} $(i=1,2,3)$ – коэффициенты внутривидовой конкуренции, a_i $(i=1,2,3)$ – коэффициенты естественного прироста, $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ – коэффициенты миграции вида между первым и вторым ареалами, при этом второй ареал является убежищем, функции $F_i(x_i, t)$ непрерывны и определены в неотрицательном ортанте фазового пространства. На фазовые переменные и параметры накладываются ограничения

$x_i \geq 0, a_i > 0, p_{ii} > 0, i=1,2,3, p_{13} > 0, p_{31} > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0.$

Рассмотрены различные упрощенные модификации модели (3). В частности, при $F_1(x_1,t)=1, F_2(x_1,t)=1, F_1(x_2,t)=1, F_2(x_2,t)=1$ для всех значений *x*, *t* получены упрощенные модели с линейной миграцией. Вариативность коэффициентов миграции может использоваться для оценки изменения численности популяций. Для упрощенных моделей, полученных из (3) проведена серия вычислительных экспериментов по поиску оптимальных параметров. Исследована траекторная динамика и построены фазовые портреты моделей типа «два конкурента – один ареал миграции». Показано, что разные скорости миграции значительно влияют на плотность популяций как в основном ареале, так и в убежище. При оптимальных наборах параметров, полученных с помощью метода дифференциальной эволюции, наблюдается сосуществование двух конкурентов в основном ареале и существование мигрирующего вида в убежище как в случае с разными скоростями миграции, так и в случае попарно одинаковых миграционных коэффициентов.

В разделе 2.4 также предложена и изучена пятимерная модель «три конкурента – два ареала миграции», в которой учитывается влияние попарной межвидовой конкуренции в трех популяциях с двунаправленной миграцией только двух популяций. Указанная модель задается системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_1x_1 - p_{11}x_1^2 - p_{13}x_1x_3 - p_{15}x_1x_5 + \beta x_2 - \gamma x_1,\\
\dot{x}_2 &= a_2x_2 - p_{22}x_2^2 + \gamma x_1 - \beta x_2,\\
\dot{x}_3 &= a_3x_3 - p_{33}x_3^2 - p_{31}x_1x_3 - p_{35}x_3x_5 + \varepsilon x_4 - \delta x_3,\\
\dot{x}_4 &= a_4x_4 - p_{44}x_4^2 + \delta x_3 - \varepsilon x_4,\\
\dot{x}_5 &= a_5x_5 - p_{55}x_5^2 - p_{51}x_1x_5 - p_{53}x_3x_5,
\end{aligned} \tag{4}$$

где x_1, x_3 и x_5 – плотности трех популяций конкурирующих видов в ареале совместного обитания, x_2 – плотность первой популяции в убежище, x_4 – плотность второй популяции в убежище, p_{ij} $(i \neq j)$ – коэффициенты межвидовой конкуренции, p_{ii} $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ – коэффициенты внутривидовой конкуренции, a_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ – коэффициенты естественного прироста, β, γ – коэффициенты миграции вида между ареалом совместного обитания и убежищем первой популяции, δ, ε – коэффициенты миграции вида между ареалом совместного обитания и убежищем второй популяции.

В ходе исследования модели (4) и ее упрощенных модификаций выполнен поиск параметров с помощью дифференциальной эволюции, найдены стационарные состояния, построены траектории с учетом найденных параметров и выбранных начальных условий, установлен характер устойчивости. Анализ траекторной динамики позволил выявить, что траектории, соответствующие плотностям популяций x_1, x_2, x_3, x_4, выходят на стационарный режим. При этом численность популяции x_5 уменьшается с сохранением стационарного режима.

В **разделе 2.5** рассмотрено компьютерное моделирование популяционных динамических систем «хищник – жертва» с учетом внутривидовой конкуренции и миграции видов. Для четырехмерной модели «два хищника – две жертвы» с межвидовой конкуренцией хищников и жертв решена оптимизационная задача поиска такого набора модельных параметров, при котором обеспечивается сосуществование двух видов хищников и двух видов жертв. Полученный в разделе 2.5 с помощью модифицированного метода дифференциальной эволюции набор параметров использован для построения траекторий и проекций фазовых портретов. Результаты, полученные в ходе вычислительных экспериментов, подтвердили адекватность выбранного метода оптимизации, обеспечивающего сосуществование всех видов популяционной модели «два хищника–две жертвы».

В **разделе 2.6** рассмотрены модели с трофическими взаимодействиями с учетом миграции жертвы в убежище. Построены четырехмерная модель «жертва – ареал миграции жертвы – хищник – суперхищник» с двунаправленной миграцией вида и пятимерная модель «две жертвы – ареал миграции первой жертвы – хищник – суперхищник». В разделе проведен оптимизационный поиск таких параметров указанных моделей, при которых обеспечивается сосуществование всех популяций в основном ареале и существование вида в убежище. Для поиска оптимальных параметров используется модифицированный алгоритм дифференциальной эволюции. Результаты анализа траекторий систем построенных моделей показали сосуществование видов жертв, хищника и суперхищника, а также существование вида в убежище. Построены проекции фазовых портретов, а также изучен характер устойчивости состояний равновесия.

В **разделе 2.7** получены условия сосуществования видов и условия устойчивости состояний равновесия с применением функций Ляпунова. Рассмотрена модель, учитывающая конкуренцию и миграцию видов. Модель описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(1 - x_1 - ry) + \beta x_2 - \gamma x_1, \\ \dot{x}_2 &= x_2(1 - x_2) + \gamma x_1 - \beta x_2, \\ \dot{y} &= y(1 - r x_1), \end{aligned} \tag{6}$$

где x_1 и y – плотности двух популяций конкурирующих видов в ареале совместного обитания, x_2 – плотность первой популяции в убежище, $r > 0$ – коэффициент конкуренции видов в первом ареале, β, γ – коэффициенты миграции видов между двумя ареалами. Частным случаем (6) является модель с равномерной миграцией, описываемая системой уравнений

$$\dot{x}_1 = x_1(1 - x_1 - ry) + \mu x_2 - \mu x_1,$$
$$\dot{x}_2 = x_2(1 - x_2) + \mu x_1 - \mu x_2, \qquad (7)$$
$$\dot{y} = y(1 - rx_1),$$

где $\beta = \gamma = \mu$. В результате решения соответствующих алгебраических уравнений для модели (6) получены следующие состояния равновесия: $O(0, 0, 0)$, $A_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2, 0)$ и $A_2\left(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{y}\right)$, где ненулевые компоненты состояния равновесия выражены через параметры системы. Получена теорема о существовании единственного состояния равновесия системы (6).

Теорема 1. Пусть для системы (6) выполнено условие $0 < \beta < 1,\ 0 < \gamma < 1,\ r > 1.$ Тогда система (6) имеет единственное положительное состояние равновесия $A_2\left(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{y}\right)$.

В результате решения соответствующих алгебраических уравнений для модели (7) получены следующие состояния равновесия: $O(0, 0, 0)$, $B_1(1, 1, 0)$ и $B_2\left(\hat{x}_1^*, \hat{x}_2^*, \hat{y}^*\right)$, где ненулевые компоненты состояния равновесия выражены через параметры системы. Получена теорема о существовании положительного состояния равновесия системы (7), доказательство которой базируется на решении системы неравенств с параметрами.

Теорема 2. Пусть для системы (7) выполнено условие $r > 1,\ 0 < \mu < 1.$ Тогда система (7) имеет единственное положительное состояние равновесия $B_2\left(\hat{x}_1^*, \hat{x}_2^*, \hat{y}^*\right)$.

С помощью метода функций Ляпунова в разделе изучен вопрос об асимптотической устойчивости в целом положения равновесия модели (6). Для проверки свойств положительного состояния равновесия построена функция Ляпунова вида

$$V = \sum_{i=1}^{2} k_i(x_i - \hat{x}_i - \hat{x}_i \ln(x_i / \hat{x}_i)) + k_3(y - \hat{y} - \hat{y}\ln(y / \hat{y})), \qquad (8)$$

где $k_i, i = 1, 2, 3,$ – положительные постоянные. С помощью (8) получены достаточные условия асимптотической устойчивости положительного состояния равновесия модели (6). Аналогичным образом построена функция Ляпунова для модели (7), и доказана асимптотическая устойчивость положительного состояния равновесия модели (7).

В третьей главе осуществлена стохастизация изученных во второй главе моделей и их модификаций на основе аддитивных, мультипликативных и параметрических шумов, а также метода построения самосогласованных моделей. В **разделе 3.2** для описания структуры стохастической модели использованы уравнения Фоккера–Планка и выполнен переход к системе уравнений в форме Ланжевена. Стохастическое дифференциальное уравнение в форме уравнения Ланжевена, эквивалентное уравнению Фоккера–Планка, имеет вид

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dW, \tag{9}$$

где $x \in R^n$ – функция состояния системы, $W \in R^n$ – стандартное броуновское движение, которое описывается случайным винеровским процессом, $a(x,t)$ – вектор состояний системы; $b(x,t)$ – единичная матрица размера $n \times n, n > 2$.

Одним из примеров, рассмотренных в диссертации, является четырехмерная стохастическая модель «два конкурента – два ареала миграции», соответствующая системе (2):

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= ax_1 - px_1^2 - p_{13}x_1x_3 + \beta x_2 - \gamma x_1 + \xi(\mu_1,\sigma_1),\\
\dot{x}_2 &= ax_2 - px_2^2 + \gamma x_1 - \beta x_2 + \xi(\mu_2,\sigma_2),\\
\dot{x}_3 &= ax_3 - px_3^2 - p_{31}x_1x_3 + \varepsilon x_4 - \delta x_3 + \xi(\mu_3,\sigma_3),\\
\dot{x}_4 &= ax_4 - px_4^2 + \delta x_3 - \varepsilon x_4 + \xi(\mu_4,\sigma_4),
\end{aligned} \tag{10}$$

где $\xi(\mu_i,\sigma_i)$, $i = 1,\ldots,4$, – аддитивный гауссов шум, добавленный в правую часть каждого уравнения системы (2). Численное решение стохастических систем дифференциальных уравнений реализовано методом Эйлера–Маруямы.

В **разделе 3.3** проведен сравнительный анализ результатов вычислительных экспериментов для детерминированных и стохастических моделей. На рис. 3 представлены траектории моделей (2) и (10) с учетом набора параметров, полученного для модели (2): $a = 10.00$, $p = 0.10$, $p_{13} = 0.70$, $p_{31} = 0.50$, $\beta = 7.32$, $\delta = 9.99$, $\gamma = 9.97$, $\varepsilon = 7.03$.

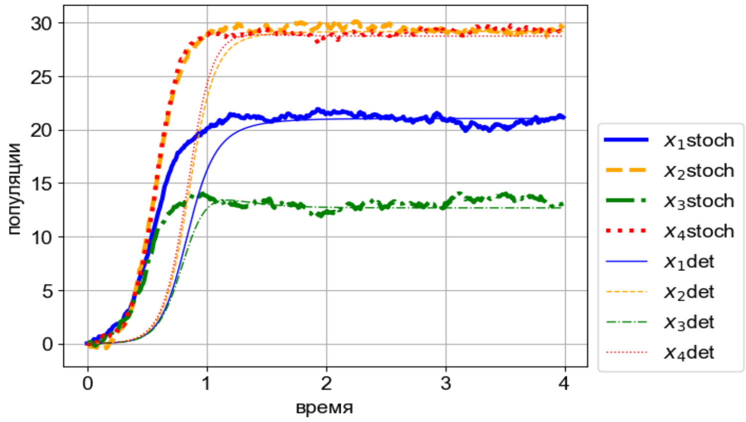

Рис. 3. Траектории стохастической модели (10) (обозначены жирными линиями) и детерминированной модели (2) (обозначены тонкими линиями)

Компьютерные эксперименты показали незначительное влияние введения стохастики в случае воздействия аддитивного шума. Так же, как и в детерминированном случае, решения стохастических дифференциальных уравнений выходят на стационарный режим.

В **разделе 3.4** проведен сравнительный анализ траекторной динамики моделей, построенных с учетом аддитивных, мультипликативных шумов и с использованием метода построения самосогласованных стохастических моделей. В качестве примера рассмотрена четырехмерная стохастическая модель «жертва – ареал миграции жертвы – хищник – суперхищник» с учетом введения множителей, содержащих случайный винеровский процесс, к скоростям миграции детерминированной системы из раздела 2.6. Полученная стохастическая система имеет вид

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_1 x_1 - p_{11} x_1^2 - q_{13} x_1 x_3 - q_{14} x_1 x_4 + \sigma_1 W x_2 - \sigma_2 W x_1,\\
\dot{x}_2 &= a_2 x_2 - p_{22} x_2^2 - \sigma_1 W x_2 + \sigma_2 W x_1,\\
\dot{x}_3 &= -c_3 x_3 - p_{33} x_3^2 - q_{34} x_3 x_4 + d_{13} x_1 x_3,\\
\dot{x}_4 &= -c_4 x_4 - p_{44} x_4^2 + d_{34} x_3 x_4 + d_{14} x_1 x_4,
\end{aligned} \tag{11}$$

где σ_1, σ_2 – интенсивности шума, W – винеровский процесс, x_1 – плотность популяции жертвы в основном ареале, x_2 – плотность популяции жертвы в убежище, x_3 – плотность популяции хищника, x_4 – плотность популяции суперхищника; a_1 – коэффициент естественного прироста жертв в основном ареале, a_2 – коэффициент естественного прироста жертв в убежище; q_{13} – коэффициент взаимодействия между жертвой в основном ареале и хищником, q_{14} – коэффициент взаимодействия между жертвой в основном ареале и суперхищником; p_{ii} $(i = 1, 2, 3, 4)$ – коэффициенты внутривидовой конкуренции; q_{34} – коэффициент взаимодействия между хищником и суперхищником; c_3 – коэффициент естественной убыли хищника, c_4 – коэффициент естественной убыли суперхищника; d_{13} – коэффициент прироста хищника за счет поедания жертвы в основном ареале; d_{14}, d_{34} – коэффициенты прироста суперхищника; β, γ – коэффициенты миграции жертвы.

Аналогичным образом построены и изучены стохастические модели «жертва – ареал миграции жертвы – хищник – суперхищник» с аддитивным и мультипликативным шумами в правой части. Для проведения сравнительного анализа поведения систем в разделе рассмотрена стохастизация модели (11) на основе метода построения самосогласованных моделей. Данный метод предполагает получение стохастического дифференциального уравнения с согласованной стохастической и детерминистической частями. Указанное стохастическое дифференциальное уравнение выводится в результате математических преобразований из схемы взаимодействия, представляющей собой символическую запись всех возможных взаимодействий в системе. На рис. 4 представлены траектории для фазовой переменной x_1 указанных стохастических моделей в сравнении с детерминистическим случаем.

Стохастическое моделирование позволило выявить схожий характер траекторий стохастических моделей с учетом вариативности параметра, характеризующего интенсивность шума. Самосогласованная стохастическая модель имеет иной качественный характер. Решения СДУ также выходят на стационарный режим. Для рассматриваемой модели с учетом введения стохастики жертва продолжает существовать как в основном ареале, так и в убежище.

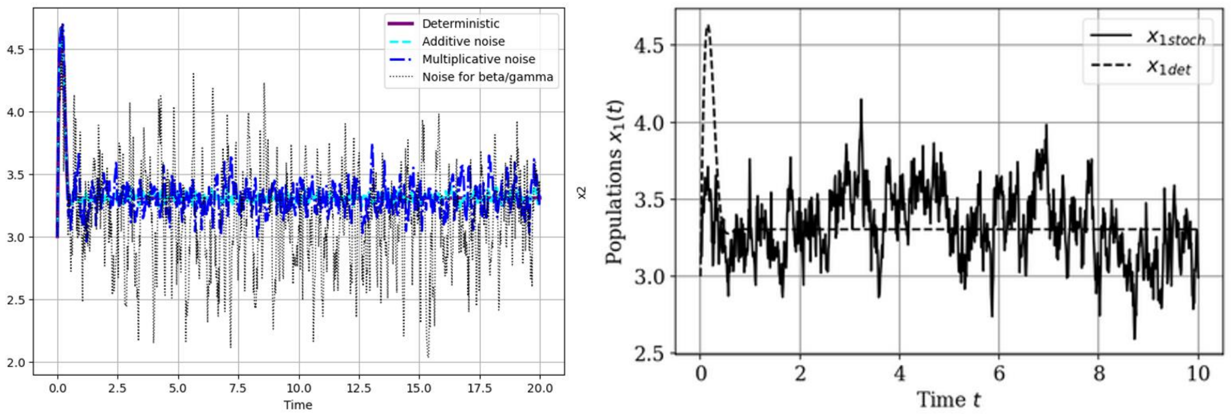

Рис. 4. Траектории для фазовой переменной x_1 стохастических моделей в сравнении с детерминистическим случаем

В четвертой главе описано алгоритмическое обеспечение и разработана структура программного комплекса моделирования миграционно-популяционных систем. В **разделе 4.2** дано описание основных алгоритмов моделирования миграционно-популяционных систем. На рис. 5 приведена блок-схема алгоритма в формате UML для стадии формализации детерминированной модели с учетом типов взаимодействий. Для уточнения модели реализация каждого шага алгоритма может осуществляться несколько раз. Для каждой последующей стадии исследования миграционно-популяционных моделей разработано несколько алгоритмов, из которых можно выбрать определенный алгоритм для решения задачи. Программная реализация этих алгоритмов лежит в основе модулей программного комплекса.

В **разделе 4.3** приведена общая структура программного комплекса для построения и исследования миграционно-популяционных моделей. Программный комплекс написан на языке Python в среде Jupyter с привлечением библиотек sympy, scipy, matplotlib, sdeint. Комплекс состоит из следующих модулей: модуль нахождения состояний равновесия и проверки устойчивости, модуль поиска коэффициентов метаэвристическими методами, модуль построения траекторий детерминированных моделей, модуль визуализации на фазовой плоскости и в неотрицательном ортанте пространства, модуль стохастизации моделей с учетом аддитивных и мультипликативных шумов, модуль проведения сравнительного анализа детерминированных и стохастических моделей.

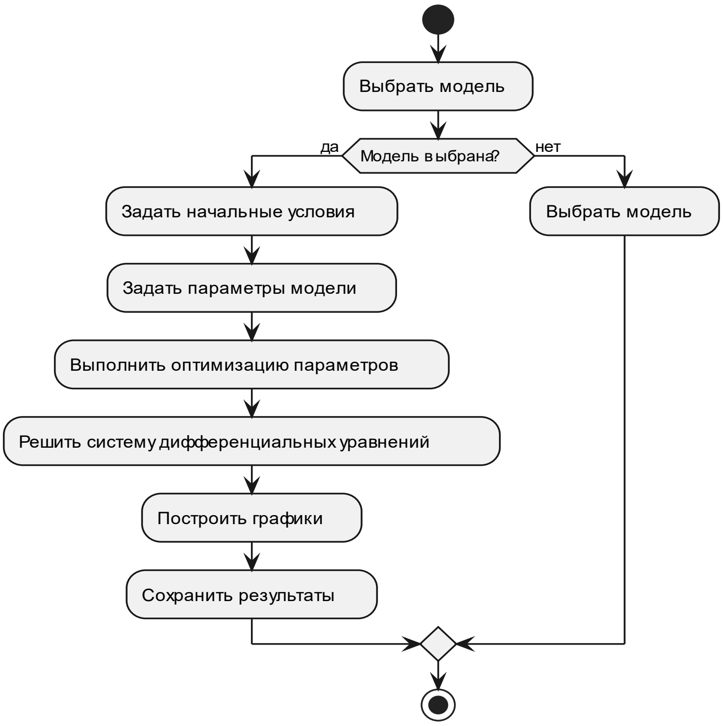

Рис. 5. Блок-схема алгоритма исследования миграционно-популяционной модели

В **разделе 4.4** представлено детальное описание модулей программного комплекса на соответствующих программных листингах. В **разделе 4.5** приведен пример функционирования модулей программного комплекса для исследования модели вида «два конкурента – один ареал миграции». В **разделе 4.6** представлен анализ функциональности программного комплекса.

В **заключении** перечислены основные выводы и результаты диссертации.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Построены и изучены модели популяционной динамики с учетом конкуренции видов и миграционных потоков.
2. Проведено моделирование процессов взаимодействия видов в условиях конкуренции и миграционных потоков.

3. С помощью дифференциальной эволюции решена оптимизационная задача поиска параметров с учетом критериев оптимальности, обеспечивающих сосуществование популяций в условиях конкуренции видов в основном ареале с учетом миграции этих видов.
4. Изучена траекторная динамика, построены проекции фазовых портретов. Выявлены качественные эффекты и дан сравнительный анализ полученных результатов для изученных модификаций миграционно-популяционных моделей.
5. Получены условия существования положительных и неотрицательных состояний равновесия и исследована устойчивость в смысле Ляпунова состояний равновесия трехмерных миграционно-популяционных моделей.
6. Осуществлена стохастизация моделей на основе аддитивных, мультипликативных и параметрических шумов, а также метода построения самосогласованных моделей. Изучена траекторная динамика в стохастическом случае.
7. Проведен сравнительный анализ детерминированных и стохастических моделей. Выявлены наборы параметров, при которых решения как детерминированных, так и стохастических дифференциальных уравнений выходят на стационарный режим.

СПИСОК ОСНОВНЫХ РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, входящих в международную базу цитирования Scopus

1. Vasilyeva I.I., Demidova A.V., Druzhinina O.V., Masina O.N. Construction, stochastization and computer study of dynamic population models “two competitors – two migration areas” // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. 2023. V. 31. No. 1. P. 27–45.
2. Vasilyeva I.I., Demidova A.V., Druzhinina O.V., Masina O.N. Computer research of deterministic and stochastic models “two competitors–two migration areas” taking into account the variability of parameters // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. 2024. V. 32. No. 1. P. 61–73.
3. Vasilyeva I.I., Druzhinina O.V., Masina O.N., Demidova A.V. Analysis of the stochastic model “prey – migration area – predator – superpredator” // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. 2025. V. 33. N. 3. P. 272–283.

Работы в изданиях, входящих в Перечень ВАК

4. Дружинина О.В., Масина О.Н., Васильева И.И. Дифференциальная эволюция в задачах поиска оптимальных параметров популяционно-миграционных моделей // Современные информационные технологии и ИТ–образование. 2024. Т. 20. № 1. С. 58–69.

Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ

5. Васильева И.И., Масина О.Н., Дружинина О.В. Программа для ЭВМ «Программа для визуализации результатов компьютерного моделирования динамики взаимодействующих популяций». Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024690504 от 16.12.2024.

Прочие публикации

6. Васильева И.И., Дружинина О.В., Масина О.Н. Построение и исследование популяционных динамических моделей типа «два конкурента – два ареала миграции» // Нелинейный мир. 2022. Т. 20. № 4. С. 60–68.
7. Дружинина О.В., Васильева И.И., Масина О.Н. Построение популяционных динамических моделей типа «три конкурента – три ареала миграции» // Нелинейный мир. 2023. Т. 21. № 4. С. 33–38.
8. Васильева И.И., Дружинина О.В., Масина О.Н. Условия сосуществования популяций и анализ устойчивости динамических моделей с миграционными потоками // Нелинейный мир. 2025. Т. 23. № 1. С.20–26.

9. Васильева И.И. Исследование стохастических миграционно–популяционных моделей «две жертвы – один ареал миграции – хищник – суперхищник» // Нелинейный мир. 2025. Т. 24. № 2. С. 5–14.

10. Druzhinina O.V., Masina O.N., Vasilyeva I.I. Application aspects of mathematical modeling methods for the ecological systems dynamic modes study // Материалы II Международного научного форума по устойчивому развитию социально-экономических систем (WFSDS 2022), 23-24 декабря 2022. P. 788–795.

11. Васильева И.И. Компьютерное моделирование системы популяционной динамики с учетом варьирования миграционных параметров //Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2022. № 2. С. 21–30.

12. Демидова А.В., Дружинина О.В., Масина О.Н., Васильева И.И. Стохастизация и анализ дифференциальной популяционной модели «два конкурента–два ареала миграции» // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: материалы Всероссийской конференции с международным участием, 17–21 апреля 2023 г. М.: РУДН, 2023. С. 206–212.

13. Васильева И.И. Построение и анализ нелинейных динамических моделей с учетом миграционных потоков // Системы управления, сложные системы: моделирование, устойчивость, стабилизация, интеллектуальные технологии: материалы IX Международной научно-практической конференции, 24–25 апреля 2023 г. Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2023. С. 37–41.

14. Масина О.Н., Дружинина О.В., Васильева И.И. Исследование популяционной динамической модели «три конкурента – три ареала миграции» // Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2023. С. 61–71.

15. Васильева И. И. Построение и анализ пятимерной популяционной модели, учитывающей конкуренцию и миграцию видов // Научные исследования и разработки молодых ученых: Материалы Всероссийской научно-практ. конференции аспирантов и молодых ученых, Ульяновск, 19 января 2024 года. Ульяновск: УлГУ. 2024. С. 24–26.

16. Демидова А. В., Дружинина О. В., Масина О. Н., Васильева И. И. Стохастизация и анализ популяционной модели «три конкурента–два ареала миграции» // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: материалы Всероссийской конференции с международным участием, Москва, 8–12 апреля 2024 г. Москва: РУДН, 2024. С. 400–406.

17. Васильева И. И. Интеллектуальный метод поиска параметров популяционно-миграционной модели // Цифровые системы и модели: теория и практика проектирования, разработки и применения: Материалы национальной (с международным участием) научно-практической конференции, Казань, 10–11 апреля 2024 г. Казань: КГЭУ, 2024. С. 758–762.

18. Васильева И.И., Дружинина О.В., Масина О.Н. Исследование четырехмерной динамической популяционной модели на основе методов численной оптимизации // Материалы III Всероссийской

научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», 18–20 июня 2024 г. Рязань: РГУ имени С. А. Есенина, 2024. С. 30–33.

19. Васильева И. И. Исследование трехмерной популяционной динамической модели на основе метода дифференциальной эволюции // Студенческий вестник: актуальные вопросы науки и образования. Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2024. С. 18–21.

20. Васильева И. И. Компьютерное исследование популяционной динамической модели «два конкурента – один ареал миграции» // Фундаментальные проблемы обучения математике, информатике и информатизации образования: сборник материалов круглого стола в рамках X Международной научно-практической конференции, 20–22 сентября 2024 г. Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2024. С. 8–10.

21. Васильева И.И., Дружинина О.В., Масина О.Н. Построение и численный анализ популяционных динамических моделей с учетом конкуренции и миграции видов // Доклады X Международной конференции «Математическая биология и биоинформатика» (ICMBB24), 14–17 октября 2024 г. Т.10. Пущино: ИМПБ РАН, 2024. doi: 10.17537/icmbb24.30

22. Васильева И.И., Дружинина О.В., Масина О.Н. Стохастический вариант популяционной модели с трофическими взаимодействиями и миграционными потоками // Материалы Всероссийской конференции с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» (ITTMM 2025), 7–11 апреля 2025 г. М.: РУДН, 2025. С. 504–508.

23. Васильева И.И., Дружинина О.В., Масина О.Н. Построение и стохастизация динамической популяционной модели «жертва – ареал миграции – хищник – суперхищник» // Материалы IV Всероссийской научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», 18–22 марта 2025 г. Рязань: РГУ имени С. А. Есенина, 2025. С. 25–28.

24. Васильева И.И. Исследование стохастических популяционных моделей с учетом трофических взаимодействий и миграционных потоков // Материалы X Международной научно-практической конференции «Системы управления, сложные системы: моделирование, устойчивость, стабилизация, интеллектуальные технологии» (CSMSSIT–2025), посвященной 105-летию со дня рождения профессора А.А. Шестакова, Елец, 17-18 апреля 2025 г. Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2025. С. 37–43.

Васильева Ирина Ивановна (Россия)

Качественное и численное исследование многомерных миграционно-популяционных моделей с конкуренцией

Построены и изучены многомерные миграционно-популяционные модели с конкуренцией, описываемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Развит подход к систематизации построения детерминированных миграционно-популяционных моделей и разработан алгоритм перехода от детерминированных к стохастическим моделям. С помощью разработанной модификации метода дифференциальной эволюции решена оптимизационная задача поиска параметров с учетом критериев оптимальности, обеспечивающих совместное существование популяций в основном ареале обитания при наличии конкуренции, а также существование вида в ареале миграции. Изучена траекторная динамика, построены проекции фазовых портретов, выявлены качественные эффекты и дан сравнительный анализ полученных результатов для различных модификаций детерминированных миграционно-популяционных моделей. В трехмерном случае получены условия асимптотической устойчивости с помощью метода функций Ляпунова. Осуществлена стохастизация моделей с учетом аддитивных, мультипликативных и параметрических гауссовых шумов. Численное решение стохастических систем дифференциальных уравнений реализовано методом Эйлера–Маруямы. Проведен сравнительный анализ моделей в детерминированном и стохастическом случаях, охарактеризовано влияние стохастических возмущений на динамику моделей. Разработаны алгоритмы и создан программный комплекс на языке Python с применением библиотек научных вычислений для исследования миграционно-популяционных моделей. Полученные результаты могут найти применение при решении задач математического моделирования биологических, экологических, физических процессов.

Vasilyeva Irina Ivanovna (Russia)

Qualitative and numerical research of multidimensional migration-population models with competition

Multidimensional migration-population models with competition described by systems of ordinary differential equations are constructed and studied. An approach to systematizing the construction of deterministic migration-population models is developed and an algorithm for the transition from deterministic to stochastic models is designed. Using the developed modification of the differential evolution method an optimization problem of finding parameters is solved taking into account optimality criteria that ensure the coexistence of populations in the primary area in the presence of competition, as well as the existence of the species in the refuge. Trajectory dynamics are studied, phase portrait projections are constructed, qualitative effects are identified and a comparative analysis of the obtained results for various modifications of deterministic migration-population models is provided. In the three-dimensional case asymptotic stability conditions are obtained using the Lyapunov function method. Models are stochasticized taking into account additive, multiplicative and parametric Gaussian noise. Numerical solutions of stochastic systems of differential equations are implemented using the Euler–Maruyama method. A comparative analysis of the models in the deterministic and stochastic cases is conducted and the influence of stochastic disturbances on the model dynamics is characterized. Algorithms are developed and a software package in Python is created using scientific computing libraries for studying migration and population models. The obtained results can be applied in solving problems of mathematical modeling of biological, environ-mental and physical processes.