

На правах рукописи

Чинь Фыюк Тоан

**НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА
ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ БИРКГОФА**

Специальность 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2025

Работа выполнена в Математическом институте имени С.М. Никольского факультета физико-математических и естественных наук ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы».

Научный руководитель: **Савчин Владимир Михайлович**, д.ф.-м.н., профессор, профессор Математического института имени С.М. Никольского ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы».

Официальные оппоненты: **Дружинина Ольга Валентиновна**, д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН.

Малых Михаил Дмитриевич, д.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой математического моделирования и искусственного интеллекта ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы».

Сакбаев Всеволод Жанович, д.ф.-м.н., доцент, ведущий научный сотрудник ФГУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН».

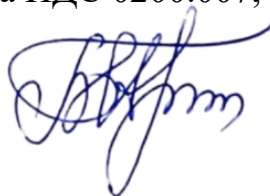
Защита состоится 13 марта 2025 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета ПДС 0200.007 при Российском университете дружбы народов имени Патриса Лумумбы по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, зал заседаний Ученого Совета.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке РУДН.

Автореферат разослан «09» февраля 2025 г.

Ученый секретарь диссертационного совета ПДС 0200.007,
доктор физико-математических наук

Будочкина С. А.



ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень ее разработанности. В 1927 году Дж. Д. Биркгоф¹ представил новую форму уравнений движения конечномерных систем, являющихся обобщением систем Гамильтона. В 1983 году Р. М. Сантилли² предложил назвать новую форму системой Биркгофа.

В работах Р. М. Сантилли были рассмотрены вопросы самосопряженности этих систем и представления в их форме систем уравнений движения неконсервативных механических систем, получены необходимые и достаточные условия самосопряженности системы дифференциальных уравнений первого порядка, а также вопрос существования аналога уравнения Гамильтона-Якоби для систем Биркгофа. Были разработаны два метода приведения системы дифференциальных уравнений первого порядка к форме систем Биркгофа.

А. С. Галиуллин³ совместно с соавторами поставили возможные варианты прямых и обратных задач динамики таких систем.

Ф. С. Мей и другие ученые получили ряд результатов по теории интегрирования уравнений Биркгофа, симметриям, устойчивости, а также по построению интегрального инварианта по заданному первому интегралу.

Подчеркнем, что в указанных исследованиях рассматривались случаи с непрерывным временем. Решение некоторых конкретных задач приводит к необходимости дискретизации уравнений движения систем Биркгофа. Методы дискретизации дифференциальных задач приводят к разностным уравнениям, теории которых были предметом исследования А. А. Самарского.

К авторам ранних работ по дискретной механике относятся, в частности, Дж. А. Кадзоу, Дж. Д. Логан, С. Маеда и Т. Д. Ли, благодаря которым были определены дискретная сумма действия, дискретные уравнения Эйлера-Лагранжа. Затем эта теория получила дальнейшее развитие в терминах интегрируемых систем в работах Ю. К. Мозера и А. П. Веселова⁴.

Вариационный взгляд на дискретную механику стал основой работ Дж. М. Вендландта и Дж. Э. Марседена, а затем был расширен в работах С. Кейна, М. Ортиса, Э.А. Репетто, М. Уэста, С. Пекарского, С. Школлера,

¹ Birkhoff, G. D. Dynamical systems / G. D. Birkhoff. – New York: American Mathematical Society, 1927. – 295 p.

² Santilli, R. M. Foundations of Theoretical Mechanics II: Birkhoffian Generalizations of Hamiltonian Mechanics / R. M. Santilli. – New York: Springer-Verlag New York Inc., 1983. – 371 p.

³ Аналитическая динамика систем Гельмгольца, Биркгофа и Намбу / А. С. Галиуллин, Г. Г. Гафаров, Р. П. Малайшка, А. М. Хван. – Москва: Редакция журнала Успехи физических наук, 1997. – 336 с.

⁴ Moser, J. K. Discrete versions of some classical integrable systems and factorization of matrix polynomials / J. K. Moser, A. P. Veselov // Communications in mathematical physics. – 1991. – Vol. 139. – P. 217-243.

А. И. Бобенко и Ю. Б. Суриса. В работе Дж. Е. Марсдена и М. Уэста⁵ дается обзор алгоритмов интегрирования уравнений движения конечномерных механических систем, основанных на дискретных вариационных принципах.

Дискретизацией уравнений движения систем Биркгофа занимались многие ученые. В работах Х. Л. Су, М. З. Цини, Ю. Дж. Суни и З. Дж. Шана дискретизация основана на методе производящих функций, а в работах С. С. Лю, Ю. С. Го, С. Конга, Х. Ву, Ф.С. Меи и В. Хуа — на прямой дискретизации вариационного принципа. В трудах этих ученых не рассматриваются вопросы о сохранении при дискретизации свойств исходных дифференциальных уравнений, в частности, потенциальность и интегральные инварианты.

В случае непрерывного времени изучение интегральных инвариантов в механике ведется уже долгое время. Основы теории интегральных инвариантов были заложены А. Пуанкаре и продолжены Э. Картаном. Взаимосвязь интегральных инвариантов с интегралами уравнений движения систем с бесконечным числом степеней свободы была установлена в работах В. М. Савчина⁶.

Вопросы об относительных интегральных инвариантах первого порядка систем Биркгофа с бесконечным числом степеней свободы и дискретном по времени аналоге в литературе, насколько нам известно, пока не исследовались.

Таким образом, диссертация по теме «Некоторые свойства дискретных динамических систем Биркгофа» имеет высокую актуальность в современной науке.

Цели и задачи исследования. Целью данной работы является исследование свойств динамических систем с дискретным временем, соответствующих непотенциальным конечномерным и бесконечномерным динамическим системам с «непрерывным» временем в рамках механики Биркгофа (косвенные вариационные принципы, интегральные инварианты, потенциальность), и их приложения с численными результатами.

Достижение указанных целей осуществляется путем решения следующих основных задач:

1. Исследование существования решения обратной задачи вариационного исчисления — аналога классического действия по Гамильтону — для одной краевой задачи для системы Соболева, описывающей движение жидкости во вращающемся сосуде.

⁵ Marsden, J. E. Discrete mechanics and variational integrators / J. E. Marsden, M. West // Acta numerica. – 2001. – Vol. 10. – P. 357-514.

⁶ Савчин, В. М. Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем / В. М. Савчин. – Москва: Издательство Университета дружбы народов, 1991. – 237 с.

2. Разработка вариационного подхода к построению дискретной математической модели движения маятника с вибрационным подвесом с трением.

3. Развитие теории потенциальности, дискретизации и интегральных инвариантов для уравнений движения как конечномерных, так и бесконечномерных систем Биркгофа.

Научная новизна:

1. Доказана непотенциальность оператора рассматриваемой краевой задачи для системы Соболева относительно классической билинейной формы и доказано несуществование матричного вариационного множителя с компонентами, зависящими от пространственных переменных и времени. Построен аналог классического действия по Гамильтону — функционал, являющийся полуограниченным на решениях заданной краевой задачи.

2. Разработан вариационный подход к построению и исследованию дискретной математической модели движения маятника с вибрационным подвесом с трением.

3. Введено понятие потенциальности дискретной системы. Получены необходимые и достаточные условия потенциальности заданной разностной системы. Представлен алгоритм построения соответствующего дискретного действия по Гамильтону.

4. Из вариационного принципа с использованием заданного действия по Гамильтону получены весьма общие уравнения движения бесконечномерных систем, содержащие как частный случай известные уравнения Биркгофа. Для них построены разностный аналог с дискретным временем и линейный относительный интегральный инвариант первого порядка. Получена разностная аппроксимация линейного относительного интегрального инварианта первого порядка.

Теоретическая и практическая значимость работы. Полученные результаты могут быть применены для исследования широких классов уравнений движения конечномерных и бесконечномерных систем с непотенциальными операторами. Их можно использовать в рамках курса «Аналитическая динамика». Кроме того, результаты диссертационной работы могут служить основой постановок задач для выпускных квалификационных работ студентов бакалавриата и магистерских диссертаций по направлениям «Математика» и «Прикладная математика и информатика».

Алгоритмы построения обобщенного действия по Гамильтону — функционала, являющегося полуограниченным на решениях одной краевой задачи для системы Соболева, и построения дискретной математической модели движения маятника с вибрационным подвесом с трением могут быть применены и для ряда других задач.

Методология и методы исследования. Исследования основываются на методах аналитической динамики и современного вариационного исчисления, применении вариационных принципов, теории разностных схем решения систем дифференциальных уравнений. В диссертации используется также пакет программ Матлаб.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие новые и содержащие элементы новизны основные положения:

1. Алгоритм построения аналога классического действия по Гамильтону — функционала, являющегося полуограниченным на решениях обратной задачи вариационного исчисления для одной краевой задачи для системы Соболева.

2. Дискретная математическая модель движения маятника с вибрационным подвесом с трением. Разработка понятия потенциальности дискретной системы.

3. Общие уравнения движения бесконечномерных систем, содержащие как частный случай известные уравнения Биркгофа. Построение их разностного аналога с дискретным временем.

4. Разностная аппроксимация линейного относительного интегрального инварианта первого порядка.

5. Иллюстративные примеры.

Степень достоверности полученных результатов. Достоверность полученных теоретических результатов обоснована приведёнными доказательствами теорем, корректностью проведённых математических преобразований и дополнительно подтверждена результатами иллюстрирующих примеров, согласующимися с выводами теории. Достоверность полученных результатов обусловлена также их обсуждениями на научных конференциях и семинарах.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались: на VI международной научно-практической конференции «Системы управления, сложные системы: моделирование, устойчивость, стабилизация, интеллектуальные технологии» (ЕГУ им. И.А. Бунина, Елец, 16–17 сентября 2020 г.); на LVII Всероссийской научно-практической конференции «Всероссийская научно-практическая конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники» (РУДН, Москва, 17–21 мая 2021 г.); на Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (ВГУ, Воронеж, 13–15 декабря 2021 г.); на Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», (ВГУ, Воронеж, 12–14 декабря 2022 г.); на III Международной конференции «Математическая физика, динамические системы, бесконечномерный анализ» (МФТИ, МИАН, МЦМУ МИАН, г. Долгопрудный, 5–13 июля 2023 г.); на научном семинаре «Непотенциальные динамические системы и нейросетевые технологии» под руководством профессора В.

М. Савчина и доцента С. Г. Шорохова (РУДН, Москва, 18 апреля 2023 г. и 4 декабря 2023 г.); на объединённом научном семинаре Института компьютерных наук и телекоммуникаций под руководством профессора Л.А. Севастьянова (РУДН, Москва, 14 февраля 2024 г.).

Личный вклад автора. Результаты совместных работ, включенные в диссертацию, получены автором лично.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 4 статьях, 1 из которых издана в периодическом научном журнале индексируемом в MathSciNet, 3 — в периодических научных журналах, индексируемых в Web of Science, 5 — в тезисах докладов. Список основных публикаций приведен в конце автореферата.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 102 страницы, включая список литературы из 66 наименований.

Благодарности. Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю Владимиру Михайловичу Савчину за оказанное влияние на научные интересы, постоянное внимание к работе и полезные дискуссии.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы исследования и степень ее разработанности, сформулированы цели и задачи работы, охарактеризованы научная новизна результатов и их теоретическая и практическая значимость, описаны методы и методология исследования. Сформулированы положения, выносимые на защиту. Обоснована достоверность результатов. Дана информация о публикации результатов и их апробации. Кроме того, кратко изложено содержание диссертации.

В **первой главе** доказана непотенциальность оператора рассматриваемой краевой задачи для системы Соболева относительно классической билинейной формы и доказано несуществование матричного вариационного множителя с компонентами, зависящими от пространственных переменных и времени. Построен аналог классического действия по Гамильтону — функционал, являющийся полуограниченным на решениях заданной краевой задачи.

В первом параграфе приведены некоторые сведения о производной Гато, нелокальных билинейных формах, потенциальных операторах, которые будут использоваться в дальнейшем.

Во втором параграфе рассмотрена следующая система уравнений в частных производных Соболева:

$$\begin{aligned}\tilde{N}_i(u, p) &\equiv \frac{\partial u^i}{\partial t} - [u \times \kappa]^i + \frac{\partial p}{\partial x^i} = \mathcal{F}_i, \quad i = \overline{1,3}, \\ \tilde{N}_4(u, p) &\equiv \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u^i}{\partial x^i} = \mathcal{F}_4,\end{aligned}\tag{1}$$

$$(x, t) = (x^1, x^2, x^3, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T),$$

где компоненты u^1, u^2, u^3 вектора u и p — неизвестные функции, область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ограничена гладкой поверхностью $\partial\Omega$, $\mathcal{F}_i, i = \overline{1,4}$ — заданные непрерывные функции на Q_T , κ — единичный вектор $(0,0,1)$.

Обозначая $N = (\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{N}_3, \tilde{N}_4) = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4)$, зададим область определения

$$\begin{aligned}D(N) = \{ (u, p) : u^i \in C^1(\overline{Q}_T), p \in C^1(\overline{\Omega}); u^i|_{t=0} = \varphi^i(x^1, x^2, x^3), \\ u^i|_{t=T} = \psi^i(x^1, x^2, x^3), i = \overline{1,3}, p|_{\partial\Omega} = 0 \},\end{aligned}\tag{2}$$

где $\varphi^i(x), \psi^i(x) \in C(\overline{\Omega})$, $i = \overline{1,3}$ — заданные функции, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\overline{Q}_T = \overline{\Omega} \times [0, T]$.

Теорема 1. *Оператор (1) не является потенциальным на множестве (2) относительно нелокальной билинейной формы*

$$\langle v, g \rangle \equiv \int_{Q_T} \sum_{i=1}^4 v^i(x, t) g^i(x, t) dx dt.$$

Теорема 2. *Не существует матричного вариационного множителя $M = \{m_{ij}(x, t)\}_{i,j=1}^4$ для оператора N (1).*

Теорема 3. *Функционал вида*

$$\begin{aligned}F_N[u] = \frac{1}{2} \int_{Q_T} \int_{Q_T} \left\{ \sum_{i=1}^3 (u^i(x, t) A_{1,i} + ([u(x, t) \times \kappa]^i + \mathcal{F}_i) A_{2,i} \right. \\ \left. + p(x) A_{3,i}) + \left(\sum_{i=1}^3 u^i(x, t) B_{1,i} + \mathcal{F}_4 B_{2,i} \right) \right\} dy d\lambda dx dt,\end{aligned}\tag{3}$$

где

$$\mathcal{K}(x, t, y, \lambda) \equiv \mathcal{K} = \exp \left(\sum_{i=1}^3 x^i y^i + t\lambda \right),$$

$$\begin{aligned}A_{1,i} = u^i(y, \lambda) D_t [\phi^i(x, t) D_\lambda [\mathcal{K} \phi^i(y, \lambda)]] + [u(y, \lambda) \times \kappa]^i \phi^i(y, \lambda) D_t [\mathcal{K} \phi^i(x, t)] \\ + p(y) D_t [\phi^i(x, t) D_{y^i} [\mathcal{K} \phi^i(y, \lambda)]] + \phi^i(y, \lambda) D_t [\mathcal{K} \phi^i(x, t) \mathcal{F}_i],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{2,i} &= u^i(y, \lambda) \phi^i(x, t) D_\lambda [\mathcal{K} \phi^i(y, \lambda)] + [u(y, \lambda) \times \kappa]^i \mathcal{K} \phi^i(x, t) \phi^i(y, \lambda) \\
&\quad + p(y) \phi^i(x, t) D_{y^i} [\mathcal{K} \phi^i(y, \lambda)] + \mathcal{K} \phi^i(x, t) \phi^i(y, \lambda) \mathcal{F}_i, \\
A_{3,i} &= u^i(y, \lambda) D_{x^i} [\phi^i(x, t) D_\lambda [\mathcal{K} \phi^i(y, \lambda)]] + p(y) D_{x^i} [\phi^i(x, t) D_{y^i} [\mathcal{K} \phi^i(y, \lambda)]] \\
&\quad + [u(y, \lambda) \times \kappa]^i \phi^i(y, \lambda) D_{x^i} [\mathcal{K} \phi^i(x, t)] + \phi^i(y, \lambda) D_{x^i} [\mathcal{K} \phi^i(x, t) \mathcal{F}_i], \\
B_{1,i} &= \sum_{j=1}^3 u^j(y, \lambda) D_{x^i} [\phi^4(x, t) D_{y^j} (\mathcal{K} \phi^4(y, \lambda))] + \phi^4(y, \lambda) D_{x^i} [\mathcal{K} \phi^4(x, t) \mathcal{F}_4], \\
B_{2,i} &= \sum_{j=1}^3 u^j(y, \lambda) \phi^4(x, t) D_{y^j} (\mathcal{K} \phi^4(y, \lambda)) + \mathcal{K} \phi^4(x, t) \phi^4(y, \lambda) \mathcal{F}_4,
\end{aligned}$$

полуограничен на решениях задачи (1), (2).

Здесь ϕ^i , $i = \overline{1,4}$ — произвольные функции класса $C^1(\overline{Q_T})$ такие, что $\phi^i(x, t) \neq 0$, $(x, t) \in Q_T$ и $\phi^i|_{t=0} = 0$, $\phi^i|_{t=T} = 0$, $i = \overline{1,3}$; $\phi^4|_{\partial\Omega} = 0$, $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $D_{x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $D_{y^i} = \frac{\partial}{\partial y^i}$.

Замечание. Функционал (3):

1. ограничен снизу на множестве (2);
2. принимает минимальное значение только на решениях задачи (1), (2);
3. не содержит производных неизвестных функций;
4. множество его стационарных точек содержит множество решений задачи (1), (2).

Среди возможных обобщений гамильтоновых систем особое положение занимают системы Биркгофа, динамика которых описывается четным числом дифференциальных уравнений первого порядка. В третьем параграфе приведены уравнения движения этих систем и подход к представлению непотенциальных систем в форме Биркгофа.

Во **второй главе** разработан вариационный подход к построению двух различных разностных схем для задачи о движении маятника с вибрационным подвесом с трением и одной диссипативной задачи. Построены системы дискретных уравнений Биркгофа. Введено понятие потенциальности дискретной системы. Получены необходимые и достаточные условия потенциальности заданной разностной системы. Представлен алгоритм построения соответствующего действия по Гамильтону.

В первом параграфе рассмотрена следующая краевая задача, связанная с движением маятника с точкой подвеса, совершающей малые колебания вдоль прямой, составляющей малый угол наклона с вертикалью:

$$N(u) \equiv \ddot{u}(t) + K(t)\dot{u}(t) + \Theta(t) \sin u + \Psi(t) \cos u = 0, \quad t \in (0, T), \quad (4)$$

$$D(N) = \{u \in U = C^2[0, T] : u|_{t=0} = \varphi, u|_{t=T} = \psi\}. \quad (5)$$

Здесь $u(t)$ — неизвестная функция, $K \in C^1[0, T]$, $\Theta, \Psi \in C[0, T]$ — заданные функции, φ, ψ — заданные числа, $\dot{u} = \frac{d}{dt}u(t)$, $\ddot{u} = \frac{d^2}{dt^2}u(t)$.

Теорема 4. При $K(t) \neq 0$ задача (4), (5) не допускает прямой вариационной формулировки относительно билинейной формы

$$\langle v, g \rangle \equiv \int_0^T v(t)g(t) dt.$$

Теорема 5. Для задачи (4), (5) существует вариационный множитель вида $M(t) = e^{\int K(t) dt}$.

Теорема 6. Уравнение

$$\hat{N}(u) \equiv e^{\int K(t) dt} N(u) = 0, \quad u \in D(N), \quad (6)$$

где N имеет вид (4), представимо в форме уравнений Гамильтона

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -e^{-\int K(t) dt} p, \\ \dot{p} &= e^{\int K(t) dt} (\Theta(t) \sin u + \Psi(t) \cos u). \end{aligned} \quad (7)$$

Действия по Гамильтону для (6) и (7) имеют соответственно вид:

$$F[u] = \int_0^T M(t) \left(-\frac{1}{2} \dot{u}^2 - \Theta(t) \cos u + \Psi(t) \sin u \right) dt, \quad (8)$$

$$J[p, u] = \int_0^T \left[p\dot{u} + \frac{p^2}{2M(t)} - M(t)\Theta(t) \cos u + M(t)\Psi(t) \sin u \right] dt. \quad (9)$$

Разобьем отрезок $[0, T]$ на m равных частей узлами $t_k = k\tau$, $k = \overline{0, m}$, где $\tau = m^{-1}T$. Введем операторы сужения

$$\overline{\mathcal{T}}_r u(t) = \overline{u}_r = (u(t_1), u(t_2), \dots, u(t_{m-1})),$$

где $r = m - 1$. Такие векторы образуют линейное пространство, которое будем обозначать $\overline{U}_r$. Для удобства напомним $\tilde{u}_k = u(t_k)$, $M_k \equiv M(t_k)$, $\Theta_k \equiv \Theta(t_k)$, $\Psi_k \equiv \Psi(t_k)$, $k = \overline{0, m}$.

Получаем системы разностных уравнений на основе функционалов (8) и (9), соответственно, в виде

$$\overline{N}_k^F(\overline{u}_r) \equiv M_k \frac{\tilde{u}_{k+1} - \tilde{u}_k}{\tau^2} - M_{k-1} \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\tau^2} + M_k \Theta_k \sin \tilde{u}_k + M_k \Psi_k \cos \tilde{u}_k = 0,$$

$$k = \overline{1, m-1}$$

и

$$\overline{N}_{1,k}^J \equiv \frac{\tilde{u}_{k+1} - \tilde{u}_k}{\tau} + \frac{\tilde{p}_k}{M_k} = 0,$$

$$\overline{N}_{2,k}^J \equiv -\frac{\tilde{p}_{k+1} - \tilde{p}_k}{\tau} + M_{k+1}\Theta_{k+1} \sin \tilde{u}_{k+1} + M_{k+1}\Psi_{k+1} \cos \tilde{u}_{k+1} = 0,$$

$$k = \overline{0, m-1}.$$

В этом параграфе также приведены результаты численного моделирования при различных параметрах задачи о движения маятника, точка подвеса которого осциллирует по синусоидальному закону вдоль прямой, наклоненной к вертикальной оси OY под углом α , являющейся частным случаем задачи (4), (5).

Во втором параграфе проведено сравнение аналитического и приближенных решений заданной диссипативной задачи, допускающей бивариационные формулировки. Изложенная идея применения альтернативных действий по Гамильтону для получения приближенных моделей с сохранением свойства потенциальности и отыскания их решений при некоторых условиях может быть распространена и на ряд других задач. В третьем параграфе построены дискретные динамические системы Биркгофа.

В четвертом параграфе введено понятие потенциальности дискретной системы.

Разобьем отрезок $[0, T]$ на m равных частей узлами $t_k = k\tau$, $k = \overline{0, m}$, где $\tau = m^{-1}T$. Введем операторы сужения

$$\overline{\mathcal{T}}_r u(t) = \overline{u}_r = (u^1(t_1), u^2(t_1), \dots, u^{2n}(t_1), u^1(t_2), u^2(t_2), \dots, u^{2n}(t_2), \dots, \\ u^1(t_{m-1}), u^2(t_{m-1}), \dots, u^{2n}(t_{m-1})),$$

где $r = 2n(m-1)$. Такие векторы образуют линейное пространство, которое будем обозначать $\overline{U}_r$.

Определение 1. Дискретный оператор $\overline{N}_r: D(\overline{N}_r) \rightarrow \mathbb{R}^r$ называется потенциальным в области $D(\overline{N}_r)$ относительно билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle: \overline{U}_r \times \overline{U}_r \rightarrow \mathbb{R}$, если существует функционал $F_{\overline{N}_r}: \overline{U}_r \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F_{\overline{N}_r}[\overline{u}_r + \varepsilon \overline{h}_r] - F_{\overline{N}_r}[\overline{u}_r]}{\varepsilon} = \langle \overline{N}_r(\overline{u}_r), \overline{h}_r \rangle \quad \forall \overline{u}_r \in D(\overline{N}_r), \forall \overline{h}_r \in D(\overline{N}_r').$$

При этом $F_{\overline{N}_r}[\overline{u}_r]$ называется потенциалом оператора $\overline{N}_r(\overline{u}_r)$.

Теорема 7. Пусть дифференцируемый по Гато оператор $\overline{N}_r: D(\overline{N}_r) \rightarrow \mathbb{R}^r$ и билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle: \overline{U}_r \times \overline{U}_r \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что для любых фиксированных элементов $\overline{u}_r \in D(\overline{N}_r)$, $\overline{h}_r, \overline{g}_r \in D(\overline{N}_r')$ функция $\varphi(\varepsilon) \equiv \langle \overline{N}_r(\overline{u}_r + \varepsilon \overline{h}_r), \overline{g}_r \rangle \in C^1[0,1]$. Тогда для потенциальности оператора $\overline{N}_r$ в односвязной области $D(\overline{N}_r)$ относительно заданной билинейной формы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\langle \overline{N}_r' \overline{h}_r, \overline{g}_r \rangle = \langle \overline{N}_r' \overline{g}_r, \overline{h}_r \rangle.$$

При этом

$$F_{\bar{N}_r}[\bar{u}_r] = \int_0^1 \left\langle \bar{N}_r \left(\bar{u}_r^0 + \lambda(\bar{u}_r - \bar{u}_r^0) \right), \bar{u}_r - \bar{u}_r^0 \right\rangle d\lambda,$$

где $\bar{u}_r^0 \in D(\bar{N}_r)$ — фиксированный элемент.

В третьей главе из вариационного принципа с использованием заданного действия по Гамильтону получены весьма общие уравнения движения бесконечномерных систем, содержащие как частный случай известные уравнения Биркгофа. Для них построен разностный аналог с дискретным временем. На его основе найдена разностная аппроксимация линейного относительного интегрального инварианта первого порядка. Получены необходимые и достаточные условия потенциальности системы уравнений вида $C(x, t, u)u_t + E(x, t, u_\alpha) = 0$ относительно заданной билинейной формы. Представлены алгоритм построения соответствующего действия по Гамильтону и преобразование этой системы к форме уравнений Биркгофа для бесконечномерной системы. На основе найденного действия получен дискретный аналог заданной системы уравнений. Рассмотрен иллюстративный пример.

В первом параграфе предположено, что действие по Гамильтону имеет вид

$$F[u] = \int_0^T \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{2n} R_i(x, t, u_\alpha) u_t^i - B(u_\alpha) \right] dx dt, \quad (10)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l)$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^l \alpha_i$, $|\alpha| = \overline{0, s}$, $R_i = R_i(x, t, u_\alpha)$, $B = B(u_\alpha)$ — заданные достаточно гладкие функции, $u(x, t) = (u^1(x, t), u^2(x, t), \dots, u^{2n}(x, t))^T$, $(x, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T)$, Ω — ограниченная область из $\mathbb{R}^l$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, $u_t^i = \frac{\partial u^i}{\partial t}$, $i = \overline{1, 2n}$, $u_\alpha = D_\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{(\partial x_1)^{\alpha_1} (\partial x_2)^{\alpha_2} \dots (\partial x_l)^{\alpha_l}}$.

Будем рассматривать функционал (10) на множестве

$$D(N) = \left\{ u \in U = (U^1, \dots, U^{2n})^T : u^i \in U^i = C_{x,t}^{2s,1}(\bar{\Omega} \times [0, T]) : u^i|_{t=0} = \varphi^i(x), \right.$$

$$\left. u^i|_{t=T} = \psi^i(x), \frac{\partial^{|v|} u^i}{\partial n_x^{|v|}} \Big|_{\Gamma_T} = \omega_v^i(x, t), i = \overline{1, 2n}, |v| = \overline{0, s-1} \right\},$$

где $\bar{\Omega} = \partial\Omega \cup \Omega$, $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0, T)$, n_x — внешняя нормаль к $\partial\Omega$; $\varphi^i(x)$, $\psi^i(x)$, $\omega_v^i(x, t)$, $i = \overline{1, 2n}$, $|v| = \overline{0, s-1}$ — заданные достаточно гладкие функции.

Теорема 8. Экстремали функционала (10) являются решениями системы уравнений

$$N_j \equiv \sum_{i=1}^{2n} \sum_{|\beta|=0}^s \left[\sum_{|\alpha|=0}^s (-1)^{|\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} D_{\alpha-\beta} \left(\frac{\partial R_i}{\partial u_{\alpha}^j} \right) - \frac{\partial R_j}{\partial u_{\beta}^i} \right] D_{\beta} u_t^i - \frac{\partial R_j}{\partial t} - \sum_{|\alpha|=0}^s (-1)^{|\alpha|} D_{\alpha} \frac{\partial B}{\partial u_{\alpha}^j} = 0, \quad j = \overline{1, 2n}, \quad (11)$$

где

$$\binom{\alpha}{\beta} = \begin{cases} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \binom{\alpha_2}{\beta_2} \dots \binom{\alpha_l}{\beta_l}, & \text{если } \forall i \in \{1, 2, \dots, l\}: \alpha_i \geq \beta_i, \\ 0, & \text{если } \exists i \in \{1, 2, \dots, l\}: \alpha_i < \beta_i, \end{cases}$$

$$\binom{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{\alpha_i!}{\beta_i! (\alpha_i - \beta_i)!}.$$

Разобьем отрезок $[0, T]$ на m равных частей узлами $t_k = k\tau$, $k = \overline{0, m}$, где $\tau = m^{-1}T$. Введем операторы сужения

$$\bar{T}_r u(x, t) = \bar{u}_r = (u^1(x, t_1), u^2(x, t_1), \dots, u^{2n}(x, t_1), u^1(x, t_2), \dots, u^{2n}(x, t_2), \dots, u^1(x, t_{m-1}), u^2(x, t_{m-1}), \dots, u^{2n}(x, t_{m-1})),$$

где $r = 2n(m-1)$. Такие векторы образуют линейное пространство, которое будем обозначать $\bar{U}_r$. Для удобства обозначим $\tilde{u}_k = u(x, t_k)$, $\tilde{u}_k^i = u^i(x, t_k)$, $R_{i,k} = R_i(x, t_k, D_{\alpha} \tilde{u}_k)$, $B_k = B(D_{\alpha} \tilde{u}_k)$, $k = \overline{0, m}$, $i = \overline{1, 2n}$.

Теорема 9. Уравнения

$$\bar{N}_{i,k} \equiv \sum_{j=1}^{2n} \sum_{|\alpha|, |\beta|=0}^s (-1)^{|\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} D_{\alpha-\beta} \left[\frac{\partial R_{j,k}}{\partial (D_{\alpha} \tilde{u}_k^i)} \right] D_{\beta} \left(\frac{\tilde{u}_{k+1}^j - \tilde{u}_k^j}{\tau} \right) - \frac{R_{i,k} - R_{i,k-1}}{\tau} - \sum_{|\alpha|=0}^s (-1)^{|\alpha|} D_{\alpha} \left[\frac{\partial B_k}{\partial (D_{\alpha} \tilde{u}_k^i)} \right] = 0, \quad i = \overline{1, 2n}, k = \overline{1, m-1}$$

являются разностным по времени аналогом (11).

Здесь

$$D(\bar{N}) = \{(\tilde{u}_0, \bar{u}_r, \tilde{u}_m): \bar{u}_r \in \bar{U}_r, \tilde{u}_0^i = \varphi^i(x), \tilde{u}_m^i = \psi^i(x), \tilde{u}_k^i \in C^{2s}(\bar{\Omega}), \left. \frac{\partial^v \tilde{u}_k^i}{\partial n_x^v} \right|_{\partial \Omega} = \omega_v^i(x, t_k), i = \overline{1, 2n}, |v| = \overline{0, s-1}, k = \overline{0, m}\}.$$

Во втором параграфе найдена разностная аппроксимация линейного относительного интегрального инварианта первого порядка.

Пусть $u = u(\lambda; x, t)$, $\lambda \in \Lambda = [0, 1]$ — произвольное однопараметрическое множество элементов из U , непрерывно дифференцируемых по λ . Его можно рассматривать как кривую $\mathcal{G}$ в U . Будем считать, что $u(0; x, t) = u(1; x, t) \quad \forall (x, t) \in Q_T$, т. е. кривая замкнута.

Теорема 10. Система уравнений (11) имеет относительный интегральный инвариант первого порядка вида

$$\int_{\Lambda} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{2n} R_i \delta u^i dx = \oint_{\mathcal{G}} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{2n} R_i \delta u^i dx, \quad (12)$$

где

$$\delta u^i = \frac{\partial u^i(\lambda; x, t)}{\partial \lambda} d\lambda, i = \overline{1, 2n}.$$

Теорема 11. Формула

$$\oint_{\mathcal{G}} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{2n} R_{i,k-1} \delta \tilde{u}_k^i dx, k = \overline{1, m},$$

где

$$\delta \tilde{u}_k^i = \frac{\partial \tilde{u}^i(\lambda; x, t_k)}{\partial \lambda} d\lambda, i = \overline{1, 2n},$$

определяет дискретный по времени аналог относительно интегрального инварианта первого порядка (12).

В третьем параграфе рассмотрена следующая система уравнений:

$$N(u) \equiv C(x, t, u)u_t + E(x, t, u_\alpha) = 0, \quad (13)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l)$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^l \alpha_i$, $|\alpha| = \overline{0, s}$, $C(x, t, u)$ — заданная матрица $[C_{ij}(x, t, u)]_{2n \times 2n}$, $E(x, t, u_\alpha) = (E_1(x, t, u_\alpha), E_2(x, t, u_\alpha), \dots, E_{2n}(x, t, u_\alpha))^T$ — заданная вектор-функция, $u = (u^1, \dots, u^{2n})^T$ — неизвестная вектор-функция.

$C_{ij}: \overline{\Omega} \times [0, T] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ и $E_i: \overline{\Omega} \times [0, T] \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ — заданные достаточно гладкие функции, q — размерность вектора $\{u_\alpha\}$, $\overline{\Omega} = \partial\Omega \cup \Omega$.

Будем рассматривать систему уравнений (13) на множестве

$$D(N) = \{u \in U = (U^1, \dots, U^{2n})^T: u^i \in U^i = C_{x,t}^{2s,1}(\overline{\Omega} \times [0, T]): u^i|_{t=0} = \varphi^i(x), u^i|_{t=T} = \psi^i(x), \frac{\partial^v u^i}{\partial n_x^v} \Big|_{\Gamma_T} = \omega_v^i(x, t), i = \overline{1, 2n}, |v| = \overline{0, s-1}\}, \quad (14)$$

где $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0, T)$, n_x — внешняя нормаль к $\partial\Omega$; $\varphi^i(x)$, $\psi^i(x)$, $\omega_v^i(x, t)$, $i = \overline{1, 2n}$, $|v| = \overline{0, s-1}$ — заданные достаточно гладкие функции.

Теорема 12. Система (13) является потенциальной на $D(N)$ (14) относительно билинейной формы

$$\langle v(x, t), g(x, t) \rangle \equiv \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{2n} v^i(x, t) g^i(x, t) dx dt$$

тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\begin{aligned}
C_{ij} + C_{ji} &= 0, \\
\frac{\partial C_{ji}}{\partial u^z} + \frac{\partial C_{iz}}{\partial u^j} + \frac{C_{zj}}{\partial u^i} &= 0, \\
\frac{\partial C_{ji}}{\partial t} &= \sum_{|\alpha|=0}^s (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \left(\frac{\partial E_j}{\partial u_\alpha^i} \right) - \frac{\partial E_i}{\partial u^j}, \\
\sum_{|\alpha|=1}^s (-1)^{|\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} D_{\alpha-\beta} \left(\frac{\partial E_j}{\partial u_\alpha^i} \right) - \frac{\partial E_i}{\partial u_\beta^j} &= 0,
\end{aligned}$$

где $i, j, z = \overline{1, 2n}$, $|\beta| = \overline{1, s}$.

При выполнении вышеуказанных условий соответствующее действие по Гамильтону можно представить в виде

$$F_N[u] = \int_0^T \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{2n} R_i(x, t, u) u_t^i - B(x, t, u_\alpha) \right) dx dt, \quad (15)$$

где $R_i(x, t, u)$, $i = \overline{1, 2n}$, $B(x, t, u_\alpha)$ — достаточно гладкие функции.

Теорема 13. Экстремали функционала (15) являются решениями системы уравнений

$$N_i \equiv \sum_{j=1}^{2n} \left(\frac{\partial R_j(x, t, u)}{\partial u^i} - \frac{\partial R_i(x, t, u)}{\partial u^j} \right) u_t^j - \frac{\partial R_i(x, t, u)}{\partial t} - \frac{\delta \mathfrak{B}}{\delta u^i} = 0, \quad (16)$$

где $\frac{\delta \mathfrak{B}}{\delta u^i}$ — функциональная производная $\mathfrak{B}$ по u^i , $i = \overline{1, 2n}$.

Функции $R_i(x, t, u)$ и функционал $\mathfrak{B}[t, u]$ можно находить по формулам

$$\begin{aligned}
R_i(x, t, u) &= - \int_0^1 \sum_{j=1}^{2n} \lambda C_{ij}(x, t, \hat{u} + \lambda(u - \hat{u}))(u^j - \hat{u}^j) d\lambda, \quad i = \overline{1, 2n}, \\
\mathfrak{B}[t, u] &= - \int_{\Omega} \int_0^1 \sum_{i=1}^{2n} \left[\frac{\partial R_i}{\partial t}(x, t, \hat{u} + \lambda(u - \hat{u})) + E_i(x, t, \hat{u}_\alpha + \lambda(u_\alpha - \hat{u}_\alpha)) \right] (u^i \\
&\quad - \hat{u}^i) d\lambda dx + \text{const},
\end{aligned}$$

где $\hat{u}$ — произвольный фиксированный элемент из $D(N)$.

Теорема 14. Уравнения

$$\begin{aligned}
\bar{N}_{i,k} &\equiv \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial R_j(x, t_k, \tilde{u}_k)}{\partial \tilde{u}_k^i} \frac{\tilde{u}_{k+1}^j - \tilde{u}_k^j}{\tau} - \frac{R_i(x, t_k, \tilde{u}_k) - R_i(x, t_{k-1}, \tilde{u}_{k-1})}{\tau} \\
&\quad - \frac{\delta \mathfrak{B}[t_k, \tilde{u}_k]}{\delta \tilde{u}_k^j} = 0,
\end{aligned}$$

$$k = \overline{1, m-1}, i = \overline{1, 2n}$$

являются разностным по времени аналогом (16).

Здесь

$$D(\overline{N}) = \{(\tilde{u}_0, \overline{u}_r, \tilde{u}_m): \overline{u}_r \in \overline{U}_r, \tilde{u}_0^i = \varphi^i(x), \tilde{u}_m^i = \psi^i(x), \tilde{u}_k^i \in C^{2s}(\overline{\Omega}), \\ \left. \frac{\partial^v \tilde{u}_k^i}{\partial n_x^v} \right|_{\partial\Omega} = \omega_v^i(x, t_k), i = \overline{1, 2n}, |v| = \overline{0, s-1}, k = \overline{0, m}\}.$$

Заключение.

В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Доказана непотенциальность оператора рассматриваемой краевой задачи для системы Соболева относительно классической билинейной формы и доказано несуществование матричного вариационного множителя с компонентами, зависящими от пространственных переменных и времени. Построен аналог классического действия по Гамильтону — функционал, являющийся полуограниченным на решениях заданной краевой задачи.

2. Разработан вариационный подход к построению дискретной математической модели движения маятника с вибрационным подвесом с трением и получены соответствующие численные результаты.

3. Введено понятие потенциальности дискретной системы. Получены необходимые и достаточные условия потенциальности заданной разностной системы. Представлен алгоритм построения соответствующего дискретного действия по Гамильтону.

4. Из вариационного принципа с использованием заданного действия по Гамильтону получены весьма общие уравнения движения бесконечномерных систем, содержащие как частный случай известные уравнения Биркгофа. Для них построены разностный аналог с дискретным временем и линейный относительно интегральный инвариант первого порядка. Получена разностная аппроксимация линейного относительно интегрального инварианта первого порядка.

Публикации автора по теме диссертации.

1. Савчин В.М., Чинь Ф.Т. О потенциальности дискретных систем // Вестник Самарского университета. Естественная серия, 2021, том 27, №3, стр. 74–82.

(Eng. transl.: Savchin V.M., Trinh P.T. On discrete systems with potential operators // Vestnik of Samara University. Natural Science Series, 2021, Vol. 27, No. 3, pp. 74–82).

2. Savchin V.M., Trinh P.T. Nonpotentiality of Sobolev system and construction of semibounded functional // Ufa Mathematical Journal, 2020, Vol. 12, No. 2, pp. 108–118.

3. Савчин В.М., Чинь Ф.Т. Вариационный подход к построению дискретной

математической модели движения маятника с вибрационным подвесом с трением // Известия вузов. ПНД, 2022, том 30, №4, стр. 411–423.

(Eng. transl.: Savchin V.M., Trinh P.T. Variational approach to the construction of discrete mathematical model of the pendulum motion with vibrating suspension with friction // Izvestiya VUZ Applied Nonlinear Dynamics, 2022, Vol. 30, No. 4, pp. 411–423).

4. Савчин В.М., Чинь Ф.Т. О потенциальности, дискретизации и интегральных инвариантах бесконечномерных систем Биркгофа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика, 2024. том 24, №2, стр. 184–192.

(Eng. transl.: Savchin V.M., Trinh P.T. On potentiality, discretization, and integral invariants of the infinite-dimensional Birkhoff systems // Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, Vol. 24, No. 2, pp. 184–192).

5. Савчин В. М., Чинь Ф. Т. Динамические модели с дискретным временем, соответствующие операторам типа Биркгофа. Материалы VI Международной научно-практической конференции «Системы управления, сложные системы: моделирование, устойчивость, стабилизация, интеллектуальные технологии», посвященной 100-летию со дня рождения профессора А.А. Шестакова (Елец, 16–17 сентября 2020 г.). Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2020. стр. 22–27.

6. Савчин В. М., Чинь Ф. Т. О дискретных системах с потенциальными операторами. Материалы LVII Всероссийской научно-практической конференции «Всероссийская научно-практическая конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники» (Москва, 17–21 мая 2021 г.). Москва: РУДН, 2021. 5 с.

7. Савчин В. М., Чинь Ф. Т. Об использовании косвенного вариационного принципа для исследования дискретной модели движения маятника с вибрирующим подвесом. Сборник трудов международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 13–15 декабря 2021 г.). Воронеж: ВГУ, 2022, стр. 124–129.

8. Савчин В. М., Чинь Ф. Т. К бесконечномерным системам Биркгофа: вариационность, дискретизация и интегральные инварианты. Сборник трудов международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 12–14 декабря 2022 г.). Воронеж: ВГУ, 2023, стр. 122–126.

9. Савчин В. М., Чинь Ф. Т. Об интегральных инвариантах уравнений Биркгофа для бесконечномерных систем. Тезисы докладов III Международной конференции «Математическая физика, динамические системы, бесконечномерный анализ» (Долгопрудный, 5–13 июля 2023 г.). Долгопрудный: МФТИ, МИАН, МЦМУ МИАН, 2023, стр. 259–261.

Чинь Фыюк Тоан
НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА

ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ БИРКГОФА

Доказана непотенциальность оператора рассматриваемой краевой задачи для системы Соболева относительно классической билинейной формы и доказано не существование матричного вариационного множителя с компонентами, зависящими от пространственных переменных и времени. Построен аналог классического действия по Гамильтону — функционал, являющийся полуограниченным на решениях заданной краевой задачи. Изложен вариационный подход к построению и исследованию дискретной математической модели движения маятника с вибрационным подвесом с трением. Введено понятие потенциальности дискретной системы. Представлен алгоритм построения соответствующего действия по Гамильтону. Из вариационного принципа с использованием заданного действия по Гамильтону получены весьма общие уравнения движения бесконечномерных систем, содержащие как частный случай известные уравнения Биркгофа. Для них построен разностный аналог с дискретным временем. На его основе найдена разностная аппроксимация линейного относительного интегрального инварианта первого порядка.

Trinh Phuoc Toan

SOME PROPERTIES OF BIRKHOFF DISCRETE DYNAMIC SYSTEMS

A nonpotentiality for the operator of a considered boundary value problem for the Sobolev system with respect to the classical bilinear form is proved and a nonexistence of a matrix variational multiplier with components depending on spatial variables and time is proven. An analogue of the classical Hamiltonian action — a functional that is semibounded on solutions of the given boundary value problem, is constructed. A variational approach to the construction of discrete mathematical model of the pendulum motion with vibrating suspension with friction is presented. The definition of potentiality of the corresponding discrete system is introduced. Necessary and sufficient conditions for its potentiality with respect to a given bilinear form are obtained. The algorithm for the construction of the corresponding functional — the analogue of the Hamiltonian action — is presented. Using a given Hamilton's action, the equations of motion of potential systems with an infinite number of degrees of freedom are obtained, generalizing the well-known Birkhoff equations. A difference analog with discrete time is constructed for them. Based on it, a difference approximation of the corresponding integral invariant of the first order is found.