Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

«Российский университет дружбы народов»

Российский
университет
дружбы
народов

На правах рукописи

Алмохаммад Халиль

Интегральные свойства обобщенных потенциалов Бесселя–Рисса

Специальность 1.1.1.

«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Диссертация на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор

Гольдман Михаил Львович

Москва — 2022

Оглавление

Стр.

Введение

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Данная диссертация посвящена изучению интегральных свойств сверток функций с ядрами, обобщающими классические ядра Бесселя–Макдональда. При изучении интегральных свойств потенциалов решающую роль играют конусы их убывающих перестановок. Они устроены весьма сложно и важно получить эквивалентные им более простые конусы. В описании эквивалентных конусов возникают операторы типа Харди–Копсона на конусах монотонных функций. Свойства классических ядер Бесселя–Макдональда подробно изучены в книгах Беннетта и Шарпли [1], С. М. Никольского [2], В. Г. Мазьи [3]. Известные работы М. Л. Гольдман [4], A. Gogatishvili, M. Johansson, C. A. Okpoti и L. E. Persson [5], М. Л. Гольдман [6; 7], посвящены исследованию свойств различных функциональных пространств. Особое значение имеют исследования модулярных неравенств для операторов Харди–Копсона на конусе Ω положительных убывающих функций из весовых пространств Орлича. Большой вклад в изучение этой проблемы внесли Jim Quile Sun [8], M. Goldman, R. Kerman [9], S. Bloom, R. Kerman [10], Э. Г. Бахтигареева, М. Л. Гольдман [11]. Классические потенциалы Бесселя и Рисса играют большую роль в теории функциональных пространств и в ее приложениях в теории дифференциальных уравнений с частными производными. Свойства Бесселевых потенциалов и потенциала Рисса подробно изложены в книгах С. М. Никольского [2], И. Стейна [12], В. Г. Мазьи [3].

В работе проведена конкретизация общих критериев вложений потенциалов в перестановочно инвариантные пространства в случае, когда базовое пространство для потенциалов есть весовое пространства Лоренца. Получены явные критерии справедливости модулярных неравенств для операторов типа Харди–Копсона на функциях в пространстве Орлича.

Цель диссертационной работы состоит в исследовании интегральных свойств обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса, получении явных критериев справедливости модулярных неравенств для операторов типа Харди–Копсона на функциях в пространстве Орлича.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. установить эквивалентные описания конусов убывающих перестановок для потенциалов, построенных на базе весовых пространств Лоренца с общими весами;
2. сформулировать критерии вложений пространства потенциалов в перестановочно инвариантные пространства и дать описания оптимальных перестановочно инвариантных пространств для таких вложений;
3. приведена конкретизация этих вложений в случае базовых весовых пространств Лоренца
4. установить модулярные неравенства для операторов типа Харди–Копсона на функциях из весовых пространств Орлича;
5. установить модулярные неравенства для операторов типа Харди–Копсона на конусе Ω положительных монотонных функциях в пространстве Орлича.

Научная новизна. В данной работе получены следующие новые результаты:

1. построены эквивалентные описания конусов убывающих перестановок для потенциалов, построенных на базе весовых пространств Лоренца с общими весами;
2. построена конкретизация в случае базовых весовых пространств Лоренца критериев вложений пространства потенциалов в перестановочно инвариантные пространства и даны описания оптимальных перестановочно инвариантных пространств для таких вложений.
3. установлены явные модулярные неравенства для операторов типа Харди–Копсона на функциях из весовых пространств Орлича;
4. установлены явные модулярные неравенства для операторов типа Харди–Копсона на конусе Ω положительных монотонных функций в пространстве Орлича.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты работы носят теоретический характер. На основании общих результатов этой работы может быть получен ряд критериев вложения для различных конкретных пространств и различных типов ядер, включая классические потенциалы Бесселя и Рисса.

Исследование интегральных свойств потенциалов служит базой для дальнейшего изучения свойств гладкости потенциалов в тех интегральных метриках, в которых получены соответствующие вложения.

Методология и методы исследования. Оценки убывающих перестановок для свёртки, их применения для обобщённых потенциалов Бесселя и Рисса. Эквивалентные описания конусов убывающих перестановок для потенциалов. Изучение свойств обобщённых оператор Харди–Копсона, возникающих в теории потенциалов. Описания оптимальных перестановочно инвариантных пространств для вложения потенциалов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Построены эквивалентные описания конусов убывающих перестановок для потенциалов, построенных на базе весовых пространств Лоренца с общими весами;
2. Построена конкретизация в случае базовых весовых пространств Лоренца критериев вложений пространства потенциалов в перестановочно инвариантные пространства и даны описания оптимальных перестановочно инвариантных пространств для таких вложений.
3. Доказаны теоремы о модулярных неравенствах для операторов типа Харди–Копсона на функциях из весовых пространств Орлича.
4. Доказаны теоремы о модулярных неравенствах для операторов типа Харди–Копсона на конусе Ω положительных монотонных функций в пространстве Орлича.

Степень достоверности результатов, полученных в диссертации, обеспечивается строгостью приведенных доказательств, многочисленными выступлениями на семинарах, конференциях и школах, а также имеющимися публикациями в рецензируемых изданиях, которые индексируются международными базами данных.

Апробация работы. Результаты, представленные в диссертационной работе, излагались на научном семинаре Северо-Кавказского центра математических исследований ВНЦ РАН и Южного математического института ВНЦ РАН под руководством д.ф.-м.н., проф. А. Г. Кусраева, к.ф.-м.н. М. А. Плиева; в Российском университете дружбы народов на научном семинаре под руководством профессоров А. В. Арутюнова, В. И. Буренкова и М. Л. Гольдмана, в МГУ им. М. В. Ломоносова на научном семинаре на механико-математическом факультете под руководством профессоров Г. Г. Магарил-Ильяева и К. Ю. Осипенко, на научном семинаре на факультете вычислительной математики и кибернетики под руководством академика Е. И. Моисеева и профессора И. С. Ломова. Кроме того, результаты диссертации докладывались на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых Ломоносов (Москва, 2019–2020–2021); на Международной научной конференции (Ninth International Scientific Conference ”Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis IX”. Rostov-on-Don, 2018–2019); на 31-й Крымской Осенней Математической Школе-симпозиуме по спектральным и эволюционным задачам (Севастополь, 2020); на 5-й Международной конференции «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования» (Москва, 2018); на Международной научной конференции «Interdisciplinary Research in Science, Engineering and Technology» (Bangalore, India, 2021); на Международной научной конференции «Order Analysis and Related Questions of Mathematical Modelling, XVI.» (Vladikavkaz, 2021).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 11 печатных изданиях, 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 6 — в тезисах докладов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав и заключения.

Полный объём диссертации составляет 101 страницу. Список литературы содержит 72 наименования.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится краткий обзор наиболее важных публикаций, связанных с темой исследования, и анализ основных результатов диссертации.

Глава 1 состоит из четырёх параграфов.

Параграф 1.1. В первом разделе кратко изложены необходимые для дальнейшего понятия банахова функционального пространства (кратко: БФП), перестановочно инвариантного пространства (кратко ПИП). Мы опираемся на понятия, введенные в книгах С. Г. Крейна, Ю. И. Петунина и Е. М. Семенова [13] и К. Беннетта, Р. Шарпли [1], а также на результаты работ М. Л. Гольдмана [14] развивающих концепции БФП, вложений и накрывании конусов [15].

Пусть (S,Σ,μ) есть пространство с мерой. Здесь Σ — σ-алгебра подмножеств множества S, на которых определена неотрицательная σ-конечная, σ-аддитивная мера μ. Через $L_0 = L_0(S,\Sigma,\mu)$ обозначим множество μ-измеримых вещественнозначных функций $f : S \to \mathbb{R}$, а через L_0^+ подмножество множества L_0, состоящее из неотрицательных функций:

$$L_0^+ = \left\{ f \in L_0;\ f \geqslant 0 \right\}.$$

Определение 1.1.1. *Отображение* $\rho :\ L_0^+ \to [0,\infty]$ *называется функциональной нормой (кратко: ФН), если для всех* f, g, $f_n \in L_0^+$, $n \in \mathbb{N}$ *выполнены условия [1]:*

(P1) $\rho(f) = 0 \ \Rightarrow\ f = 0$, μ*–почти всюду (кратко:* μ*–п.в.);*

$\rho(\alpha f) = \alpha\rho(f)$, $\alpha \geqslant 0$; $\rho(f + g) \leqslant \rho(f) + \rho(g)$ *(свойство нормы);*

(P2) $f \leqslant g$, *(*μ*–п.в.)* $\Rightarrow$ $\rho(f) \leqslant \rho(g)$ *(монотонность нормы);*

(P3) $f_n \uparrow f \;\Rightarrow\; \rho(f_n) \to \rho(f)(n \to \infty)$ *(свойство Фату);*

(P4) $0 < \mu(\sigma) < \infty \;\Rightarrow\; \int\limits_{\sigma} f \, \mathrm{d}\mu \leqslant c_\sigma \rho(f)$, $f \in L_0^+$ *(локальная интегрируемость);*

(P5) $0 < \mu(\sigma) < \infty \;\Rightarrow\; \rho(\chi_\sigma) < \infty$ *(конечность ФН для характеристических функций* χ_σ *множеств конечной меры).*

Здесь $f_n \uparrow f$ означает, что

$$f_n \leqslant f_{n+1}, \quad \lim_{n\to\infty} f_n = f, \quad (\mu\text{–п.в.}).$$

Определение 1.1.2. *Пусть* ρ *есть функциональная норма. Множество* $X = X(\rho)$ *функций из* L_0*, для которых* $\rho(|f|) < \infty$ *называется банаховым функциональным пространством (кратко: БФП), порожденным функциональной нормой* ρ*. Для* $f \in X$ *полагаем*

$$\|f\|_X = \rho(|f|).$$

Пусть на L_0^+ *введены отношения частичного порядка и эквивалентности:* $f \prec g$ *со свойствами транзитивности, т. е.* $f \prec f$*;*

$$f \prec g, \quad g \prec h \quad \Rightarrow \quad f \prec h; \quad f \approx g \quad \Leftrightarrow \quad f \prec g \prec f.$$

Считаем, что отношение порядка подчинено поточечной оценке μ–п.в., т. е.

1) $f \leqslant g, \quad \mu\text{–п.в.} \quad \Rightarrow \quad f \prec g;$

2) $f_n \uparrow f \quad \Rightarrow \quad f_n \underline{\uparrow} f.$

Здесь $f_n \underline{\uparrow} f$ означает, что $f_n \prec f_{n+1}$; $f = [\sup] f_n$, т. е. $f_n \prec f$, $n \in \mathbb{N}$, и, если $f_n \prec \hat{f}$, $n \in \mathbb{N}$, то $f \prec \hat{f}$.

Базовый пример отношения порядка:

$$f \prec g \quad \Leftrightarrow \quad f \leqslant g, \quad \mu\text{–п.в.} \quad \Rightarrow \rho(f) \leqslant \rho(g).$$

(Это следует из свойства (P2) функциональной нормы ρ).

Нас будут интересовать отношения порядка, связанные с невозрастающими перестановками функций. Обозначим для $f \in L_0$

$$\lambda_f(y) = \mu\{x \in S :\ |f(x)| > y\}, \quad y \in [0,\infty)$$

— Лебегова функция распределения. Через $\dot{L}_0$ обозначим множество функций $f \in L_0$, для которых $\lambda_f(y)$ не тождественна бесконечности,

$$\text{т. е.} \quad \exists y_0 \in [0,\infty) :\ \lambda_f(y_0) < \infty.$$

Для $f \in \dot{L}_0$ введем невозрастающую перестановку f^* как правую обратную функцию к невозрастающей функции λ_f, т. е.

$$f^*(t) = \inf\{y \in [0,\infty) :\ \lambda_f(y) \leqslant t\}, \quad t \in \mathbb{R}_+ = (0,\infty), \tag{1}$$

f^* — невозрастающая перестановка функции f, т. е. неотрицательная, убывающая, непрерывная справа функция на $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$, которая равноизмерима с f:

$$\mu_n\{x \in \mathbb{R}^n :\ |f(x)| > y\} = \mu_1\{t \in \mathbb{R}_+ :\ f^*(t) > y\}, \quad y \in \mathbb{R}_+.$$

Здесь μ — это мера Лебега.

Определение 1.1.3.

(i) Банахово функциональное пространство, сокращенно БФП, $E = E(\mathbb{R}^n)$ — это банахово пространство измеримых по Лебегу функций

$f :\ \mathbb{R}^n \to C$ с монотонной нормой, т. е.

$$|f| \leqslant g, \quad g \in E \ \text{ влечет } \ f \in E, \quad \|f\|_E \leqslant \|g\|_E,$$

и со свойством Фату:

$$0 \leqslant f_n \uparrow f, \quad f_n \in E \ \text{ влечет } \ f \in E, \quad \|f_n\|_E \leqslant \|f\|_E.$$

(ii) БФП E называется перестановочно-инвариантным пространством, сокращенно ПИП, если его норма монотонна относительно перестановок,

$$f^* \leqslant g^*, \quad g \in E \ \textit{влечет} \ f \in E, \quad \|f\|_E \leqslant \|g\|_E.$$

Примерами ПИП служат пространства Лебега $L_p(\mathbb{R}^n)$, пространства Лоренца, пространства Орлича.

В работе изучается пространство потенциалов $H_E^G \equiv H_E^G(\mathbb{R}^n)$ на n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.1.4. *Пространство потенциалов $H_E^G = H_E^G(\mathbb{R}^n)$: определяем как множество сверток ядер потенциалов с функциями из базового пространства*

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) = \{u = G * f \ : \ f \in E(\mathbb{R}^n)\}, \tag{2}$$

где $E(\mathbb{R}^n)$ — перестановочно-инвариантное пространство, а

$$\|u\|_{H_E^G} = \inf\left\{\|f\|_E \ : \ f \in E(\mathbb{R}^n),\, G * f = u\right\}. \tag{3}$$

Ядро представления G назовем допустимым, если

$$G \in L_1(\mathbb{R}^n) + E'(\mathbb{R}^n).$$

Здесь свёртка $G * f$ определяется как интеграл

$$(G * f)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y. \tag{4}$$

(мы ввели здесь множитель $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ для удобства при использовании преобразования Фурье). Здесь мы существенно используем результаты работы [15], в которой установлены точные теоремы вложения в ПИП для обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса:

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n).$$

Кроме того, $E'(\mathbb{R}^n)$ — ассоциированное ПИП, т. е. ПИП с нормой:

$$\|g\|_{E'} = \sup\left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n} |fg|\,\mathrm{d}\mu_n \,:\, f \in E,\ \|f\|_E \leqslant 1 \right\}. \tag{5}$$

Пример

$$E = L_p, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty \quad \Rightarrow E' = L_{p'}; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Для ПИП $E(\mathbb{R}^n)$, $E'(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим пространства $\tilde{E}(\mathbb{R}_+)$, $\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)$ — их представления Люксембурга [1], т. е. ПИП, для которых выполняются следующие равенства

$$\|f\|_E = \|f^*\|_{\tilde{E}}, \quad f \in E(\mathbb{R}^n); \quad \|g\|_{E'} = \|g^*\|_{\tilde{E}'}, \quad g \in E'(\mathbb{R}^n),$$

где f, g — измеримые функции.

Введем класс монотонных функций $\mathfrak{I}_n(R)$, $R > 0$ следующим образом.

Функция $\theta\,:\ (0,R) \to \mathbb{R}_+$ *принадлежит классу* $\mathfrak{I}_n(R)$*, если*

1. θ *убывающая и непрерывная на* $(0,R)$*;*
2. *существует постоянная* $c \in \mathbb{R}_+$ *такая, что*

$$r^{-n}\int\limits_0^r \theta(\rho)\rho^{n-1}\mathrm{d}\rho \leqslant c\theta(r), \quad r \in (0,R). \tag{6}$$

Отметим, что

$$\varphi(\tau) = \theta\left(\left(\frac{\tau}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \in \mathfrak{I}_1(T), \quad T = V_n R^n,$$

где V_n — *объем единичного шара в* $\mathbb{R}^n$.

$$f_\varphi(t;\tau) = \min\{\varphi(t),\varphi(\tau)\} = \begin{cases} \varphi(t), & 0 < \tau \leqslant t, \\ \varphi(\tau), & \tau > t. \end{cases} \tag{7}$$

В случае допустимых ядер мы можем для потенциалов $u \in H_E^G$ *определить убывающие перестановки* u^*.

Определение 1.1.6. *Пусть* $u^\# : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ *означает симметрическую перестановку функции* u*, т. е. радиально симметричную неотрицательную убывающую и непрерывную справа (как функция от* $\rho = |x|$, $x \in \mathbb{R}^n$*), которая равноизмерима с* u*. Отметим, что*

$$u^\#(\rho) = u^*\left(V_n\rho^n\right), \quad u^*(t) = u^\#\left(\left(\frac{t}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right), \quad \rho, t \in \mathbb{R}_+. \tag{8}$$

Здесь V_n *— объем* n*-мерного единичного шара.* Обозначим

$$\begin{aligned} &T = \infty, &&\text{если } R = \infty,\\ &T = V_n(R/2)^n, &&\text{если } R \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \tag{9}$$

Сформулируем условия на ядра G [15].

Определение 1.1.7. *Пусть* $\theta \in \mathfrak{I}_n(\infty)$*. Считаем, что* $G \in S_\infty(\theta)$*, если*

$$G^\#(\rho) \cong \theta(\rho), \quad \rho = |x| \in \mathbb{R}_+. \tag{10}$$

Определение 1.1.8. *Пусть* $\theta \in \mathfrak{I}_n(\infty)$*. Считаем, что* $G \in S_\infty^0(\theta)$*, если*

$$G(\rho) \cong \theta(\rho), \quad \rho = |x| \in \mathbb{R}_+. \tag{11}$$

Замечание 1.1.3. *Ясно, что* $S_\infty^0(\theta) \subset S_\infty(\theta)$*.*

Определение 1.1.9. *Пусть* $\theta \in \mathfrak{I}_n(\infty)$*. Потенциалы* $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$ *называются обобщенными потенциалами Рисса, если*

$$G(x) \cong \theta(|x|), \quad |x| \in \mathbb{R}_+. \tag{12}$$

Ядро классического потенциала Рисса определено по формуле:

$$G(x) = \rho^{\alpha-n}, \quad \rho = |x| \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha \in (0,n),$$

где

$$\theta(\rho) = \rho^{\alpha-n} \in \mathfrak{I}_n(\infty), \quad G \in S^0_\infty(\theta), \tag{13}$$

$$f_\varphi(t;\cdot) \in \widetilde{E'}(\mathbb{R}_+), \quad t \in \mathbb{R}_+ \ \Leftrightarrow \ \tau^{\frac{\alpha}{n}-1} \in \widetilde{E'}(t,\infty). \tag{14}$$

Определение 1.1.10. *Пусть* $X = X(\mathbb{R}^n)$ *есть ПИП,* $\theta \in \mathfrak{I}_n(R)$*, где* $R \in \mathbb{R}_+$*. Считаем, что* $G \in S_R(\theta; X)$*, если*

$$(G^0_R)^\#(\rho) \cong \theta(\rho), \quad \rho \in (0,R), \quad G^1_R \in X(\mathbb{R}^n), \tag{15}$$

где

$$B_R = \left\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < R\right\}, \quad R \in \mathbb{R}_+,$$

$$G^0_R(x) = G(x)\chi_{B_R}(x); \quad G^1_R(x) = G(x)\chi_{B^c_R}(x).$$

При этом,

$$G(x) = G^0_R(x) + G^1_R(x).$$

Определение 1.1.11. *Пусть* $X = X(\mathbb{R}^n)$ *есть ПИП,* $\theta \in \mathfrak{I}_n(R)$*,*

$$G(x) = G^0_R(x) + G^1_R(x);$$

$$B_R = \left\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < R\right\}, \quad R \in \mathbb{R}_+,$$

$$G^0_R(x) = G(x)\chi_{B_R}(x); \quad G^1_R(x) = G(x)\chi_{B^c_R}(x).$$

Считаем, что $G \in S^0_\infty(\theta; X)$*, если*

$$G^0_R(x) \cong \theta(\rho), \quad \rho = |x| \in (0,R), \quad G^1_R \in X(\mathbb{R}^n).$$

Определение 1.1.12. *Пусть* $\theta \in \mathfrak{I}_n(R)$*. Потенциалы* $u \in H^G_E(\mathbb{R}^n)$ *называются обобщенными бесселевыми потенциалами, если*

$$G^0_R(x) \cong \theta(|x|), \quad x \in B_R, \quad G^1_R(x) \in (L_1 \cap E')(\mathbb{R}^n), \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} G\,\mathrm{d}x \neq 0.$$

Ядро классического потенциала Бесселя определено по формуле:

$$G(x) = c(\alpha,n)\rho^{-\upsilon}K_\upsilon(\rho), \quad \rho = |x| \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha \in (0,n], \quad \upsilon = (n-\alpha)/2,$$

где K_υ *— функция Макдональда.*

Параграф 1.2. Эквивалентные описания конусов перестановок для потенциалов. В этом разделе мы покажем, как операторы типа Харди–Копсона появляются в теории потенциалов. Рассмотрим следующие конусы перестановок для $T \in (0,\infty]$, снабженные положительно однородными функционалами [15]:

$$M(T) \equiv M_E^G(T) = \left\{h(t) = u^*(t),\ t \in (0,T)\ :\ u \in H_E^G\right\}, \tag{16}$$

$$\rho_{M(T)}(h) = \inf\left\{\|u\|_{H_E^G}\ :\ u \in H_E^G,\ u^*(t) = h(t),\ t \in (0,T)\right\}. \tag{17}$$

Определение 1.2.1. *При* $T \in (0,\infty]$ *рассмотрим конус*

$$K(T) \equiv K_E^\varphi =$$
$$= \left\{ h(t) = \int_0^T f_\varphi(t;\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau; \quad t \in (0,T)\ :\ g \in \tilde{E}_0(0,T) \right\}, \tag{18}$$

снабженный функционалом $\rho_{K(T)}(h) = \|g\|_{\tilde{E}(0,T)}$*, где в случае* $T \in \mathbb{R}_+$*,*

$$\|g\|_{\tilde{E}(0,T)} = \|g^0\|_{\tilde{E}(R_+)}; \quad g^0(t) = g(t); \quad t \in (0,T), \quad g^0(t) = 0, \quad t \geqslant \tau.$$

$$\tilde{E}_0(0,T) = \left\{g \in \tilde{E}(0,T);\ 0 \leqslant g\downarrow, \quad g(t+0) = g(t), \quad t \in (0,T)\right\}. \tag{19}$$

Считаем, что

$$f_\varphi(t;\cdot) \in \tilde{E}'(0,T) \quad \text{при} \quad t \in (0,T). \tag{20}$$

Напомним, что множество $\{K(T)\}$ *неотрицательных измеримых функций на* $(0,T)$*,* $T \in (0,\infty]$ *образует конус, снабженный функционалом*

$$\rho_{K(T)}\ :\ K(T) \to [0,\infty) \quad \text{если}$$

$$h \in K \Rightarrow \alpha h \in K, \quad \forall \alpha \in [0,\infty); \tag{21}$$

$$\rho_{K(T)}(\alpha h) = \alpha \rho_{K(T)}(h), \quad \forall \alpha \in [0,\infty); \tag{22}$$

$$\rho_{K(T)}(h) = 0 \quad \Rightarrow \quad h = 0 \quad \textit{почти всюду на } (0,T). \tag{23}$$

Рассмотрим совокупность $\mathfrak{I}_T = \{K(T)\}$ таких конусов.

Определение 1.2.2. *Пусть $K(T)$, $M(T) \in \mathfrak{I}_T$. Конус $K(T)$ накрывает конус $M(T)$ (обозначение $M(T) \prec K(T)$), если существуют постоянные $c_1 = c_1(T) \in \mathbb{R}_+$ и $c_2 = c_2(T) \in [0,\infty)$, причем $c_2(\infty) = 0$, такие, что для каждой функции $k_1 \in M(T)$ найдется функция $k_2 \in K(T)$, удовлетворяющая условиям*

$$\rho_{K(T)}(k_2) \leqslant c_1 \rho_{M(T)}(k_1), \quad k_1(t) \leqslant k_2(t) + c_2 \rho_{M(T)}(k_1), \quad t \in (0,T). \tag{24}$$

Замечание 1.2.1. *Эквивалентность конусов означает их взаимное накрывание:*

$$M(T) \approx K(T) \quad \Leftrightarrow \quad M(T) \prec K(T) \prec M(T).$$

Теорема 1.2.1. (см. [4]). *Пусть $R \in (0,\infty]$, $\theta \in \mathfrak{I}_n(R)$ и $T = T(R), T = \infty$, если $R = \infty$; где $T = V_n \left(\frac{R}{2}\right)^n$, если $R < \infty$; $f_\varphi(t;.) \in \tilde{E}'(\mathbb{R}_+)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $G \in S^0_\infty(\theta)$ или, если $R \in \mathbb{R}_+$, $G \in S^0_R(\theta; E')$, то*

$$M^G_E(T) \approx K^\varphi_E(T). \tag{25}$$

Параграф 1.3. Рассмотрены общие свойства потенциалов, построенных на базе весовых пространств Лоренца с общими весами.

Определение 1.3.1. *Пространствами Лоренца* $\Lambda^q(v)$ *и* $\Gamma^q_\delta(v)$*, где* δ *и* $v > 0$ *— измеримые функции, называются пространства измеримых функций с конечными нормами:*

$$\|f\|_{\Lambda^q(v)} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty f^{*q}(t)v(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}; & 1 < q < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{t\in(0,\infty)}\left\{f^*(t)v(t)\right\}; & q = \infty, \end{cases} \tag{26}$$

$$\|f\|_{\Gamma^q_\delta(v)} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty f^{**q}_\delta(t)v(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}; & 1 < q < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{t\in(0,\infty)}\left\{f^{**}_\delta(t)v(t)\right\}; & q = \infty, \end{cases} \tag{27}$$

где

$$f^{**}_\delta(t) = \frac{1}{\int_0^s \delta(t)\,\mathrm{d}t}\int\limits_0^t f^*(\tau)\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau; \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

В частности, когда $\delta = 1$

$$\|f\|_{\Gamma^q(v)} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty f^{**q}(t)v(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}; & 1 < q < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{t\in(0,\infty)}\left\{f^{**}(t)v(t)\right\}; & q = \infty. \end{cases} \tag{28}$$

Определение 1.3.2. *Пусть оператор* $\mathfrak{R}_{\varphi,T} \,:\, \tilde{E}_0(0,T) \to \tilde{X}(0,T)$, $T \in (0,\infty]$*, определён по формуле*

$$\mathfrak{R}_{\varphi,T}[g](t) = \int\limits_0^T f_\varphi(t;\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad g \in \tilde{E}_0(0,T). \tag{29}$$

Этот оператор играет важную роль в интегральных свойствах потенциала.

Сформулируем критерии вложений пространства потенциалов в ПИП:

$$H^G_E(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n). \tag{30}$$

Вложение (30) эквивалентно условию: существует $c \in (0,\infty)$, такая что

$$\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\tilde{X}} \leqslant c\|g\|_{\tilde{E}}\}; \quad g \in \tilde{E}_0.$$

Рассмотрим случай $E = \Lambda^q(u)$.

Задача — описать оптимальное ПИП $X_0(\mathbb{R}^n)$ для вложения

$$H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n),$$

т. е. такое ПИП $X_0(\mathbb{R}^n)$, что

1. $H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n) \subset X_0(\mathbb{R}^n)$;
2. если ПИП $X(\mathbb{R}^n)$, такое что есть вложение $H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n)$, то

$$X_0(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n).$$

В наших результатах мы использовали следующие свойства потенциалов и теоремы [15]

Теорема 1.3.1. *Пусть оператор* $\mathfrak{R}_{\varphi,\infty} : \Lambda^q(u)(\mathbb{R}_+) \to \tilde{X}(\mathbb{R}_+)$. *Для потенциалов Рисса вложение:*

$$H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n) \tag{31}$$

эквивалентно ограниченности оператора $\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}$.

Теорема 1.3.3. *При* $T = \infty$ *для потенциалов типа Рисса, или* $T = V_n(R/2)^n \in \mathbb{R}_+$ *для потенциалов типа Бесселя имеет место эквивалентность*

$$H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n) \subset L_\infty(\mathbb{R}^n) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \in [\Lambda^q(u)]'(0,T). \tag{32}$$

Параграф 1.4. Критерии вложений пространства потенциалов в перестановочно инвариантные пространства в случае базовых весовых пространств Лоренца.

Теорема 1.4.2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'} = 1$, *а функции* $v \geqslant 0$ — *измеримая и* V *определена следующим образом:*

$$V(t) = \int\limits_0^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

тогда

$$\left\|\mathfrak{R}^{**}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{L^{p'}(v)} \cong \left\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{L^{p'}(v)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\tilde{A} = \sup_{x>0}\left\{\left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{x}{x+t}\right)^{p'} \cdot v(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}}\right.$$
$$\left.\left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{t}{t+x}\right)^{p} \cdot \frac{v(t)}{V(t)^p}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\right\} < \infty. \quad (33)$$

Получены критерии вложений пространства потенциалов в перестановочно инвариантные пространства и даны описания оптимальных перестановочно инвариантных пространств для таких вложений. Приведена конкретизация этих вложений в случае базовых весовых пространств Лоренца.

Теорема 1.4.3. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, *а функции* u, v, w, V *и* U *определены следующим образом:*

$$U(s) = \int\limits_0^s u(t)\,\mathrm{d}t, \quad v(t) = \frac{t^{2p'}u(t)\varphi^{p'}(t)}{U^{p'}(t)}, \quad V(t) = \int\limits_0^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$w(t) = \frac{t^{p+p'-1}V(t)\int_t^\infty \tau^{-p'}v(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{V(t) + t^{p'}\int_t^\infty \tau^{-p'}v(\tau)\,\mathrm{d}\tau}.$$

Кроме того, пусть существует $c \in (0,\infty)$ *такое, что* $\int_0^r \varphi(\rho)\,\mathrm{d}\rho \leqslant c\varphi(r)r$; $\forall r \in (0,\infty)$, *и пусть*

$$C = \sup_{r>0}\left\{\left(\int\limits_0^r \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int\limits_t^\infty \frac{U^p(t)}{t^{2p}u^{\frac{p}{p'}}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\right\} < \infty. \quad (34)$$

Тогда оптимальное ПИП для вложения $H^G_{\Lambda^{p'}(u)}(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n)$ имеет эквивалентную норму

$$\|f\|_{\tilde{X}_0(\mathbb{R}_+)} \cong \|f\|_{\Gamma^p(w)}. \tag{35}$$

Замечание 1.4.1. *Условие,*

$$\int_0^r \varphi(\rho)\,\mathrm{d}\rho \leqslant c\varphi(r)r$$

вытекает из условия (6) и гарантирует эквивалентность

$$\mathfrak{R}^{**}_{\varphi,\infty}[g^*] \cong \mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*],$$

так что $\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Gamma p'(v)} \cong \|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Lambda^{p'}(v)}$. При условии на весовые функции

$$\tilde{A} = \sup_{x>0}\left\{\left(\int_0^\infty \left(\frac{x}{x+t}\right)^{p'} \cdot v(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_0^\infty \left(\frac{t}{t+x}\right)^{p} \cdot \frac{v(t)}{V(t)^p}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\right\} < \infty.$$

Также получаем эквивалентность норм

$$\left\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{\Gamma^{p'}(v)} \cong \left\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{\Lambda^{p'}(v)} = \left\|\mathfrak{R}^*_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{L^{p'}(v)} = \left\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{L^{p'}(v)}.$$

Последнее равенство опирается на соотношение

$$\mathfrak{R}^*_{\varphi,\infty}[g^*](t) = \mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*](t),$$

поскольку функция в правой части неотрицательна, убывающая и непрерывная, т. е. она совпадает со своей убывающей перестановкой.

Основные результаты первой главы опубликованы в работах [16; 17] из списка публикаций автора по теме диссертации.

В **главе 2** исследуются модулярные неравенства для операторов типа Харди–Копсона на весовых пространствах Орлича.

Параграф 2.1. Определения и предварительные сведения и вспомогательные теоремы.

Определение 2.1.1. *Функция* Φ*:* $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *называется* N*-функцией, если*
$\Phi(t) = \int\limits_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau$*; где* φ *непрерывна,* $0 < \varphi \uparrow$*;* $\varphi(0) = 0$*;* $\varphi(\infty) = \infty$*. Пусть* φ^{-1} *непрерывная справа функция, обратная к* φ*, и определим*

$$\Psi(t) = \int\limits_0^t \varphi^{-1}(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Ψ *называется дополнительной функцией для* Φ*.*

Определение 2.1.2. *а) Говорят, что* N*-функция* Φ *удовлетворяет* Δ_2 *условию (мы пишем* $\Phi \in \Delta_2$*), если существует константа* $B > 0$*, такая, что*

$$\Phi(2t) \leqslant B\Phi(t), \quad \forall t > 0. \tag{36}$$

б) Запишем $\Phi_1 \ll \Phi_2$ *если существует константа* $L_0 > 0$*, такая, что неравенство*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(a_i) \leqslant L_0 \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(\sum_{i=1}^{\infty} a_i) \tag{37}$$

выполняется для любой последовательности $\{a_i\}$ *с* $a_i \geqslant 0$*.*

Если $\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$ *выпуклая функция , то* $\Phi_1 \ll \Phi_2$*.*

Например*, если* $\Phi_1(t) = t^p$*;* $\Phi_2(t) = t^q$*;* $0 < p, q < \infty$*, тогда* $\Phi_1 \ll \Phi_2$ *при* $p \leqslant q$*.*

в) Пусть ω *положительная измеримая весовая функция и* Φ *—* N*-функция. Пространство Орлича* $L_\Phi(\omega)$ *состоит из всех измеримых функций* f *(по модулю эквивалентности почти везде) с нормой*

$$\|f\|_{\Phi(\omega)} = \inf\left\{ \lambda > 0, \int\limits_0^\infty \Phi(\lambda^{-1}|f(x)|)\omega(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1 \right\}. \tag{38}$$

Например*, если* $\omega \equiv 1$*;* $\Phi(t) \equiv t^p$*, тогда* $L_\Phi(\omega) = L_p$*.*

Мы называем $\|\cdot\|_{\Phi(\omega)}$ *нормой Люксембурга.*

Норма Орлича функции f *определяется выражением*

$$\|f\|'_{\Psi(\omega)} = \sup\left\{\int\limits_0^\infty |fg|\omega\,\mathrm{d}x\ :\ \int\limits_0^\infty \Psi(|g|)\omega\,\mathrm{d}x \leqslant 1\right\}, \tag{39}$$

где Ψ *— дополнительная функция к* Φ.

Замечание 2.1.1. $L_\Phi(\omega)$ *— банахово пространство, и нормы Люксембурга и Орлича эквиваленты. Именно,*

$$\|f\|_{\Phi(\omega)} \leqslant \|f\|'_{\Psi(\omega)} \leqslant 2\|f\|_{\Phi(\omega)}. \tag{40}$$

Определение 2.1.3. *Обобщенные операторы Харди — это операторы вида*

$$\mathfrak{K}f(x) = \int\limits_0^x k(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \mathfrak{K}^*g(t) = \int\limits_t^{+\infty} k(x,t)g(x)\,\mathrm{d}x, \tag{41}$$

где

а) $k\ :\ \big\{(x,t)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0<t<x<+\infty\big\}\to[0,+\infty)$;

б) $k(x,t)\geqslant 0$ *не убывает по* x*, не возрастает по* t*;*

в) $k(x,y)\leqslant D\big(k(x,t)+k(t,y)\big)$*, всякий раз, когда* $0\leqslant y\leqslant t<x<+\infty$ *для некоторой константы* D.

Параграф 2.2. Модулярные неравенства для операторов типа Харди–Копсона на функциях в пространстве Орлича.

Напомним, что

$$K_E^\varphi = \left\{h(x) = \int\limits_0^\infty f_\varphi(x;\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau; \quad x\in(0,\infty)\ :\ g\in\tilde{E}_0(0,\infty)\right\};$$

$$f_\varphi(x;\tau) = \begin{cases}\varphi(x), & 0<\tau\leqslant x,\\ \varphi(\tau), & \tau>x;\end{cases}$$

$$0 < \varphi \ \downarrow, \qquad \int\limits_0^x \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leqslant c\varphi(x)x.$$

Мы рассматриваем оператор

$$\mathcal{F}[g] \equiv h(x) = \int\limits_0^\infty f_\varphi(x;\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{42}$$

$$\mathcal{F}[g] = \varphi(x)\int\limits_0^x g(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int\limits_x^\infty \varphi(\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \mathcal{F}_1[g] + \mathcal{F}_2[g]. \tag{43}$$

Это означает, что $\mathcal{F}$ является суммой двух операторов типа Харди–Копсона.

Теорема 2.2.2. *Пусть Φ_1, Φ_2 — N-функции, $\Phi_1 \ll \Phi_2$, Ψ_1, Ψ_2 — дополнительные функции для Φ_1 и Φ_2, a, b, v, ω — положительные весовые функции, $\mathcal{F}$ определяется формулой* (42). *Тогда существует такая постоянная $A > 0$, что неравенство*

$$\Phi_2^{-1}\left(\int\limits_0^{+\infty} \Phi_2(a(x)\mathcal{F}g(x))\omega(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \Phi_1^{-1}\left(\int\limits_0^{+\infty} \Phi_1(Ab(x)g(x))v(x)\,\mathrm{d}x\right) \tag{44}$$

выполняется для всех неотрицательных измеримых функций g тогда и только тогда, когда существует постоянная C такая, что неравенство

$$\Phi_2^{-1}\left(\int\limits_0^{+\infty} \Phi_2\left(\frac{a(x)}{C}.\frac{f_\varphi(x;r)}{\varphi(r)}\left\|\frac{f_\varphi(\cdot;r)}{\varepsilon v b}\right\|_{\Psi_1(\varepsilon v)}\right)\omega(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{45}$$

выполняется для всех ε, $r > 0$.

Целью данной теоремы является изучение поведения интегральных операторов типа Харди–Копсона на весовых пространствах Орлича. Результаты о модулярных неравенствах для рассматриваемых операторов типа Харди–Копсона важны, поскольку такие операторы возникают в изучение убывающих перестановок для обобщенных потенциалов Бесселя и

Рисса, в этом случае пространство Орлича–Лоренца служит базовым пространством.

Параграф 2.3. Применение к весовым пространствам Лебега.

Применим теорему 2.2.2. к случаю весовых пространств Лебега. Пусть $1 \leqslant p, q < \infty$

$$\Phi_1(t) = t^p; \quad \Phi_2(t) = t^q; \quad \Psi_1 = t^{p'}; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1;$$

функции a, b, v, ω такие, как в теореме 2.2.2. Тогда

$$\Phi_1^{-1}(t) = t^{\frac{1}{p}}; \quad \Phi_2^{-1}(t) = t^{\frac{1}{q}};$$

$$\Phi_1 \ll \Phi_2 \Leftrightarrow p \leqslant q.$$

Применение теоремы 2.2.2 дает следующий результат.

Пусть $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$. Тогда существует такая постоянная $A > 0$, что неравенство

$$\left(\int\limits_0^{+\infty} a^q(x) \mathcal{F} g^q(x) \omega(x)\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant A \left(\int\limits_0^{+\infty} \big(b^p(x) g^p(x)\big) v(x)\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{46}$$

выполняется для всех неотрицательных измеримых функций g тогда и только тогда, когда существует постоянная $C > 0$ такая, что неравенство

$$\left(\int\limits_0^{+\infty} a(x)^q f_\varphi(x;r)^q \omega(x)\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} \left\| \frac{f_\varphi(\cdot;r)}{vb} \right\|_{L_{p'}(v)}^q \leqslant C\varphi(r), \tag{47}$$

выполняется для всех $r > 0$.

Основные результаты второй главы опубликованы в работе [18] из списка публикаций автора по теме диссертации.

В **главе 3** изучаются модулярные неравенства для операторов типа Харди–Копсона на монотонных функциях в пространстве Орлича.

Аналогичная проблема изучена для весовых пространств Орлича–Лоренца. Ее решение связано с переходом от описаний действия операторов на конусе всех неотрицательных функций из пространства Орлича к изучению действия операторов на конусе неотрицательных функций со свойствами монотонности. Эти результаты играют важную роль, поскольку изучение интегральных свойств потенциалов связано именно с конусами их убывающих перестановок. В главе 3 диссертации получены критерии справедливости модулярных неравенств для операторов типа Харди–Копсона, отображающих конусы монотонных функций в весовом пространстве Орлича в другое весовое пространство Орлича. Следует отметить, что ответы, полученные в главе 3 с учетом свойств монотонности, существенно отличаются по форме от результатов главы 2, и их получение потребовало от автора привлечения ряда новых соображений.

Мы рассматриваем модулярные неравенства для операторов типа Харди–Копсона на конусе Ω положительных убывающих функций из весовых пространств Орлича. Воспользуемся общей теоремой (доказана в [9]) и результатами в [7] о редукции модулярных неравенств для положительно однородных операторов на конусе Ω, что позволяет перейти к модулярным неравенствам для модифицированных операторов на конусе всех положительных функций из пространства Орлича. Он основан на теореме двойственности, описывающей ассоциированную норму для конуса Ω. Мы следуем, в основном, обозначениям, использованным в книге [1, разд. 8, Глава 4] Беннета и Шарпли и в работе [19]. Здесь конкретизируются модулярные неравенства для случая, когда положительный оператор является оператором типа Харди–Копсона. Показано, что в этом случае модифицированный оператор является обобщенным оператором Харди в нотации Jim Quile Sun [8]. Это позволяет использовать подходы, развитые в [20—23],также результаты, полученные Jim Quile Sun [8], чтобы установить явные критерии справедливости модулярных неравенств.

Параграф 3.1. Определения и предварительные сведения.

Мы предполагаем, что $M(\mathbb{R}_+)$ — множество измеримых по Лебегу почти всюду конечных функций, M_+ — конус почти всюду положительных функций из $M = M(\mathbb{R}_+)$;

$$M_+ = \left\{ f \in M(\mathbb{R}_+) \,:\, \ f > 0 \right\}.$$

Рассмотрим конус положительных убывающих функций из пространства Орлича:

$$\Omega = \left\{ f \in L_{\Phi,v} \,:\, \ 0 \leqslant f \downarrow \right\}. \tag{48}$$

Для $g \in M_+$, введем следующую ассоциированную норму на конусе:

$$\|g\|'_{\Omega} = \sup\left\{ \int_0^{\infty} f g \,\mathrm{d}t \,:\, \ f \in \Omega;\ \|f\|_{\Phi,v} \leqslant 1 \right\}. \tag{49}$$

Сформулируем результат, обобщающий некоторые предыдущие результаты работ [10], [24—27].

Предложение 3.1.1. ([24]). *Пусть Φ, Ψ — дополнительные N-функции, N-функция Φ удовлетворяет условию Δ_2, пусть $v \in M_+$ и пусть*

$$0 < V(t) := \int\limits_0^t v \,\mathrm{d}\tau < \infty, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad V(+\infty) = +\infty. \tag{50}$$

Для фиксированного числа $0 < a < 1$ справедлива следующая двусторонняя оценка:

$$\|g\|'_{\Omega} \cong \|\mathfrak{R}_a(g)\|_{\Psi,v} =$$
$$= \inf\left\{ \lambda > 0 \,:\, \ \int_0^{\infty} \Psi\big(\lambda^{-1}|\mathfrak{R}_a(g;t)|\big) v(t) \,\mathrm{d}t \leqslant 1 \right\}, \tag{51}$$

где

$$\mathfrak{R}_a(g;t) := V(t)^{-1} \int\limits_{\delta_a(t)}^{t} g(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad \delta_a(t) := V^{-1}\big(aV(t)\big), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{52}$$

При различных значениях $a \in (0,1)$ *нормы* (51) *эквивалентны.*

Здесь и далее мы используем обозначения

$$A \cong B \Leftrightarrow \exists\, c \in [1,\infty) : \ c^{-1} \leqslant A/B \leqslant c. \tag{53}$$

В следующих рассмотрениях мы будем использовать формулу сопряженного оператора:

$$\mathfrak{R}_0^*(f;\tau) = \int\limits_{\tau}^{\infty} \frac{f(t)}{V(t)}\,\mathrm{d}t, \quad \tau \in \mathbb{R}_+. \tag{54}$$

Параграф 3.2. Области применения для операторов типа Харди–Копсона.

Сформулируем основной результат этого раздела, позволяющий свести модулярные неравенства для операторов на конусе Ω к модулярным неравенствам для модифицированных операторов на конусе M_+.

В этом разделе мы применяем общие результаты [11] в случае оператора типа Харди–Копсона.

Параграф 3.3. Доказательство результатов.

Теорема 3.3.1. *Пусть* Φ_1, Φ_2 — N*-функции и* $\Phi_1 \prec\prec \Phi_2$, Ψ_1, Ψ_2 — *дополнительные функции для* Φ_1 *и* Φ_2, v, u, w *положительные весовые функции,* $\mathcal{F}$ — *оператор Харди–Копсона* (42). *Пусть выполняется условие*

$$A_\varphi = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \frac{1}{t\varphi(t)} \left(\int_0^t \varphi\,\mathrm{d}\tau \right) < \infty. \tag{55}$$

Тогда существует постоянная $C > 0$ *такая, что неравенство*

$$\Phi_2^{-1}\left\{ \int_{\mathbb{R}_+} \Phi_2\big(w(t)\mathcal{F}f(t)\big)u(t)\,\mathrm{d}t \right\} \leqslant \Phi_1^{-1}\left\{ \int_{\mathbb{R}_+} \Phi_1(Cf(t))v(t)\,\mathrm{d}t \right\}, \quad f \in \Omega, \tag{56}$$

выполняется для всех положительных невозрастающих функций f тогда и только тогда, когда существует константа B *такая, что для всех* ε, $r > 0$ *выполняются следующие неравенства:*

$$\Phi_2^{-1}\left\{\int_0^\infty \Phi_2\left(\frac{w(t)}{B}\cdot\frac{f_\varphi(t,r)}{\varphi(r)}\left\|\frac{f_\varphi(\cdot,r)}{\varepsilon V}\right\|_{\Psi_1(\varepsilon v)}\right)u(t)\,\mathrm{d}t\right\} \leqslant \Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \qquad (57)$$

Основные результаты третьей главы опубликованы в работах [28; 29] из списка публикаций автора по теме диссертации.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [16—18; 28; 29] из списка литературы, а также в следующих тезисах конференций.

1. Х. Алмохаммад. Интегральные свойства обобщённых потенциалов типа Бесселя и типа Рисса. Eighth International Scientific Conference “Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis VIII”. Abstracts of the International Conference (Rostov-on-Don, 22–27 April, 2018), Pp. 31.
2. Алмохаммад Халиль. О модулярных неравенствах для обобщённых операторов Харди на весовых пространствах Орлича–Лоренца. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2019» (8.04–12.04.2019 г, г. Москва, МГУ). Москва, Тезисы докладов. — М.: Издание МГУ имени М.В. Ломоносова, 2019.ж
3. Алмохаммад Х., Альхалиль Н. Х. О свойствах потенциалов типа Рисса на базе пространств Орлича–Лоренца. «Ninth International Scientific Conference “Modern Methods, Problems and Applications

of Operator Theory and Harmonic Analysis IX”». Rostov-on-Don, 21–26 April, 2019. Abstracts of the International Conference (Rostov-on-Don, 21–26 April, 2019), Pp. 30–31.

4. Алмохаммад Х. Альхалиль Н.Х. О модулярных неравенствах обобщенных Харди операторов на весовых пространствах Орлича. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2020 «XXXI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам». Симферополь, издательство и типография ООО «Полипринт», С. 6–7.
5. Алмохаммад Халиль. Модулярные неравенства для одного класса операторов свертки на монотонных функциях в пространстве Орлича. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2020» (10.11–27.11.2020 г, г. Москва, МГУ). Москва, сборник тезисов. — М.: Издание МГУ имени М. В. Ломоносова, 2020.
6. Алмохаммад Халиль. Модулярные неравенства для операторов типа Харди на монотонных функциях в пространстве Орлича. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2021» (12.04–23.04.2021 г, г. Москва, МГУ). Москва, сборник тезисов. — М.: Издание МГУ имени М. В. Ломоносова, 2021.

Глава 1. Критерии вложений пространства потенциалов в перестановочно-инвариантные пространства в случае базовых весовых пространств Лоренца

В этой главе приведена конкретизация общих критериев вложений потенциалов в перестановочно-инвариантные пространства в случае, когда базовое пространство для потенциалов есть весовое пространство Лоренца. Получены явные описания оптимального перестановочно-инвариантного пространства, в которое вложено пространство потенциалов. Основные результаты данного раздела опубликованы в работах [16; 17] из списка публикаций автора по теме диссертации.

1.1 Определения и предварительные сведения

Пусть (S,Σ,μ) есть пространство с мерой. Здесь Σ — σ-алгебра подмножеств множества S, на которых определена неотрицательная σ-конечная, σ-аддитивная мера μ. Через $L_0 = L_0(S,\Sigma,\mu)$ обозначим множество μ-измеримых вещественнозначных функций $f : S \to R$, а через L_0^+ подмножество множества L_0, состоящее из неотрицательных функций:

$$L_0^+ = \left\{ f \in L_0;\ f \geqslant 0 \right\}.$$

Определение 1.1.1. *Отображение* $\rho : \ L_0^+ \to [0,\infty]$ *называется функциональной нормой (кратко: ФН), если для всех* $f,\ g,\ f_n \in L_0^+$, $n \in N$ *выполнены условия:*

(P1) $\rho(f) = 0 \ \Rightarrow \ f = 0$, μ*–почти всюду (кратко:* μ*–п.в.);*

$\rho(\alpha f) = \alpha\rho(f)$, $\alpha \geqslant 0$; $\rho(f + g) \leqslant \rho(f) + \rho(g)$ *(свойство нормы);*

(P2) $f \leqslant g$, $(\mu$*–п.в.)* $\Rightarrow \ \rho(f) \leqslant \rho(g)$ *(монотонность нормы);*

(P3) $f_n \uparrow f \ \Rightarrow \ \rho(f_n) \to \rho(f)(n \to \infty)$ *(свойство Фату);*

(P4) $0 < \mu(\sigma) < \infty \ \Rightarrow \ \int\limits_{\sigma} f \, d\mu \leqslant c_\sigma \rho(f)$, $f \in L_0^+$ *(локальная интегрируемость);*

(P5) $0 < \mu(\sigma) < \infty \ \Rightarrow \ \rho(\chi_\sigma) < \infty$ *(конечность ФН для характеристических функций* χ_σ *множеств конечной меры).*

Здесь $f_n \uparrow f$ означает, что

$$f_n \leqslant f_{n+1}, \quad \lim_{n\to\infty} f_n = f, \quad (\mu\text{–п.в.}).$$

Определение 1.1.2. *Пусть* ρ *есть функциональная норма. Множество* $X = X(\rho)$ *функций из* L_0*, для которых* $\rho(|f|) < \infty$ *называется банаховым функциональным пространством (кратко: БФП), порожденным функциональной нормой* ρ*. Для* $f \in X$ *полагаем*

$$\|f\|_X = \rho(|f|).$$

Пусть на L_0^+ *введены отношения частичного порядка и эквивалентности:* $f \prec g$ *со свойствами транзитивности, т. е.* $f \prec f$*;*

$$f \prec g, \quad g \prec h \quad \Rightarrow \quad f \prec h; \quad f \approx g \quad \Leftrightarrow \quad f \prec g \prec f.$$

Считаем, что отношение порядка подчинено поточечной оценке μ–п.в., т. е.

1) $f \leqslant g, \quad \mu\text{–п.в.} \quad \Rightarrow \quad f \prec g$;

2) $f_n \uparrow f \quad \Rightarrow \quad f_n \underline{\uparrow} f$.

Здесь $f_n \underline{\uparrow} f$ означает, что $f_n \prec f_{n+1}$; $f = [\sup] f_n$, т. е. $f_n \prec f$, $n \in \mathbb{N}$, и, если $f_n \prec \hat{f}$, $n \in \mathbb{N}$, то $f \prec \hat{f}$.

Базовый пример отношения порядка:

$$f \prec g \quad \Leftrightarrow f \leqslant g, \quad \mu\text{–п.в.} \quad \Rightarrow \rho(f) \leqslant \rho(g).$$

(Это следует из свойства (P2) функциональной нормы ρ).

Нас будут интересовать отношения порядка, связанные с невозрастающими перестановками функций. Обозначим для $f \in L_0$

$$\lambda_f(y) = \mu\big\{x \in S : \ |f(x)| > y\big\}, \quad y \in [0,\infty)$$

— Лебегова функция распределения. Через $\dot{L}_0$ обозначим множество функций $f \in L_0$, для которых $\lambda_f(y)$ не тождественна бесконечности,

$$\text{т. е.} \quad \exists y_0 \in [0,\infty) : \ \lambda_f(y_0) < \infty.$$

Для $f \in \dot{L}_0$ введем невозрастающую перестановку f^* как правую обратную функцию к невозрастающей функции λ_f, т. е.

$$f^*(t) = \inf\big\{y \in [0,\infty) : \ \lambda_f(y) \leqslant t\big\}, \quad t \in \mathbb{R}_+ = (0,\infty), \tag{1.1}$$

f^* — невозрастающая перестановка функции f, т. е. неотрицательная, убывающая, непрерывная справа функция на $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$, которая равноизмерима с f:

$$\mu_n\big\{x \in \mathbb{R}^n : \ |f(x)| > y\big\} = \mu_1\big\{t \in \mathbb{R}_+ : \ f^*(t) > y\big\}, \quad y \in \mathbb{R}_+.$$

Здесь μ — это мера Лебега.

Для $f \in \dot{L}_0$ имеем:

$$\lambda_f(y) \to 0, \quad (y \to +\infty) \quad \Rightarrow \quad |f(x)| < \infty, \quad (\mu\text{–п.в.}) \text{ на } S.$$

Определим отношения порядка для функций из $\dot{L}_0^+$:

$$1)\ f \prec g \quad \Rightarrow \quad f^*(t) \leqslant g^*(t); \quad t \in \big(0,\mu(S)\big); \tag{1.2}$$

$$2)\ f \prec g \quad \Rightarrow \quad \int_0^t f^*\, d\tau \leqslant \int_0^t g^*\, d\tau; \quad t \in \big(0,\mu(S)\big). \tag{1.3}$$

Отношение (1.2) — оценка для невозрастающих перестановок f^* и g^* и отношение (1.3) — оценка для интегралов от невозрастающих перестановок f^* и g^* подчинены поточечной оценке μ–п.в., кроме того отношение порядка (1.3) подчинено отношению (1.2).

Определение 1.1.3.

(i) Банахово функциональное пространство, сокращенно БФП, $E = E(\mathbb{R}^n)$ — это банахово пространство измеримых по Лебегу функций $f : \mathbb{R}^n \to C$ с монотонной нормой, т. е.

$$|f| \leqslant g, \quad g \in E \ \text{влечет} \ f \in E, \quad \|f\|_E \leqslant \|g\|_E,$$

и со свойством Фату:

$$0 \leqslant f_n \uparrow f, \quad f_n \in E \ \text{влечет} \ f \in E, \quad \|f_n\|_E \leqslant \|f\|_E.$$

(ii) БФП E называется перестановочно-инвариантным пространством, сокращенно ПИП, если его норма монотонна относительно перестановок,

$$f^* \leqslant g^*, \quad g \in E \ \text{влечет} \ f \in E, \quad \|f\|_E \leqslant \|g\|_E.$$

Примерами ПИП служат пространства Лебега $L_p(\mathbb{R}^n)$, пространства Лоренца, пространства Орлича.

В работе изучается пространство потенциалов $H_E^G \equiv H_E^G(\mathbb{R}^n)$ на n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.1.4. *Пространство потенциалов $H_E^G \equiv H_E^G(\mathbb{R}^n)$: определяем как множество сверток ядер потенциалов с функциями из базового пространства*

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) = \{u = G * f \ : \ f \in E(\mathbb{R}^n)\}, \tag{1.4}$$

где $E(\mathbb{R}^n)$ — перестановочно-инвариантное пространство, а

$$\|u\|_{H_E^G} = \inf\left\{\|f\|_E : \ f \in E(\mathbb{R}^n),\ G * f = u\right\}. \tag{1.5}$$

Ядро представления G назовем допустимым, если

$$G \in L_1(\mathbb{R}^n) + E'(\mathbb{R}^n). \tag{1.6}$$

Здесь свёртка $G * f$ определяется как интеграл

$$(G * f)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y. \tag{1.7}$$

Кроме того, $E'(\mathbb{R}^n)$ — ассоциированное ПИП, т. е. ПИП с нормой:

$$\|g\|_{E'} = \sup\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^n} |fg|\,\mathrm{d}\mu_n : f \in E,\ \|f\|_E \leqslant 1\right\}. \tag{1.8}$$

Замечание 1.1.1.

$$E = L_p, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty \quad \Rightarrow E' = L_{p'}; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Для ПИП $E(\mathbb{R}^n)$, $E'(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим пространства $\tilde{E}(\mathbb{R}_+)$, $\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)$ — их представления Люксембурга [1], т. е. ПИП, для которых выполняются следующие равенства

$$\|f\|_E = \|f^*\|_{\tilde{E}}, \quad f \in E(\mathbb{R}^n); \quad \|g\|_{E'} = \|g^*\|_{\tilde{E}'}, \quad g \in E'(\mathbb{R}^n).$$

Введем класс монотонных функций $\mathfrak{I}_n(R)$, $R > 0$ следующим образом.

Определение 1.1.5. *Функция $\theta : (0,R) \to \mathbb{R}_+$ принадлежит классу $\mathfrak{I}_n(R)$, если*

1. θ убывающая и непрерывная на $(0,R)$;

2. существует постоянная $c \in \mathbb{R}_+$ такая, что

$$r^{-n} \int\limits_0^r \theta(\rho)\rho^{n-1}\rho \, \mathrm{d}\rho \leqslant c\theta(r), \quad r \in (0,R). \tag{1.9}$$

Отметим, что

$$\varphi(\tau) = \theta\left(\left(\frac{\tau}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \in \mathfrak{J}_1(T), \quad T = V_n R^n,$$

где V_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

$$f_\varphi(t;\tau) = \min\left\{\varphi(t),\varphi(\tau)\right\} = \begin{cases} \varphi(t), & 0 < \tau \leqslant t, \\ \varphi(\tau), & \tau > t. \end{cases} \tag{1.10}$$

В случае допустимых ядер мы можем для потенциалов $u \in H_E^G$ определить убывающие перестановки u^*.

Определение 1.1.6. *Пусть $u^\# : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ означает симметрическую перестановку функции u, т. е. радиально симметричную неотрицательную убывающую и непрерывную справа (как функция от $\rho = |x|$, $x \in \mathbb{R}^n$), которая равноизмерима с u. Отметим, что*

$$u^\#(\rho) = u^*\left(V_n\rho^n\right), \quad u^*(t) = u^\#\left(\left(\frac{t}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right), \quad \rho, t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.11}$$

Здесь V_n — объем n-мерного единичного шара.

Обозначим

$$\begin{aligned} T &= \infty, & &\text{если } R = \infty, \\ T &= V_n(R/2)^n, & &\text{если } R \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Сформулируем условия на ядра G [15].

Замечание 1.1.2. *Пусть $A(x)$, $B(x)$ — положительные функции на множестве $D \subset \mathbb{R}^n$. Мы пишем $A(x) \cong B(x)$, $x \in D$, если существует постоянная $c \geqslant 1$ такая, что $c^{-1} \leqslant \frac{A(x)}{B(x)} \leqslant c$, $\forall x \in D$.*

Определение 1.1.7. *Пусть* $\theta \in \mathfrak{I}_n(\infty)$. *Считаем, что* $G \in S_\infty(\theta)$, *если*

$$G^{\#}(\rho) \cong \theta(\rho), \quad \rho = |x| \in \mathbb{R}_+. \tag{1.13}$$

Определение 1.1.8. *Пусть* $\theta \in \mathfrak{I}_n(\infty)$. *Считаем, что* $G \in S^0_\infty(\theta)$, *если*

$$G(\rho) \cong \theta(\rho), \quad \rho = |x| \in \mathbb{R}_+. \tag{1.14}$$

Замечание 1.1.3. *Ясно, что* $S^0_\infty(\theta) \subset S_\infty(\theta)$ *для* $t, \tau \in (0,T)$.

Определение 1.1.9. *Пусть* $\theta \in \mathfrak{I}_n(\infty)$. *Потенциалы* $u \in H^G_E(\mathbb{R}^n)$ *называются обобщенными потенциалами Рисса, если*

$$G(x) \cong \theta(|x|), \quad x \in R. \tag{1.15}$$

Ядро классического потенциала Рисса определено по формуле:

$$G(x) = \rho^{\alpha-n}, \quad \rho = |x| \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha \in (0,n),$$

где

$$\theta(|x|) = \rho^{\alpha-n} \in \mathfrak{I}_n(\infty), \quad G \in S^0_\infty(\theta), \tag{1.16}$$

$$f_\varphi(t;\cdot) \in E'(\mathbb{R}_+), \quad t \in \mathbb{R}_+ \;\Leftrightarrow\; \tau^{\frac{\alpha}{n}-1} \in \widetilde{E'}(t,\infty). \tag{1.17}$$

Определение 1.1.10. *Пусть* $R \in \mathbb{R}_+, X = X(\mathbb{R}^n)$ *есть ПИП,* $\theta \in \mathfrak{I}_n(R)$, *где* $R \in \mathbb{R}_+$. *Считаем, что* $G \in S_R(\theta; X)$, *если*

$$(G^0_R)^{\#}(\rho) \cong \theta(\rho), \quad \rho \in (0,R), \quad G^1_R \in X(\mathbb{R}^n), \tag{1.18}$$

где

$$B_R = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \; |x| < R\right\},$$

$$G^0_R(x) = G(x)\chi_{B_R}(x); \quad G^1_R(x) = G(x)\chi_{B^c_R}(x).$$

При этом,

$$G(x) = G^0_R(x) + G^1_R(x).$$

Определение 1.1.11. *Пусть* $R \in \mathbb{R}_+, X = X(\mathbb{R}^n)$ *есть ПИП,* $\theta \in \mathfrak{I}_n(R)$*,*

$$G(x) = G_R^0(x) + G_R^1(x);$$

$$B_R = \left\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < R\right\}, \quad R \in \mathbb{R}_+,$$

$$G_R^0(x) = G(x)\chi_{B_R}(x); \quad G_R^1(x) = G(x)\chi_{B_R^c}(x).$$

Считаем, что $G \in S_R^0(\theta; X)$*, если*

$$G_R^0(x) \cong \theta(\rho), \quad \rho = |x| \in (0,R), \quad G_R^1 \in X(\mathbb{R}^n).$$

Определение 1.1.12. *Пусть* $R \in \mathbb{R}_+, \theta \in \mathfrak{I}_n(R)$*. Потенциалы* $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$ *называются обобщенными бесселевыми потенциалами, если*

$$G \in S_R^0\big(\theta; (L_1 \cap E')\big), \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} G \, \mathrm{d}x \neq 0.$$

Ядро классического потенциала Бесселя определено по формуле:

$$G(x) = c(\alpha,n)\rho^{-\upsilon}K_\upsilon(\rho), \quad \rho = |x| \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha \in (0,n], \quad \upsilon = (n-\alpha)/2,$$

где K_υ *— функция Макдональда.*

Замечание 1.1.4. *Пусть* δ *— положительная измеримая функция (вес),*

$$\Upsilon(s) = \int\limits_0^s \delta(t)\,\mathrm{d}t,$$

обозначим:

$$f_\delta^{**}(t) = \frac{1}{\Upsilon(t)}\int\limits_0^t f^*(\tau)\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau; \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.19}$$

В частности, когда $\delta = 1$*,*

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau; \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.20}$$

Теорема 1.1.1. *Пусть G есть допустимое ядро, см.* (1.6)*. Тогда интеграл* (1.7) *сходится для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$ есть банахово пространство, причем*

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) \subset E(\mathbb{R}^n) + L_\infty(\mathbb{R}^n),$$

$$\|u\|_{E+L_\infty} \leqslant \|G\|_{L_1+E}.\|u\|_{H_E^G}; \quad u \in H_E^G. \tag{1.21}$$

Доказательство. Оценка (1.21) следует из обобщенного неравенства Минковского и неравенства Гёльдера соответственно:

$$u = u^0 + u^1,$$

$$\left\{u^0 = G^0 * f,\ G^0 \in L_1(\mathbb{R}^n),\ f \in E(\mathbb{R}^n)\right\},$$

$$\Rightarrow\ u^0 \in E(\mathbb{R}^n), \quad \|u^0\|_E \leqslant \|G^0\|_{L_1}\|f\|_E,$$

$$\left\{u^1 = G^1 * f,\ G^1 \in E'(\mathbb{R}^n),\ f \in E(\mathbb{R}^n)\right\},$$

$$\Rightarrow\ u^1 \in L_\infty(\mathbb{R}^n), \quad \|u^1\|_{L_\infty} \leqslant \|G^1\|_{E'}\|f\|_E,$$

$$u^1(x) = \int G^1(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y,$$

$$|u^1(x)| \underset{\text{Н.Г}}{\leqslant} \|G^1(x-.)\|_{E'}.\|f\|_E,$$

$$\|G^1(x-.)\|_{E'} = \|G^1\|_{E'},$$

$$|u^1(x)| \leqslant \|G^1\|_{E'}.\|f\|_E, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\Rightarrow\ \|u\|_{L_\infty} \leqslant \|G^1\|_{E'}.\|f\|_E. \tag{1.22}$$

□

1.2 Эквивалентные описания конусов убывающих перестановок для потенциалов, построенных на базе весовых пространств Лоренца с общими весами

Этот раздел посвящен описанию конусов убывающих перестановок для потенциалов. Рассмотрены вопросы накрывания и эквивалентности для конусов и получены представления для конусов, которые эквивалентны конусам убывающих перестановок потенциалов, но описываются в более простых терминах с помощью интегральных представлений.

Рассмотрим следующие конусы перестановок для $T \in (0,\infty]$, снабженные положительно однородными функционалами:

$$M(T) \equiv M_E^G(T) = \left\{h(t) = u^*(t),\ t \in (0,T) :\ u \in H_E^G\right\}, \tag{1.23}$$

$$\rho_{M(T)}(h) = \inf\left\{\|u\|_{H_E^G} :\ u \in H_E^G,\ u^*(t) = h(t),\ t \in (0,T)\right\}, \tag{1.24}$$

$$\tilde{M}(T) \equiv \tilde{M}_E^G(T) = \left\{h(t) = u^{**}(t),\ t \in (0,T) :\ u \in H_E^G\right\}, \tag{1.25}$$

$$\rho_{\check{M}(T)}(h) = \inf\left\{\|u\|_{H_E^G} :\ u \in H_E^G,\ u^{**}(t) = h(t),\ t \in (0,T)\right\}. \tag{1.26}$$

Конусы $M_E^G(\infty)$ и $\check{M}_E^G(\infty)$ определяют глобальные интегральные свойства потенциалов $u \in H_E^G$, и их максимальных функций Харди–Литтлвуда, соответственно, ввиду известного соотношения $(Mu)^* \cong u^{**}$ (см. [15]). Так, для ПИП $X(\mathbb{R}^n)$

$$H_E^G \subset X(\mathbb{R}^n) \quad \Leftrightarrow \quad M_E^G(\infty) \subset \tilde{X}(\mathbb{R}_+), \tag{1.27}$$

где $\tilde{X}(\mathbb{R}_+)$ есть представление Люксембурга для $X(\mathbb{R}^n)$. Напомним обозначение $f_\varphi(t;\tau)$, см. (1.10).

Определение 1.2.1. *При* $T \in (0,\infty]$ *рассмотрим конус*

$$K(T) \equiv K_E^{\varphi} =$$
$$= \left\{ h(t) = \int_0^{\infty} f_{\varphi}(t;\tau)g(\tau)\,d\tau; \quad t \in (0,T)\ :\ g \in \tilde{E}_0(0,T) \right\}, \quad (1.28)$$

снабженный функционалом $\rho_{K(T)}(h) = \|g\|_{\tilde{E}(0,T)}$. *При* $T \in (0,\infty)$ *считаем, что*

$$\|g\|_{\tilde{E}(0,T)} = \|g^0\|_{\tilde{E}(R_+)}; \quad g^0(t) = g(t); \quad t \in (0,T), \quad g^0(t) = 0, \quad t \geqslant T,$$

$$\tilde{E}_0(0,T) = \left\{ g \in \tilde{E}(0,T);\ 0 \leqslant g \downarrow, \quad g(t+0) = g(t), \quad t \in (0,T) \right\}. \quad (1.29)$$

Считаем, что

$$f_{\varphi}(t;\cdot) \in \tilde{E}'(0,T) \quad \text{при} \quad t \in (0,T). \quad (1.30)$$

Напомним, что множество $\{K(T)\}$ *неотрицательных измеримых функций на* $(0,T)$, $T \in (0,\infty)$ *образует конус, снабженный функционалом*

$$\rho_{K(T)}\ :\ K(T) \to [0,\infty) \quad \text{если}$$

$$h \in K \Rightarrow \alpha h \in K, \quad \forall \alpha \in [0,\infty); \quad (1.31)$$

$$\rho_{K(T)}(\alpha h) = \alpha \rho_{K(T)}(h), \quad \forall \alpha \in [0,\infty); \quad (1.32)$$

$$\rho_{K(T)}(h) = 0 \quad \Rightarrow \quad h = 0 \quad \text{почти всюду на } (0,T). \quad (1.33)$$

Рассмотрим совокупность $\mathfrak{I}_T = \{K(T)\}$ таких конусов.

Определение 1.2.2. *Пусть* $K(T)$, $M(T) \in \mathfrak{I}_T$. *Конус* $K(T)$ *накрывает конус* $M(t)$ *(обозначение* $M(T) \prec K(T)$*), если существуют постоянные* $c_1 = c_1(T) \in \mathbb{R}_+$ *и* $c_2 = c_2(T) \in [0,\infty)$*, причем* $c_2(\infty) = 0$*, такие, что для каждой функции* $k_1 \in M(T)$ *найдется функция* $k_2 \in K(T)$*, удовлетворяющая условиям*

$$\rho_{K(T)}(k_2) \leqslant c_1 \rho_{M(T)}(k_1), \quad k_1(t) \leqslant k_2(t) + c_2 \rho_{M(T)}(k_1), \quad t \in (0,T). \quad (1.34)$$

Замечание 1.2.1. (см. [15]). *Эквивалентность конусов означает их взаимное накрывание:*

$$M(T) \approx K(T) \quad \Leftrightarrow \quad M(T) \prec K(T) \prec M(T).$$

Определение 1.2.3. *Пусть* $\tilde{X}(0,T)$ *есть БФП с нормой* $\|h\|_{\tilde{X}(0,T)}$. *Для конуса* $M(T)$ *вложение* $M(T) \mapsto \tilde{X}(0,T)$ *означает, что* $M(T) \subset \tilde{X}(0,T)$ *и существует постоянная* $\delta_{M(T)} \in \mathbb{R}_+$ *такая, что*

$$\|h\|_{\tilde{X}(0,T)} \leqslant \delta_{M(T)}\rho_{M(T)}(h), \quad h \in M(T).$$

Лемма 1.2.1. *Пусть* $K(T)$, $M(T) \in \mathfrak{I}_T$. *Для любого БФП* $\tilde{X}(0,T)$, *если* $M(T) \prec K(T)$, *то* $K(T) \mapsto \tilde{X}(0,T) \Rightarrow M(T) \mapsto \tilde{X}(0,T)$, *причем* $c_{M(T)} \leqslant c_0 c_{K(T)} + c_1\|1\|_{\tilde{X}(0,T)}$.

Теорема 1.2.1. (см. [4]). *Пусть* $R \in (0,\infty]$, $\theta \in \mathfrak{I}_n(R)$ *и* $T = T(R), T = \infty$, *если* $R = \infty$; *где* $T = V_n\left(\frac{R}{2}\right)^n$, *если* $R < \infty$; $f_\varphi(t;.) \in \tilde{E}'(\mathbb{R}_+)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $G \in S^0_\infty(\theta)$ *или, если* $R \in \mathbb{R}_+$, $G \in S^0_R(\theta; E')$, *то*

$$M^G_E(T) \approx \tilde{M}^G_E(T) \approx K^\varphi_E(T). \tag{1.35}$$

Замечание 1.2.2. *Если* $M(T) \approx K(T)$, *то*

$$K(T) \mapsto \tilde{X}(0,T) \quad \Leftrightarrow \quad M(T) \mapsto \tilde{X}(0,T).$$

1.3 Общие свойства потенциалов, построенных на базе весовых пространств Лоренца с общими весами

В этом подразделе рассмотрены общие свойства пространства потенциалов типа Бесселя и Рисса, построенных на базе перестановочно-инвариантных пространств и приведена конкретизация этих построений в случае базовых весовых пространств Лоренца.

Определение 1.3.1. *Пространствами Лоренца* $\Lambda^q(v)$ *и* $\Gamma^q_\delta(v)$*, где* δ *и* $v > 0$ *— измеримые функции, называются пространства измеримых функций с конечными нормами:*

$$\|f\|_{\Lambda^q(v)} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty f^{*q}(t)v(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}; & 1 < q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in(0,\infty)} \left\{f^*(t)v(t)\right\}; & q = \infty, \end{cases} \tag{1.36}$$

$$\|f\|_{\Gamma^q_\delta(v)} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty f_\delta^{**q}(t)v(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}; & 1 < q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in(0,\infty)} \left\{f_\delta^{**}(t)v(t)\right\}; & q = \infty. \end{cases} \tag{1.37}$$

В частности, когда $\delta = 1$ (см (1.19) и (1.20)),

$$\|f\|_{\Gamma^q(v)} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty f^{**q}(t)v(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}; & 1 < q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in(0,\infty)} \left\{f^{**}(t)v(t)\right\}; & q = \infty. \end{cases} \tag{1.38}$$

Замечание 1.3.1.

$$f^{**} \geqslant f^* \quad \Rightarrow \quad \|f\|_{\Gamma^q(v)} \geqslant \|f\|_{\Lambda^q(v)} \quad \Rightarrow \quad \Gamma^q(v) \subset \Lambda^q(v). \tag{1.39}$$

Определение 1.3.2. *Пусть оператор* $\mathfrak{R}_{\varphi,T} \;:\; \tilde{E}_0(0,T) \to \tilde{X}(0,T)$*,* $T \in (0,\infty]$*, определён по формуле*

$$\mathfrak{R}_{\varphi,T}[g](t) = \int\limits_0^T f_\varphi(t;\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad g \in \tilde{E}_0(0,T). \tag{1.40}$$

Этот оператор играет важную роль в интегральных свойствах потенциала.

Сформулируем критерии вложений пространства потенциалов в ПИП:

$$H^G_E(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n). \tag{1.41}$$

Вложение (1.41) эквивалентно условию: существует $c \in (0,\infty)$, такая что

$$\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\tilde{X}} \leqslant c\|g\|_{\tilde{E}}; \quad g \in \tilde{E}_0.$$

Рассмотрим случай $E = \Lambda^q(u)$.

Задача — описать оптимальное ПИП $X_0(\mathbb{R}^n)$ для вложения

$$H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n),$$

т. е. такое ПИП $X_0(\mathbb{R}^n)$, что

1. $H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n) \subset X_0(\mathbb{R}^n)$;
2. если ПИП $X(\mathbb{R}^n)$, такое что есть вложение $H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n)$, то

$$X_0(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n).$$

Теорема 1.3.1. *Пусть оператор* $\mathfrak{R}_{\varphi,\infty} : \Lambda^q(u)(\mathbb{R}_+) \to \tilde{X}(\mathbb{R}_+)$. *Для потенциалов Рисса вложение:*

$$H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n) \tag{1.42}$$

эквивалентно ограниченности оператора $\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}$. *В частности, для* $t \in \mathbb{R}_+$

$$f_\varphi(t;\cdot) \in \tilde{E}'(\mathbb{R}_+) \quad \Leftrightarrow \quad H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n) \subset L_1(\mathbb{R}_+) + L_\infty(\mathbb{R}_+).$$

Доказательство. 1. В случае допустимых ядер и для ПИП $X(\mathbb{R}^n)$ нужно обосновать эквивалентность вложений

$$H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n) \quad \Leftrightarrow \quad M^G_{\Lambda^q(u)}(\infty) \mapsto \tilde{X}(\mathbb{R}_+). \tag{1.43}$$

Из (1.42) получим, что есть постоянная $a \in \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\|u^*\|_{\tilde{X}(\mathbb{R}_+)} = \|u\|_X \leqslant a.\|u\|_{H^G_{\Lambda^q(u)}}, \quad \forall u \in H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n). \tag{1.44}$$

Для $h \in M \equiv M^G_{\Lambda^q(u)}(\infty)$ можно найти функцию $u \in H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n)$

$$u^* = h \quad \text{и} \quad \|u\|_{H^G_{\Lambda^q(u)}} \leqslant 2\rho_M(h). \tag{1.45}$$

Из (1.44) и (1.45) можно писать $h = u^* \in \tilde{X}(\mathbb{R}_+)$,

$$\|h\|_{\tilde{X}(\mathbb{R}_+)} \leqslant 2a.\rho_M(h). \tag{1.46}$$

т. е. $M^G_{\Lambda^q(u)}(\infty) \mapsto \tilde{X}(\mathbb{R}_+)$. Для $u \in H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n)$ и $h = u^* \in M^G_{\Lambda^q(u)}(\infty)$ получим

$$\|h\|_{\tilde{X}(\mathbb{R}_+)} \leqslant a_1.\rho_M(h).$$

Но $\rho_M(h) \leqslant \|u\|_{H^G_{\Lambda^q(u)}}$,

$$\Rightarrow \quad \|u\|_X = \|u^*\|_{\tilde{X}(\mathbb{R}_+)} \leqslant a_1\|u\|_{H^G_{\Lambda^q(u)}}, \quad \forall u \in H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n),$$

что и означает $H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n)$.

2. При $\theta \in \mathfrak{I}_n(\infty)$ вложение $K = K^\varphi_{\Lambda^q(u)}(\infty) \mapsto \tilde{X}(\mathbb{R}_+)$ эквивалентно ограниченности оператора $\mathfrak{R}_{\varphi,\infty} : \Lambda^q(u)(\mathbb{R}_+) \to \tilde{X}(\mathbb{R}_+)$. Действительно, это вложение означает, что

$$h(t) = \int_0^\infty f_\varphi(t;\tau)g(\tau)\,d\tau \in \tilde{X}(\mathbb{R}_+), \quad \forall g \in \Lambda^q(u)(\mathbb{R}_+), \tag{1.47}$$

$$\|h\|_{\tilde{X}(\mathbb{R}_+)} \leqslant a_1.\rho_K(h) = a_1\|g\|_{\Lambda^q(u)(\mathbb{R}_+)}, \tag{1.48}$$

что эквивалентно ограниченности оператора $\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}$.

3. Пусть $\theta \in \mathfrak{I}_n(\infty)$ $f_\varphi(t;\cdot) \in \tilde{E}'(\mathbb{R}_+)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $G \in S_\infty(\theta)$. В этом условии имеем согласно замечанию 1.2.1 накрывание $M(\infty) \prec K(\infty)$, а из леммы 1.2.1 можно писать

$$K^\varphi_{\Lambda^q(u)}(\infty) \mapsto \tilde{X}(\mathbb{R}_+) \;\Rightarrow\; M^\theta_{\Lambda^q(u)}(\infty) \mapsto \tilde{X}(\mathbb{R}_+) \;\Leftrightarrow\; H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n).$$

4. Из теоремы 1.2.1, когда $G \in S^0_\infty(\theta)$, $M^G_{\Lambda^q(u)}(\infty) \approx K^\varphi_{\Lambda^q(u)}(\infty)$, превращается в цепочку эквивалентностей. Так что в этом случае, ограниченность оператора $\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}$ достаточна и необходима для $H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Замечание 1.3.2. (см. [15]). *Пусть* $\theta \in \mathfrak{I}_n(\infty)$. *Следующие условия эквивалентны между собой:*

$$\mathfrak{R}_{\varphi,\infty} : \Lambda^q(u)(\mathbb{R}_+) \to L_1(\mathbb{R}_+) + L_\infty(\mathbb{R}_+) \text{ — ограниченный оператор},$$

$$K^{\varphi}_{\Lambda^q(u)}(\infty) \mapsto L_1(\mathbb{R}_+) + L_\infty(\mathbb{R}_+), \tag{1.49}$$

$$f_\varphi(t;\cdot) \in [\Lambda^q(u)]'(\mathbb{R}_+), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.50}$$

Доказательство. Вложение $K^{\varphi}_{\Lambda^q(u)}(\infty) \mapsto L_1(\mathbb{R}_+) + L_\infty(\mathbb{R}_+)$ эквивалентно ограниченности оператора $\mathfrak{R}_{\varphi,\infty} : \Lambda^q(u)(\mathbb{R}_+) \to L_1(\mathbb{R}_+) + L_\infty(\mathbb{R}_+)$. Из (1.47), (1.48) следует

$$\|h\|_{L_1(\mathbb{R}_+)+L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leqslant a_1 \|g\|_{\Lambda^q(u)(\mathbb{R}_+)}, \quad \forall h \in K^{\varphi}_{\Lambda^q(u)}(\infty),$$

$$\|h\|_{L_1(\mathbb{R}_+)+L_\infty(\mathbb{R}_+)} \approx \int_0^l h^*(\tau)\,d\tau, \quad \text{где } l \in \mathbb{R}_+.$$

Итак

$$\int_0^l h(\tau)\,d\tau \leqslant a_l \|g\|_{\Lambda^q(u)(\mathbb{R}_+)}, \quad h \in K^{\varphi}_{\Lambda^q(u)}(\infty), \tag{1.51}$$

($\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}$ — ограниченный оператор).

2. Покажем, что (1.51) $\Leftrightarrow$ (1.50) Из (1.48), (1.51) можно записать

$$\int_0^\infty F_l(\tau) g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leqslant a_l \|g\|_{\Lambda^q(u)(\mathbb{R}_+)}, \quad g \in \Lambda^q(u)(\mathbb{R}_+), \tag{1.52}$$

где

$$0 \leqslant F_l(\tau) = \int_0^l f_\varphi(\tau;t)\,\mathrm{d}t \ \downarrow, \quad \tau \in \mathbb{R}_+. \tag{1.53}$$

Вложение (1.52) эквивалентно $F_l \in [\Lambda^q(u)]'(\mathbb{R}_+)$. Если $\tau \in (0,l]$, то

$$F_l(\tau) = \int_0^\tau f_\varphi(\tau;t)\,\mathrm{d}t + \int_0^l f_\varphi(\tau;t)\,\mathrm{d}t = \varphi(\tau)\tau + \int_\tau^l \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Но $\varphi \in \mathfrak{I}_1$ и

$$\int_0^\tau \varphi(t)\,\mathrm{d}t \cong \varphi(\tau)\tau, \quad \tau \in \mathbb{R}_+. \tag{1.54}$$

При $\tau \in (0,l]$

$$F_l(\tau) \approx \int_0^\tau \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_\tau^l \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^l \varphi(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$F_l(\tau) \approx l\varphi(l), \quad \tau \in (0,l]$$

при $\tau > l$ имеем $\tau > t$ для $t \in (0,l]$, так что в силу (1.53)

$$F_l(\tau) = \int_0^l \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \beta\varphi(\tau).$$

Итак, при $\tau \in \mathbb{R}_+$

$$F_l(\tau) \approx l\min\left\{\varphi(l), \varphi(\tau)\right\} = l f_\varphi(l;\tau). \tag{1.55}$$

Таким образом,

$$\int_0^l h(\tau)\,d\tau \leqslant a_l \|g\|_{\Lambda^q(u)(\mathbb{R}_+)}, \quad \Leftrightarrow \quad F_l \in [\Lambda^q(u)]'(\mathbb{R}_+)$$

$$\Leftrightarrow \quad f_\varphi(l;.) \in [\Lambda^q(u)]'(\mathbb{R}_+), \quad l \in \mathbb{R}_+).$$

$\square$

Теорема 1.3.2. [15]. *В случае обобщенных потенциалов Бесселя вложение* (1.42) *справедливо тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:*

1. *оператор* $\mathfrak{R}_{\varphi,T}$ *ограничен;*
2. *справедливо вложение*

$$\Lambda^q(u)(\mathbb{R}^n) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n). \tag{1.56}$$

Замечание 1.3.3. *Если $G \in S^0_R(\varphi; E')$, условие, что оператор $\mathfrak{R}_{\varphi,T}$ ограничен необходимо для вложения (1.42).*

Теорема 1.3.3. *При $T = \infty$ для потенциалов типа Рисса, или $T = V_n(R/2)^n \in \mathbb{R}_+$ для потенциалов типа Бесселя имеет место эквивалентность*

$$H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n) \subset L_\infty(\mathbb{R}^n) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \in [\Lambda^q(u)]'(0,T). \tag{1.57}$$

Доказательство. 1. В работе [15], при $R = \infty$ ядра, удовлетворяющие условиям $\theta \in \mathfrak{I}_n(R)$, $T = T(R)$, $T = V_n(R/2)^n$, суть обобщенные ядра Рисса, так что можно применить результат теоремы 1.3.1 для ПИП $X(\mathbb{R}^n) = L_\infty(\mathbb{R}^n)$. При $G \in S_\infty(\theta)$ для вложения $H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n) \subset L_\infty(\mathbb{R}^n)$ достаточно ограниченности оператора:

$$\mathfrak{R}_{\varphi,\infty} \,:\, \Lambda^q(u)(\mathbb{R}_+) \to L_\infty(\mathbb{R}_+),$$

которая в силу

$$h(t) = \int\limits_0^\infty f_\varphi(t;\tau) g(\tau)\, d\tau \in L_\infty(\mathbb{R}_+), \quad \forall g \in \tilde{E}_0(\mathbb{R}_+), \tag{1.58}$$

$$\|h\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leqslant c_0 \rho_K(h) = c_0 \|g\|_{\Lambda^q(u)(\mathbb{R}_+)}. \tag{1.59}$$

Для любой $g \in \tilde{E}_0(\mathbb{R}_+)$ (см. (1.29))

$$h(t) = \int\limits_0^\infty f_\varphi(t;\tau) g(\tau)\, d\tau \leqslant c_0 \|g\|_{\Lambda^q(u)(\mathbb{R}_+)}. \tag{1.60}$$

Условие (1.59) эквивалентно тому, что

$$\varphi \in [\Lambda^q(u)]'(0,T) \quad \text{при } T = \infty.$$

2. Пусть теперь $R < \infty$, $T = V_n(R/2)^n$. Эквивалентность ограниченности оператора

$$\mathfrak{R}_{\varphi,T} \,:\, \Lambda^q(u)(0,T) \to L_\infty(0,T) \tag{1.61}$$

и вложения $\varphi \in [\Lambda^q(u)]'(0,T)$ доказывается так же, как на шаге 1 доказательства. Необходимость этих условий для вложения $H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n) \subset L_\infty(\mathbb{R}^n)$ при условии $G \in S^0_R(\theta; [\Lambda^q(u)]')$ следует из предложения (1.41) (при $X(\mathbb{R}^n) = L_\infty(\mathbb{R}^n)$). Для обоснования достаточности при условии $G \in S_R(\theta; [\Lambda^q(u)]')$ прямое применение теоремы 1.3.1 не проходит, поскольку там было наложено более жесткое условие на ядра: $G \in S_R(\theta; [\Lambda^q(u)]' \cap L_1)$. Поэтому покажем, что для $G \in S_R(\theta; [\Lambda^q(u)]')$

$$\varphi \in [\Lambda^q(u)]'(0,T) \quad \Rightarrow \quad G \in [\Lambda^q(u)]'(\mathbb{R}^n),$$

$$G = G^0_R + G^1_R, \quad G^1_R \in [\Lambda^q(u)]'(\mathbb{R}^n), \quad (G^0_R)^\#(\rho) \cong \varphi(\rho)_{\chi_{(0,R)}(\rho)}, \quad \rho \in \mathbb{R}_+,$$

т. е. (при $T_1 = V_n R^n$)

$$(G^0_R)^\#(\tau) \cong \theta\left(\left(\frac{\tau}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)_{\chi(0,T_1)}(\tau) = \varphi(\tau)_{\chi(0,T_1)}(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}_+.$$

Таким образом,

$$\left\|G^0_R\right\|_{[\Lambda^q(u)]'(\mathbb{R}^n)} = \left\|(G^0_R)^*\right\|_{[\Lambda^q(u)]'(\mathbb{R}_+)} \cong \left\|\varphi_{\chi(0,T_1)}\right\|_{[\Lambda^q(u)]'(\mathbb{R}_+)}.$$

Но (здесь $T = V_n(R/2)^n$)

$$\varphi_{\chi(0,T_1)} \leqslant \varphi_{\chi(0,T)} + \varphi(T)_{\chi(0,T_1)},$$

так что, учитывая условие $\varphi \in [\Lambda^q(u)]'(0,T)$, получим

$$\left\|\varphi_{\chi(0,T_1)}\right\|_{[\Lambda^q(u)]'(\mathbb{R}_+)} \leqslant \left\|\varphi_{\chi(0,T)}\right\|_{[\Lambda^q(u)]'(\mathbb{R}_+)} + \varphi(T)\left\|\chi(0,T_1)\right\|_{[\Lambda^q(u)]'(\mathbb{R}_+)} < \infty.$$

В результате $G^0_R \in [\Lambda^q(u)]'(\mathbb{R}^n)$ и тогда $G \in [\Lambda^q(u)]'(\mathbb{R}^n)$. Можно применить оценку (1.22):

$$u \in H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n) \quad \Rightarrow \quad u \in L_\infty(\mathbb{R}^n), \quad \|u\|_{L_\infty} \leqslant \|G\|_{[\Lambda^q(u)]'} \|u\|_{H^G_{\Lambda^q(u)}}$$

функциям $f \in E(\mathbb{R}^n)$ таким, что $G * f = u$. Теорема доказана. $\square$

1.4 Критерии вложений пространства потенциалов в перестановочно-инвариантные пространства в случае базовых весовых пространств Лоренца

Получены критерии вложений пространства потенциалов в перестановочно-инвариантные пространства и даны описания оптимальных перестановочно-инвариантных пространств для таких вложений. Приведена конкретизация этих вложений в случае базовых весовых пространств Лоренца.

Напомним обозначения пространств $\Gamma^q_\delta(w)$ и $\Lambda^p(v)$, см. определение 1.3.1

Теорема 1.4.1. [5]. *Пусть* $p, q \in (0,\infty]$ *и пусть* v*,* δ*,* w *веса, и* $\Delta(s) = \int_0^s \delta(t)\,\mathrm{d}t$*,* $V(s) = \int_0^s v(t)\,\mathrm{d}t$*, тогда вложения*

$$\|f\|_{\Gamma^q_\delta(w)} \leqslant C\|f\|_{\Lambda^p(v)} \tag{1.62}$$

выполнено тогда и только тогда, когда

(i) $0 < p \leqslant 1$*,* $p \leqslant q < \infty$

$$A_1 = \sup_{x>0}\left\{\left(\int_0^\infty \left(\frac{\Delta(x)}{\Delta(x)+\Delta(t)}\right)^q \cdot w(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} \cdot V^{-\frac{1}{p}}(t)\right\} < \infty. \tag{1.63}$$

Кроме того, наилучшая постоянная C *при условии* $\|f\|_{\Gamma^q_\delta(w)} \leqslant C\|f\|_{\Lambda^p(v)}$ *удовлетворяет соотношению* $C \approx A_1$.

(ii) $0 < q < p \leqslant 1$

$$A_2 = \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \left(\frac{\Delta(x)}{\Delta(x)+\Delta(t)}\right)^q \cdot w(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{r-q}{q}} t\right.$$

$$\left. w(x)\Delta(x)^{-r}\left(\sup_{0<t<x}\left\{\Delta(t)V^{-\frac{1}{p}}(t)\right\}\right)^r \mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{r}} < \infty.$$

Кроме того, наилучшая постоянная C при условии $\|f\|_{\Gamma^q_\delta(w)} \leqslant C\|f\|_{\Lambda^p(v)}$ *удовлетворяет соотношению* $C \approx A_2$.

(iii) $1 < q \leqslant p < \infty$,

$$A_3 = \sup_{x>0}\left\{\left(\int_0^\infty \left(\frac{\Delta(x)}{\Delta(x)+\Delta(t)}\right)^q \cdot w(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.\left(\int_0^\infty \left(\frac{\Delta(t)}{\Delta(t)+\Delta(x)}\right)^{p'} \cdot \frac{v(t)}{V(t)^{p'}}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}}\right\} < \infty. \quad (1.64)$$

Кроме того, наилучшая постоянная C в условии $\|f\|_{\Gamma^q_\delta(w)} \leqslant C\|f\|_{\Lambda^p(v)}$ *удовлетворяет соотношению* $C \approx A_3$.

(iv) $1 < p < \infty$, $0 < q < p$, $r = (pq)/(p-q)$,

$$A_4 = \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \left(\frac{\Delta(x)}{\Delta(x)+\Delta(t)}\right)^q \cdot w(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{r-q}{q}}\right.$$

$$\left. w(x)\left(\int_0^\infty \left(\frac{\Delta(t)}{\Delta(t)+\Delta(x)}\right)^{p'} \cdot \frac{v(t)}{V(t)^{p'}}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{r}{p'}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Кроме того, наилучшая постоянная C в условии $\|f\|_{\Gamma^q_\delta(w)} \leqslant C\|f\|_{\Lambda^p(v)}$ *удовлетворяет соотношению* $C \approx A_4$.

(v) $0 < p < \infty$, $q = \infty$,

$$A_5 = \sup_{x>0}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,\infty)}\left(\frac{\Delta(x)w(t)}{\Delta(x)+\Delta(t)}\right)\right)\cdot V^{-\frac{1}{p}}(x) < \infty.$$

Кроме того, наилучшая постоянная C в условии $\|f\|_{\Gamma^q_\delta(w)} \leqslant C\|f\|_{\Lambda^p(v)}$ *удовлетворяет соотношению* $C \approx A_5$.

(vi) $1 < p < \infty$, $q = \infty$,

$$A_6 = \sup_{x>0}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,\infty)}\left(\frac{\Delta(x)w(t)}{\Delta(x)+\Delta(t)}\right)\right)\left(\int_0^\infty \left(\frac{\Delta(t)}{\Delta(t)+\Delta(x)}\right)^{p'} \cdot \frac{v(t)}{V(t)^{p'}}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Кроме того, наилучшая постоянная C в условии $\|f\|_{\Gamma^q_\delta(w)} \leqslant C\|f\|_{\Lambda^p(v)}$ *удовлетворяет соотношению* $C \approx A_6$.

(vii) $p = q = \infty$,

$$A_7 = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,\infty)} \left(\frac{w(x)}{\Delta(x)}\right) \cdot \int\limits_0^x \frac{\delta(t)\,\mathrm{d}t}{\operatorname*{ess\,sup}\limits_{0<s<t}(v(s))} < \infty.$$

Кроме того, наилучшая постоянная C *в условии* $\|f\|_{\Gamma_\delta^q(w)} \leqslant C\|f\|_{\Lambda^p(v)}$ *удовлетворяет соотношению* $C \approx A_7$.

(viii) $p = \infty,\ 0 < q < \infty$,

$$A_8 = \left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{\Delta(x)} \int\limits_0^x \frac{\delta(t)\,\mathrm{d}t}{\operatorname*{ess\,sup}\limits_{0<s<t}(v(s))}\right)^q w(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Кроме того, наилучшая постоянная C *в условии* $\|f\|_{\Gamma_\delta^q(w)} \leqslant C\|f\|_{\Lambda^p(v)}$ *удовлетворяет соотношению* $C \approx A_8$.

Теорема 1.4.2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'} = 1$, *а функции* $v \geqslant 0$ — *измеримые функции, а* V *определена следующим образом:*

$$V(t) = \int\limits_0^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

тогда

$$\left\|\mathfrak{R}^{**}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{L^{p'}(v)} \cong \left\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{L^{p'}(v)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\tilde{A} = \sup_{x>0}\left\{\left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{x}{x+t}\right)^{p'} \cdot v(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{t}{t+x}\right)^{p} \cdot \frac{v(t)}{V(t)^p}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\right\} < \infty. \quad (1.65)$$

Доказательство. Из Теоремы 1.4.1 (iii), получим

при $q = p',\ \omega = v,\ \delta = 1$

$$\left\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{\Gamma^{p'}(v)} \leqslant c.\left\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{\Lambda^{p'}(v)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\tilde{A} = \sup_{x>0}\left\{\left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{x}{x+1}\right)^{p'} \cdot v(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{t}{t+x}\right)^{p} \cdot \frac{v(t)}{V(t)^p}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\right\} < \infty.$$

Всегда

$$\left\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{\Gamma^{p'}(v)} \geqslant \left\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{\Lambda^{p'}(v)} \quad \left(\mathfrak{R}^{**}_{\varphi,\infty}[g^*] \geqslant \left(\mathfrak{R}^{*}_{\varphi,\infty}[g^*]\right)\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{\Gamma^{p'}(v)} \cong \left\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{\Lambda^{p'}(v)}.$$

При этом

$$\left\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{\Gamma^{p'}(v)} = \left(\int_0^\infty \left(\mathfrak{R}^{**}_{\varphi,\infty}[g^*]\right)^{p'} \cdot v(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} = \left\|\mathfrak{R}^{**}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{L^{p'}(v)},$$

$$\left\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{\Lambda^{p'}(v)} = \left(\int_0^\infty \left(\mathfrak{R}^{*}_{\varphi,\infty}[g^*]\right)^{p'} \cdot v(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$(0 < \mathfrak{R}_{\varphi,\infty}\downarrow, \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{R}_{\varphi,\infty} = \mathfrak{R}^{*}_{\varphi,\infty})$$

$$= \left(\int_0^\infty \left(\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right)^{p'} \cdot v(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} = \left\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{L^{p'}(v)}.$$

$$\left\|\mathfrak{R}^{**}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{L^{p'}(v)} \cong \left\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{L^{p'}(v)} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{A} < \infty. \tag{1.66}$$

□

Теорема 1.4.3. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, *а функции* u, v, w, V *и* U *определены следующим образом:*

$$U(s) = \int_0^s u(t)\,\mathrm{d}t, \quad v(t) = \frac{t^{2p'} u(t) \varphi^{p'}(t)}{U^{p'}(t)}, \quad V(t) = \int_0^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$w(t) = \frac{t^{p+p'-1} V(t) \int_t^\infty \tau^{-p'} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{V(t) + t^{p'} \int_t^\infty \tau^{-p'} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau}.$$

Кроме того, пусть существует $c \in (0,\infty)$ *такое, что* $\int_0^r \varphi(\rho)\,\mathrm{d}\rho \leqslant c\varphi(r)r$*;* $\forall r \in (0,\infty)$, *и пусть*

$$C = \sup_{r>0} \left\{ \left(\int_0^r \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_t^\infty \frac{U^p(t)}{t^{2p} u^{\frac{p}{p'}}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \right\} < \infty. \tag{1.67}$$

Тогда оптимальное ПИП для вложения $H^G_{\Lambda^{p'}(u)}(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n)$ *имеет эквивалентную норму*

$$\|f\|_{\tilde{X}_0(\mathbb{R}_+)} \cong \|f\|_{\Gamma^p(w)}. \tag{1.68}$$

Доказательство. Учитывая определение ассоциированных пространств для пространств Лоренца, мы можем представить норму оператора $\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}$,

$$\left\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{\Lambda^p(u)'} \cong \left\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\right)} = \left(\int\limits_0^\infty \left(\mathfrak{R}^{**}_{\varphi,\infty}[g^*]\right)^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Применяя результат Теоремы 1.4.2, получим

$$\left\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\right)} = \left(\int\limits_0^\infty \left(\mathfrak{R}^{**}_{\varphi,\infty}[g^*]\right)^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \left\|\mathfrak{R}^{**}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{L^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\right)} \cong \left\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{L^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\right)} =$$

$$= \left(\int\limits_0^\infty \left(\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right)^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int\limits_0^\infty \left[\int\limits_0^\infty f_\varphi(t,\tau)g^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]^{p'} \cdot \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Из определения функции f_φ мы можем представить норму оператора $\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}$ в пространстве $\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\right)$ в виде суммы:

$$\left\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\right)} =$$

$$= \left(\int\limits_0^\infty \left[\varphi(t)\cdot\int\limits_0^t g^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int\limits_t^\infty \varphi(\tau)g^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]^{p'} \cdot \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} \cong$$

$$\cong \left(\int\limits_0^\infty \left[\varphi(t)\cdot\int\limits_0^t g^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]^{p'} \cdot \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} +$$

$$+ \left(\int\limits_0^\infty \left[\int\limits_t^\infty \varphi(\tau)g^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]^{p'} \cdot \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Но у нас $\left\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{\Lambda^p(u)'} \cong \left\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\right)}$, итак

$$\left\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{\Lambda^p(u)'} \cong J_1 + J_2,$$

где

$$J_1 = \left(\int\limits_0^\infty \left[\varphi(t) \cdot \int\limits_0^t g^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]^{p'} \cdot \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$J_2 = \left(\int\limits_0^\infty \left[\int\limits_t^\infty \varphi(\tau)g^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]^{p'} \cdot \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Мы хотим оценить слагаемое J_2 слагаемым J_1. Из убывания функции g^* и получим для J_1:

$$J_1 \geqslant \left(\int\limits_0^\infty \left[\varphi(t) \cdot g^*(t) \int\limits_0^t \mathrm{d}\tau\right]^{p'} \cdot \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^\infty \left[\varphi(t) \cdot g^*(t)\right]^{p'} \cdot \frac{t^{2p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} := S.$$

$$J_2 \leqslant \alpha \cdot S,$$

где α постоянная, не зависящая от функций φ и g^* такая, что $J_2 \leqslant \alpha \cdot S$, достаточно, чтобы определённая следующим образом постоянная C была конечна:

$$C = \sup_{r>0}\left\{\left(\int\limits_0^r \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int\limits_r^\infty \frac{U^p(t)}{t^{2p}u^{\frac{p}{p'}}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\right\} < \infty.$$

Эта постоянная и есть константа C из условия Теоремы.

Здесь мы применили обобщенное неравенство Харди для функции одной переменной, приведенное в книге В. Г. Мазьи [3, Глава 1].

Пусть $0 < v$, $\omega < \infty$ почти всюду на $(0,\infty)$ — измеримые функции, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$; тогда для выполнения неравенства для любых измеримых

$f \geqslant 0$

$$\left(\int_0^\infty\left(\int_t^\infty f\,\mathrm{d}\tau\right)^q \omega(t)^q\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c\left(\int_0^\infty f(t)^p v(t)^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$$

с постоянной $c \in (0,\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$c_1 := \sup_{t>0}\left(\int_0^t \omega(\tau)^q\,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_t^\infty v(\tau)^{-p'}\,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

где $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$. Заменим здесь обозначение: вместо p ставим p', тогда вместо p' ставим p. Утверждение примет вд: пусть $1 \leqslant p' \leqslant q \leqslant \infty$, тогда для выполнения неравенства для любых измеримых $f \geqslant 0$

$$\left(\int_0^\infty\left(\int_t^\infty f\,\mathrm{d}\tau\right)^q \omega(t)^q\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c\left(\int_0^\infty f(t)^{p'} v(t)^{p'}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}}$$

с постоянной $c \in (0,\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$c_1 := \sup_{t>0}\left(\int_0^t \omega(\tau)^q\,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_t^\infty v(\tau)^{-p}\,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

В частности, при $q = p'$ имеем: тогда для выполнения неравенства для любых измеримых $f \geqslant 0$

$$\left(\int_0^\infty\left(\int_t^\infty f\,\mathrm{d}\tau\right)^{p'} \omega(t)^{p'}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant c\left(\int_0^\infty f(t)^{p'} v(t)^{p'}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} \tag{1.69}$$

с постоянной $c \in (0,\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$c_1 := \sup_{t>0}\left(\int_0^t \omega(\tau)^{p'}\,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_t^\infty v(\tau)^{-p}\,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{1.70}$$

Положим здесь

$$\omega(t) = \frac{tu(t)^{\frac{1}{p'}}}{U(t)}; \quad v(t) = \frac{t^2u(t)^{\frac{1}{p'}}}{U(t)}.$$

Тогда (1.69) примет вид

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty f\,\mathrm{d}\tau\right)^{p'} \frac{t^{p'}u(t)\,\mathrm{d}t}{U(t)^{p'}}\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant c\left(\int_0^\infty f(t)^{p'}\frac{t^{2p'}u(t)\,\mathrm{d}t}{U(t)^{p'}}\right)^{\frac{1}{p'}}, \qquad (1.71)$$

а (1.70) примет вид:

$$c_1 := \sup_{t>0}\left(\int_0^t \frac{t^{p'}u(\tau)}{U(\tau)^{p'}}\,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_t^\infty \tau^{-2p}u(\tau)^{-\frac{p}{p'}}U(\tau)^p\,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \qquad (1.72)$$

Итак: для того, чтобы выполнялось (1.71) с постоянной $c \in (0,\infty)$, не зависящей от измеримых $f \geqslant 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (1.72).

Итак, мы получили что, $J_1 \geqslant S$ и $J_2 \leqslant \alpha \cdot S$, поэтому можно писать, $J_2 \leqslant c.J_1$.

Эти оценки дают, что

$$\left\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\right)} \cong J_1 + J_2 \cong J_1,$$

$$\begin{aligned}
\left\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\right)} &\cong \left(\int_0^\infty \left[\varphi(t)\cdot\int_0^t g^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]^{p'}\cdot\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} = \\
&= \left(\int_0^\infty \left[\varphi(t)\frac{1}{t}\cdot\int_0^t g^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]^{p'}\cdot\frac{t^{2p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} = \\
&= \left(\int_0^\infty \left[\varphi(\tau)g^{**}(\tau)\right]^{p'}\cdot\frac{t^{2p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} = \\
&= \left(\int_0^\infty \left[\varphi(\tau)g^{**}(\tau)\right]^{p'}\cdot\frac{t^{2p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} = \\
&= \left(\int_0^\infty \left[g^{**}(t)\right]^{p'}\cdot\frac{t^{2p'}u(t)\varphi^{p'}(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} = \|g\|_{\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{2p'}u(t)\varphi^{p'}(t)}{U^{p'}(t)}\right)}. \qquad (1.73)
\end{aligned}$$

Формула

$$\|f\|_{\tilde{X}_0(\mathbb{R}_+)} = \sup\left\{ \int\limits_0^\infty f^* g^* \,\mathrm{d}t;\ g \in L_0\big(\mathbb{R}_+\big);\ \Big\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\Big\|_{\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)} \leqslant 1 \right\},$$

(см. [15]) дает, что норма в оптимальном ПИП $\tilde{X}_0(\mathbb{R}_+)$ является ассоциированной к норме (1.73), т. е.

$$\|f\|_{\tilde{X}_0(\mathbb{R}_+)} \cong \|f\|_{[\Gamma^{p'}(v)]'},$$

где

$$v(t) = \frac{t^{2p'} u(t) \varphi^{p'}(t)}{U^{p'}(t)}.$$

Осталось заметить, что можно описать эквивалентную норму ассоциированного пространства в следующем виде (см. [5]):

$$\|f\|_{[\Gamma^{p'}(v)]'} = \left(\int\limits_0^\infty \frac{t^{p+p'-1} f^{**p}(t) V(t) \int_t^\infty \tau^{-p'} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{V(t) + t^{p'} \int_t^\infty \tau^{-p'} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau} \right)^{\frac{1}{p}},$$

где

$$V(t) = \int\limits_0^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_0^t \frac{t^{2p'} u(\tau) \varphi^{p'}(\tau)}{U^{p'}(\tau)}\,\mathrm{d}\tau.$$

Учтем теперь обозначение

$$w(t) = \frac{t^{p+p'-1} V(t) \int_t^\infty \tau^{-p'} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{V(t) + t^{p'} \int_t^\infty \tau^{-p'} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau}.$$

Отсюда следует, что

$$\|f\|_{\Gamma^p(w)} \cong \|f\|_{\tilde{X}_0(\mathbb{R}_+)}.$$

Итак, теорема доказана. □

Замечание 1.4.1. *Условие,*

$$\int\limits_0^r \varphi(\rho)\,\mathrm{d}\rho \leqslant c\varphi(r) r$$

вытекает из условия (1.9) *и гарантирует эквивалентность*

$$\mathfrak{R}^{**}_{\varphi,\infty}[g^*] \cong \mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*],$$

так что $\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Gamma p'(v)} \cong \|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Lambda^{p'}(v)}$. *При условии на весовые функции*

$$\tilde{A} = \sup_{x>0}\left\{\left(\int_0^\infty \left(\frac{x}{x+t}\right)^{p'} \cdot v(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^\infty \left(\frac{t}{t+x}\right)^{p} \cdot \frac{v(t)}{V(t)^p}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\right\} < \infty.$$

Также получаем эквивалентность норм

$$\left\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{\Gamma^{p'}(v)} \cong \left\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{\Lambda^{p'}(v)} = \left\|\mathfrak{R}^{*}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{L^{p'}(v)} = \left\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{L^{p'}(v)}.$$

Последнее равенство опирается на соотношение

$$\mathfrak{R}^{*}_{\varphi,\infty}[g^*](t) = \mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*](t),$$

поскольку функция в правой части неотрицательна, убывающая и непрерывная, т. е. она совпадает со своей убывающей перестановкой.

Глава 2. Модулярные неравенства для операторов типа Харди–Копсона на весовых пространствах Орлича

В данной главе конкретизированы модулярные неравенства для случая, когда положительный оператор является оператором типа Харди [7]. Показано, что в этом случае модифицированный оператор является обобщенным оператором Харди в обозначениях Jim Quile Sun [8]. Это позволяет нам использовать подходы, развитые в [24; 30], а также результаты, полученные Jim Quile Sun [8] и [19], для установления явных критериев справедливости модулярных неравенств.

2.1 Определения и предварительные сведения (Вспомогательные теоремы)

Определение 2.1.1. *Функция* Φ*:* $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *называется* N*-функцией, если*
$\Phi(t) = \int\limits_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau$*; где* φ *непрерывна,* $0 < \varphi \uparrow$*;* $\varphi(0) = 0$*;* $\varphi(\infty) = \infty$*. Пусть* φ^{-1} *непрерывная справа функция, обратная к* φ*, и определим*

$$\Psi(t) = \int\limits_0^t \varphi^{-1}(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Ψ *называется дополнительной функцией для* Φ*.*

Определение 2.1.2. *а) Говорят, что* N*-функция* Φ *удовлетворяет* Δ_2 *условию (мы пишем* $\Phi \in \Delta_2$*), если существует константа* $B > 0$*, такая, что*

$$\Phi(2t) \leqslant B\Phi(t), \quad \forall t > 0. \tag{2.1}$$

б) Запишем $\Phi_1 \ll \Phi_2$ если существует константа $L_0 > 0$, такая, что неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(a_i) \leqslant L_0 \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(\sum_{i=1}^{\infty} a_i) \qquad (2.2)$$

выполняется для любой последовательности $\{a_i\}$ с $a_i \geqslant 0$.

Если $\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$ выпуклая функция , то $\Phi_1 \ll \Phi_2$.

Следующие примеры показывают, что $\Phi_1 \ll \Phi_2$ является на самом деле более слабым условием, чем выпуклость функции $\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$.

Пример 2.1.1. Существуют N-функции Φ_1 и Φ_2 такие, что $\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$ не выпуклая функция, но $\Phi_1 \ll \Phi_2$ с $L_0 = 1$.

Пусть $\Phi_1(x) = x^2$, когда $0 \leqslant x \leqslant 1$, и $\Phi_1(x) = x^4$, когда $1 \leqslant x$. Пусть $\Phi_2(x) = x^4$. $\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$ равна x^2 на интервале [0,1], и x на интервале $[1,\infty)$, и, следовательно, не является выпуклой функцией. Для проверки того, что $\Phi_1 \ll \Phi_2$, зафиксируем положительные числа $\{a_i : i \in I\}$ такие, что $a = \sum_{i \in I} a_i < \infty$, и рассмотрим два случая:

Если $a \leqslant 1$, то тогда все a_i меньше, чем 1, и тогда

$$\sum_{i \in I} \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(a_i) = \sum_{i \in I} a_i^2 \leqslant a^2 = \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(a).$$

Если $a > 1$, то тогда

$$\sum_{i \in I} \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(a_i) \leqslant \sum_{i \in I} a_i = a = \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(a).$$

Пример 2.1.2. Существуют N-функции Φ_1 и Φ_2, которые удовлетворяют условию $\Phi_1 \ll \Phi_2$, но такие, что $\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$ не эквивалентна выпуклой функции.

Предположим, что

$$0 < 2n^2 x_{n+1} < x_n < x_0 = \infty, \quad \text{для} \quad n \geqslant 1. \qquad (2.3)$$

$$m_{n+1} < m_n < m_0 < \infty, \quad \text{для} \quad n \geqslant 1. \tag{2.4}$$

и для всех положительных b и c

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(b\frac{m_{n-1}}{m_n} - c\right)\frac{x_n m_n}{n^2 x_{n+1}}\right) = \infty. \tag{2.5}$$

Положим $y_n = x_n - n^2 x_{n+1} \in (x_{n+1}, x_n)$, также положим

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n x \chi_{[x_{n+1},x_n)}(x),$$

и пусть g является единственной непрерывной функцией, которая соответствует f на каждом интервале $[x_{n+1}, y_n)$ для $n \geqslant 0$, является линейной на каждом интервале (y_n, x_n) для $n \geqslant 1$. Заметим, что f и g являются возрастающими функциями, и $f \leqslant g$. Легко заметить, что для $x \in (0, y_n)$ имеем $g(x) \leqslant m_n x$.

Если $\{a_i\}_{i\in I}$ являются положительными числами, такими, что $a = \sum_{i\in I} a_i < \infty$, тогда выберем n таким, что $x_{n+1} \leqslant a < x_n$. Так как (в соответствии с формулой (2.3)) $a < x_n \leqslant 2y_n$, ясно, что $a_i \geqslant y_n$, по крайней мере, для одного $i \in I$. Теперь

$$\sum_{i\in I} g(a_i) \leqslant \sum_{a_i<y_n} g(a_i) + g(a) \leqslant \sum_{a_i<y_n} m_n a_i + g(a) \leqslant m_n a + g(a) \leqslant 2g(a).$$

Если h является выпуклой функцией с $bh \leqslant g \leqslant ch$ для некоторых положительных b и c, тогда

$$\begin{aligned}
h(1) &\geqslant \lim_{n\to\infty}\left(\frac{h(x_n) - h(y_n)}{x_n - y_n}\right)(1 - x_n) + h(x_n) \geqslant \\
&\geqslant \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1/c)g(x_n) - (1/b)g(y_n)}{x_n - y_n}\right)(1 - x_n) + (1/c)g(x_n) = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1/c)m_{n-1}x_n - (1/b)m_n y_n}{x_n - y_n}\right) = \\
&= \frac{1}{bc}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(bm_{n-1} - cm_n)x_n}{x_n - y_n} + cm_n\right) \geqslant \\
&\geqslant \frac{1}{bc}\lim_{n\to\infty}\left(\left(b\frac{m_{n-1}}{m_n} - c\right)\frac{x_n m_n}{x_n - y_n}\right) = \infty,
\end{aligned}$$

в соответствии с формулой (2.5). Это показывает, что g не эквивалентно любой выпуклой функции.

Предположим, дополнительно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n - x_{n+1}}{(n!)^2 x_{n+1}} < \infty. \tag{2.6}$$

Определим $\Phi_1^{-1}(x)$ как единственную непрерывную функцию, которая равна 0 в точке 0, линейную на каждом интервале (x_{n+1}, x_n) с наклоном

$$m_n \prod_{k=1}^{n} \frac{m_{k-1} x_k - m_k y_k}{m_k (x_k - y_k)}, \quad n \geqslant 1,$$

и равна $2m_0(x_1 x)^{1/2} + C$ на интервале (x_1, ∞). Здесь C выбрана таким образом, чтобы обеспечить непрерывность. Гипотеза (2.6) обеспечивает, что Φ_1^{-1} является хорошо определенной, поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n+1}) m_n \prod_{k=1}^{n} \frac{m_{k-1} x_k - m_k y_k}{m_k (x_k - y_k)} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n+1}) m_n \prod_{k=1}^{n} \frac{m_{k-1}}{m_k} \frac{x_k}{k^2 x_{k+1}} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n+1}) m_n \frac{m_0}{m_n} \frac{x_1}{x_{n+1}} \frac{1}{(n!)^2} = m_0 x_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n - x_{n+1}}{(n!)^2 x_{n+1}} < \infty.$$

Φ_1^{-1} является выпуклой, поскольку величина наклона увеличивается по мере того, как интервалы(x_{n+1}, x_n) приближаются к 0. Действительно, из формулы (2.5) следует, что $\lim_{x\to 0} \Phi_1^{-1}(x)/x = \infty$. Ясно, что $\lim_{x\to\infty} \Phi_1^{-1}(x)/x = 0$. Таким образом, Φ_1 является N-функцией.

Положим $\Phi_2 = g \circ \Phi_1$, тогда $g = \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$. Φ_2 является непрерывной функцией, которая равна 0 в точке 0. Отсюда сразу следует, что $\lim_{x\to\infty} \Phi_2(x)/x = \infty$, и, поскольку $g(t) \leqslant m_0 t$ для всех t, которые достаточно близки к 0, $\lim_{x\to 0} \Phi_2(x)/x =\leqslant \lim_{x\to 0} m_0 \Phi_1(x)/x = 0$. Вычисления наклона Φ_2 на интервалах $(\Phi_1^{-1}(x_{n+1}), \Phi_1^{-1}(y_n))$ и $(\Phi_1^{-1}(y_n), \Phi_1^{-1}(x_n))$ по отдельности показывает, что она является линейной на каждом интервале

$(\Phi_1^{-1}(y_{n+1}),\Phi_1^{-1}(y_n))$ с наклоном

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{m_k(x_k - y_k)}{m_{k-1}x_k - m_k y_k}, \quad n \geqslant 1.$$

Так как наклон уменьшается по мере того, как интервалы становятся ближе к 0, функция является выпуклой. Таким образом, Φ_2 также является N-функцией.

Нетрудно проверить, что (2.3), (2.4), (2.5) и (2.6) выполняются для $m_n = 1/n!$, $n \geqslant 0$ и $x_n \prod_{k=1}^{n+1} m_k$.

Замечание 2.1.1. *В работе [10] при доказательстве Теоремы 1.7 утверждается, что: «Так как k является монотонной по x, мы можем аппроксимировать k снизу ядрами, непрерывными по x, ... Поэтому мы можем предположить, без потери общности, что k является непрерывной по x». Действительно, как показывает данный пример, может быть невозможным аппроксимировать ядро обобщенных операторов Харди снизу ядрами обобщенными операторами Харди, которые являются непрерывными по x. Можем сказать, что доказательство в [10] остается верным без предположения о непрерывности. Нужна только небольшая техническая модификация.*

Пример 2.1.3. Существует ядро обобщенного оператора Харди, которое не может быть аппроксимировано снизу ядрами обобщенных операторов Харди, которые непрерывны по x.

Положим $k(x,t) = \chi_{[1,+\infty)}(x)\chi_{[0,1)}(t)$ и вспомним Определение 1.7. Легко видеть, что k является ядром обобщенного оператора Харди с $D = 1$. Предположим, что $l(x,t)$ является ядром обобщенного оператора Харди, которое непрерывно по x и удовлетворяет условию $l \leqslant k$. Если $0 < t < 1 <$

x, то

$$l(x,t) \leqslant D\big(l(x,1) + l(1,t)\big) = D\big(l(x,1) + \lim_{\delta\to 1^-} l(\delta,t)\big) \leqslant$$
$$\leqslant D\big(k(x,1) + \lim_{\delta\to 1^-} k(\delta,t)\big) = 0.$$

Отсюда следует, что $l \equiv 0$. Таким образом, единственное ядро обобщенного оператора Харди, которое непрерывно по x и меньше k, равно 0.

Например, если $\Phi_1(t) = t^p$; $\Phi_2(t) = t^q$; $0 < p,\, q < \infty$, тогда $\Phi_1 \ll \Phi_2$ при $p \leqslant q$.

Пусть ω положительная измеримая весовая функция и Φ — N-функция. Пространство Орлича $L_\Phi(\omega)$ состоит из всех измеримых функций f (по модулю эквивалентности почти везде) с нормой

$$\|f\|_{\Phi(\omega)} = \inf\left\{\lambda > 0,\ \int\limits_0^\infty \Phi(\lambda^{-1}|f(x)|)\omega(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1\right\}. \tag{2.7}$$

Например, если $\omega \equiv 1$; $\Phi(t) \equiv t^p$, тогда $L_\Phi(\omega) = L_p$.

Мы называем $\|\cdot\|_{\Phi(\omega)}$ нормой Люксембурга.

Норма Орлича функции f определяется выражением

$$\|f\|'_{\Psi(\omega)} = \sup\left\{\int\limits_0^\infty |fg|\omega\,\mathrm{d}x\ :\ g \in L_0^+(\mathbb{R}_+);\ \int\limits_0^\infty \Psi(|g|)\omega\,\mathrm{d}x \leqslant 1\right\}, \tag{2.8}$$

где Ψ — дополнительная функция к Φ.

Замечание 2.1.2. (см. [1]). *$L_\Phi(\omega)$ — банахово пространство, и нормы Люксембурга и Орлича эквиваленты. Именно,*

$$\|f\|_{\Phi(\omega)} \leqslant \|f\|'_{\Psi(\omega)} \leqslant 2\|f\|_{\Phi(\omega)}. \tag{2.9}$$

Определение 2.1.3. *Обобщенные операторы Харди — это операторы вида*

$$\mathfrak{R}f(x) = \int\limits_0^x k(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \mathfrak{R}^*g(t) = \int\limits_t^{+\infty} k(x,t)g(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.10}$$

где

а) $k : \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < x < +\infty\} \to [0, +\infty)$;

б) $k(x,t) \geqslant 0$ *не убывает по* x*, не возрастает по* t;

в) $k(x,y) \leqslant D\big(k(x,t) + k(t,y)\big)$*, всякий раз, когда* $0 \leqslant y \leqslant t < x < +\infty$ *для некоторой константы* D.

Теорема 2.1.1. (см. [8]). *Пусть* Φ_1, Φ_2 — N*-функции,* $\Phi_1 \ll \Phi_2$, Ψ_1, Ψ_2 — *дополнительные функции для* Φ_1 *и* Φ_2 *(см. Определение 2.1.2) и* $\mathfrak{R}$ — *обобщенный оператор Харди, определенный формулой* (2.10). *Пусть* a, b, v *и* ω — *положительные весовые функции. Тогда существует константа* $A > 0$ *такая, что неравенство*

$$\Phi_2^{-1}\left(\int_0^{+\infty} \Phi_2(a\mathfrak{R}f)\omega\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \Phi_1^{-1}\left(\int_0^{+\infty} \Phi_1(Afb)v\,\mathrm{d}x\right) \tag{2.11}$$

выполняется для всех неотрицательных измеримых функций f *тогда и только тогда, когда существует постоянная* $C > 0$ *такая, что неравенства*

$$\Phi_2^{-1}\left(\int_r^{+\infty} \Phi_2\left(\frac{a(x)}{C}\left\|\frac{k(r;\cdot)\chi_{(0,r)}(.)}{\varepsilon v b}\right\|_{\Psi_1(\varepsilon v)}\right)\omega(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{2.12}$$

и

$$\Phi_2^{-1}\left(\int_r^{+\infty} \Phi_2\left(\frac{a(x)}{C}\left\|\frac{\chi_{(0,r)}(.)}{\varepsilon v b}\right\|_{\Psi_1(\varepsilon v)} k(x;r)\right)\omega(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{2.13}$$

выполняются для всех ε, $r > 0$.

Теорема 2.1.2. (см. [8]): *Пусть* Φ_1, Φ_2 — N*-функции,* $\Phi_1 \ll \Phi_2$*, и* $\mathfrak{R}^*$ *является обобщенным оператором типа Харди, определенным формулой* (2.10). *Тогда существует такая постоянная* $A > 0$*, что неравенство*

$$\Phi_2^{-1}\left(\int_0^{+\infty} \Phi_2(a\mathfrak{R}^* f)\omega\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \Phi_1^{-1}\left(\int_0^{+\infty} \Phi_1(Abf)v\,\mathrm{d}t\right) \tag{2.14}$$

выполняется для всех неотрицательных измеримых функций f тогда и только тогда, когда существует постоянная C такая, что неравенства

$$\Phi_2^{-1}\left(\int\limits_0^r \Phi_2\left(\frac{a(t)}{C}\left\|\frac{k(\cdot;r)\chi_{(r,+\infty)}(.)}{\varepsilon v b}\right\|_{\Psi_1(\varepsilon v)}\right)\omega(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad (2.15)$$

и

$$\Phi_2^{-1}\left(\int\limits_0^r \Phi_2\left(\frac{a(t)}{C}\left\|\frac{\chi_{(r,+\infty)}(.)}{\varepsilon v b}\right\|_{\Psi_1(\varepsilon v)} k(r;t)\right)\omega(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad (2.16)$$

выполняются для всех ε, $r > 0$.

2.2 Модулярные неравенства для операторов типа Харди–Копсона на функциях в пространстве Орлича

Мы называем оператор

$$Tf(x) = \int\limits_0^{+\infty} k(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

монотонным на $(0, +\infty)$, если $k(x,t)$ является неотрицательным и либо невозрастающим, либо неубывающим по x.

Свойства монотонных операторов на банаховом функциональном пространстве были исследованы Jim Quile Sun [8].

Имеем следующую характеризацию весовых L_Φ-неравенств слабого типа для монотонного оператора T:

Теорема 2.2.1. (см. [8]). *Пусть T — монотонный оператор на $(0,+\infty)$ с ядром k. Пусть Φ_1, Φ_2 — N-функцииΨ_1, Ψ_2 — дополнительные функции для Φ_1 и Φ_2, a, b, v и w неотрицательные весовые функции. Тогда существует* *константа A такая, что неравенство*

$$\Phi_2^{-1}\Bigg(\int\limits_{\{|Tf|>\lambda\}} \Phi_2\big(\lambda a(x)\big)w(x)\,\mathrm{d}x\Bigg) \leqslant \Phi_1^{-1}\Bigg(\int\limits_0^{+\infty} \Phi_1\big(Ab(x)f(x)\big)v(x)\,\mathrm{d}x\Bigg) \tag{2.17}$$

выполняется для всех $\lambda > 0$ и для всех неотрицательных, измеримых функций f тогда и только тогда, когда константа C, такая, что неравенство

$$\Phi_2^{-1}\Bigg(\int\limits_{I_r} \Phi_2\bigg(\frac{a}{C}\bigg\|\frac{k(r,.)}{\varepsilon bv}\bigg\|_{\Psi_1(\varepsilon v)}\bigg)w(x)\,\mathrm{d}x\Bigg) \leqslant \Phi_1^{-1}\bigg(\frac{1}{\varepsilon}\bigg) \tag{2.18}$$

выполняется для любых r, $\varepsilon > 0$. Здесь $I_r = (0,r)$, если $k(x,t)$ невозрастающая по x, и $I_r = (r,+\infty)$, если $k(x,t)$ неубывающая по x.

Более того, для наилучших констант выше, имеем $C \leqslant A \leqslant 2C$.

Напомним, что

$$K_E^{\varphi} = \Bigg\{h(x) = \int\limits_0^{\infty} f_{\varphi}(x;\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau; \quad x \in (0,\infty)\ :\ g \in \tilde{E}_0(0,\infty)\Bigg\};$$

см. (1.29),

$$f_{\varphi}(x;\tau) = \begin{cases} \varphi(x), & 0 < \tau \leqslant x, \\ \varphi(\tau), & \tau > x; \end{cases}$$

$$0 < \varphi \downarrow, \qquad \int\limits_0^x \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leqslant c\varphi(x)x.$$

Мы рассматриваем оператор

$$\mathcal{F}[g] \equiv h(x) = \int\limits_0^{\infty} f_{\varphi}(x;\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{2.19}$$

$$\mathcal{F}[g] = \varphi(x)\int\limits_0^x g(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int\limits_x^{\infty} \varphi(\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \mathcal{F}_1[g] + \mathcal{F}_2[g]. \tag{2.20}$$

Это означает, что $\mathcal{F}$ является суммой двух операторов типа Харди.

Теорема 2.2.2. *Пусть* Φ_1, Φ_2 — N*-функции,* $\Phi_1 \ll \Phi_2$, Ψ_1, Ψ_2 — *дополнительные функции для* Φ_1 *и* Φ_2, a, b, v, ω — *положительные весовые функции,* $\mathcal{F}$ *определяется формулой* (2.19). *Тогда существует такая постоянная* $A > 0$, *что неравенство*

$$\Phi_2^{-1}\left(\int\limits_0^{+\infty} \Phi_2\big(a(x)\mathcal{F}g(x)\big)\,\omega(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \Phi_1^{-1}\left(\int\limits_0^{+\infty} \Phi_1\big(Ab(x)g(x)\big)\,v(x)\,\mathrm{d}x\right) \quad (2.21)$$

выполняется для всех неотрицательных измеримых функций g *тогда и только тогда, когда существует постоянная* C *такая, что неравенство*

$$\Phi_2^{-1}\left(\int\limits_0^{+\infty} \Phi_2\left(\frac{a(x)}{C}.\frac{f_\varphi(x;r)}{\varphi(r)}\left\|\frac{f_\varphi(\cdot;r)}{\varepsilon v b}\right\|_{\Psi_1(\varepsilon v)}\right)\omega(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (2.22)$$

выполняется для всех ε, $r > 0$.

Доказательство. **Необходимость** условия (2.22).

Зафиксируем r, $\varepsilon > 0$. Поскольку норма Орлича не превосходит нормы Люксембурга (см. Замечание 2.1.2), мы имеем при $f \geqslant 0$

$$\|f\|_{\Psi_1(\varepsilon v)} \leqslant \|f\|'_{\Phi_1(\varepsilon v)} = \sup\left\{\int\limits_0^{+\infty} f h \varepsilon v\,\mathrm{d}x \,:\, h \geqslant 0; \int\limits_0^{+\infty} \Phi_1(h)\varepsilon v\,\mathrm{d}x \leqslant 1\right\},$$

$$\left\|\frac{f_\varphi(\cdot;r)}{\varepsilon b v}\right\|_{\Psi_1(\varepsilon v)} \leqslant \sup_{\int_0^{+\infty} \Phi_1(Ag(\tau)b(\tau))\varepsilon v(\tau)d\tau \leqslant 1} \int\limits_0^{+\infty} \frac{f_\varphi(\tau;r)}{\varepsilon b(\tau)v(\tau)} Ag(\tau)b(\tau)\varepsilon v(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \sup_{\int_0^{+\infty} \Phi_1(Ag(\tau)b(\tau))\varepsilon v(\tau)d\tau \leqslant 1} A\int\limits_0^{+\infty} f_\varphi(\tau;r)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Итак, для любого $\eta < 1$ можно выбрать неотрицательную функцию g такую, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \Phi_1(Ag(\tau)b(\tau))\varepsilon v(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leqslant 1$$

и

$$A\int\limits_0^{+\infty} f_\varphi(\tau;r)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \geqslant \eta\left\|\frac{f_\varphi(\cdot;r)}{\varepsilon bv}\right\|_{\Psi_1(\varepsilon v)}.$$

Таким образом, мы имеем

$$\Phi_2^{-1}\left(\int\limits_0^{+\infty}\Phi_2\left(\eta\frac{a(x)}{A}\frac{f_\varphi(x;r)}{\varphi(r)}\left\|\frac{f_\varphi(\cdot;r)}{\varepsilon bv}\right\|_{\Psi_1(\varepsilon v)}\right)\omega(x)\,\mathrm{d}x\right)\leqslant$$
$$\leqslant\Phi_2^{-1}\left(\int\limits_0^{+\infty}\Phi_2\left(a(x)\int\limits_0^{+\infty}f_\varphi(\tau;r)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau.\frac{f_\varphi(x;r)}{\varphi(r)}\right)\omega(x)\,\mathrm{d}x\right).\quad (2.23)$$

$$\frac{f_\varphi(x;r).f_\varphi(\tau;r)}{\varphi(r)}\leqslant f_\varphi(\tau;x).$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{Действительно,}\\ \text{если } 0<r<\tau<x,\ \text{тогда } \dfrac{f_\varphi(x,r)\cdot f_\varphi(\tau,r)}{\varphi(r)}=\dfrac{\varphi(x)\cdot\varphi(\tau)}{\varphi(r)}\leqslant\varphi(x)=f_\varphi(\tau,x),\\ \text{если } 0<\tau<r<x,\ \text{тогда } \dfrac{f_\varphi(x,r)\cdot f_\varphi(\tau,r)}{\varphi(r)}=\dfrac{\varphi(x)\cdot\varphi(r)}{\varphi(r)}=\varphi(x)=f_\varphi(\tau,x)\end{array}\right).$$

Для любых r, τ, $t>0$ правая часть (2.23) не превосходит

$$\Phi_2^{-1}\left(\int\limits_0^{+\infty}\Phi_2(a(x)\mathcal{F}g(x))\omega(x)dx\right).$$

Гипотеза (2.21) показывает, что последнее выражение не больше, чем

$$\Phi_1^{-1}\left(\int\limits_0^{+\infty}\Phi_1(Ag(x)b(x))v(x)\,\mathrm{d}x\right)\leqslant\Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Необходимость условия (2.22) доказана с постоянной $C=\frac{A}{\eta}$.

Достаточность условия (2.22).

Поскольку, согласно (2.20)

$$\mathcal{F}[g](x)=\int\limits_0^{\infty}f_\varphi(x;\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\varphi(x)\int\limits_0^{x}g(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\int\limits_x^{\infty}\varphi(\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\mathcal{F}_1[g]+\mathcal{F}_2[g],$$

нам нужно только доказать, что существует такая постоянная $A > 0$, что неравенства

$$\Phi_2^{-1}\left(\int_0^{+\infty}\Phi_2(a(x)\mathcal{F}_i g(x))\omega(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \Phi_1^{-1}\left(\int_0^{+\infty}\Phi_1(Ag(x)b(x))v(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

выполняются для всех неотрицательных измеримых функций g, $i = 1{,}2$.

Для $\mathcal{F}_1$, применим теорему 2.1.1 с $k \equiv 1$, и заменой $a(x)$ на $a(x)\cdot\varphi(x)$. Когда $k \equiv 1$, достаточно показать, что существует постоянная C такая, что неравенство

$$\Phi_2^{-1}\left(\int_r^{+\infty}\Phi_2\left(\frac{a(x)\varphi(x)}{C}\left\|\frac{\chi_{(0,r)}}{\varepsilon bv}\right\|_{\Psi_1(\varepsilon v)}\right)\omega(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

выполняется для любых ε, $r > 0$. Для этого зафиксируем ε, $r > 0$, и заметим, что

$$1 = \frac{f_\varphi(\tau; r)}{\varphi(r)}$$

и

$$\varphi(x) = f_\varphi(x; r)$$

всякий раз, когда $0 \leqslant \tau \leqslant r \leqslant x < +\infty$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\Phi_2^{-1}\left(\int_r^{+\infty}\Phi_2\left(\frac{a(x)}{C}\varphi(x)\left\|\frac{\chi_{(0,r)}}{\varepsilon bv}\right\|_{\Psi_1(\varepsilon v)}\right)\omega(x)\,\mathrm{d}x\right)\\
&\quad= \Phi_2^{-1}\left(\int_r^{+\infty}\Phi_2\left(\frac{a(x)}{C}\cdot f_\varphi(x; r)\left\|\frac{\chi_{(0,r)}(.)f_\varphi(\cdot; r)}{\varepsilon bv\cdot\varphi(r)}\right\|_{\Psi_1(\varepsilon v)}\right)\omega(x)\,\mathrm{d}x\right)\\
&\qquad\leqslant \Phi_2^{-1}\left(\int_0^{+\infty}\Phi_2\left(\frac{a(x)}{C}\cdot\frac{f_\varphi(x; r)}{\varphi(r)}\left\|\frac{\chi_{(0,r)}(.)f_\varphi(\cdot; r)}{\varepsilon bv}\right\|_{\Psi_1(\varepsilon v)}\right)\omega(x)\,\mathrm{d}x\right).
\end{aligned}$$

Из условия (2.22) теоремы следует, что правая часть указанного неравенства доминирует $\Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, как и требуется. Для $\mathcal{F}_2$ применим теорему 2.1.2 с $k \equiv 1$ и заменой $b(\tau)$ на $b(\tau)/\varphi(\tau)$ в функции $g(\tau)\cdot\varphi(\tau)$ по условиям теоремы. При $k \equiv 1$ достаточно показать, что существует постоянная $C > 0$ такая, что неравенство

$$\Phi_2^{-1}\left(\int_0^r \Phi_2\left(\frac{a(x)}{C}\left\|\frac{\chi_{(r,+\infty)}\cdot\varphi}{\varepsilon b v}\right\|_{\Psi_1(\varepsilon v)}\right)\omega(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

выполняется для любых $\varepsilon, r > 0$. Заметим, что если $0 \leqslant x \leqslant r \leqslant \tau < +\infty$, то

$$\frac{f_\varphi(x;r)\cdot f_\varphi(\tau;r)}{\varphi(r)} = \varphi(\tau),$$

и поступаем так же, как и для $\mathcal{F}_1$, чтобы вывести требуемое неравенство из условия (2.22) теоремы. Детали опущены. Это завершает доказательство достаточности. □

2.3 Применение для весовых пространств Лебега

Применим теорему 2.2.2 к случаю весовых пространств Лебега. Пусть $1 \leqslant p, q < \infty$

$$\Phi_1(t) = t^p; \quad \Phi_2(t) = t^q; \quad \Psi_1 = t^{p'}; \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1;$$

функции a, b, v, ω такие, как в теореме 2.2.2. Тогда

$$\Phi_1^{-1}(t) = t^{\frac{1}{p}}; \quad \Phi_2^{-1}(t) = t^{\frac{1}{q}};$$

$$\Phi_1 \ll \Phi_2 \Leftrightarrow p \leqslant q.$$

Применение теоремы 2.2.2 дает следующий результат.

Пусть $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$. Тогда существует такая постоянная $A > 0$, что неравенство

$$\left(\int_0^{+\infty} a^q(x)\big(\mathcal{F}g\big)^q(x)\omega(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant A\left(\int_0^{+\infty}\big(b^p(x)g^p(x)\big)v(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (2.24)$$

выполняется для всех неотрицательных измеримых функций g тогда и только тогда, когда существует постоянная $C > 0$ такая, что неравенство

$$\left(\int_0^{+\infty} a(x)^q f_\varphi(x;r)^q \omega(x)\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} \left\| \frac{f_\varphi(\cdot;r)}{vb} \right\|^q_{L_{p'}(v)} \leqslant C_1 \varphi(r), \tag{2.25}$$

выполняется для всех $r > 0$,

с той же постоянной $C_1 = C_1(C,\varepsilon) \in \mathbb{R}_+$.

Тогда, согласно теореме 2.2.2 и работе [7], неравенство (2.24) для оператора Харди-Копсона $\mathcal{F}$ определяется формулой (2.19) при $p \leqslant q$ эквивалентно совокупности условий (2.25), где $C_1 = C_1(C,\varepsilon) \in \mathbb{R}_+$.

Глава 3. Модулярные неравенства для операторов типа Харди–Копсона на монотонных функциях в пространстве Орлича

Мы рассматриваем модулярные неравенства для операторов типа Харди на конусе Ω положительных убывающих функций из весовых пространств Орлича. Воспользуемся общей теоремой (доказана в [9]) и результатами [7] о редукции модулярных неравенств для положительно однородных операторов на конус Ω, что позволяет перейти к модулярным неравенствам для модифицированных операторов на конусе всех положительных функций из пространства Орлича. Она основана на теореме двойственности, описывающей ассоциированную норму для конуса Ω. Мы следуем, в основном, обозначениям, использованным в книге [1, разд. 8, Глава 4] Беннета и Шарпли и в работе [19]. В данной главе конкретизируются модулярные неравенства для случая, когда положительный оператор является оператором типа Харди. Показано, что в этом случае модифицированный оператор является обобщенным оператором Харди в нотации Jim Quile Sun [8]. Это позволяет использовать подходы, развитые в [7; 20—23],также результаты, полученные Jim Quile Sun [8], чтобы установить явные критерии справедливости модулярных неравенств на конусе положительных убывающих функций из весового пространства Орлича.

3.1 Определения и предварительные сведения

Мы используем обозначения и базовые термины теории весовых пространств Орлича, введенные в разделе 2.1.

Замечание 3.1.1. *$L_{\Phi,v}$ банахово пространство, и нормы Люксембурга и Орлича эквивалентны. Именно*

$$\|f\|_{\Phi,v} \leqslant \|f\|'_{\Psi,v} \leqslant 2\|f\|_{\Phi,v}.$$

Мы предполагаем, что $M(\mathbb{R}_+)$ — множество измеримых по Лебегу почти всюду конечных функций, M_+ — конус почти всюду положительных функций из $M = M(\mathbb{R}_+)$;

$$M_+ = \left\{ f \in M(\mathbb{R}_+) : \ f > 0 \right\}.$$

Рассмотрим конус положительных убывающих функций из пространства Орлича:

$$\Omega = \left\{ f \in L_{\Phi,v} : \ 0 \leqslant f \downarrow \right\}. \tag{3.1}$$

Для $g \in M_+$, введем следующую ассоциированную норму на конусе:

$$\|g\|'_{\Omega} = \sup \left\{ \int_0^\infty f g \, \mathrm{d}t : \ f \in \Omega; \ \|f\|_{\Phi,v} \leqslant 1 \right\}. \tag{3.2}$$

Сформулируем результат, обобщающий некоторые предыдущие результаты работ [10], [24—27].

Предложение 3.1.1. ([24]). *Пусть Φ, Ψ — дополнительные N-функции, N-функция Φ удовлетворяет условию Δ_2, пусть $v \in M_+$ и пусть*

$$0 < V(t) := \int_0^t v \, \mathrm{d}\tau < \infty, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad V(+\infty) = +\infty. \tag{3.3}$$

Для фиксированного числа $0 < a < 1$ справедлива следующая двусторонняя оценка:

$$\|g\|'_{\Omega} \cong \|\mathfrak{R}_a(g)\|_{\Psi,v} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_0^\infty \Psi\big(\lambda^{-1} |\mathfrak{R}_a(g;t)|\big) v(t) \, \mathrm{d}t \leqslant 1 \right\}, \tag{3.4}$$

где

$$\mathfrak{R}_a(g;t) := V(t)^{-1}\int\limits_{\delta_a(t)}^{t} g(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad \delta_a(t) := V^{-1}\big(aV(t)\big), \quad t\in\mathbb{R}_+. \qquad (3.5)$$

В следующих рассмотрениях мы будем использовать формулу сопряженного оператора:

$$\mathfrak{R}_a^*(f;\tau) = \int\limits_{\tau}^{\delta_{a^{-1}}(t)} \frac{f(t)}{V(t)}\,\mathrm{d}t, \quad \tau\in\mathbb{R}_+. \qquad (3.6)$$

Отметим, что при $a=0$

$$\mathfrak{R}_0^*(f;\tau) = \int\limits_{\tau}^{\infty} \frac{f(t)}{V(t)}\,\mathrm{d}t, \quad \tau\in\mathbb{R}_+. \qquad (3.7)$$

Сформулируем основной результат этого раздела, позволяющий свести модулярные неравенства на конусе Ω к модулярным неравенствам для модифицированных операторов на конусе M_+.

Предложение 3.1.2. ([24]). *Пусть T и T^* — положительно однородные операторы, отображающие M_+ в M_+, являющиеся сопряженными, т. е.*

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} gTf\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{\mathbb{R}_+} fT^*g\,\mathrm{d}\tau, \quad f,g\in M_+.$$

Пусть Φ_1, Φ_2 — N-функции, u, v, $w\in M_+$, и пусть выполнено условие (3.3). *Пусть число $a\in(0,1)$ и пусть оператор $\mathfrak{R}_a$ задается формулой* (3.5). *Тогда следующие неравенства эквивалентны:*

$$\exists\, c_1\in\mathbb{R}_+ : \ \Phi_2^{-1}\left\{\int_{\mathbb{R}_+}\Phi_2(wTf)u\,\mathrm{d}t\right\} \leqslant \Phi_1^{-1}\left\{\int_{\mathbb{R}_+}\Phi_1(c_1f)v\,\mathrm{d}t\right\}, \quad f\in\Omega; \qquad (3.8)$$

$$\exists\, c_3\in\mathbb{R}_+ : \ \Phi_2^{-1}\left\{\int_{\mathbb{R}_+}\Phi_2\big(wT\mathfrak{R}_a^*(vf)\big)u\,\mathrm{d}t\right\} \leqslant \Phi_1^{-1}\left\{\int_{\mathbb{R}_+}\Phi_1(c_3f)v\,\mathrm{d}t\right\}, \quad f\in M_+. \qquad (3.9)$$

3.2 Области применения для операторов типа Харди–Копсона

Сформулируем основной результат этого раздела, позволяющий свести модулярные неравенства для операторов на конусе Ω к модулярным неравенствам для модифицированных операторов на конусе M_+ [7].

В этом разделе мы применяем общие результаты [7; 11] в случае оператора Харди

$$T(f;t) = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.10}$$

Мы сохраняем обозначения главы 2, раздела 1. Как в работе [7], считаем, что V удовлетворяет условиям (3.3) и при $b \in \mathbb{R}_+$

$$\delta_b(t) := V^{-1}\big(bV(t)\big), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.11}$$

Отметим, что $\delta_b(t)$ возрастает, $\delta_b(+0) = 0$, $\delta_b(+\infty) = \infty$ и обратная функция вычисляется по формуле

$$\delta_b^{-1}(t) = \delta_{b^{-1}}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.12}$$

Считаем, что при $a \in (0,1)$

$$\forall m \in N_0 : \quad V(t)^{-(m+1)}\big(t - \delta_a(t)\big)\downarrow, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.13}$$

При $\rho \in \mathbb{R}_+$ обозначим

$$k_1(t,\rho) = \frac{a^{m+1}}{V(\rho)^{m+1}} \begin{cases} t - \rho, & \rho < t \leqslant \delta_{a^{-1}}(\rho), \\ \delta_{a^{-1}}(\rho) - \rho, & t > \delta_{a^{-1}}(\rho), \end{cases} \tag{3.14}$$

$$k_2(\rho,y) = \frac{a}{V(y)} \begin{cases} \delta_{a^{-1}}(y) - y, & 0 < y \leqslant \delta_a(\rho), \\ \rho - y, & \delta_a(\rho) < y < \rho, \end{cases} \tag{3.15}$$

и

$$\alpha(\lambda,\rho) = \Phi_1 \circ \Phi_2^{-1} \left\{ \int_{\rho}^{\infty} \Phi_2\big(\lambda w(t)\big) u(t)\,\mathrm{d}t \right\}, \tag{3.16}$$

$$\beta(\lambda,\rho) = \Phi_1 \circ \Phi_2^{-1} \left\{ \int_{\rho}^{\infty} \Phi_2\big(\lambda w(t) k_1(t,\rho)\big) u(t)\,\mathrm{d}t \right\}. \tag{3.17}$$

Теорема 3.2.1. ([7; 11]). *В условиях предложения 3.1.2 считаем, что T — оператор Харди (3.10), Ψ_1, Ψ_2 — дополнительные N-функции для N-функций Φ_1, Φ_2 соответственно; $\Phi_1 \ll \Phi_2$ и выполнено условие (3.13). Тогда неравенство (3.9) эквивалентно также совокупности двух условий: для всех λ, $\rho \in \mathbb{R}_+$*

$$\int_0^{\rho} \Psi_1\left(\frac{\alpha(\lambda,\rho) k_2(\rho,y)}{C\lambda}\right) v(y)\,\mathrm{d}y \leqslant a\alpha(\lambda,\rho) < \infty, \tag{3.18}$$

$$\int_0^{\rho} \Psi_1\left(\frac{\beta(\lambda,\rho) V^m(y)}{C\lambda a^m}\right) v(y)\,\mathrm{d}y \leqslant a\beta(\lambda,\rho) < \infty. \tag{3.19}$$

Здесь $C = C(C_0,c_2,a,m) \in \mathbb{R}_+$, где C_0 — постоянная из условия $\Phi_1 \ll \Phi_2$, c_2, m — постоянные из (3.9) и (3.13), соответственно.

Доказательство. 1. Цель первого шага — сведение оценки (3.9) к оценке для обобщенного оператора Харди в терминологии Блума и Кермана [31]. Для оператора Харди (3.10) имеем, используя (3.6) и замену порядка интегрирования,

$$T\mathfrak{R}_a^*(vf;t) = \int_0^t \left(\int_{\tau}^{\delta_{a^{-1}}(\tau)} \frac{f(\xi) v(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{V(\xi)} \right) \mathrm{d}\tau = \int_0^{\delta_{a^{-1}}(t)} k(t,\xi) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{3.20}$$

где

$$k(t,\xi) = \frac{v(\xi)}{V(\xi)} \begin{cases} \xi - \delta_a(\xi), & 0 < \xi \leqslant t, \\ t - \delta_a(\xi), & t < \xi <\leqslant \delta_{a^{-1}}(t). \end{cases} \tag{3.21}$$

Подставляя в (3.9), получим, что (3.9) эквивалентно (3.22), где (3.22) имеет вид

$$\Phi_2^{-1}\left\{\int_{\mathbb{R}_+}\Phi_2\left(w(t)\int\limits_0^{\delta_{a^{-1}}(\tau)}k(t,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)u(t)\,\mathrm{d}t\right\}\leqslant\Phi_1^{-1}\left\{\int_{\mathbb{R}_+}\Phi_1(c_2f)v\,\mathrm{d}t\right\}. \tag{3.22}$$

В интеграле слева в (3.22) делаем замену $\tau=\delta_{a^{-1}}(t)$, т. е. $t=\delta_a(\tau)$. Введя обозначения

$$\tilde{w}(\tau)=w\big(\delta_a(\tau)\big),\quad \tilde{k}(\tau,\xi)=k\big(\delta_a(\tau),\xi\big),\quad \tilde{u}(\tau)=u\big(\delta_a(\tau)\big)\delta_a'(\tau), \tag{3.23}$$

получим, что (3.9) эквивалентно (3.24), где (3.24) имеет вид

$$\Phi_2^{-1}\left\{\int_{\mathbb{R}_+}\Phi_2\left(\tilde{w}(\tau)\int\limits_0^{\tau}\tilde{k}(\tau,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)\tilde{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\Phi_1^{-1}\left\{\int_{\mathbb{R}_+}\Phi_1(c_2f)v\,\mathrm{d}t\right\}. \tag{3.24}$$

При этом согласно (3.21) и (3.23)

$$\tilde{k}(\tau,\xi)=\frac{v(\xi)}{V(\xi)}\begin{cases}\xi-\delta_a(\xi), & 0<\xi\leqslant\delta_a(\tau),\\ \delta_a(\tau)-\delta_a(\xi), & \delta_a(\tau)<\xi<\leqslant\tau.\end{cases}$$

Далее, обозначим

$$k_0(\tau,\xi)=\frac{1}{V(\xi)^{(m+1)}}\begin{cases}\xi-\delta_a(\xi), & 0<\xi\leqslant\delta_a(\tau),\\ \delta_a(\tau)-\delta_a(\xi), & \delta_a(\tau)<\xi<\leqslant\tau;\end{cases} \tag{3.25}$$

$$g(\xi)=v(\xi)V(\xi)^mf(\xi),\quad \sigma(t)=v(t)^{-1}V(t)^{-m}, \tag{3.26}$$

и перепишем (3.24) в виде

$$\Phi_2^{-1}\left\{\int_{\mathbb{R}_+}\Phi_2\left(\tilde{w}(\tau)\int\limits_0^{\tau}k_0(\tau,\xi)g(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)\tilde{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\Phi_1^{-1}\left\{\int_{\mathbb{R}_+}\Phi_1(c_2\sigma g)v\,\mathrm{d}t\right\}. \tag{3.27}$$

В итоге, введя оператор

$$T_0(g;\tau) = \int\limits_0^\tau k_0(\tau,\xi)g(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \quad \tau \in \mathbb{R}_+, \tag{3.28}$$

имеем эквивалентность (3.9) и (3.29), где (3.29) имеет вид

$$\Phi_2^{-1}\left\{\int_{\mathbb{R}_+} \Phi_2\big(\tilde{w}(\tau)T_0(g;\tau)\big)\tilde{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} \leqslant \Phi_1^{-1}\left\{\int_{\mathbb{R}_+} \Phi_1(c_2\sigma g)v\,\mathrm{d}t\right\}. \tag{3.29}$$

Далее, определение (3.25) и условие (3.13) показывают, что ядро $k_0(\tau,\xi)$ не возрастает по $\xi \in (0,\tau]$, не убывает по $\tau \in [\xi,\infty)$, причем $k_0(\tau,\xi) = \xi - \delta_a(\xi)$ при $\tau \geqslant \delta_{a^{-1}}(\xi)$. Покажем, что ядро удовлетворяет еще неравенству треугольника:

$$k_0(\tau,\xi) \leqslant D\big(k_0(\tau,z) + k_0(z,\xi)\big), \quad \xi < \xi \leqslant \tau, \tag{3.30}$$

где $D = a^{-(m+1)}$. Для этого рассмотрим возможные случаи.

1) Пусть $0 < \xi \leqslant \delta_a(z)$. Тогда $z \leqslant \tau$ влечет еще $0 < \xi \leqslant \delta_a(\tau)$ и

$$k_0(\tau,\xi) = k_0(z,\xi) = V(\xi)^{-(m+1)}\big(\xi - \delta_a(\xi)\big),$$

так что (3.30) выполнено с любым $D \geqslant 1$.

2) Пусть теперь $z \leqslant \delta_a(\tau)$, $\delta_a(z) \leqslant \xi < z$. Тогда

$$\begin{aligned}
\xi \leqslant \delta_a(\tau) \quad &\Longrightarrow \quad k_0(\tau,\xi) = V(\xi)^{-(m+1)}\big(\xi - \delta_a(\xi)\big),\\
z \leqslant \delta_a(\tau) \quad &\Longrightarrow \quad k_0(\tau,z) = V(z)^{-(m+1)}\big(z - \delta_a(z)\big),\\
\delta_a(z) \leqslant \xi < z \quad &\Longrightarrow \quad k_0(z,\xi) = V(\xi)^{-(m+1)}\big(\delta_a(z) - \delta_a(\xi)\big).
\end{aligned}$$

Для выполнения (3.30) нужно, чтобы

$$\frac{\xi - \delta_a(\xi)}{V(\xi)^{m+1}} \leqslant D\left[\frac{z - \delta_a(\xi)}{V(z)^{m+1}} + \frac{\delta_a(z) - \delta_a(\xi)}{V(\xi)^{m+1}}\right]. \tag{3.31}$$

Отметим, что

$$\delta_a(z) \leqslant \xi < z \quad \Rightarrow \quad aV(z) \leqslant V(\xi) \leqslant V(z). \tag{3.32}$$

так что, (3.31) будет следовать из неравенства

$$\frac{\xi-\delta_a(\xi)}{a^{m+1}V(z)^{m+1}} \leqslant D\left[\frac{z-\delta_a(z)}{V(z)^{m+1}}+\frac{\delta_a(z)-\delta_a(\xi)}{V(z)^{m+1}}\right] = D\frac{z-\delta_a(\xi)}{V(z)^{m+1}}.$$

Это неравенство при $\xi < z$ верно, если взять $D = a^{-(m+1)}$. Итак, (3.30), а с ним и (3.31), выполнены при $D = a^{-(m+1)}$.

3) Остался случай $\delta_a(\tau) < z < \tau$, $\delta_a(z) \leqslant \xi < z$.

Он разбивается на два:

3а) $\delta_a(\tau) < z < \tau$, $\delta_a(z) \leqslant \xi \leqslant \delta_a(\tau)$;

3б) $\delta_a(\tau) < z < \tau$, $\delta_a(\tau) < \xi < z$.

Разберем случай 3а). Имеем

$$\begin{aligned}
\xi \leqslant \delta_a(\tau) \quad &\Longrightarrow \quad k_0(\tau,\xi) = V(\xi)^{-(m+1)}\big(\xi-\delta_a(\xi)\big),\\
\delta_a(\tau) < z < \tau \quad &\Longrightarrow \quad k_0(\tau,z) = V(z)^{-(m+1)}\big(\delta_a(\tau)-\delta_a(z)\big),\\
\delta_a(z) \leqslant \xi < z \quad &\Longrightarrow \quad k_0(z,\xi) = V(\xi)^{-(m+1)}\big(\delta_a(z)-\delta_a(\xi)\big).
\end{aligned}$$

Таким образом, для выполнения (3.30) нужно, чтобы

$$\frac{\xi-\delta_a(\xi)}{V(\xi)^{m+1}} \leqslant D\left[\frac{\delta_a(\tau)-\delta_a(z)}{V(z)^{m+1}}+\frac{\delta_a(z)-\delta_a(\xi)}{V(\xi)^{m+1}}\right]. \tag{3.33}$$

Сейчас также справедливы соотношения (3.32), так что (3.33) будет следовать из неравенства

$$\frac{\xi-\delta_a(\xi)}{a^{m+1}V(z)^{m+1}} \leqslant D\left[\frac{\delta_a(\tau)-\delta_a(z)}{V(z)^{m+1}}+\frac{\delta_a(z)-\delta_a(\xi)}{V(z)^{m+1}}\right] = D\frac{\delta_a(\tau)-\delta_a(\xi)}{V(z)^{m+1}}.$$

Но сейчас $\xi \leqslant \delta_a(\tau)$, так что $\xi-\delta_a(\xi) \leqslant \delta_a(\tau)-\delta_a(\xi)$ и требуемое неравенство верно при $D = a-(m+1)$. В итоге, (3.30) выполнено в случае 3а).

Разберем случай 3б). Имеем

$$\begin{aligned}
\delta_a(\tau) \leqslant \xi \quad &\Longrightarrow \quad k_0(\tau,\xi) = V(\xi)^{-(m+1)}\big(\delta_a(\tau)-\delta_a(\xi)\big),\\
\delta_a(\tau) \leqslant z \quad &\Longrightarrow \quad k_0(\tau,z) = V(z)^{-(m+1)}\big(\delta_a(\tau)-\delta_a(z)\big),\\
\delta_a(z) \leqslant \xi \quad &\Longrightarrow \quad k_0(z,\xi) = V(\xi)^{-(m+1)}\big(\delta_a(z)-\delta_a(\xi)\big).
\end{aligned}$$

Таким образом, для выполнения (3.30) нужно, чтобы

$$\frac{\delta_a(\tau)-\delta_a(\xi)}{a^{m+1}V(\xi)^{m+1}} \leqslant D\left[\frac{\delta_a(\tau)-\delta_a(z)}{V(z)^{m+1}}+\frac{\delta_a(z)-\delta_a(\xi)}{V(\xi)^{m+1}}\right]. \tag{3.34}$$

Сейчас $\delta_a(\tau) < \xi < z < \tau$, так что $aV(\tau) \leqslant V(\xi) \leqslant V(z) \leqslant V(\tau)$. Поэтому (3.34) следует из неравенства

$$\frac{\delta_a(\tau)-\delta_a(\xi)}{a^{m+1}V(\tau)^{m+1}} \leqslant D\left[\frac{\delta_a(\tau)-\delta_a(z)}{V(\tau)^{m+1}}+\frac{\delta_a(z)-\delta_a(\xi)}{V(\tau)^{m+1}}\right] = D\frac{\delta_a(\tau)-\delta_a(\xi)}{V(\tau)^{m+1}},$$

которое верно при $D = a^{-(m+1)}$. В итоге и в этом случае справедливо неравенство (3.30) с $D = a^{-(m+1)}$.

Таким образом, ядро $k_0(\tau,\xi)$ не убывает по τ, не возрастает по ξ и удовлетворяет неравенству треугольника (3.30), т. е. является ядром обобщенного оператора Харди T_0 в терминологии Блума и Кермана [31] и [7]. При этом имеет место эквивалентность модулярных неравенств (3.9) и (3.29).

2. Переходим к доказательству эквивалентности неравенства (3.29) и совокупности условий (3.18), (3.19). Для этого используем известный результат Блума и Кермана [10, теорема 1.7] с учетом обобщений, приведенных в [15], которые позволяют заменить условие выпуклости $\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$ на более общее условие $\Phi_1 \lll \Phi_2$. Обозначим

$$\tilde{\alpha}(\lambda,\tau) = \Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}\left\{\int_\tau^\infty \Phi_2\big(\lambda\tilde{w}(\xi)\big)\tilde{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right\}, \tag{3.35}$$

$$\tilde{\beta}(\lambda,\tau) = \Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}\left\{\int_\tau^\infty \Phi_2\big(\lambda\tilde{w}(\xi)k_0(\xi,\tau)\big)\tilde{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right\}. \tag{3.36}$$

Согласно обобщенной теореме Блума–Кермана, в условиях теоремы 3.2.1 неравенство (3.29) эквивалентно совокупности двух неравенств: для всех $\tau \in \mathbb{R}_+$:

$$\int_0^\tau \Psi_1\left(\frac{\tilde{\alpha}(\lambda,\tau)k_0(\tau,\xi)}{C\lambda\sigma(\xi)v(\xi)}\right)v(\xi)\,\mathrm{d}\xi \leqslant \tilde{\alpha}(\lambda,\tau) < \infty, \tag{3.37}$$

$$\int\limits_0^\tau \Psi_1\left(\frac{\tilde\beta(\lambda,\tau)}{C\lambda\sigma(\xi)v(\xi)}\right)v(\xi)\,d\xi \leqslant \tilde\beta(\lambda,\tau) < \infty. \tag{3.38}$$

Подставим в (3.37) и (3.38) обозначения (3.26). Тогда, они примут вид

$$I(\tau) \equiv \int\limits_0^\tau \Psi_1\left(\frac{\tilde\alpha(\lambda,\tau)k_0(\tau,\xi)V(\xi)^m}{C\lambda}\right)v(\xi)\,d\xi \leqslant \tilde\alpha(\lambda,\tau) < \infty, \tag{3.39}$$

$$J(\tau) \equiv \int\limits_0^\tau \Psi_1\left(\frac{\tilde\beta(\lambda,\tau)V(\xi)^m}{C\lambda}\right)v(\xi)\,d\xi \leqslant \tilde\beta(\lambda,\tau) < \infty. \tag{3.40}$$

Далее, в интегралах в (3.35) и в (3.39) сделаем замену переменной $\eta = \delta_a(\xi)$, т. е. $\xi = \delta_{a^{-1}}(\eta)$. С учетом обозначений (3.23) и (3.11) получим

$$\tilde w(\xi) = w(\eta), \quad \tilde u(\xi)\,d\xi = u(\eta)\,d\eta, \quad V(\xi) - a^{-1}V(\eta), \quad v(\xi)\,d\xi = a^{-1}v(\eta)\,d\eta,$$

так что

$$\tilde\alpha(\lambda,\tau) = \Phi_1\circ\Phi_2^{-1}\left\{\int\limits_{\delta_a(\tau)}^\infty \Phi_2\big(\lambda w(\eta)\big)u(\eta)\,d\eta\right\} = \alpha\big(\lambda,\delta_a(\tau)\big), \tag{3.41}$$

где $\alpha(\lambda,\rho)$ введена в (3.16). Далее, в (3.39)

$$I(\tau) = \int\limits_0^{\delta_a(\tau)} \Psi_1\left(\frac{\alpha\big(\lambda,\delta_a(\tau)\big)k_0\big(\tau,\delta_{a^{-1}}(\eta)\big)V(\eta)^m}{C\lambda a^m}\right)\frac{v(\eta)\,d\eta}{a}. \tag{3.42}$$

Обозначим еще $\rho = \delta_a(\tau)$, т. е. $\tau = \delta_{a^{-1}}(\rho)$. Тогда, $\tau\in\mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \rho\in\mathbb{R}_+$ и

$$(3.39) \quad \Leftrightarrow \quad I\big(\delta_{a^{-1}}(\rho)\big) \leqslant \alpha(\lambda,\rho), \quad \rho\in\mathbb{R}_+. \tag{3.43}$$

Согласно (3.25)

$$k_0\big(\delta_{a^{-1}}(\rho),\delta_{a^{-1}}(\eta)\big) = \frac{a^{m+1}}{V(\eta)^{m+1}}\begin{cases}\delta_{a^{-1}}(\eta)-\eta, & 0<\eta\leqslant\delta_a(\rho),\\ \rho-\eta, & \delta_a(\rho)<\eta\leqslant\rho.\end{cases}$$

Итак, с учетом обозначения (3.15),

$$k_0\big(\delta_{a^{-1}}(\rho),\delta_{a^{-1}}(\eta)\big)V(\eta)^m a^{-m} = k_2(\rho,\eta).$$

Поэтому согласно (3.42) и (3.43)

$$(3.39) \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^\rho \Psi_1\left(\frac{\alpha(\lambda,\rho)k_2(\rho,\eta)}{C\lambda}\right)\frac{v(\eta)\,d\eta}{a} \leqslant \alpha(\lambda,\rho), \quad \rho\in\mathbb{R}_+.$$

Это условие совпадает с (3.18). Далее в интегралах в (3.36) и в (3.40) делаем замену $\eta = \delta_a(\xi)$. Аналогично выводу (3.41) получим

$$\tilde\beta(\lambda,\tau) = \Phi_1\circ\Phi_2^{-1}\left\{\int_{\delta_a(\tau)}^\infty \Phi_2\big(\lambda w(\eta)k_0 bigl(\delta_{a^{-1}}(\eta),\tau)\big)u(\eta)\,d\eta\right\}.$$

Здесь согласно (3.25)

$$k_0(\xi,\tau) = \frac{1}{V(\eta)^{m+1}}\begin{cases}\delta_a(\xi)-\delta_a(\tau), & \tau\leqslant\xi\leqslant\delta_{a^{-1}}(\tau),\\ \tau-\delta_a(\tau), & \delta_{a^{-1}}(\tau)<\xi.\end{cases}$$

Так что

$$k_0\big(\delta_{a^{-1}}(\eta),\delta_{a^{-1}}(\rho)\big) = \frac{a^{m+1}}{V(\rho)^{m+1}}\begin{cases}\eta-\rho, & \rho\leqslant\eta\leqslant\delta_{a^{-1}}(\rho),\\ \delta_{a^{-1}}(\rho)-\rho, & \delta_{a^{-1}}(\rho)<\eta.\end{cases}$$

С учетом обозначения (3.14) получаем, что $k_0\big(\delta_{a^{-1}}(\eta),\delta_{a^{-1}}(\rho)\big) = k_1(\eta,\rho)$.

В результате

$$\tilde\beta\big(\lambda,\delta_{a^{-1}}(\rho)\big) = \Phi_1\circ\Phi_2^{-1}\left\{\int_\rho^\infty \Phi_2\big(\lambda w(\eta)k_1(\eta,\rho)\big)u(\eta)\,d\eta\right\} = \beta(\lambda,\rho),$$

(см. (3.17)). Кроме того,

$$J(\tau) = \int_0^{\delta_a(\tau)} \Psi_1\left(\frac{\beta(\lambda,\tau)V(\eta)^m}{C\lambda a^m}\right)\frac{v(\eta)\,d\eta}{a}, \rho\in\mathbb{R}_+,$$

так что, полагая в (3.40) $\tau = \delta_{a^{-1}}(\rho)$, получим, что $\tau\in\mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \rho\in\mathbb{R}_+$, и

$$(3.40) \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^\rho \Psi_1\left(\frac{\beta(\lambda,\rho)V(\eta)^m}{C\lambda a^m}\right)\frac{v(\eta)\,d\eta}{a} \leqslant \beta(\lambda,\rho), \quad \rho\in\mathbb{R}_+,$$

где $\beta(\lambda,\rho)$ определена в (3.17). Это условие совпадает с (3.19). Таким образом, мы показали, что

$$(3.9) \quad \Leftrightarrow \quad (3.29) \quad \Leftrightarrow \quad \{(3.39),(3.40)\} \quad \Leftrightarrow \quad \{(3.18),(3.19)\}.$$

Теорема 3.2.1 доказана. □

Замечание 3.2.1. *В [7; 15] получены условия справедливости модулярного неравенства (3.29) для обобщенного оператора Харди, которые эквивалентны описаниям Блума–Кермана (3.35)–(3.38), но отличаются от них по форме и могут быть более удобны для конкретных приложений. Реализация аналогичного подхода дает следующие эквивалентные формы критериев, приведенных в теореме 3.2.1. Именно, в условиях теоремы 3.2.1 неравенства (3.18), (3.19) эквивалентны неравенствам: для $\rho,\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+$*

$$\Phi_2^{-1}\left\{\int\limits_\rho^\infty \Phi_2\left(\frac{w(\tau)}{C}\left\|\frac{k_2(\rho,y)\chi_{(0,\rho)}(y)}{\varepsilon}\right\|_{\Psi_1,\varepsilon v/a}\right)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} \leqslant \Phi_1^{-1}\left(\frac{\}}{\varepsilon}\right),$$

$$\Phi_2^{-1}\left\{\int\limits_\rho^\infty \Phi_2\left(\frac{w(\tau)}{C}\left\|\left(\frac{V(y)}{a}\right)^m\frac{\chi_{(0,\rho)}(y)}{\varepsilon}\right\|_{\Psi_1,\varepsilon v/a} k_1(\tau,\rho)\right)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} \leqslant \Phi_1^{-1}\left(\frac{\}}{\varepsilon}\right).$$

Здесь C — постоянная из (3.18), (3.19). Внутренние нормы $\|\cdot\|_{\Psi_1,\varepsilon v/a}$ в весовом пространстве Орлича $L_{\Psi_1,\varepsilon v/a}$ (см. [32]) берутся по переменной y.

3.3 Доказательство результатов

Теорема 3.3.1. *Пусть Φ_1, Φ_2 — N-функции и $\Phi_1 \prec\prec \Phi_2$, Ψ_1, Ψ_2 — дополнительные функции для Φ_1 и Φ_2, v, u, w положительные весовые функции, $\mathcal{F}$ — операторы Харди–Копсона (2.19). Пусть выполняется условие*

$$A_\varphi = \sup_{t\in\mathbb{R}_+}\frac{1}{t\varphi(t)}\left(\int_0^t \varphi\,\mathrm{d}\tau\right) < \infty. \tag{3.44}$$

Тогда существует постоянная $C > 0$ *такая, что неравенство*

$$\Phi_2^{-1}\left\{\int_{\mathbb{R}_+}\Phi_2\big(w(t)\mathcal{F}\big)u(t)\,\mathrm{d}t\right\} \leqslant \Phi_1^{-1}\left\{\int_{\mathbb{R}_+}\Phi_1(Cf)v\,\mathrm{d}t\right\}, \qquad f \in \Omega, \tag{3.45}$$

выполняется для всех положительных невозрастающих функций f *тогда и только тогда, когда существует константа* B *такая, что для всех* ε, $r > 0$ *выполняются следующие неравенства:*

$$\Phi_2^{-1}\left\{\int_0^\infty \Phi_2\left(\frac{w(t)}{B}\cdot\frac{f_\varphi(t,r)}{\varphi(r)}\left\|\frac{f_\varphi(\cdot,r)}{\varepsilon V}\right\|_{\Psi_1(\varepsilon v)}\right)u(t)\,\mathrm{d}t\right\} \leqslant \Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{3.46}$$

Доказательство. Цель первого шага — свести оценку (3.9) к оценке для оператора Харди–Копсона, приведенного в Теореме 2.2.2. Для оператора Харди–Копсона (2.19), используя (3.6), получаем

$$\mathcal{F}\big(\mathfrak{R}_0^*(vf;t)\big) = \int_0^\infty f_\varphi(t;\tau)\mathfrak{R}_0^*(vf;\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^\infty f_\varphi(t;\tau)\left(\int_\tau^\infty \frac{f(\xi)v(\xi)}{V(\xi)}\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\tau, \quad \tau \in \mathbb{R}_+.$$

Изменив порядок интегрирования, мы имеем

$$\mathcal{F}\big(\mathfrak{R}_0^*(vf;t)\big) = \int_0^\infty \frac{f(\xi)v(\xi)}{V(\xi)}\left(\int_0^\xi f_\varphi(t;\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\xi.$$

Покажем, что

$$\int_0^\xi f_\varphi(t;\tau)\,\mathrm{d}\tau \cong f_\varphi(t;\xi)\xi; \quad t,\xi \in \mathbb{R}_+ = (0,\infty). \tag{3.47}$$

Из убывания φ и условия $A_\varphi < \infty$ следует, что

$$\varphi(t)t \leqslant \int_0^t \varphi\,\mathrm{d}\tau \leqslant A_\varphi\varphi(t)t, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.48}$$

1) При $\xi \leqslant 1$ имеем $f_\varphi(t;\tau) = \varphi(t)$, $\tau \in (0,\xi)$, так что

$$\int\limits_0^\xi f_\varphi(t;\tau)\,\mathrm{d}\tau = \varphi(t)\int\limits_0^\xi \mathrm{d}\tau = \varphi(t)\xi = f_\varphi(t;\xi)\xi. \tag{3.49}$$

2) При $\xi > t$ имеем

$$\int\limits_0^\xi f_\varphi(t;\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_0^t \varphi(t)\,\mathrm{d}\tau + \int\limits_t^\xi \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \varphi(t)t + \int\limits_t^\xi \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \underset{(3.49)}{\cong} \varphi(\xi)\xi,$$

т. е. при $\xi > t$

$$\int\limits_0^\xi f_\varphi(t;\tau)\,\mathrm{d}\tau \cong \varphi(\xi)\xi = f_\varphi(t,\xi)\xi. \tag{3.50}$$

Из (3.49), (3.50) следует (3.47).

Подставляем (3.47) в (3.46):

$$\mathcal{F}\left(\mathfrak{R}_0^*(vf;t)\right) = \int\limits_0^\infty \frac{f(\xi)v(\xi)}{V(\xi)} f_\varphi(t;\xi)\xi\,\mathrm{d}\xi, \tag{3.51}$$

так

$$\mathcal{F}\left(\mathfrak{R}_0^*(vf;t)\right) = \int\limits_0^\infty f_\varphi(t;\xi)g(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{3.52}$$

где

$$g(\xi) = \frac{f(\xi)v(\xi)\xi}{V(\xi)}. \tag{3.53}$$

Получаем эквивалентность (3.9) и (3.54), где (3.54) имеет вид

$$\exists\, c_3 \in \mathbb{R}_+ \;:\; \Phi_2^{-1}\left\{\int_{\mathbb{R}_+} \Phi_2\left(w(t)\int_0^\infty f_\varphi(t;\xi)g(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)u(t)\,\mathrm{d}t\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \Phi_1^{-1}\left\{\int_{\mathbb{R}_+} \Phi_1(c_3\sigma g)v\,\mathrm{d}t\right\}, \qquad g \in M_+ \tag{3.54}$$

и $\sigma(t) = V(t)v(t)^{-1}t^{-1}$. В результате, вводя оператор

$$\mathfrak{I}_0(g;t) = \int\limits_0^\infty f_\varphi(t;\xi)g(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где ядро

$$f_\varphi(t;\tau) = \min\{\varphi(t),\varphi(\tau)\} = \begin{cases} \varphi(t), & 0 < \tau \leqslant t, \\ \varphi(\tau), & \tau > t, \end{cases}$$

(оператор $\mathfrak{I}_0$ в обозначениях из Теоремы 2.2.2) получаем эквивалентность модулярных неравенств (3.9) и (3.54).

2. Перейдем к доказательству эквивалентности неравенства (3.54) и условия (3.45). С этой целью мы используем известный результат Jim Quile Sun [8], который был приведен в нашей Теореме 2.2.2. В сочетании с обобщениями, данными в [24]. Получим

$$\Phi_2^{-1}\left\{\int_0^r \Phi_2\left(\frac{w(t)}{B}\cdot\frac{tf_\varphi(t,r)}{\varphi(r)}\left\|\frac{f_\varphi(\cdot,r)}{\varepsilon V}\right\|_{\Psi_1(\varepsilon v)}\right)u(t)\,\mathrm{d}t\right\} \leqslant \Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{3.55}$$

Таким образом, мы показали, что (3.9) $\Leftrightarrow$ (3.54) $\Leftrightarrow$ (3.45). Теорема 3.3.1 доказана. $\square$

Заключение

В **Заключении** приведены основные результаты работы, которые состоят в следующем:

1. Рассмотрены общие свойства потенциалов, построенных на базе весовых пространств Лоренца с общими весами.
2. Установлены эквивалентные описания конусов убывающих перестановок для потенциалов, построенных на базе весовых пространств Лоренца с общими весами.
3. Получены критерии вложений пространства потенциалов в перестановочно инвариантные пространства и даны описания оптимальных перестановочно инвариантных пространств для таких вложений. Приведена конкретизация этих вложений в случае базовых весовых пространств Лоренца.
4. Результаты о модулярных неравенствах для рассмотренных операторов типа Харди важны, так как такие операторы возникают при изучении убывающих перестановок для обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса, когда в качестве базовых ПИП выступают пространства Орлича–Лоренца.
5. Рассмотрены модулярные неравенства для операторов типа Харди на конусе Ω положительных убывающих функций из весовых пространств Орлича.

Список сокращений и условных обозначений

$\mathbb{N}$	множество натуральных чисел
L_p	пространство Лебега
$\mathbb{R}$	множество действительных чисел
$E(\mathbb{R}^n)$	перестановочно-инвариантное пространство
$\Lambda^p(v)$	весовое пространство Лоренца
$H_E^G(\mathbb{R}^n)$	пространство потенциалов
$G * f$	свертка $(G * f) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y) f(y)$ y
χ_A	характеристическая функция
ρ	функциональная норма
$\omega_c^k(u;\tau)$	модуль непрерывности
$\lambda_f(f)$	Лебегова функция распределения
μ	мера Лебега
$E'(\mathbb{R}^n)$	ассоциированное пространство
$\tilde{E}(\mathbb{R}_+)$	представления Люксембурга
$C(\mathbb{R}^n)$	пространство ограниченных и равномерно непрерывных функций
$G_\alpha(x)$	классические ядра Бесселя–Макдональда
$\mathfrak{R}^* f(x)$	обобщенные операторы Харди
$L_{\Phi(\omega)}$	пространство Орлича

Список литературы

1. *Bennett C.*, *Sharpley R.* Interpolation of operators. — New York : Acad. Press, 1988.
2. *Nikolsky S. M.* Approximation of functions of several variables and imbedding theorems. — Moscow : Science, 1977.
3. *Мазья В. Г.* Пространства Соболева. — Л. : Издательство ЛГУ, 1985.
4. *Goldman M. L.* Optimal embeddings of the generalized Bessel and Riesz potentials // Proceedings of the Mathematical Institute V. A. Steklov. — 2010. — Vol. 269. — P. 91—111.
5. *Gogatishvili A.*, *Johansson M.*, *Okpoti C. A., Persson L. E.* Characterization of embeddings in Lorentz spaces using a method of discretization and anti-discretization // Bull. Austral. Math. Soc. — 2007. — Vol. 76. — P. 69—92.
6. *Гольдман М. Л.*, *Малышева А. В.* Об оценке равномерного модуля непрывности обобщенного потенциала Бесселя // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. — 2013. — Т. 283. — С. 1—12.
7. *Бахтигареева Э. Г.*, *Гольдман М. Л.* Весовые неравенства для операторов типа Харди на конусе убывающих функций из пространства Орлича // Математические заметки. — 2017. — Т. 102, № 5. — С. 673—683.
8. *Sun J. Q.* Hardy type inequalities on weighted Orlicz spaces : PhD thesis / Sun Jim Quile. — London, Canada : The Univ. of Western Ontario, 1995.

9. *Goldman M.*, *Kerman R.* On the principal of duality in Orlicz-Lorentz Spaces // Function spaces. Differential Operators. Problems of mathematical education. Proc. Intern. Conf. dedicated to 75-th birthday of prof. Kudrjavtsev. — Moscow, 1998. — P. 179—183.

10. *Bloom S.*, *Kerman R.* Weighted Orlicz space integral inequalitiesfor the Hardy-Littlewood maximal operator // Studia Math. — 1994. — Vol. 110, no. 2. — P. 149—167.

11. *Bakhtigareeva E.*, *Goldman M. L.* Modular and norm inequalities for operators on the cone of decreasing function in Orlicz space // Eurasian math. Journal. — 2017. — Vol. 8. — P. 1—10.

12. *Стейн И.*, *Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. — М. : Мир, 1974. — 336 с.

13. *Крейн С. Г.*, *Петунин Ю. И.*, *Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. — М. : Наука, 1978. — 400 с.

14. *Бокаев Н. А.*, *Гольдман М. Л.*, *Каршыгина Г. Ж.* Конусы функций с условиями монотонности для обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса // Математические заметки. — 2018. — Т. 104, № 3. — С. 356—373.

15. *Гольдман М. Л.* Об оптимальных вложениях обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. — 2010. — Т. 269. — С. 91—111.

16. *Альхалиль Н. Х.*, *Алмохаммад Х.* Интегральные свойства обобщённых потенциалов типа Бесселя и типа Рисса // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2017. — Т. 25, № 4. — С. 340—349.

17. *Альхалиль Н. Х.*, *Алмохаммад Х.* Дифференциальные свойства обобщённых потенциалов типа Бесселя и типа Рисса // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2018. — Т. 26, № 1. — С. 3—12.

18. *Almohammad K.* On modular inequalities for generalized Hardy operators on weighted Orlicz spaces // Eurasian Math. J. — 2021. — Vol. 12, no. 3. — P. 19—28.

19. *Бахтигареева Э. Г.*, *Гольдман М. Л.* Неравенства для операторов типа Харди на конусе убывающих функций из весового пространства Орлича // Доклады Академии наук. — 2017. — Т. 477, № 2. — С. 133—137.

20. *Gogatishvili A.*, *Neves J. S.*, *Opic B.* Optimality of embeddings of Bessel-potential-type spaces // Function spaces, differential operators and nonlinear analysis: Proc. Conf., Milovy, Czech Republ. — Math. Inst. Acad. Sci. Czech Republ., Prague, 2005. — P. 97—102.

21. *Goldman M. L.* Estimates for restrictions of monotone operators on the cone of decreasing functions in Orlicz space // Mathematical Notes. — 2016. — No. 1. — P. 24—37. — in Russian.

22. *Goldman M. L.* Estimates for the norms of monotone operators on weighted Orlicz-Lorentz classes // Doklady Mathematics. — 2016. — Vol. 94, no. 3. — P. 627—631.

23. *Goldman M. L.* On optimal embeddings of the generalized Bessel and Riesz potentials // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2010. — Vol. 269. — P. 91—111. — in Russian.

24. *Goldman M.*, *Kerman R.* On the principle of duality in Orlicz–Lorentz spaces, Function spaces. Differential Operators. Problems of mathematical Education // Proc. Intern. Conf. dedicated to 75-th birthday of prof. Kudrjavtsev. Vol. 1. — M., 1998. — P. 179—183.

25. *Drabek P.*, *Heinig H.*, *Kufner A.* Weighted modular inequalities for monotone functions // J. Inequal. and Applications. — 1997. — Vol. 1. — P. 183—197.

26. *Sawyer E.* Boundedness of classical operators on classical Lorentz spaces // Studia Math. — 1990. — Vol. 96. — P. 145—158.

27. *Heinig H. P.*, *Kufner A.* Hardy operators on monotone functions andsequences in Orlicz spaces // J. London Math. Soc. — 1996. — Vol. 53, no. 2. — P. 256—270.

28. *Almohammad K.* The Modular Inequalities for Hardy-type Operators on Monotone Functions in Orlicz Space // Advances in Systems Science and Applications. — 2020. — Vol. 21, no. 2. — P. 133—141.

29. *Almohammad K.* The Modular for Hardy-Type Operators on Monotone Functions in Orlicz Space // Annals of R.S.C.B. — 2021. — Vol. 25, no. 2. — P. 1196—1200.

30. *Goldman M. L.* Estimates for Restrictions of Monotone Operators on the Cone of Decreasing Functions in Orlick Spaces // Mathematical Notes. — 2016. — Vol. 100, no. 1. — P. 24—37.

31. *Гольдман М. Л.*, *Энрикес Ф.* Описание перестановочно инвариантной оболочки анизотропного пространства Кальдерона. — 2005.

32. *Bakhtigareeva E. G.*, *Goldman M. L.* Inequalities for Hardy-Type Operators on the Cone of Decreasing Functions in a Weighted Orlicz Space // Doklady Mathematics. — 2017. — Vol. 96, no. 3. — P. 1—5.

33. *Малышева А. В.* Оптимальные вложения обобщённых потенциалов Рисса // Вестник РУДН. «Серия Математика. Информатика. Физика». — 2013. — № 2. — С. 28—37.

34. *Netrusov Y. V.* Embedding Theorems spaces Lizorkina–crops in Ukraine // Zap. scientific. SEM. LOMI. — 1987. — Vol. 159. — P. 103—112.

35. *Goldman M.* Estimates for Restrictions of Monotone Operators on the Cone of Decreasing Functions in Orlicz Spaces // Mathematical Notes. — 2016. — Vol. 100, no. 1. — P. 24—37.

36. *Goldman M. L.*, *Henriques F.* Description of rearrangement invariant shell of an anisotropic Calderon space // Тр. МИАН. — 2005. — Т. 248. — С. 94—105.

37. *O'Neil R.* Convolution operators and $L(p,q)$ spaces // Duke Math. J. — 1963. — Vol. 30. — P. 129—142.

38. *Goldman M. L.* On the cones of rearrangements for generalized Bessel and Riesz potentials // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2010.

39. *Нетрусов Ю. В.* Теоремы вложения пространств Бесова в идеальные пространства // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1987. — Т. 159. — С. 69—82.

40. *Буренков В. И.*, *Гольдман М. Л.* Вычисление нормы положительного оператора на конусе монотонных функций // Труды Матем. Института им. В.А. Стеклова. — 1995. — № 210. — С. 65—89.

41. *Степанов В. Д.*, *Ушакова Е. П.* Об интегральных операторах с переменными пределами интегрирования // Тр. МИАН. — 2001. — Т. 232. — С. 298—317.

42. *Буренков В. И.* Функциональные пространства. Пространства L_p. — М. : Изд-во УДН, 1987. — 80 с.

43. *Степанов В. Д.* Integral operators on the cone of monotone functions // J. London Math. Soc. — 1993. — Vol. 48. — P. 465—487.

44. *Гольдман М. Л.* Интегральные свойства обобщенных бесселевых потенциалов // Доклады РАН. — 2007. — Т. 414, № 2. — С. 159—164.

45. *Gogatishvili A.*, *Pick L. D.* Discretization and anti-discretization of rearrangement-invariant norms // Publ. Mat., Barc. — 2003. — Vol. 47, no. 2. — P. 311—358.

46. *Gogatishvili A.*, *Neves I.*, *Opic B.* Optimality of embeddings of Bessel-potential-type spaces // / ed. by T. editor. — Prague : Math. Inst. Acad. Sci. Czech Republ., 2005. — P. 97—102.

47. *Carro M.*, *Soria J.* The Hardy–Littlewood maximal function and weighted Lorentz spaces // Journal London Mathematical Society. — 1997. — Vol. 55. — P. 146—155.

48. *Nursultanov E. D.* Net spaces and inequalities of Hardy–Littlewood type // Sb. Math. — 1998. — Vol. 53, no. 3. — P. 399—419.

49. *Nursultanov E. D.* On the coefficients of multiple Fourier series in L_p-spaces // RAN. Ser. Math. — 2000. — No. 64. — P. 95—122.

50. *Смаилов Е. С.*, *Бимендина А. У.* Коэффициенты Фурье-Прайса класса GM и наилучшее приближения функций в пространстве Лорен-

ца // Труды математического института им. В.А. Стеклова. — 2016. — № 293. — С. 83—104.

51. *Dyachenko M. I.*, *Tikhonov S.* Trigonometric series with lacunary-minoxone coefficients // Eurasian Math. J. — 2012. — P. 31—52.
52. *Тихонов С. А.* Обобщенные классы Липшица и коэффициенты Фурье // Матем. заметки. — 2004. — Т. 75, № 6. — С. 947—951.
53. *Bekmaganbetov K. A.*, *Toleugazy Y.* Order of the orthoprojection widths of the anisotropic Nikol'skii–Besov classes in the anisotropic Lorentz space // Eurasian Math. J. — 2016. — Vol. 7, no. 3. — P. 8—16.
54. *Бекмаганбетов К. А.* О порядках приближения класса Бесова в метрике анизотропных пространств Лоренца // Уфимск. матем. журн. — 2009. — С. 9—16.
55. *Дурвудхан С.* О некоторых неравенствах для собственных значений потенциала Рисса // Матем. заметки. — 2017. — С. 844—850.
56. *Гусельникова О. М.* Необходимое условие вложения пространство потенциалов в перестановочно инвариантное пространство // Вестник Тамбовского университета. Серия «Ест. и техн. науки». — 2011. — Т. 16, № 3. — С. 738—741.
57. *Bokayev N. A.*, *Goldman M. L.*, *Karshygina G. Z.* Some integral estimates on the cones of functions with the monotonicity conditions // Вестник Карагандинского государственного университета. Серия «Математика». — 2018. — 2 (90). — P. 80—87.
58. *Бокаев Н. А.*, *Гольдман М. Л.*, *Каршыгина Г. Ж.* О конусах монотонных функций на положительной полуоси // Математический журнал Института математики МОН РК Алматы, Математический журнал. — 2018. — Т. 18, 2 (68). — С. 31—46.

59. *Гольдман М. Л.*, *Каршыгина Г. Ж.* Оптимальные вложения потенциалов типа Рисса с базовым пространством Лоренца // Междунар. науч. конф. посв. 70-летию д.ф-м.н. Р. Ойнарова. — 2017. — С. 50—53.

60. *Bokayev N. A.*, *Goldman M. L.*, *Karshygina G. Z.* Criterion for embedding of generalized Riesz potential into a rearrangement invariant space // Междунар. конф. Крымская осеняя математическая школа. — 2018. — С. 46—47.

61. *Goldman M.* Some constructive criteria of optimal embeddings for potentials // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2011. — Vol. 56, no. 10/11. — P. 1—19.

62. *Goldman M.* Order-sharp estimates for Hardy-type operators on the cones of functions with properties of monotonicity // Eurasian Math. Journal. — 2012. — Vol. 3, no. 2. — P. 53—84.

63. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. — М. : Мир, 1973. — 336 с.

64. *Goldman M. L.*, *Haroske D.* Optimal Calderon spaces for generalized Bessel potentials // Doklady Mathematics. — 2015. — Vol. 492, no. 1. — P. 404—407.

65. *Sun J. Q.* The Modular Inequalities for a Class of Convolution Operators on Monotone Fuctions // Proc. Amer. Math. Soc. — 1997. — Vol. 125, no. 8. — P. 2293—2305.

66. *Гольдман М. Л.*, *Гусельникова О. М.* Оптимальные вложения потенциалов типа Бесселя и типа Рисса. Часть 1 // Вестник РУДН. «Серия Математика. Информатика. Физика». — 2011. — № 3. — С. 4—16.

67. *Алмохаммад Х.* Интегральные свойства обобщённых потенциалов типа Бесселя и типа Рисса // 8th International Scientific Conference «Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis VIII». — 2018. — С. 31.

68. *Алмохаммад Х.* О модулярных неравенствах для обобщённых операторов Харди на весовых пространствах Орлича–Лоренца // Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2019». — М. : Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 2019.

69. *Алмохаммад Х.*, *Альхалиль Н. Х.* О свойствах потенциалов типа Рисса на базе пространств Орлича-Лоренца // 9th International Scientific Conference «Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis IX». — Rostov-on-Don, 04.2019. — С. 30—31.

70. *Алмохаммад Х.*, *Альхалиль Н. Х.* О модулярных неравенствах обобщенных Харди операторов на весовых пространствах Орлича // Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2020 «XXXI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам». — Симферополь, 04.2020. — С. 6—7.

71. *Алмохаммад Х.* Модулярные неравенства для одного класса операторов свертки на монотонных функциях в пространстве Орлича // Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2020». — М. : Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 2020.

72. *Алмохаммад Х.* Модулярные неравенства для операторов типа Харди на монотонных функциях в пространстве Орлича // Международ-

ная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2021». — М. : Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 2021.