На правах рукописи

Максимова Ирина Сергеевна

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ И ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2025

Работа выполнена в Математическом институте имени академика С. М. Никольского факультета физико-математических и естественных наук Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы

Научный руководитель:	Осипенко Константин Юрьевич, д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры общих проблем управления механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова
Официальные оппоненты:	Аваков Евгений Рачиевич, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник Института проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук
	Ситник Сергей Михайлович, д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования Белгородского государственного национального исследовательского университета
Ведущая организация	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Воронежский государственный университет”

Защита диссертации состоится 09.12.2025 в 17:00 на заседании диссертационного совета ПДС 0200.005 при Российском университете дружбы народов имени Патриса Лумумбы (адрес: г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3).

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов) по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6 и на сайте РУДН в сети интернет (https://www.rudn.ru/science/dissovet).

Автореферат разослан _ ноября 2025 г.

Учёный секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук А.Ю. Савин

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень её разработанности. В середине XX столетия начала активно развиваться математическая теория управления. Ее возникновение связано с необходимостью решать новые на то время задачи, прежде всего, задачи управления механическими объектами, движение которых описывается дифференциальными уравнениями. Значительный вклад в создание математической теории оптимального управления и ее развитие внесли Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко, Р. Калман, Р. Беллман, Н.Н. Красовский, А.М. Летов, В.М. Тихомиров, Ф.П. Васильев, А.Я. Дубовицкий, А.А. Милютин, А.Д. Иоффе, А.Б. Куржанский, В.И. Благодатских, А.В. Дмитрук, М.Н. Зеликин, В.И. Коробов, А.В.Арутюнов и многие другие...

Принцип максимума Понтрягина послужил основой математической теории управляемых процессов. Дальнейшее развитие теории управления связано как с прикладными задачами (управление летательными объектами, космическими аппаратами, управление технологическими и экономическими процессами), так и с исследованием задач управления как чисто математических. Так возникли и сформировались такие направления в математической теории управления как управляемость, наблюдаемость, идентификация систем, теория оптимального управления, синтез управления для различных систем и другие.

Именно исследованию управляемости различных дифференциальных систем и посвящена часть настоящей работы.

Известный американский ученый Л.Янг (1937г.) в работе[1] пишет, что нет смысла говорить о необходимых условиях оптимальности без ответа на вопросы о существовании решения. Теория необходимых условий, по его словам, без теорем существования наивна.[2] В этом смысле и теорию существования оптимальных управлений можно назвать наивной без теории управляемости, т.к. в типичных теоремах существования оптимального управления предполагается существование хотя бы одного допустимого управления, порождающего траекторию, удовлетворяющую заданным краевым условиям, например, управления, переводящего траекторию из одного заданного положения в другое. Последняя задача и составляет сущность проблемы управляемости.

Впервые четкую постановку проблемы управляемости и ее решение для линейных стационарных систем (непрерывных и дискретных) дал Р. Калман в своем докладе на I конгрессе ИФАК (Москва, 1960)[3]. С тех пор критерий полной управляемости

$$rang\{B, AB, ..., A^{n-1}B\} = n$$

стал одним из наиболее известных результатов теории управляемости для линейных систем с постоянными матрицами A, B:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U = \mathbb{R}^m.$$

Система называется полностью управляемой на некотором отрезке, если найдутся допустимые управления, порождающие траектории, соединяющие две любые точки пространства (переводящие траекторию из любого положения в пространстве в любое другое положение).

---

[1] Young L. C. Lectures on the Calculus of Variations and Optimal control Theory, *Sanders Co. Phladrlphia*, 1969.

[2] Габасов Р ., Кириллова Ф. М. Современное состояние теории оптимальных процессов, *Автоматика и телемеханика*, 1972,—№9.—С. 31-62.

[3] Калман Р. Об Общей теории систем управления, *ТР. I конгресса ИФАК. Изд-во АН СССР*, 1961.

Для линейных нестационарных систем известен достаточный признак Н.Н. Красовского[4] при условии непрерывной дифференцируемости матриц коэффициентов вплоть до $(n-1)$−го порядка, где n - порядок системы.

С.Ю. Култышев, Е.А. Тонков[5] получили критерии вполне управляемости линейных нестационарных систем. Один из них связывает свойство полной управляемости исходной системы со свойством невырожденности двухточечной краевой задачи для гамильтоновой системы. Второй критерий выражен в терминах существования матрицы $V(t)$, удовлетворяющей некоторому дифференциальному неравенству.

Н.Н. Петров[6] для систем вида $\dot{x} = f(x, u)$ получил достаточные условия управляемости для множества U произвольной природы, охватывающие случаи, когда $f(0,0) \neq 0$, а так же (в случае, когда начало координат пространсва R^r является внутренней точкой U и $f(0,0) = 0$) достаточные условия локальной управляемости для данных систем с "неуправляемым линейным приближением".

Ю.М. Семенов[7] получил критерий полной управляемости линейных неавтономных систем по производным в нуле целых матриц $A(t)$ и $B(t)$. В случае когда матрицы $A(t)$ и $B(t)$ целые, из полученной теоремы вытекает критерий Красовского и ранговый критерий Калмана для случая, когда матрицы A и B - постоянные.

В статье[8] Ю.М. Семеновым рассмотрен геометрический подход к анализу управляемости линейных неавтономных систем $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ с коническими множествами ограничений управлений U и непрерывными матрицами $A(t)$ и $B(t)$. Получены критерии полной управляемости, первый из которых сводится к анализу расположения конусов $\Phi^{-1}(t)B(t)U$ в фазовом пространстве систем ($\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$, $\Phi(0) = E$), а второй основан на существовании подходящих управлений, переводящих точку нуль обратно в точку нуль. Причем, первый критерий констуктивен, но проверка его условий достаточно трудоемка.

Управляемый объект, описываемый дифференциальной системой, называется локально управляемым на множество, если для любой точки из некоторой окрестности этого множества существует допустимое управление, что соответсвующее ему решение системы перейдет из этой точки в некоторую точку самого множества.

Исследованием локальной управляемости нелинейных систем занимались Л. Маркус, Э. В. Ли[9], Н.Н. Красовский[10]. Наиболее сильный результат в этой области принадлежит Калману[11] и состоит втом, что если линейное приближение системы полностью управляемо, то система локально управляема с помощью непрерывного управления.

А.В. Болтянский[12] рассматривает два вида локальной управляемости, а именно, нормально локально управляемую систему и линейно локально управляемую систему. В работе рассмотрены достаточные условия локальной управляемости дифференциальных систем на основе понятия положительного базиса в пространстве $\mathbb{R}^n$.

---

[4]Красовский Н. Н. *Теория управления движением*, М.: Наука, 1968.

[5] Култышев С. Ю., Тонков Е. Л. Управляемость линейной нестационарной системы, *Дифференциальные уравнения*, 1975.—Т. XI,—№7.—С. 1206–1216.

[6]Петров Н. Н. Об управляемости автономных систем, *Дифференциальные уравнения*, 1968.—Т. IV,— №4,—С. 606–617.

[7]Семенов Ю. М. Об одном критерии полной управляемости неавтономных линейных систем, *Дифференциальные уравнения*, 2011.—Т. 47,—№11,—С. 1646–1652.

[8]Семенов Ю. М. О полной управляемости неавтономных систем, *Дифференциальные уравнения*, 2012,—Т. 48,—№9,—С. 1265–1277.

[9]Ли Э. В., Маркус Л. *Основы теории оптимального управления*, М.: Наука, 1972.

[10]Красовский Н. Н.*Теория управления движением*, М.: Наука, 1968.

[11]Kalman R. E. ASME Journal of Basic Engineering, *On the existence of optimal control*, 1962,—84 D,—№1,—P.21–22.

[12]Болтянский А. В. О некоторых видах локальной управляемости, *Дифференциальные уравнения*, 1981,—Т.17,—№2,—С. 203–209.

Е.Р. Аваков, Г.Г. Магарил - Ильяев и В.М. Тихомиров[13] рассматривают задачу локальной управляемости динамической системы с фазовыми ограничениями. Для поставленной задачи получены достаточные условия локальной управляемости с применением принципа Лагранжа.

Ю.В. Мастерков[14,15] изучал условия локальной нуль-управляемости нелинейных дифференциальных систем в критическом случае, т.е. в случае, когда система линейного приближения не является вполне управляемой. В рассмотренных работах получены достаточные условия локальной управляемости систем в критическом случае.

Проблемами локальной управляемости занимался также А.В. Арутюнов[16,17].

Задачами с переменной структурой в разное время занимались В.Г. Болтянский, В.Н. Розова, А.В. Дмитрук, А.М. Каганович, Ю.Н. Свирежев, В.Р. Барсегян.

Ю.М. Свирежев[18] указывал о возможности использования систем с переменной размерностью при моделировании динамики биологических сообществ.

В работе А.Н.Кириллова[19] рассматривается метод посторения математической модели сложных систем с изменяющейся в процессе функционирования структурой.

Исследованию дифференциальных систем со сменой фазового пространста посвящена работа В.Г. Болтянского[20].

Задачи оптимального управления с ограничениями в промежуточных точках траектории рассмотрены в работах А.В. Дмитрука и А.М. Кагановича[21,22]. С помощью некоторого приема (размножения фазовых и управляющих переменных) эти задачи сводятся к стандартным задачам оптимального управления понтрягинского типа с ограничениями равенства и неравенства на концы траекторий. Этот прием помогает получать для данных задач необходимые условия оптимальности, обобщающие классический принцип максимума Понтрягина.

В работах В.Н. Розовой[23,24] рассматривается задача оптимального управления ступенчатыми системами, в работах[25,26,27] исследуется локальная управляемость дифференциальных

---

[13]Аваков Е. Р., Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. О принципе Лагранжа в задачах на экстремум при наличии ограничений, *Успехи математических наук*, 2013,—Т. 68,—№3(411),—С. 5–38.

[14]Мастерков Ю. В. К вопросу о локальной управляемости в критическом случае, *Известия высших учебных заведений, Математика*, 1999,—№2,—С. 68–74.

[15]Мастерков Ю. В О локальной управляемости нелинейных в критическом случае, *Известия ИМИ УдГУ*, 2006,—№3(37),—С. 97–98.

[16]Arutyunov A. V., Rozova V. N. Regular zero of a quadratic mapping and local controllability of nonlinear systems, *Differential equations*, 1999,—Т. 35,—№6,—С. 723–728.

[17]Арутюнов А. В. Управляемость нелинейных систем с ограничениями на управнения, *Дифференциальные уравнения*, 2006,—Т. 42,—№11,—С. 1443–1451.

[18]Свирежев Ю. М. *Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии*, М.: Наука, 1987.—С. 368.

[19]Кириллов А. Н. Метод динамической декомпозиции в моделировании систем управления со структурными изменениями, *Информационно-управляющие системы, Моделирование систем и процессов*, 2009,—№1,—С. 20–24.

[20]Болтянский В. Г. Задача оптимизации со сменой фазового пространства, *Дифференциальные уравнения*, 1983,—Т. XIX,—№3.—С. 518–521.

[21]Дмитрук А. В, Каганович А. М. Принцип максимума для задачи оптимального управления с промежуточными ограничениями, *Нелинейная динамика и управление*, 2008,—№6,—С. 101–136.

[22]Dmitruk A. V, Kaganovich A. M. The hibrid maximum principe is a consequence of Pontryagin maximum principe, *Systems and control letters*, 2006,—Vol.57,—№11,—P. 964–970.

[23]Медведев В. А., Розова В. Н. Оптимальное управление ступенчатыми системами, *Автоматика и телемеханика*, 1972,—№3.—С. 15–23.

[24]Розова В. Н. Оптимальное управление ступенчатыми системами, *Вестник РУДН. Серия: физико-математические науки*, 2006,—№1,—С. 27–32.

[25]Розова В. Н. Задача управляемости для нелинейной системы дифференциальных уравнений специального вида, *Вестник РУДН. Серия: Математика, информатика, физика*, 2012,—№1,—С. 5-8.

[26]Зверкин А. М., Розова В. Н. Возвратные управления и их приложения, *Дифференциальные уравнения*, 1987,—Т. 23,—№2,—С. 228–234.

[27]Arutyunov A. V., Rozova V. N. Regular zero of a quadratic mapping and local controllability of nonlinear systems, *Differential equations*, 1999,—Т. 35,—№6,—С. 723–728.

систем.

Качественно исследован вопрос управляемости и оптимизации линейных составных систем в работах В.Р. Барсегяна. В.Р. Барсегян[28] привел конструктивный подход к исследованию задач управления линейными составными системами. Монография[29] посвящена проблемам управления составных линейных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. Получены необходимые и достаточные условия вполне управляемости и наблюдаемости составных линейных систем, которые в стационарном случае по завершенности сравнимы с условиями Калмана. Выявлены качественные свойства управляемости и наблюдаемости составных систем. Предложены конструктивные методы решения задач управления составных систем и систем с неразделенными многоточечными промежуточными условиями, с ограничениями на значения разных частей координат фазового вектора в промежуточные моменты времени. В работе[30] рассмотрена задача управляемости и оптимального управления одной системой линейных нагруженных дифференциальных уравнений, для которой, наряду с классическими краевыми условиями, заданы неразделенные многоточечные промежуточные условия. Возникновение таких задач связано с измерением фазовых состояний в некоторые моменты времени и непрерывной передачей информации с помощью обратной связи при наблюдении за динамическим процессом. В работе сформулировано необходимое и достаточное условие вполне управляемости для рассмотренной системы линейных дифференциальных уравнений с последействием и условия существования программного управления и движения. Работа[31] также посвящена задачам управления поэтапно меняющимися линейными системами нагруженных дифференциальных уравнений и задаче оптимального управления с критерием качества, заданным на весь промежуток времени. Сформулировано необходимое и достаточное условие вполне управляемости. Построены аналитические виды движения и управляющего воздействия для поставленной задачи управления, а также предложен способ решения задачи оптимального управления. В работах[32,33] сформулировано понятие управляемости линейных систем переменной структуры с помощью динамического регулятора. Показано, что при управлении системами переменной структуры с помощью динамического регулятора достаточно задать только начальное состояние регулятора, а не строить управление на всем интервале. Получены условия вполне управляемости составной и поэтапно меняющейся линейных нестационарных систем с помощью динамического регулятора. Показано, что поэтапно меняющаяся линейная стационарная система с помощью динамического регулятора вполне управляема тогда и только тогда, когда система вполне управляема и вполне наблюдаема.

Таким образом, проблема управляемости динамических систем является одной из наиболее важной в теории управления и далека от своего решения. Для нелинейных систем известны результаты по локальной управляемости. Общих результатов, разрешающих проблему как в линейном случае, нет и, скорее всего, их невозможно получить. Надо учитывать

[28]Барсегян В. Р. Конструктивный подход к исследованию задач управления линейными составными системами, *Проблемы управления*, 2012,—№4—С. 11–17.

[29]Барсегян В. Р. *Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями*, М.: Наука, 2016,—230 с..

[30]Барсегян В. Р. Задача управления для одной системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными промежуточными условиями, *Известия Иркутского государственного университета, Серия Математика*, 2017,—Т. 21,—С. 19–32.

[31]Барсегян В. Р. Задача управления для поэтапно меняющихся линейных систем нагруженных дифференциальных уравнений, *Автоматика и телемеханика*, 2018,—№4—С. 19–30.

[32]Барсегян В. Р. Управляемость линейных систем переменной структуры с помощью динамического регулятора, *Труды института математики и механики УрО РАН*, 2024,—Т.30,—№3—С. 30–44.

[33]Barseghyan V. R., Matevosyan A. G., Simonyan T. A.On the Completely Controllability of One Stage by Stage Changing Linear Stationary System Using a Dynamic Controller, *2024 International Russian Automation Conference (RusAutoCon), 8-14 Sept. 2024*, 2024,—P. 808–812..

качественные свойства динамических систем, классификация которых невозможна.

Для задач со сменой фазового пространства или задач с переменной структурой, даже в линейном стационарном случае результатов, сравнимых по завершенности с критерием Калмана, нет. Это связано со сложность исследуемого объекта[34].

В настоящей работе рассматривается задача управляемости для динамических систем со сменой фазового пространства, т.е. исследуется возможность перевода объекта из заданного множества одного фазового пространства в заданное множество другого фазового пространства через некоторую заданную "гиперповерхность перехода". При этом данные фазовые пространства могут иметь разные размерности. Возможен переход как из пространства большей размерности в пространство меньшей размерности, так и наоборот. Размерности пространств зависят от практического смысла исследуемой задачи.

Первоначальным источником моделей гибридных систем с переключением на многообразиях послужили многостадийные процессы космического полета[35]. Такие модели отличались фиксированными последовательностями переключений. При этом при достижении траекторией некоторого многообразия происходит изменение размерности пространства, вектора управления или изменение уравнений движения.

Уменьшение или увеличение размерности фазовых пространств в задачах с переменной размерностью тесно связано с понятиями агрегирования и декомпозиции.

Одной из особенностью агрегирования является уменьшение размерности - объединение части в нечто целое. Наиболее часто встречающаяся ситуация, приводящая к необходимости использования агрегирования, является работа с многочисленной совокупностью данных, которые плохо обозримы и с которыми трудно "работать". Так, например, в работе[36] применяется способ последовательного агрегирования переменных для приведения нелинейной системы к специальному виду, с уменьшением размерности.

Методы декомпозиции же, наоборот, приводят к увеличению размерности. Декомпозиция позволяет осуществить последовательное разбиение системы на подсистемы, которые в свою очередь, могут быть разбиты на составляющие их части. Разбиение системы на подсистемы в общем случае может быть выполнено неоднозначно. Состав используемых признаков декомпозиции и порядок их применения зависят от особенностей конкретной задачи. В результате декомпозиция позволяет структурировать крупные и сложные объекты на подсистемы, обладающие требуемыми свойствами. Методы декомпозиции часто используют в линейном программировании.

В последнее время растет интерес к задачам моделирования и управления с несколькими динамическими системами с последовательными во времени режимами работы. Это одно из активно развивающихся направлений современной математической теории управления. Такое бурное развитие данного типа задач связано с расширением их области применения.

К задачам с переменной размерностью сводятся, например:

- процессы инвестирования динамических экономических систем,[37]
- описание крупных промышленных и производственных комплексов,[38]

[34]Кириллов А. Н. Метод динамической декомпозиции в моделтровании систем управления со структурными изменениями, *Информационно-управляющие системы, Моделирование систем и процессов*, 2009,—№1,—С. 20–24.

[35]Величенко В. В. О задачах оптимального управления для уравнений с разрывными правыми частями, *Автоматика и телемеханика*, 1966,—№7,—С. 20–30.

[36]Земляков А. С. Синтез нелинейных многомерных систем управления на основе декомпозиции-агрегирования, *Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева*, 2002,—№4,—С. 40–47.

[37] Максимов В. П., Чадов А. Л. Гибридные модели в задачах экономической динамики, *Вестник Пермского университета. Экономика*, 2011,—вып. 2(9),—С. 13–23.

[38]Кириллов А. Н. Моделирование динамики структур гибридных систем, *Информационно-управляющие системы, Моделирование систем и процессов*, 2011,—№4,—С. 42–46.

- управление сложными техническими системами, в частности, электроэнергетическими системами,[39,40]

- управление коммуникационными и информационными системами, транспортными и производственными потоками,[41,42]

- моделирование многостадийных технологических процессов,[43,44]

- задачи оптимизации траекторий выведения космического аппарата с дополнительным топливным баком и ступенчатых космических аппаратов с низкой круговой орбиты искусственного спутника Земли на геостационарную орбиту.[45]

Примерами экономических систем, которые состоят из изменяющегося количества подсистем, являются, например, крупные производственные корпорации, фирмы, в состав которых входят предприятия, выпускающие некоторую продукцию[46]. Также подобные задачи могут использоваться для обоснования различных схем взаимодействия между уровнями в экономических системах при решении задач планирования и оперативного управления[47].

Задачи со сменой фазового пространства имеют также и физический смысл и возникают, например, когда управляемый аппарат запускается с другого управляемого аппарата, космического, наземного, подводного, надводного[48].

И это далеко не полный список областей применимости подобных задач управляемости. При таком довольно широком практическом применении задач со сменой фазовых пространств, остается актуальным исследование теоретических основ данных задач.

С понятием управляемости дифференциальных систем тесно связано понятие наблюдаемости, которое также является одним из фундаментальных понятий теории управления и наблюдения. Задачи наблюдения динамических систем имеют важные теоретическое и практическое значения. Например, для реализации управления по принципу обратной связи необходимо знать фазовое состояние системы в каждый момент времени. Поскольку не все фазовые координаты системы доступны измерению, необходимо рассмотреть вопрос о возможности полного восстановления фазовых координат системы по результатам неполного наблюдения (измерения). Наблюдаемость является свойством системы, показывающим, можно ли по выходу полностью восстановить информацию о состояниях системы.

[39] Бударгин О. М., Мисриханов М. Ш., Рябченко В. Н. Новые эффективные критерии управляемости и наблюдаемости для систем большой размерности, *Проблемы управления*, 2012,—№1,—С. 21–25.

[40] Мисриханов М. Ш. Ленточные критерии управляемости и наблюдаемости, *Автоматика и телемеханика*, 2005,—№12,—С. 93–104.

[41] Валуев А. М. Моделирование транспортных процессов в формализме гибридных систем, *XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014, Москва, 16-19 июня*, 2014.

[42] Валуев А. М. Формализация и вариационный анализ класса гибридных систем, моделирующие переключаемые производственные процессы, *Труды 4-ой международной конференции по проблемам управления. Москва, 26-30 января 2009, Институт проблем управления им. Трапезникова РАН*, 2009,—С. 116–124.

[43] Кириллов А. Н. Моделирование динамики структур гибридных систем, *Информационно-управляющие системы, Моделирование систем и процессов*, 2011,—№4,—С. 42–46.

[44] Кириллов А. Н. Задачи управления гибридными системами, *Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах-УТЭОСС-2012, Санкт-Петербург, 9-11 октября 2012*, С. 752–753.

[45] Григорьев И. С., Данилина И. А. Оптимизация межорбитальных пространственных траекторий перелета ступенчатых космических аппаратов, *Автоматика и телемеханика*, 2007,—№8,—С. 86–105.

[46] Кириллов А. Н. Метод динамической декомпозиции в моделировании систем управления со структурными изменениями, *Информационно-управляющие системы, Моделирование систем и процессов*, 2009,—№1,—С. 20–24.

[47] Максимов В. П., Чадов А. Л Гибридные модели в задачах экономической динамики, *Вестник Пермского университета. Экономика*, 2011,—вып. 2(9),—С. 13–23.

[48] Зотов Ю. К., Тимофеев А. В. Управляемость и робастная стабилизация программных движений летательных аппаратов с нелинейной динамикой, *Труды СПИИРАН*, 2006,—вып.3,—Т. 2,—С. 383–405.

В настоящей работе также рассматривается задача восстановления решения линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений по информации, заданной со случайной ошибкой.

Общая постановка задачи восстановления заключается в определении значений заданного функционала или оператора на некоторых классах функций по неполной информации о них. О функциях, по которым мы восстанавливаем значения оператора, нам известна информация двух типов. Первый тип "глобальный", характеризует класс функций, которые только и могут встретиться; другой – "локальный" (индивидуальный), связанный с характеризацией отдельной функции. Классы обычно связывают со свойствами гладкости или аналитичности входящих в них функций. Локальная или индивидуальная информация обычно состоит в том, что нам оказываются доступными некоторые характеристики функции (например, ее значения в отдельных точках, моменты, коэффициенты Фурье или Тейлора, преобразование Фурье и т.п.). Эта информация может задаваться с детерминированной ошибкой или со случайной[49].

К настоящему времени имеется значительное число работ, в которых для различных задач восстановления найдены оптимальные методы. Задачи с детерминированнными ошибками рассматривались, например, в работах.[50,51]

Задачи со случайными ошибками изучались Plaskota L.[52,53] В работе Donoho D.L.[54] оценка методов восстановления берется по линейным функционалам, в работе[55] получена оценка для нелинейного метода восстановления через оценки линейных методов.

Задача оценивания погрешности метода восстановления по случайной величине, имеющей нормальное распределение рассмотрена в работе Решетова С.[56] В ней получено неравенство для оценки минимаксного нелинейного риска.

Задача восстановления решения системы линейных однородных уравнений рассматривалась Е.В. Введенской[57], но в случае детерминированной ошибки.

Цели и задачи. В диссертационной работе ставились следующие цели:

- проведение анализа задач управляемости для дифференциальных систем со сменой фазового пространства при различных вариантах правых частей систем дифференциальных уравнений;

- получение условий управляемости для задач со сменой фазовых пространств как в нелинейном, так и в линейном случае;

- поиск новых подходов к исследованию управляемости для задач с переменной структурой;

[49] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю, Тихомиров В. М. Неопределенность знания об объекте и точность методов его восстановления, *Пробл. передачи информ.*, 2003,—39:1,— С. 118–133.

[50] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю, Тихомиров В. М. Оптимальное восстановление и теория экстремума, *Докл. РАН*, 2001,—379:2,—С. 161–164.

[51] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. *Выпуклый анализ и его приложения*, М.: Эдиториал УРСС, 2011.

[52] Plaskota L. *Noisy information and computational complexity,* Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

[53] Wilczynski M. Minimax estimation over ellipsoids in l_2, *Statistics*, 2008,—V.42,—№2,—P. 95–100.

[54] Donoho D. L., Liu R. C., MacGibbon B. Minimax risk over hyperrectangles, and implications, *Ann. Statist.*, 1990,—V.18,—№3,—P. 1416–1437.

[55] Donoho D. Statistical estimation and optimalrecovery, *Ann. Statist.*, 1994,—V.22,—№1,—P.238–270.

[56] Reshetov S. Minimax risk for quadratically convex sets *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2010,—V.167,—№4,—P. 537–542.

[57] Введенская Е. В. Об оптимальном восстановлении решения системы линейных однородных дифференциальных уравнений *Дифференциальные уравнения*, 2009,—Т.45,—№2,—С. 255–259.

- решение задачи оптимального восстановления решения системы линейных дифференциальных уравнений по исходной информации со случайной ошибкой.

Научная новизна. Научная новизна работы обусловлена следующими основными результатами диссертационного исследования:

- получен ряд условий управляемости для систем с переменной структурой, рассмотрены различные классы дифференциальных систем в различной комбинации;
- получены достаточные условия управляемости для нелинейных дифференциальных систем со сменой фазовых пространств в случае, когда правые части дифференциальных включений являются вогнутыми отображениями;
- рассмотрен вопрос применимости локальной управляемости нелинейных дифференциальных систем для задач с переменной структурой;
- получен оптимальный метод восстановления решения линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений по исходной информации, заданной со случайной ошибкой.

Теоретическая значимость. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в теории управляемости при исследовании различных динамических систем. Также полученные результаты имеют довольно широкое практическое применение в различных задачах экономики, эконометрики и в задачах с физическим приложением.

Методология и методы исследования. В работе используются методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, линейной алгебры, управляемости, оптимального управления, выпуклого анализа, многозначного анализа, функционального анализа, теории приближений функций.

Положения, выносимые на защиту.

1) Доказано условие управляемости нелинейных дифференциальных систем треугольного вида в задаче со сменой фазового пространства.
2) Доказано достаточное условие управляемости системы со сменой фазового пространства в случае, когда правые части дифференциальных включений являются вогнутыми отображениями.
3) Доказано достаточное условие управляемости задачи со сменой фазового пространства в случае, когда нелинейная система в первом пространстве линеаризуется при некоторой замене переменных, а нелинейная система во втором пространстве является локально нуль-управляемой.
4) Доказаны теоремы об оптимальном восстановлении линейного оператора и решения линейной системы дифференциальных уравнений по исходной информации со случайной ошибкой. Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений восстановлено при различных вариантах задания исходной информации: задача решается в предположении, что начальная точка принадлежит некоторому эллипсоиду и ее координаты в начальный момент времени известны со случайной ошибкой. Требуется восстановить решение в момент времени $\tau > 0$. Также рассматривается задача, в которой решение известно с некоторой случайной ошибкой в момент времени $t = T_1$. Требуется восстановить решение в некоторый момент времени $0 < \tau < T_1$. В каждой

задаче рассматривается случай различных собственных значений матрицы A и случай кратных собственных значений.

Общий результат применяется также к задаче о восстановлении k-ой производной тригонометрического полинома по его коэффициентам, известным со случайной ошибкой.

Степень достоверности и апробация результатов. Степень достоверности полученных в диссертации результатов обеспечивается строгостью доказательств, имеющимися публикациями в рецензируемых изданиях, которые индексируются в международных базах данных, а также выступлениями на семинарах, конференциях и школах.

Результаты, представленные в диссертационной работе, были доложены на следующих международных конференциях:

- Международная конференция КРОМШ - 2021 "XXXII Крымская Осенняя Математическая Школа - симпозиум по спектральным и эволюционным задачам Симферополь, 17 - 26 сентября 2021.
- International conference "Data Analysis, Optimization and their Applications Moscow, MIPT, January 30 —January 31, 2023.
- Шестнадцатая международная конференция "Управление развитием крупномасштабных систем— MLSD'2023, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 26-28 сентября 2023.
- XIX Всероссийское совещание по проблемам управления - ВСПУ-2024, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 17-20 июня 2024.
- Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам 2024, Суздаль, 28 июня – 3 июля 2024.
- Школа - конференция "Неголономные дни в Переславле", 26–30 августа 2024, Переславль - Залесский.

Результаты диссертационной работы докладывались на следущих научных семинарах:

- Научный семинар "Кинетические и нелинейные уравнения математической физики" под руководством С.Б. Куксина, А.Л. Пятницкого, А. Л. Скубачевского, Математический институт имени академика С.М. Никольского, РУДН.
- Научный семинар кафедры общих проблем управления МГУ имени М.В. Ломоносова "Задачи дифференциальных уравнений, анализа и управления: теория и приложения" под руководством М.И. Зеликина, В.Ю. Протасова, В.М. Тихомирова, А.В. Фурсикова;
- Аспирантско-студенческий семинар "Геометрическая теория оптимального управления" под руководством Л.В. Локуциевского, Математический институт им. В.А. Стеклова.
- Семинар С.М. Никольского по теории функций многих действительных переменных и приложениям к задачам математической физики под руководством О.В. Бесова, Математический институт им. В.А. Стеклова.
- Научный семинар по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям под руководством А.Л.Скубачевского, Математический институт имени академика С.М. Никольского, РУДН.
- Совместный семинар ЦКП ССКЦ и НГУ "Высокопроизводительные вычисления" под руководством Куликова И.М.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 9 работах, из них 5 - статьи в научных журналах, индексируемых в международных базах данных и 4 — в тезисах докладов на международных конференциях. Их список приведён в конце автореферата. Результаты совместных работ, включённые в диссертацию, получены автором самостоятельно.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 103 страницы. Список литературы содержит 83 наименования.

Основное содержание работы

Во введении приводится краткий обзор исследований по теории управляемости и теории восстановления, дано обоснование теоретической и практической ценности полученных результатов. Описаны цели диссертационного исследования, общая методика исследования и новизна полученных результатов.

В первой главе рассматривается задача о переводе управляемого объекта, описываемого двумя нелинейными дифференциальными системами в разных фазовых пространствах и на последовательных промежутках времени, из заданного множества одного пространства на заданное множество другого пространства через заданную "гиперплоскость перехода". Исследуется управляемость объекта для нелинейных дифференциальных систем треугольного вида, которые с помощью некоторой замены переменных сводятся к линейным системам. Рассмотрены примеры, иллюстрирующие различные подходы к исследованию управляемости в поставленной задаче.

В двух фазовых пространствах $X = \mathbb{R}^n$ и $Y = \mathbb{R}^m$ переменных $x = (x_1, ..., x_n)$ и $y = (y_1, ..., y_m)$ движение управляемого объекта описывается следующими нелинейными системами дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, ..., x_{i+1}), \quad i = 1, ..., n-1, \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, ..., x_n; u). \end{cases} \tag{1}$$

$x \in X, \quad t \in [0, \tau]$.

$$\begin{cases} \frac{dy_k}{dt} = g_k(y_1, ..., y_{k+1}), \quad k = 1, ..., m-1, \\ \frac{dy_m}{dt} = g_m(y_1, ..., y_m; v). \end{cases} \tag{2}$$

$y \in Y, \quad t \in [\tau, T]$.

Моменты времени τ и T заданы. В пространстве X задано начальное множество M_0 и гиперплоскость перехода $\Gamma = (x, c)$. Стыковка траекторий осуществляется с помощью заданного отображения $q : X \to Y$, $y(\tau) = q(x(\tau))$. Так же посредством этого отображения реализуется переход из одного пространства в другое. В пространстве Y задано конечное множество M_1.

Управляемый объект движется по следующей схеме: на отрезке времени $[0, \tau]$ объект движется из начального множества M_0 по решениям системы (1), в момент времени τ объект попадает на Γ и происходит переход в пространство Y под действием отображения $q : X \to Y$, $q(x(\tau)) = y(\tau)$. Полученная точка $y(\tau)$ является начальной для движения объекта в пространстве Y. Дальнейшее движение на отрезке времени $[\tau, T]$ объект осуществляет из точки $y(\tau)$ на множество M_1 по решениям системы (2). Причем $y(\tau) \notin M_1$(в противном случае задача решена).

Задача: заключается в том, чтобы найти условия, при которых объект, описываемый системами(1) и (2), является управляемым на $[0, T]$ из множества M_0 пространства X на множество M_1 пространства Y.

Определение 1. Объект, описываемый системами (1) и (2), называется управляемым из M_0 в M_1,[58] если на отрезках $[0, \tau]$ и $[\tau, T]$ существуют допустимые управления u и v, что соответствующие им решения систем удовлетворяют граничным условиям $x(0) \in M_0$, $x(\tau) \in \Gamma$ и $y(\tau) = q(x(\tau))$, $y(T) \in M_1$.

Условия управляемости объкта, описанного системами (1) и (2) можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть в системах (1) и (2) функции* $f_i(x_1, \cdots, x_{i+1}), i = 1, ..., n$ *и* $g_k(y_1, \cdots, y_{k+1}), k = 1, ..., m$, *имеют непрерывные частные производные до* $(n - i + 1)$*-го и* $(m - k + 1)$*-го порядков включительно и пусть для всех* $x_1, \cdots, x_{n+1}$ *и для всех* $y_1, \cdots, y_{m+1}$

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}} \right| \geq a > 0, \quad i = 1, ..., n - 1,$$

$$\left| \frac{\partial g_k}{\partial y_{k+1}} \right| \geq b > 0, \quad k = 1, ..., m - 1,$$

где a *и* b *– постоянные, не зависящие от* $x_1, \cdots, x_{n+1}$ *и* $y_1, \cdots, y_{m+1}$ *соответственно. И пусть выполнены условия стыковки траекторий* $y(\tau) = q(x(\tau))$. *Тогда объект, описанный системами (1) и (2) является управляемым из начального множества* M_0 *пространства* X *на конечное множество* M_1 *пространства* Y.

Во второй главе управляемость дифференциальных систем в задаче со сменой фазового пространства исследуется с помощью аппарата теории выпуклого анализа и многозначных отображений. Получены достаточные условия управляемости поставленной задачи для нелинейных дифференциальных систем, когда правые части дифференциальных включений являются вогнутыми отображениями. В случае, когда правые части дифференциальных систем линейны, с помощью аппарата опорных функций получено достаточное условие управляемости в поставленной задаче, позволяющее оценить время перехода из заданного множества одного пространства на заданное множество другого пространства через некоторую гиперповерхность перехода. Приведен пример, иллюстрирующий данный подход к исследованию.

Имеются два фазовых пространства $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ переменных $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_m)$. Обозначим $\Omega(\mathbb{R}^n)$, $\Omega(\mathbb{R}^m)$ - совокупности всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, соответственно. Пусть заданы множества $U \in \Omega(\mathbb{R}^n)$, $V \in \Omega(\mathbb{R}^m)$. Движение объекта описывается следующими нелинейными системами дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad x(t) \in X, \quad t \in [0, \tau]; \tag{3}$$

$$\dot{y}(t) = g(t, y(t), v(t)), \quad v(t) \in V, \quad y(t) \in Y, \quad t \in [\tau, T]. \tag{4}$$

Допустимыми управлениями являются всевозможные функции $u(\cdot) \in L_\infty([0, \tau], R^n)$, $v(\cdot) \in L_\infty([\tau, T], R^m)$, для которых $u(t) \in U$ при п.в. $t \in [0, \tau]$ и $v(t) \in V$ при п.в. $t \in [\tau, T]$. Решениями систем (3) и (4) при $t \in [0, \tau]$ и $t \in [\tau, T]$ называются абсолютно непрерывные функции, удовлетворяющие почти всюду на $[0, \tau]$ и $[\tau, T]$ системам (3) и (4) соответственно. Пусть функции $f(t, x, u)$, $g(t, y, v)$ таковы, решение задачи Коши для систем (3) и (4) существует и единственно.

[58] Maksimova I. S. and Rozova V. N. Local controllability in the problem with phase space change, *RUDN Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017,—Vol.25, —№4,—P. 331–338.

В X заданы начальное множество $M_0 \in \Omega(\mathbb{R}^n)$ и не пересекающаяся с ним выпуклая "гиперповерхность перехода" Γ. Пусть τ - наименьший момент времени, при котором объект достигает гиперповерхности Γ. Когда объект, движущийся по закону (3), достигает гиперповерхности Γ, происходит переход в пространство Y, заданный линейным отображением $q : X \to Y$, и дальнейшее движение осуществляется в пространстве Y по закону (4). Наконец, в Y задано конечное множество $M_1 \in \Omega(\mathbb{R}^m)$ (не пересекающееся с множеством $q(\Gamma)$). Подобная схема движения объекта изучена, например, в работе В.Г. Болтянского[59].

Задача: заключается в том, чтобы найти условия, при которых объект, описываемый системами (3) и (4), будет управляемым из M_0 в M_1.

Определение 3. Объект, описываемый системами (3) и (4), называется управляемым из M_0 в M_1, если существуют такие допустимые управления $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$, что соответствующие им решения систем удовлетворяют граничным условиям $x(0) \in M_0$, $x(\tau) \in \Gamma$ и $y(\tau) = q(x(\tau))$, $y(T) \in M_1$.

Для системы (3) в фазовом пространстве $X = \mathbb{R}^n$ в точке x рассмотрим множество $f(t, x, U)$, состоящее из всех векторов $f(t, x, u)$, где u принадлежит множеству U. Если $x(t)$ - некоторая траектория системы (3), соответствующая допустимому управлению $u(t)$, то при почти всех $t \in [0, \tau]$ выполняется включение

$$\dot{x}(t) \in f(t, x(t), U). \tag{5}$$

Это приводит нас к дифференциальному включению

$$\dot{x} \in f(t, x, U). \tag{6}$$

Теперь, при сделанных замечаниях, вместо нелинейной системы (3) будем рассматривать дифференциальное включение (6). Обозначим $f(t, x, U)$ через $F(t, x)$, тогда в пространстве $X = \mathbb{R}^n$ движение управляемого объекта описывается дифференциальным включением

$$\dot{x} \in F(t, x), \;\; t \in [0, \tau], \tag{7}$$

где $F(t, x)$ - многозначное отображение. Аналогично в пространстве $Y = \mathbb{R}^m$ движение управляемого объекта описывается дифференциальным включением

$$\dot{y} \in G(t, y), \;\; t \in [\tau, T]. \tag{8}$$

Движение объекта из пространства X в пространство Y осуществляется по схеме, описанной выше.

Определение 4. *Многозначное отображение $F(t, x)$ называется вогнутым[60] по x на множестве M, если для любых точек $x_1, x_2 \in M$ и любого числа $\lambda \in [0, 1]$ выполняется условие*

$$\lambda F(t, x_1) + (1 - \lambda) F(t, x_2) \subset F(t, \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2).$$

Заметим, что из этого условия следует выпуклость множества $F(t, x)$ при каждом $x \in M$. Множество достижимости $K(t)$ для каждого $t \in [0, \tau]$ состоит из всех точек $x(t) \in \mathbb{R}^n$, где $x(t)$ - решение включения (7) с начальным условием $x(0) \in M_0$.

[59] Болтянский В. Г. Задача оптимизации со сменой фазового пространства *Дифференциальные уравнения*, 1983,—Т. XIX,—№3.—С. 518–521.

[60] Благодатских В. И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление, *Труды МИАН СССР*, 1985.—Т. 169.—С. 194–252.

Теорема 5. *Пусть $F(t, x)$ вогнуто по x на множестве достижимости $K(\tau)$ при всех $t \in [0, \tau]$. Предположим, что отображение $G(t, y)$ вогнуто по y на множестве достижимости $K_3(T)$ при всех $t \in [\tau,]$ и $K_3(T)$ компактно. $K_3(T)$ – множество достижимости системы (8) из $K_2(\tau)$ в момент времени T, где $K_2(\tau) = q(K(\tau) \cap \Gamma)$. Тогда для управляемости объекта, описываемого системами (3) и (4), на отрезке времени $[0, T]$ достаточно, чтобы было выполнено следующее соотношение $c(K_3(T), \psi) + c(M_1, -\psi) \geq 0$, для любого $\psi \in \mathbb{R}^m$.*

Рассмотрим задачу для случая линейных систем. Имеются два фазовых пространства $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m$ переменных $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_m)$. Заданы множества $U \in \Omega(\mathbb{R}^n)$, $V \in \Omega(\mathbb{R}^m)$. Движение объекта описывается следующими системами дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + u, \quad u(t) \in U, \quad x(t) \in X, \quad t \in [0, \tau]; \tag{9}$$

$$\dot{y} = By + v, \quad v(t) \in V, \quad y(t) \in Y, \quad t \in [\tau, T]. \tag{10}$$

Класс допустимых управлений — это множества функций

$$\{u(\cdot) \in L_\infty([0, \tau], \mathbb{R}^n) \mid u(t) \in U, t \in [0, \tau]\},$$

$$\{v(\cdot) \in L_\infty([\tau, T], \mathbb{R}^m) \mid v(t) \in V, t \in [\tau, T]\}.$$

В X заданы начальное множество $M_0 \in \Omega(\mathbb{R}^n)$ и не пересекающаяся с ним выпуклая "гиперповерхность перехода" Г. Число τ — наименьший момент времени, при котором объект достигает гиперповерхности Г. В пространстве X также задано отображение $q : X \to Y$, с помощью которого осуществляется переход из одного фазового пространства в другое. Движение объекта из одного пространства в другое происходит также как и в случае нелинейных систем. Наконец, в Y задано конечное множество $M_1 \in \Omega(R^m)$ (не пересекающееся с множеством $q(\Gamma)$).

Задача: заключается в том, чтобы найти условия, при которых объект, описываемый системами (9) и (10), будет управляемым из M_0 в M_1.

Множество достижимости $K(\tau)$ для системы (9) — это множество концов траекторий системы (9) с начальным множеством M_0, соответсвующих всевозможным допустимым управлениям $u(\cdot)$, и рассматриваемое в момент времени τ.

Определим функцию управляемости[61] $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$ соотношением

$$\varphi(\psi) = c(K_2(\tau), e^{(T-\tau)B^*}\psi) + c(M_1, -\psi) + \int_0^{T-\tau} c(V, e^{sB^*}\psi) ds. \tag{11}$$

Здесь $K_2(\tau) = q(K(\tau) \cap \Gamma)$.

Теорема 6. *Для управляемости объекта, описываемого системами (9) и (10), при всех сделанных предположениях на отрезке $[0, T]$ достаточно, чтобы функция управляемости*

$$\varphi(\psi) = c(K_2(\tau), e^{(T-\tau)B^*}\psi) + c(M_1, -\psi) + \int_0^{T-\tau} c(V, e^{sB^*}\psi) ds$$

была неотрицательна для любых $\psi \in S$, здесь S – единичная сфера в $\mathbb{R}^m$ с центром в 0.

[61] Благодатских В. И. *Введение в оптимальное управление (линейная теория)*, М.: Высшая школа, 2001.

В третьей главе исследуется возможность примения локальной управляемости в задачах со сменой фазового пространства. Для задачи, в которой нелинейная система в первом пространстве линеаризуется при некоторой замене переменных, а нелинейная система во втором пространстве является локально нуль - управляемой, получены достаточные условия управляемости из начального множества одного пространства в конечное множество другого пространства.

В фазовых пространствах $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$ движение объекта описывается нелинейными управляемыми системами дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = g_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = g_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n), \\ \dot{x}_n = g_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, v), \end{cases} \tag{12}$$

где $t \in [0, \tau]$, $x(t) \in X$.

$$\dot{y} = f(y) + B(t)u, \tag{13}$$

где $f(y) \in C^1(\mathbb{R}^m)$, $f(0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0) \neq 0$, $u(t) \in U$, $t \in [\tau, T]$, $y(t) \in Y$, $B(t)$ - матрица размера $m \times r$ специального вида:

$$B(t) = B_1\varphi_1(t) + B_2\varphi_2(t).$$

Функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ имеют непрерывные производные вплоть до $(m-1)$ - го порядка включительно по крайней мере в окрестности некоторой точки $t = t^* \in [\tau, T]$, также $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ допускают четное продолжение.

Моменты времени τ и T заданы. Допустимыми управлениями являются всевозможные функции $u(\cdot) \in U = \{u(t) \in \mathbb{R}^r | u(\cdot) \in L_\infty[\tau, T]; u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^r\}$, $0 \in int\Omega$. Здесь $int\Omega-$ внутренность множества Ω.

Функции $f(y)$, $g_i(x_1, \dots, x_i), i = \overline{1, n}$ таковы, что решение задачи Коши для систем (12) и (13) существует и единственно.

Будем использовать схему движения управляемого объекта с переходом системы через ноль. Опишем эту схему подробно.

В пространстве X задано некоторое начальное множество M_0, в пространстве Y задано конечное множество M_1. На отрезке времени $[0, \tau]$ объект движется по закону (12) из начального множества M_0, в момент времени τ он попадает в точку ноль. Далее происходит переход в пространство Y, заданный некоторым отображением $q : X \to Y$, и дальнейшее движение осуществляется в пространстве Y по закону (13). Причем $q(x(\tau)) \notin M_1$ (если $q(x(\tau)) \in M_1$, то задача решена).

Задача: найти условия, при которых объект, описываемый системами (12) и (13), будет управляемым из множества M_0 пространства X в множество M_1 пространства Y.

Условия управляемости данного объекта можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема 7. *Пусть функции $g_i(x_1, \dots, x_{i+1})$, $\quad i = 1, \dots, n$, имеют непрерывные частные производные до $(n - i + 1)$ - го порядка включительно и*

$$|\frac{\partial g_i}{\partial x_{i+1}}| \geq b > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad x_1, \dots, x_{n+1},$$

где b - постоянная, не зависящая от $x_1, \dots, x_{n+1}$. Пусть $f(y) \in C^1(\mathbb{R}^m)$, $f(0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0) \neq 0$, $B(t)$ - матрица размера $m \times r$ специального вида:

$$B(t) = B_1\varphi_1(t) + B_2\varphi_2(t).$$

Функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ имеют непрерывные производные вплоть до $(m-1)$ - го порядка включительно по крайней мере в окрестности некоторой точки $t = t^* \in [\tau, T]$, также $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ допускают четное продолжение. Также на отрезке $[\tau, T]$ существует точка t^*, в которой ранг матрицы $L(t)$ равен m, где

$$L(t) = (B(t), AB(t) - B'(t), A^2B(t) - 2AB'(t) + B''(t), ...,$$
$$C^0_{m-1}A^{m-1}B(t) - C^1_{m-1}A^{m-2}B'(t) + ... + (-1)^{m+1}C^{m-1}_{m-1}A^0B^{(m-1)}(t)).$$

Тогда объект, описываемый системами (12) и (13), является управляемым из множества M_0 пространства X в множество M_1 пространства Y на отрезке времени $[0, T]$.

Четвертая глава посвящена задачам восстановления значений линейного оператора на некотором классе по исходной информации, заданной со случайной ошибкой. Полученная общая теорема о восстановлении применена к случаю восстановления решения линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений по исходной информации со случайной ошибкой.

Пусть X — линейное пространство, Z — линейное нормированное пространство и $T\colon X \to Z$ — линейный оператор. Требуется восстановить значения оператора T на некотором множестве (классе) $W \subset X$ по значениям линейного оператора $I\colon X \to \mathbb{R}^n$, заданным со случайной ошибкой. Более точно, зафиксируем $\delta > 0$ и для каждого $x \in W$ будем рассматривать множество случайных векторов

$$Y_\delta(x) = \{\, y = (y_1, \dots, y_n) : \mathbb{M}(y) = Ix,\ \mathbb{D}(y_j) \le \delta^2,\ j = 1, \dots, n \,\}.$$

Всякий метод восстановления сопоставляет случайному вектору $y \in Y_\delta(x)$ элемент из пространства Z, принимаемый за приближение к значению Tx. Погрешностью метода восстановления $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to Z$ называется величина

$$e(T, W, I, \delta, \varphi) = \left(\sup_{x \in W,\ y \in Y_\delta(x)} \mathbb{M}\left(\|Tx - \varphi(y)\|_Z^2 \right) \right)^{1/2}$$

(рассматриваются только те методы, для которых эта величина определена). Задача состоит в нахождении погрешности оптимального восстановления

$$E(T, W, I, \delta) = \inf_{\varphi\colon \mathbb{R}^n \to Z} e(T, W, I, \delta, \varphi) \tag{14}$$

и метода, на котором достигается нижняя грань, называемым оптимальным.

Положим

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n \nu_j |x_j|^2 \le 1 \right\},$$

где $\nu_j > 0$, $j = 1, \dots, n$. Определим линейные операторы $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $I\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ следующим образом

$$Tx = (\mu_1 x_1, \dots, \mu_n x_n), \quad Ix = (x_1, \dots, x_n),$$

$|\mu_j| > 0$, $j = 1, \dots, n$.

Введем обозначения

$$\gamma_j = \frac{\sqrt{\nu_j}}{|\mu_j|}, \quad j = 1, \dots, n, \quad \xi_j = \left(\sum_{k=1}^{j} \nu_k \left(\frac{\gamma_j}{\gamma_k} - 1 \right) \right)^{1/2}, \quad j = 1, \dots n.$$

Будем считать, что $\gamma_1 \le \ldots \le \gamma_n$. Нетрудно убедиться, что $0 = \xi_1 \le \ldots \le \xi_n$.

Теорема 8. *Пусть $1/\delta \in (\xi_s, \xi_{s+1}]$ при некотором $1 \le s \le n-1$ или $1/\delta \in (\xi_n, +\infty)$ (в этом случае считаем $s = n$). Тогда*

$$E(T, W, I, \delta) = \delta \left(\sum_{k=1}^{s} |\mu_k|^2 \left(1 - \frac{\gamma_k(1 - c_1)}{\gamma_1} \right) \right)^{1/2},$$

где

$$c_1 = 1 - \frac{\delta^2 \gamma_1 \sum\limits_{k=1}^{s} \dfrac{\nu_k}{\gamma_k}}{1 + \delta^2 \sum\limits_{k=1}^{s} \nu_k}, \tag{15}$$

а метод

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^{s} \left(1 - \frac{\gamma_k(1 - c_1)}{\gamma_1} \right) \mu_k y_k e_k,$$

где $\{e_k\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, является оптимальным.

Рассмотрим задачу Коши для системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{16}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \ge 0$ и $A = (a_{ij}), a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Предположим, что матрица A является самосопряженной,

$$\mu_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_n$$

— собственные числа матрицы A. Обозначим через $\{e_j\}_{j=1}^n$ ортонормированный базис из собственных векторов, соответствующих собственным значениям $\mu_j, j = 1, ..., n$.

Пусть

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j.$$

Тогда решение задачи (16) записывается в виде

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{\mu_j t} x_j e_j.$$

Предположим, что координаты начальной точки x_0 известны со случайной ошибкой. Пусть, кроме того, известен некоторый эллипсоид, в котором находится точка x_0. Требуется восстановить решение в момент τ, $\tau > 0$.

Положим для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} \nu_j x_j^2 \le 1 \right\}, \quad Tx = (e^{\mu_1 \tau} x_1, \dots, e^{\mu_n \tau} x_n), \quad Ix = (x_1, \dots, x_n).$$

Как и в общей постановке, всякий метод восстановления сопоставляет случайному вектору $y \in Y_\delta(x)$ элемент из пространства $\mathbb{R}^n$, принимаемый за приближение к значению Tx. Для решения поставленной задачи восстановления применим теорему 0.0.8.

Обозначим

$$\gamma_j = \frac{\sqrt{\nu_j}}{e^{-\lambda_j(T_1-\tau)}}, \quad \xi_j = \left(\sum_{k=1}^{j} \nu_k \left(\frac{\gamma_j}{\gamma_k} - 1\right)\right)^{1/2}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Будем считать, что $\gamma_1 \le \dots \le \gamma_n$.

Теорема 9. *Пусть $1/\delta \in (\xi_s, \xi_{s+1}]$ при некоторых $1 \le s \le n-1$ или $1/\delta \in (\xi_n, +\infty)$ (в этом случае считаем $s = n$). Тогда*

$$E(T, W, I, \delta) = \delta \left(\sum_{k=1}^{s} e^{-2\lambda_k(T_1-\tau)} \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_1}(1 - c_1)\right)\right)^{1/2},$$

где

$$c_1 = 1 - \frac{\delta^2 \gamma_1 \displaystyle\sum_{k=1}^{s} \frac{\nu_k}{\gamma_k}}{1 + \delta^2 \displaystyle\sum_{k=1}^{s} \nu_k}, \tag{17}$$

а метод

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^{s} \left((1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_1}(1 - c_1)\right) e^{-\lambda_k(T_1-\tau)} y_k e_k,$$

является оптимальным.

В четвертой главе для поставленной задачи рассмотрены различные варианты задания исходной информации: задача решается в предположении, что начальная точка принадлежит некоторому эллипсоиду и ее координаты в начальный момент времени известны со случайной ошибкой. Требуется восстановить решение в момент времени $\tau > 0$. Также рассматривается задача, в которой решение известно с некоторой случайной ошибкой в момент времени $t = T_1$. Требуется восстановить решение в некоторый момент времени $0 < \tau < T_1$. В каждой задаче рассматривается случай различных собственных значений матрицы A и случай кратных собственных значений.

Общий результат применяется также к задаче о восстановлении k-ой производной тригонометрического полинома по его коэффициентам, известным со случайной ошибкой.

В данных задачах рассматривается произвольное распределение случайного вектора с фиксированным математическим ожиданием и фиксированной оценкой для дисперсии. Как и в задачах с детерминированной ошибкой здесь обнаруживаются такие эффекты, как линейность оптимального метода и возможность использовать не всю доступную для измерений информацию.

В заключении перечислены основные оригинальные результаты диссертационного исследования.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Доказано условие управляемости нелинейных дифференциальных систем треугольного вида в задаче со сменой фазового пространства.

2. Доказано достаточное условие управляемости системы со сменой фазового пространства в случае, когда правые части дифференциальных включений являются вогнутыми отображениями.

3. Доказано достаточное условие управляемости задачи со сменой фазового пространства в случае, когда нелинейная система в первом пространстве линеаризуется при некоторой замене переменных, а нелинейная система во втором пространстве является локально нуль-управляемой.

4. Доказаны теоремы об оптимальном восстановлении линейного оператора и решения линейной системы дифференциальных уравнений по исходной информации со случайной ошибкой. Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений восстановлено при различных вариантах задания исходной информации: задача решается в предположении, что начальная точка принадлежит некоторому эллипсоиду и ее координаты в начальный момент времени известны со случайной ошибкой. Требуется восстановить решение в момент времени $\tau > 0$. Также рассматривается задача, в которой решение известно с некоторой случайной ошибкой в момент времени $t = T_1$. Требуется восстановить решение в некоторый момент времени $0 < \tau < T_1$. В каждой задаче рассматривается случай различных собственных значений матрицы A и случай кратных собственных значений.

   Общий результат применяется также к задаче о восстановлении k-ой производной тригонометрического полинома по его коэффициентам, известным со случайной ошибкой.

В заключение автор выражает глубокую благодарность и большую признательность научному руководителю Осипенко К.Ю. за постановку задачи, поддержку, помощь и обсуждение результатов.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах

1. Максимова И. С. Управляемость нелинейных систем со сменой фазового пространства // *Таврический вестник информатики и математики* — 2021. — №2(51). — С. 53–64.
2. Maximova I. The Problem of Controllability with Phase Space Change // *Advances in Systems Science and Applications* — 2023. — 23(1). — С. 61–68.
3. Maximova I. S. “Local Controllability in the Problem with Variable structure,” *Proc. of 16th International Conference “Management of Large-Scale System Development (MLSD), Moscow, Russia, 2023, IEEE. P. 1-3. ISBN 979-8-3503-3790-7.*
4. *Maximova I. S. Controllability of Triangular Systems with Phase Space Change //* Data Analysis and Optimization. In Honor of Boris Mirkin’s 80th Birthday, Springer Cham *— 2023. — Vol. 1. no. XXXV. — P. 225–236.*
5. *Максимова И. С., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление решения системы линейных дифференциальных уравнений по исходной информации со случайной ошибкой //* Математический сборник. *— 2025. — Т. 216, № 4. — P. 67–89.*

Тезисы конференций

1. Максимова И. С. “Управляемость нелинейных систем со сменой фазового пространства,” *Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2021 ”XXXII Крымская Осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам*, Симферополь: ПОЛИПРИНТ, 2021, ISBN 978-5-6046943-4-3.
2. Максимова И. С. “Задача управляемости треугольными системами со сменой фазового пространства,” *Управление развитием крупномасштабных систем. MLSD’2023 Труды шестнадцатой международной конференции*, Москва: ИПУ РАН, 2023, ISBN 978-5-91450-270-3.
3. Максимова И. С. “Выпуклость множеств достижимости в исследовании управляемости системы с переменной структурой,” *Сборник трудов XIV Всероссийского совещания по проблемам управления*, Москва: ИПУ РАН, 2024, ISBN 978-5-91450-276-5.
4. Максимова И. С., Осипенко К. Ю. “Оптимальное восстановление решений системы линейных дифференциальных уравнений по исходной информации со случайной ошибкой,” *Сборник тезисов докладов международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам*, Владимир: ВлГУ, 2024, ISBN 978-5-9984-1747-4.

Ирина Сергеевна Максимова

Управляемость дифференциальных систем с переменной структурой и задача восстановления

В диссертационной работе проводится исследование управляемости дифференциальных систем переменной структуры и решается задача оптимального восстановления решения линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений по исходной информации со случайной ошибкой. Получены новые результаты для различных классов нелинейных систем. Доказано достаточное условие управляемости нелинейных дифференциальных систем треугольного вида в задаче со сменой фазового пространства. Доказано достаточное условие уравляемости системы со сменой фазового пространства в случае, когда правые части дифференциальных включений являются вогнутыми отображениями. Доказано достаточное условие управляемости задачи со сменой фазового пространства в случае, когда нелинейная система в первом пространстве линеаризуется при некоторой замене переменных, а нелинейная система во втором пространстве является локально нуль-управляемой. Доказаны теоремы об оптимальном восстановлении линейного оператора и решения линейной системы дифференциальных уравнений по исходной информации со случайной ошибкой. Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений восстановлено при различных вариантах задания исходной информации.

Irina Sergeevna Maksimova

Controllability of differential systems with variable structure and recovery problem

The thesis investigates the controllability of differential systems of variable structure and solves the problem of optimal recovery of the solution of a linear system of ordinary differential equations from initial information with random error. New results for different classes of nonlinear systems are obtained. A sufficient condition of controllability of nonlinear triangular differential systems in the problem with phase space change is proved. A sufficient condition of controllability of the system with phase space change in the case when the right parts of differential inclusions are concave mappings is proved. A sufficient condition of controllability of the problem with phase space change is proved in the case when the nonlinear system in the first space is linearized at some replacement of variables, and the nonlinear system in the second space is locally zero-controllable. The theorems on the optimal recovery of the linear operator and the solution of the linear system of differential equations by the initial information with random error are proved. The solution of the system of ordinary differential equations is recovered under different variants of the initial information setting.