

Федеральное государственное учреждение
"Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им.
М.В. Келдыша Российской академии наук"

УДК 519.7, 51-77

На правах рукописи

СТЕПАНЦОВ Михаил Евгеньевич

**МЕТОД ЗАМЕНЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
КЛЕТОЧНЫМИ АВТОМАТАМИ В ЗАДАЧАХ СОЦИАЛЬНО-
ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ**

Специальность 1.2.2 - Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ (физико-математические науки)

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант д. ф.-м. н., профессор
Малинецкий Георгий Геннадьевич

Москва 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. Некоторые сведения из истории моделирования социально-экономических процессов	4
2. Актуальность темы	12
3. Степень разработанности темы	13
4. Цель работы, задачи и методы исследования	15
5. Научная новизна. Основные положения, выносимые на защиту	16
6. Теоретическая и практическая значимость полученных результатов, их достоверность и обоснованность, апробация	18
7. Публикация результатов исследования	19
ГЛАВА 1. МЕТОД ЗАМЕНЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КЛЕТОЧНЫМИ АВТОМАТАМИ ПРИ РАССМОТРЕНИИ ЗАДАЧ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ	26
1.1. Особенности моделей класса клеточных автоматов и связанная с ними терминология	27
1.2. Стандартная запись правил клеточных автоматов и их примеры	28
1.3. Общие принципы замены непрерывных моделей моделями на основе клеточных автоматов	29
1.4. Проверка адекватности замены методом среднего поля для клеточного автомата	30
1.5. Замена дифференциальных уравнений и теорема о сходимости	32
ГЛАВА 2. ЗАМЕНА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КЛЕТОЧНЫМИ АВТОМАТАМИ В МОДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННОГО ПРОТИВОБОРСТВА	36
2.1. Модель информационного противоборства на основе интегро-дифференциального уравнения	36
2.2. Построение дискретной модели	37
2.3. Численные эксперименты	40
2.3. Модификация дискретной модели, расширяющая область ее применимости	42
2.5. Численные эксперименты с модифицированной моделью	44
ГЛАВА 3. ЗАМЕНА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КЛЕТОЧНЫМИ АВТОМАТАМИ В МОДЕЛИ А.П. МИХАЙЛОВА «ВЛАСТЬ-ОБЩЕСТВО»	49
3.1. Модель А.П. Михайлова «власть-общество»	49
3.2. Построение стохастической модели на основе клеточного автомата	51
3.3. Численные эксперименты с базовой моделью	55
3.4. Дополнение базовой модели экономическими и социальными параметрами.	61
3.5. Численные эксперименты с дополненной моделью	66
ГЛАВА 4. ЗАМЕНА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КЛЕТОЧНЫМИ АВТОМАТАМИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДВИЖЕНИЯ НЕОРГАНИЗОВАННОЙ ГРУППЫ ЛЮДЕЙ	73
4.1. Моделирование диффузии при помощи клеточных автоматов с окрестностью Марголуса	73
4.2. Моделирование движения неорганизованной группы людей при помощи клеточных автоматов с окрестностью Марголуса	79
4.3. Модель движения неорганизованной группы людей с элементами прогнозирования ситуации на основе решеточного газа	86
4.4. Модель движения неорганизованной группы людей с элементами прогнозирования ситуации на основе стохастического клеточного автомата	89
4.5. Общая модель движения неорганизованной группы людей с элементами прогнозирования ситуации	92
4.6. Вопрос о границах поля клеточного автомата	99
ГЛАВА 5. ОДНОМЕРНЫЙ КЛЕТОЧНЫЙ АВТОМАТ ВЗАМЕН НЕПРЕРЫВНОЙ МОДЕЛИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ ЧИСЛЕННОСТИ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ГРУППЫ	101
5.1. О математическом моделировании профессиональных групп	101
5.2. Математическая модель возрастной структуры учителей средних школ	103

5.3. Тестовые расчеты при помощи модели	107
5.4. Методика вычисления параметров модели.....	110
5.5. Предварительная обработка статистических данных по профессиональной группе учителей Москвы и Ярославской области	111
5.6. Расчет коэффициентов для имитационных схем профессиональных групп учителей Москвы и Ярославской области	116
5.7. Прогнозирование динамики возрастной структуры учителей для некоторых сценариев развития ситуации	120
5.8. О соответствии результатов прогнозирования текущей ситуации в профессиональной группе учителей	128
5.9. Моделирование динамики численности студентов	129
ГЛАВА 6. ДИСКРЕТНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ	134
6.1. Первоначальная динамическая модель транспортной сети	135
6.2. Тестовые расчеты при помощи имитационных систем на основе первоначальной модели	139
6.3. Построение имитационных систем и прогнозирование развития сетей железных дорог России и Украины	144
6.4. Модификация модели транспортной сети с целью повышения ее адекватности	158
6.5. Тестовые расчеты с использованием модифицированной модели.....	161
6.6. Имитационные системы сетей железных дорог России и Украины на основе модифицированной модели транспортной сети.....	165
ГЛАВА 7. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СПОРТИВНЫХ СОРЕВНОВАНИЙ.....	168
7.1. Моделирование теннисного матча.	169
7.2. Пример применения имитационной схемы теннисного матча.	174
7.3. Моделирование волейбольного матча	178
7.4. Результаты некоторых численных экспериментов с моделью волейбольного матча.....	179
7.5. Имитационное моделирование футбольного матча	180
7.6. Анализ справедливости турнирных формул	186
ГЛАВА 8. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ, ПОЛУЧЕННЫХ ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕДЛАГАЕМОГО МЕТОДА	190
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	193
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	196

ВВЕДЕНИЕ.

- Нет, - сказал Федя. - Как-то у вас все упрощенно получается, Говорун. Конечно, когда человек ведет автомобиль, он не может блеснуть интеллектом...

- Точно так же, - перебил хитроумный Клоп, - как не блещет интеллектом оса, откладывающая яйца. Тут, знаете ли, не до интеллекта [1].

1. Некоторые сведения из истории моделирования социально-экономических процессов

Математика как область знания с момента своего зарождения оперировала набором моделей объектов и явлений окружающего мира. Геометрические фигуры представляли собой изначально модели участков земли, а натуральные числа – модели товаров, животных или людей. И лишь впоследствии эти модели потеряли связь с моделируемыми объектами и стали чистой абстракцией. Таким образом, математическое моделирование – в том числе моделирование процессов, происходящих с участием человека – это основа основ математики.

И всё же не станем утверждать, что моделирование социально-экономических процессов было распространено на начальном этапе развития математической мысли. Лишь с конца XVII века, когда математика становится не просто искусством счета, а полноценным средством моделирования [2], [3], можно говорить о начале ее применения для описания явлений, происходящих в социуме. Но и в этот период времени математические модели использовались, прежде всего, в области естественных наук, прежде всего – физики, которые воспринимались научным сообществом как более или менее точные, а гуманитарные области знаний, как нечто расплывчатое, только ждали энтузиастов применения в них математических инструментов.

Одним из первых таких исследователей можно назвать Мальтуса, который в своей работе [4] рассмотрел подход к динамике народонаселения, который на современном языке представляет собой простейшую задачу Коши для дифференциального уравнения. Первый блин оказался комом, ведь сделанный Мальтусом из его модели вывод о неизбежной гуманитарной катастрофе не выдерживает никакой критики. Но научное знание тем и характерно, что не представляет собой застывшую догму, но непрерывно изменяется благодаря тому, что подвергает свои положения регулярным проверкам и ревизиям [5], [6]. И вскоре математик Ферхюльст модифицировал модель Мальтуса, учтя ограниченность жизненных ресурсов [7]. И хотя здесь данная модель рассматривается скорее применительно к популяции животных, она, несомненно, является улучшением предыдущей и полагает начало целому ряду математических моделей в демографии, которые разрабатывались как зарубежными, так и отечественными

учеными. Речь идет о моделях, в которых демографическая система влияет на свою динамику через какие-либо социальные, экономические или инновационные механизмы, как это предлагалось еще Кремером [8] и Кузнецом [9]. Этот подход был развит Капицей, Курдюмовым и Малинецким [10], Малковым [11], и нашел свое отражение в теоретической демографии Подлазова [12].

Такие нелинейные модели [13], [14] обладают важным качеством, связанным с тем, что динамика системы не сводится к сумме динамик её составляющих. Этот эффект, рассмотренный во многих работах, посвященных синергетике [15], [16], [17], [18], [19], очень важен для исследования социально-экономических явлений, ведь именно он приводит к процессам самоорганизации из хаоса [20], [21], [22], [23]. А такого рода процессы в основном и определяют социальные, экономические и иные, связанные с деятельностью человека, явления [24], [25]. У всех упомянутых моделей есть некая общая черта. Поскольку математическое моделирование начиналось с приложений к физике, а физическая реальность – по крайней мере, во время описываемых событий – воспринималась как нечто носящее в принципе континуальный характер, то и математические модели изначально должны были иметь тот же характер, основываясь на непрерывных функциях [26], [27], дифференциальных уравнениях и интегральных конструкциях [28] для решения последних, с событиями, происходящими в рамках пространственно-временного континуума. Дискретизация допускалась лишь в отдельных случаях [29], [30], часто – как приближенный метод преодоления трудностей в получении точных решений [31].

Между тем, синергетический подход, изначально широко использовавшийся в задачах физики, химии и подобных областей [32], [33], [34], [35], [36], [37], [38] нашёл своё применение и в науках о человеке [39], [40], [41], [42]. При этом зачастую «физические» подходы и модели хаоса и самоорганизации механически переносились в «гуманитарные» сферы.

Следует, конечно, указать, что и в описываемой области ряд моделей имеют несколько иной характер. Подход Форрестера [43], [44], несомненно, является шагом в сторону от проторенного пути дифференциальных уравнений, однако и он продолжает рассматривать дискретную по сути систему, каковую представляет собой любая часть человеческого общества, в терминах непрерывных функций. Что касается такой существенной в любой подобной модели величины как время, его непрерывный характер практически нигде не оспаривается.

В этом контексте определенный интерес представляет когортный метод, предложенный Дэвидом Глассом [45] и широко используемый в классической демографии. Он подразумевает принципиальную дискретизацию времени. Однако он применяется в основном для прямых расчетов демографических показателей, а при построении математических моделей до

последнего времени не принимался в рассмотрение. В настоящей работе одна из глав посвящена математическому моделированию некоторых социальных групп именно на основе данного метода.

Безусловно, нельзя переоценить вклад в эту область исследований, сделанный фон Нейманом, который в своей классической работе [46], [47] рассматривал более широкую проблематику: речь шла о моделировании самовоспроизводящихся систем, то есть, в том числе, и живых организмов. Планируя объединить в единую теорию принципы организации естественных и искусственных систем, он вначале намеревался построить непрерывную модель самовоспроизведения, основанную на дифференциальных уравнениях в частных производных, описывающих диссипативные процессы. Однако в итоге он перешел от «кинематической» модели воспроизведения к тому, что назвал «клеточной структурой», то есть, в современных терминах – к клеточному автомату. Именно этот подход и положен в основу настоящей работы.

Итак, понятие «клеточный автомат» ввел фон Нейман, хотя ранее похожие идеи возникали и у Станислава Улама [48], а Конрад Цусе разработал [49] идею параллельной обработки данных при помощи структур, которые он называл «вычисляющими пространствами».

Работа фон Неймана была в дальнейшем продолжена Артуром Берксом, под редакцией которого вышла первая книга по теории клеточных автоматов [50]. В шестидесятые годы XX века Холланд использовал клеточные автоматы для решения задач оптимизации [51], для чего создал программный имитатор дискретных моделей – прообраз машин клеточных автоматов. Один из их будущих создателей, Тоффоли, начинал свои исследования клеточных автоматов, работая с этим имитатором [52].

Хедлунд в работах [53] и [54] рассматривал распределенные структуры с дискретным набором состояний и получил для них результаты, связанные с вычислимостью и возможностью сведения к фундаментальной модели, впоследствии доказанные Ричардсоном [55], Пэттом и Аморозо [56], и развитые Смитом [57] и Аладьевым [58].

Вопросы вычислимости и обратимости клеточных автоматов явились большим достижением теоретической математики, но никак не были ориентированы на решение прикладных задач математического моделирования [59], [60], [61]. Правда, изучение этих тем японскими учеными [62] стало началом развития японской школы исследователей клеточных автоматов, внесшей большой вклад в развитие методов построения таких моделей для различных областей знания (например, [63]).

Доказанные в упомянутых работах вычислимость клеточных автоматов и возможность [64] сведения любого клеточного автомата к универсальному, имеющему восемь состояний клетки и окрестность Мура, подводят теоретический фундамент под принципиальную

возможность моделирования при помощи клеточных автоматов и проверки адекватности таких моделей.

Широкую известность клеточным автоматам принесла изобретенная Джоном Конвеем игра "Жизнь" [65], [66]. Она пользовалась огромной популярностью и сделала очень хорошую рекламу клеточным автоматам. На волне этой популярности Тоффоли [52] предложил использовать клеточные автоматы для математического моделирования непосредственно явлений окружающего мира, а не только общих его аспектов мира, таких, как конкуренция, эволюция и т.п.

Для этого модель должна сохранять информацию в процессе своей эволюции, то есть быть обратимой. Обратимость клеточных автоматов и применимость их в математическом моделировании были исследована Фредкином, Марголусом и Тоффоли в [67], [68], [69], [70] и [71].

Беннет и Гринстейн, в свою очередь, рассмотрели вопросы, связанные с возможностью физического моделирования при помощи необратимых клеточных автоматов [72], [73], главным образом представлявших собой. В [74] было показано, что они могут быть применены для моделирования диссипативных и иных необратимых процессов. Ожидается, что при исследовании процессов в материалах, обладающих фрактальной структурой [75], [76] клеточные автоматы могут быть эффективным вычислительным инструментом.

Характерной особенностью клеточных автоматов является простота правил и однородность моделей, что позволяет многократно увеличивать скорость моделирования на компьютерах с высокой степенью параллельности процессоров, дающих возможность одновременно обновлять состояния миллионов клеток. Это очень сильно убыстряет вычисления по сравнению с обычными компьютерами [77], [78].

Так, ещё в те времена машины клеточных автоматов [79], [80] достигали быстродействия, сравнимого с CRAY-1 (конечно, лишь в приложении к клеточным автоматам), работая на базе обыкновенного персонального компьютера IBM PC. Такие машины были разработаны в лаборатории информатики MIT [81], [82], [83]. Тем самым были открыты широчайшие возможности прикладного использования клеточных автоматов.

Большая работа в теоретических исследованиях и систематизации этих моделей была проделана Стивеном Волфрамом [84], [85], [86], [87], [88], [89], [90], издателем рецензируемого журнала *Complex Systems*, целиком посвященного клеточным автоматам.

Неоднократно делались попытки создать всеобъемлющую классификацию клеточных автоматов. Предлагались как классификация по формальным признакам [91] (многомерность, "законность" - свойство сохранять нулевую конфигурацию, детерминированность, эргодичность и так далее), так и иерархическая [92], то есть сводящая автоматы одних видов к

другим. Но, как показано в [93], до сих пор не построено такой классификации клеточных автоматов, которая не приводила бы к трудностям при определении положения в ней любой модели, одновременно будучи практически полезной.

Следует отметить, что в данной работе клеточные автоматы они будут рассмотрены не как самодостаточные математические объекты, а как модели, имеющие чётко определённое прикладное значение, на которое указывал Фейнман [94].

Также, несмотря на широкое применение клеточных автоматов в математическом моделировании физических процессов, не удалось построить единый общий алгоритм создания моделей класса клеточных автоматов взамен дифференциальных и интегральных зависимостей. Это, по-видимому, невозможно, в силу существенного разнообразия физических моделей.

Возможны лишь общие подходы в отдельных областях. Так, например, были разработаны [95], [96], [97], [98] методы использования клеточных автоматов для решения уравнения Навье-Стокса [99], волнового уравнения достаточно произвольного вида [100], моделирования колебательных химических реакций [101] или уравнения состояния идеального газа с произвольным гамильтонианом взаимодействия между частицами [102].

В последние годы клеточные автоматы были использованы для моделирования таких разнообразных, и уже далеко не относящихся к чистой физике, а, скорее, занимающих междисциплинарное положение, явлений, как генетический дрейф [103], нарушение сердечных ритмов [104] и хаос [105]. В том числе появились основанные на клеточных автоматах модели явлений, в которых участвует человек (пробки на автотрассах [106], движение пешеходов [107], [108] и т.д.).

Клеточные автоматы используются также в качестве открытых систем [109] - трансдюсеров (которые принимают поток информации на вход и выдают соответствующий ему выходной поток) – для обработки изображений и распознавания образов [110], [111].

При этом следует обратить внимание, что при моделировании социально-экономических явлений применяемый для этого математический аппарат уже не столь разнообразен, как в случае физических задач. Здесь используются дифференциальные уравнения первого порядка, зачастую – обыкновенные, в самых сложных случаях – содержащие интегральные члены. Это дает возможность применить общий подход к построению клеточно-автоматных моделей в качестве альтернативы дифференциальным уравнениям для таких задач. В каком-то смысле мы можем рассматривать социально-экономическое моделирование как узкую специфическую область физики. О таком социофизическом подходе будет сказано ниже.

В пользу применения клеточных автоматов в задачах социально-экономической динамики говорит и принцип «мягкого» моделирования [112]. Проблема структурной устойчивости «жесткой» модели [113], [114] при ее малом возмущении решается в рамках

моделей класса клеточных автоматов достаточно просто – переводом величины из разряда параметров системы в характеристики состояния базового автомата. Такая гибкость модели позволяет решать вопрос, является ли исходная «жесткая» модель устойчивой без существенного увеличения вычислительной сложности. Этот подход продемонстрирован в данной работе на примере моделей «власть-общество».

Майнцер в своей фундаментальной работе «Сложносистемное мышление» [115] обосновывает использование клеточных автоматов в качестве эффективный инструмент для моделирования сложных систем, чувствительных к малейшему изменению начальных данных («эффект бабочки»). При этом они сочетают в себе более низкую вычислительную сложность по сравнению с компьютерной реализацией непрерывных моделей (при отсутствии проблем с устойчивостью решения, возникающих при замене уравнений разностными схемами [116]) с вычислительной неприводимостью, важность которой (скорее, с философской точки зрения) состоит в том, что эволюция такой системы не может быть описана более простым алгоритмом, чем сам автомат. Все эти особенности делают подобные модели в значительной степени подходящими для описания социально-экономических процессов.

Другим направлением в этой области математического моделирования является подход, основанный на переносе существующих математических моделей физических явлений на явления социальные или экономические. Он известен под названием «социофизика». В связи с тем, что подавляющее большинство физических моделей, как уже отмечалось, носит непрерывный характер, к соответствующим моделям человеческого поведения также возникает вопрос об их несоответствии дискретному характеру моделируемой реальности.

Среди этого класса моделей, тем не менее, хотелось бы выделить подход Хаггерстранда, рассмотревшего распространение инноваций на основе аналогии с диффузионным процессом [117]. На этой основе Бекманом [118] моделировались транспортные потоки, а Малковым [119] создана концепция моделирования исторического развития транспортных систем, основанная на использовании математического моделирования для писания исторических процессов [120], [121], [122]. Подход Вильсона [123] к описанию транспортных потоков основан на аналогии с энтропийными физическими моделями, а модель Швецова и Алиева [124] позиционируется как «гравитационная». Такого рода физические аналогии были использованы в настоящей работе в сугубо дискретных моделях транспортных систем. В этой же парадигме рассматривали общественную деятельность человека Коротаев и Чернавский [125]. В рамках своей концепции эти исследователи выдвигают утверждение [126], что основой для моделирования социально-экономических процессов должно быть моделирование макросистемы в масштабе всего человечества. Основные принципы, лежащие в основе данной диссертации, являются прямо противоположными и состоят в моделировании микродинамики системы таким образом, чтобы

ее макродинамика соответствовала моделируемым процессам. При этом такой подход скорее дополняет, чем опровергает концепцию школы Чернавского.

С другой стороны, классические модели транспортных систем, например [127], учитывающие в той или иной степени дискретный характер реальности, были основаны на идее планового построения не только самих транспортных сетей, что логично, но и потоков в них, что далеко не всегда адекватно моделируемой реальности. При этом они основываются, опять же, на континуальном подходе к пространству [128], [129], в котором происходят моделируемые явления.

Отдельного упоминания заслуживает класс моделей, описывающих процессы взаимодействия субъектов – участников экономических процессов. Модель Леонтьева [130] рассматривает производство и потребление продукции как некую объективную данность. В макроэкономической производственной функции [131] объем производства зависит от численности занятых в экономике людей, и никакие их другие характеристики не рассматриваются как существенные. В рамках модели экономического роста Солоу [132] параметры, определяющие динамику системы, рассматриваются исключительно как экзогенные, никоим образом не учитываются потребности и стремления людей, участвующих в экономическом процессе. Кроме того, во всех трех случаях все переменные, в том числе даже количество людей, рассматриваются как действительные числа, являющиеся аргументами непрерывных и дифференцируемых достаточное количество раз функций.

Перечисленные выше модели экономических систем были положены в основу значительного количества более новых математических моделей в экономике [133], [134], [135], [136], [137], [138], [139], [140], которые, таким образом, унаследовали указанные недостатки.

Анализ поведения человека, его биологической [141], [142] и сознательной активностей, также основывался, главным образом, на подходах, пришедших из физики [143]. Конечно, учитывая клеточное строение организма человека в целом, и мозга в частности, без дискретизации здесь было не обойтись [144], однако не только модели организма человека, но и строившиеся по аналогии с мозгом нейросети рассматривались [145], [146], опять-таки, в континуальной парадигме.

Правда, а одной из предметных областей, а именно в анализе поведения человека при выборе на основе своих предпочтений, был, однако, разработан класс моделей, носящий принципиально дискретный характер и достаточной степени упрощения, сохраняющей минимум необходимых свойств моделируемого объекта. Хотя изначально и здесь предпочтения при выборе набора товаров моделируются непрерывной функцией полезности, значительная часть современных моделей имеют в своей основе отношения на дискретных множествах. Таким образом, в этой области разработан достаточно мощный аппарат [147], в рамках

которого выбор в рамках дискретной реальности моделируется в дискретной же парадигме, и при этом достигается максимально возможное упрощение, не затрагивающее лишь существенных свойства системы. Одним из выдающихся достижений такого моделирования являются обобщенные паросочетания в задачах анализа двусторонних рынков [148] – концепция, принесшая ее автору Нобелевскую премию.

Модели этого класса представляют собой яркий пример того, как сохранение дискретного характера моделируемой реальности при допущении значительного упрощения модели по сравнению с моделируемым объектом позволяют получать адекватные и успешно применимые на практике математические модели социально-экономических процессов.

В последнее время широко распространились попытки математического моделирования хода спортивных соревнований. При этом речь не идет о чисто статистическом подходе [149], при котором результат матча или состязания рассматривается как случайное событие, а математические методы применяются для нахождения оценок параметров закона распределения соответствующей случайной величины – в этой ситуации моделирования социальных явлений вообще нет. Здесь же рассмотрим имитационный подход, при котором делаются попытки моделирования отдельного спортсмена, как выступающего индивидуально, так и находящегося в составе команды в игровом виде спорта.

Подобные модели [150] обычно имеют целью не строгое предсказание хода и результата спортивного соревнования, а, скорее, его имитацию в развлекательных целях. В связи с этим красочному интерфейсу имитационной схемы уделяется гораздо больше внимания, чем адекватности собственно модели. Неудивительно, что результаты прогнозов, получаемых таким методом, обычно бывают менее точными чем полученные с использованием классических статистических методов [151].

В данной области представляется уместным применить подход, являющийся чем-то средним между чистой статистикой и имитационным моделированием с большим количеством деталей, некую «золотую середину».

Особо хотелось бы упомянуть модель властной иерархии в обществе. Такая модель была предложена Михайловым [152], и при всех ее достоинствах, в ней, опять же, для описания объема власти, уровня чиновника в иерархии и воздействия общества на власть использовались непрерывные величины и функции, а закономерности динамики модели описывались дифференциальными уравнениями. Следует указать, что в дальнейшем развитии модели некоторые исследователи [153] частично отказались от континуальной парадигмы (в частности, был осуществлен переход к дискретной иерархии). Однако дифференциальный подход к описанию существенно дискретной реальности был сохранен.

Кроме того, говоря о моделировании поведения субъекта, нельзя обойти вниманием

исследования В.А. Лефевра, который, настаивая на невозможности описания поведения человека только через естественнонаучные модели и необходимости построения для этого отдельного класса моделей, ввел понятие рефлексивной системы и на этой основе разрабатывал математические модели поведения человека [154]. Принцип обратной связи, понимаемый именно в таком смысле, используется во всех моделях, предлагаемых в данной работе.

Таким образом, основной тенденцией в математическом моделировании социально-экономических процессов явилось использование традиционного для физики и иных естественных наук аппарата, основанного на анализе непрерывных функций, дифференциальном и интегральном исчислении. Этот подход находится в противоречии с тем, что моделируемая социальная реальность, множества людей и отношения на них носят дискретный характер, который заменяется в математической модели непрерывным. Зачастую модели социально-экономических явлений характеризуются при этом большим количеством переменных и сложными зависимостями между ними, основанием для чего служит высокая степень сложности моделируемого объекта. При этом сложные дифференциальные соотношения обычно не могут быть проанализированы аналитически и, для получения результатов, исследователь вынужден переходить к разностным схемам, то есть совершать обратный переход к дискретной парадигме. Такой двойной переход от дискретной природы моделируемой реальности к непрерывной модели и последующая замена ее на дискретную приводит к различного рода проблемам, снижающим в итоге адекватность модели.

Отметим, что, хотя данная диссертация построена в некоторой степени на критике вышеперечисленных моделей, все они в большей или меньшей степени являются основанием, на котором базируются новые модели, предлагаемые в работе. Каждая из последних строится на отрицании континуального характера, присущего классическому подходу, однако наследует за ним основные характеристики, допущения и структуру. Поэтому крайне сложно переоценить значение изложенных выше исследований для данной работы..

2. Актуальность темы

Актуальность рассматриваемой темы связана с тем, что математика, долгие годы бывшая инструментом исключительно естественных наук, всё более активно используется в областях знаний, традиционно относимых к гуманитарным. Соответственно, возникает большое количество задач в областях социологии, экономики, политологии, демографии, безопасности и многих других, для решения которых требуется математический подход вообще и построение, а затем использование математических моделей в частности.

В задачах социально-экономической динамики моделируемая реальность существенно дискретна, начиная с любого множества людей, равно как и отношений на этом множестве. Пространство, в котором происходят социально-экономические процессы, во многих случаях

носит дискретный характер. Населенные пункты, здания, помещения, транспортные коммуникации, профессиональные группы, спортивные соревнования, иерархия власти – всё это примеры структур, в рамках которых происходят социально-экономические процессы. Дискретность этих структур является определяющей для подобных процессов. Наконец, при осуществлении такой деятельности время зачастую рассматривается как разбитое на отдельные интервалы, при этом динамика процессов внутри этих интервалов не исследуется. Так, экономические показатели рассчитываются не непрерывно, а за конкретные периоды времени, спортивные соревнования состоят из серий противоборств, в каждом из которых значим лишь результат и т.п. Таким образом, достаточно адекватным является и использование дискретного времени при анализе подобных процессов.

Отсюда напрашивается вывод о том, что моделирование таких процессов уместно осуществлять при помощи дискретных моделей, которые могут быть успешно применены вместо непрерывных. Одним из классов таких моделей являются клеточные автоматы.

В то же время при моделировании социально-экономических процессов широко используются созданные по аналогии с физикой модели на основе дифференциальных уравнений. С их помощью получено значительное количество результатов, и нет никаких причин полностью отказываться от этих моделей и строить их дискретные аналоги «с нуля». С другой стороны, модели на основе дифференциальных уравнений имеют существенные ограничения на вид решения, на зависимости параметров, подвержены неустойчивостям при использовании численных методов для их решения и в целом являются гораздо менее гибкими в случае, когда возникает необходимость ввести в рассмотрение новые факторы. Клеточные автоматы лишены всех перечисленных недостатков, они широко используются в математическом моделировании в различных областях науки, этот класс моделей подробно теоретически изучен. Кроме того, клеточные автоматы позволяют значительно повысить скорость вычислений при моделировании с использованием специализированных компьютеров с высокой степенью параллельности вычислений. Поэтому их использование позволит **расширить область применимости исходных математических моделей и повысить эффективность вычислений** при решении прикладных задач.

3. Степень разработанности темы

Значительная часть методов, используемых для моделирования социально-экономических процессов, основана на использовании непрерывных математических объектов, дифференциальном и интегральном исчислении и других классических подходах. Этот подход восходит к Мальтусу [4] и Ферхюльсту [7]. Его применяли Кузнец [9], Гласс [45] и Кремер [8] для моделирования демографии, Леонтьев [130], Кобб, Дуглас [131] и Солоу [132] в экономике, Хаггерстранд [117] в своей концепции диффузии инноваций и Чернавский [125], исследуя

динамику условных информаций, Форрестер [43] при анализе тенденций мировой развития, Малков [11] в моделировании исторических процессов, Капица, Курдюмов и Малинецкий [10] для прогнозирования глобальной динамики и многие другие. Причина таких предпочтений состоит в том, что математическое моделирование изначально применялось в физике и смежных с ней дисциплинах, где реальность можно рассматривать, как непрерывную. Поэтому математические модели, применявшиеся в этих областях, представляли собой то, что сейчас носит название «уравнения математической физики». Однако даже в этом случае вставал вопрос о дискретном характере некоторых аспектов реальности. Например, законы термодинамики [155] являются следствием усреднения статистики составляющих термодинамическую систему частиц [151], уравнения, описывающие вязкую среду, основаны на законах движения и взаимодействия молекул [99], квантовые объекты носят дискретный характер, хотя и подчиняются дифференциальному уравнению Шрёдингера [156]. На необходимость рассматривать дискретные математические модели физических явлений наряду с уравнениями математической физики указывал Александр Андреевич Самарский. Он неоднократно высказывал мысль [157], состоящую в том, что вычислительный эксперимент является неотъемлемой и исключительно важной частью математического моделирования. В то время он в первую очередь имел в виду использование разностных схем, рассматривая их не как какое-то вспомогательное средство приближенных вычислений, а как полноценный класс математических моделей. Целью данной работы является, не претендуя на глобальность подхода А.А. Самарского, обосновать аналогичное утверждение в отношении клеточных автоматов. Последние можно рассматривать как модификацию непрерывных моделей социально-экономических процессов, в которых дискретизации подвергаются не только пространство и время (как в случае разностных схем), но и зависимые переменные.

В современном математическом моделировании физических явлений существуют многочисленные успешные примеры замены моделей, основанные на дифференциальных уравнениях, клеточными автоматами. Среди них – решёточные газы Фриша, Хаслахера, Помо [97], Апперта и Залески [158], описывающие процессы газо- и гидродинамики, многочисленные модели Тоффоли [71] и Марголуса [68]. Большое количество других примеров подобного моделирования можно встретить в издаваемом Стивенем Волфрамом журнале *Complex Systems*, посвящённом такому моделированию.

При этом разнообразие и сложность дифференциальных моделей физики позволили применить этот подход только для некоторых частных случаев. В то же время современные дифференциальные математические модели в области социально-экономических наук достаточно просты и относятся к узкому классу моделей, сводясь к задачам Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Таковыми являются, например,

система «власть-общество» Михайлова [152], модель Малинецкого структуры профессиональной группы преподавателей высшей школы [10] или модель информационного противоборства [159], основанная на нейробиологической схеме Рашевского [160]. Следовательно, есть основания предположить, что может быть найден общий подход к нахождению решений таких задач путём замены дифференциальных уравнений клеточными автоматами.

Однако до проведения данного исследования проблема создания общего подхода к замене клеточными автоматами моделей на основе дифференциальных уравнений хотя бы и указанного ограниченного класса в науке не рассматривалась.

4. Цель работы, задачи и методы исследования

Целью данного диссертационного исследования является разработка общего метода замены дифференциальных уравнений клеточными автоматами в задачах социально-экономической динамики, сводимых к обыкновенным дифференциальным уравнениям, и апробация этого метода на ряде математических моделей социально-экономической динамики путём осуществления такой замены и решения ряда прикладных задач на основе такого подхода. Этот подход, как уже отмечалось, позволит расширить область применимости исходных моделей и повысить эффективность вычислений.

Для достижения этой цели были поставлены следующие задачи:

1. Построение клеточного автомата, заменяющего обыкновенное дифференциальное уравнение, и доказательство сходимости решения, полученного с помощью этого автомата к решению соответствующей задачи Коши.

2. Построение с использованием этого подхода математических моделей движения неорганизованной группы людей и решение при помощи них ряда задач.

3. Построение дискретных математических моделей, аналогичных классическим непрерывным моделям А.П. Михайлова системы «власть-общество», имеющих более широкую область применимости, и решение с их помощью ряда прикладных задач.

4. Построение дискретной модели информационного противоборства на основе клеточного автомата, область применимости которой шире по сравнению с аналогичной непрерывной моделью и решения с ее помощью ряда задач оптимального управления.

5. Построение дискретной модели динамики численности профессиональной группы на основе метода когорт, компьютерное моделирование профессиональной группы учителей средних школ и прогнозирование динамики численности и структуры данной группы.

6. Построение модели транспортной сети, включающей обратную связь между функционированием сети и ее развитием, моделирование на ее основе сетей железных дорог России и других стран, анализ и прогнозирование развития этих сетей.

7. Разработка подхода к моделированию хода спортивных соревнований и построение

моделей, позволяющих провести моделирование хода матчей в играх с непрерывным и дискретным временем.

Объектом исследования диссертации являются такие социально-экономические процессы, которые могут быть формально сведены к задачам Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Предметом исследования являются метод замены клеточными автоматами дифференциальных уравнений и модификации ряда конкретных моделей, полученные с его помощью.

Исследования, проведенные в рамках данной работы, относятся к области дискретной математики и компьютерного моделирования. Отличительной чертой применяемого подхода является моделирование процессов на микроуровне с тем, чтобы модель соответствовала описываемой реальности на макроуровне. При помощи данного подхода, проводится построение конкретных компьютерных моделей, а также их верификация, что делает данную работу актуальной на нынешнем этапе развития математического моделирования.

В рамках исследования применялись методы: дискретной математики, теории клеточных автоматов (в частности, метод среднего поля), теории вероятностей и математической статистики, эконометрики, теории графов, теории конечных цепей Маркова, численные методы. Вычислительные эксперименты проводились в среде VBA с использованием приложения Microsoft Office Excel, при помощи которого формировались табличные и графические результаты исследований. Вычислительные эксперименты по динамическому развитию транспортной сети строились в специальной среде программирования, созданной в рамках выполнения научного проекта внешними исполнителями.

5. Научная новизна. Основные положения, выносимые на защиту

Все модели, методы, алгоритмы и полученные с их помощью результаты, представленные в диссертации, являются новыми и оригинальными. Метод замены дифференциальных уравнений клеточными автоматами является новым, поскольку разработан автором и обоснован им же путём доказательства сходимости решения, полученного при помощи клеточного автомата к решению исходной задачи Коши. Все модификации моделей, полученные в рамках данного исследования при помощи этого метода, являются новыми и оригинальными, поскольку основаны на клеточных автоматах, построенных автором работы.

Все опубликованные результаты по теме диссертационной работы были получены автором лично. В работах, опубликованных в соавторстве, вклад автора является определяющим. В тексте диссертации ради связности изложения приведены некоторые из перечисленных выше результатов, полученных другими исследователями, но они не указаны в качестве результатов данного исследования и не выносятся на защиту.

Основные результаты работы, выносимые на защиту.

1. Разработан общий метод построения клеточного автомата, заменяющего дифференциальное уравнение с сохранением макродинамики модели. Доказана сходимость решения, полученного при помощи построенного таким образом клеточного автомата к решению исходной задачи Коши.

2. Построен ряд дискретных модификаций математических моделей движения неорганизованной группы людей на основе клеточных автоматов. При их помощи исследовано явление «отрицательной вязкости» и рассчитаны оптимальные конфигурации препятствий для ряда случаев движения по узкому проходу.

3. Построена основанная на клеточном автомате дискретная модификация модели А.П. Михайлова «власть-общество». Доказано что ее динамика согласуется с динамикой непрерывной модели. При ее помощи получен ряд результатов, связывающих динамику политической системы с уровнем коррупции, региональными демографическими различиями, а также социально-экономическую динамику такой системы с уровнем транспортных связей между регионами.

4. Построена дискретная модификация модели информационного противоборства, основанная на клеточном автомате. Доказано что ее макродинамика совпадает с макродинамикой аналогичной непрерывной модели в области применимости последней, при этом в дискретную модель введены факторы, которые невозможно было учесть в рамках непрерывной модели, такие как влияние малых групп и интериоризация общественного мнения индивидами. При помощи этой дискретной модели решены задачи оптимального управления пропагандистской кампанией для ряда сценариев.

5. Разработана методика моделирования динамики численности профессиональной группы, при помощи которой построены модели численности учителей средних школ и студентов вузов. Получен прогноз социальной динамики профессиональной группы учителей средних школ Москвы и Ярославской области.

6. Создана дискретная модификация математической модели динамического развития транспортной сети. На ее основе получен прогноз развития сетей железных дорог России для ряда сценариев будущего.

7. Разработана методика моделирования хода спортивных соревнований. С ее помощью доказан ряд утверждений относительно влияния права первой подачи на результат в играх с дискретным временем, проведен ретроспективный анализ ряда футбольных и волейбольных матчей и введено понятие справедливости турнирной формулы соревнования.

Таким образом, выносимые на защиту результаты имеют вид нового метода, новых модификаций математических моделей, а также вычислительных методов и алгоритмов,

программных комплексов, и полученных с их помощью закономерностей, характеризующих социально-экономические процессы.

6. Теоретическая и практическая значимость полученных результатов, их достоверность и обоснованность, апробация

Главным теоретическим результатом диссертационного исследования является предлагаемый метод замены дифференциальных зависимостей клеточными автоматами и родственными им объектами, применяемый при моделировании социально-экономических процессов, позволяющий повысить эффективность расчётов и расширить области применимости моделей. В рамках его применения разработаны: ряд дискретных модификаций математических моделей движения неорганизованной группы людей, дискретная модификация модели А.П. Михайлова «власть-общество», дискретная модификация модели информационного противоборства, дискретная модификация модели динамики численности профессиональной группы, динамическая модификация модели развития транспортной сети, а также модели хода спортивных соревнований с дискретным и непрерывным временем.

Разработанные модели могут быть использованы для решения прикладных задач моделирования и прогнозирования социально-экономической динамики в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, в ФИЦ «Информатика и управление» РАН, на факультете вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, во Всероссийском НИИ железнодорожного транспорта.

Модель хода спортивных соревнований может быть применена организаторами спортивных соревнований и тренерами команд для анализа будущих или состоявшихся матчей.

Достоверность и обоснованность теоретических результатов, полученных в диссертации, обеспечиваются корректным применением математического аппарата дискретной математики, теории клеточных автоматов, теории вероятностей и математической статистики, эконометрики, теории графов, и строгим математическим обоснованием предложенных методов и алгоритмов. Адекватность построенных моделей подтверждается соответствием результатов, получаемых при помощи компьютерного моделирования, теоретически полученным результатам и данным наблюдений.

Основные результаты диссертационной работы докладывались на конференциях:

- 1) IV Международной конференции "Математика, компьютер, образование" (Пушино, 1997);
- 2) девярых, десярых, одиннадцатых, четырнадцатых и девятнадцатых математических чтениях МГСУ/РГСУ (Москва, 2002, 2003, 2004, 2006, 2010);
- 3) международных конференциях «Mathematical modelling of social and economical dynamics» (MMSED) (Москва, 2004, 2010);

4) V международном научно-практическом междисциплинарном симпозиуме «Рефлексивные процессы и управление» (RPC'2005) (Москва, 2005);

5) XIV, XXIX, XXX, XXXI, XXXII Международных конференциях «Проблемы управления безопасностью сложных систем» (Москва, 2006, 2021, 2022, 2023, 2024);

6) международной научной конференции «Проблемы регионального и муниципального управления» (Москва, 2007);

7) международной научной конференции «Философия математики: актуальные проблемы» (Москва, 2007);

8) пятой, шестой, седьмой, девятой и десятой всероссийских научно-практических конференциях по имитационному моделированию и его применению в науках и промышленности "Имитационное моделирование: теория и практика (Петербург, 2011, Казань, 2013, Москва, 2015, Казань, 2019, Петербург, 2021, Казань, 2023);

9) первой и второй российских конференциях «Социофизика и социоинженерия» (Москва, 2015, 2018);

10) II, III, IV, V, VI, VII международных конференциях «Проектирование будущего. Проблемы цифровой реальности» (Москва, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024).

Результаты также докладывались на научных семинарах:

1) ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова «Математическое моделирование социальных процессов» (Москва, 2014, 2015);

2) кафедры прикладной математики факультета информатики РГСУ;

3) кафедры высшей математики на факультете экономики НИУ ВШЭ;

4) ИПМ им. М.В. Келдыша РАН «Будущее прикладной математики».

Исследования по тематике диссертации проводились в соответствии с плановой тематикой научных работ Московского государственного социального университета, Российского государственного гуманитарного университета, Российского государственного социального университета, Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» и Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН в рамках ГНТП «Безопасность» (1996 год) и проектов Российского фонда фундаментальных исследований 05-01-00852-а, 05-06-80237-а, 06-06-80503-а, 07-06-00330-а, 08-01-00781-а, 09-06-00342-а, 11-01-00887-а, 11-06-00193-а, 15-01-06192-а, 15-06-07926-а, 18-01-00619-а, и 19-010-00423-а.

7. Публикация результатов исследования

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 60 статьях, препринтах и материалах докладов, среди которых 7 публикаций, индексируемых в международной базе цитирования Scopus (1-7), 10 публикаций, индексируемых в RSCI (8-17) и 1 публикация в ведущем рецензируемом издании, рекомендованном ВАК, относящемся к категории К3 (18).

Доклады по тематике диссертации представлены на 16 международных и 13 всероссийских научных и научно-практических конференциях.

Публикации, индексируемые в международной базе цитирования Scopus:

1. Malinetskii G.G., Stepanov M.Ye. Cellular automata for some gas dynamic processes // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 1996. – 36(5). – P. 669–675.

2. Malinetskii G.G., Stepanov M.E. Application of cellular automata for modeling the motion of a group of people // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2004. – 44(11). – P. 1992–1996.

3. Malinetskii G.G., Stepanov M.E. A discrete mathematical model of the dynamic evolution of a transportation network // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2009. – 49(9). – P. 1493–1498.

4. Priadein R.B., Stepanov M.Ye. On a possible approach to a sport game with discrete time simulation // Computer Research and Modeling. – 2017. – 9(2). – P. 271–279.

5. Stepanov M.E. Simulation of the “Power–Society–Economics” System with Elements of Corruption Based on Cellular Automata // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2018. – 10(2). – P. 249–254.

6. Stepanov M.E. Cellular automaton based model of information warfare. Mathematical Models and Computer Simulations. 2021. – 13 (2). – P. 210-217.

7. Stepanov M.E. Modeling some scenarios in the “power – society” system concerning migration and changing the number of region // Компьютерные исследования и моделирование. – 2024. – N. 16, № 6. – С. 1499-1512.

Публикации, индексируемые в RSCI:

8. Малинецкий Г. Г., Степанов М. Е. Моделирование движения толпы при помощи клеточных автоматов. // Известия Высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. — 1997. — Т.5, № 5. — С. 75–79.

9. Малинецкий Г. Г., Степанов М. Е. Моделирование диффузионных процессов с помощью клеточных автоматов с окрестностью Марголуса // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1998. Т. 38, № 6. — С. 1017–1020.

10. Степанов М. Е. Моделирование движения группы людей на основе решеточного газа с нелокальными взаимодействиями // Известия Высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. — 1999. — Т. 7, № 5. — С.44–46.

11. Степанов М.Е. Математическая модель направленного движения группы людей // Математическое моделирование. — 2004. — Т. 16, № 3. — С. 43–49.

12. Степанов М.Е. Дискретная модель возрастной структуры учителей средней школы // Математическое моделирование. — 2005. Т. 17, № 3. — С. 61–66.

13. Степанцов М.Е. О возможной модификации дискретной математической модели динамического развития транспортной сети // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — Т.5, № 3. — С. 395–401.

14. Прядеин Р.Б., Степанцов М.Е. Об одном подходе к имитационному моделированию спортивной игры с непрерывным временем // Компьютерные исследования и моделирование. — 2014. — Т.6, № 3. — С. 455–460.

15. Петров А.П., Степанцов М.Е. Моделирование трехуровневой системы "власть-общество" на основе клеточных автоматов // Математическое моделирование. — 2016. — Т. 28, № 3. — С. 119–132.

16. Прядеин Р.Б., Степанцов М.Е. Об одном подходе к имитационному моделированию спортивной игры с дискретным временем // Компьютерные исследования и моделирование. — 2017. — Т. 9, № 2. — С. 271–279.

17. Степанцов М.Е. О сходимости решения, получаемого при помощи клеточного автомата, к решению исходной задачи Коши // Математическое моделирование. — 2025. — Т. 37, № 3. — С. 75–84.

Публикации в журналах, рекомендованных ВАК (категория К3):

18. Малинецкий Г.Г., Степанцов М. Е. Учет коррупции при моделировании экономических последствий изменения числа регионов в системе «власть - общество» // Искусственные общества. – 2024. – Т. 19, № 3.

Остальные публикации:

19. Петров А.П., Степанцов М.Е. Дискретная распределенная модификация модели "власть-общество" на основе клеточного автомата. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. — 2014. — №100.

20. Степанцов М. Е. Моделирование динамики толпы // Труды IV Международной конференции "Математика, компьютер, образование" — Пущино, 1997. — С. 257–260.

21. Степанцов М.Е. Клеточные автоматы как модели нелинейных явлений // Математические методы и приложения. // Труды девярых математических чтений МГСУ. — Москва, 2002. — С. 141–142.

22. Степанцов М.Е. Моделирование движения толпы при заданной конфигурации препятствий // Проблемы управления безопасностью сложных систем. Материалы X международной конференции. — М.: РГГУ, 2002. — Т.2. — С.130–132.

23. Степанцов М.Е. Расчет некоторых случаев движения неорганизованной группы людей // Математические модели и приложения. Труды десятых математических чтений МГСУ. — Москва, 2003. — С. 136–137.

24. Степанцов М.Е. Модель направленного движения толпы с элементами анализа

ситуации // Электронный журнал "Исследовано в России". — 2003. № 89. — С. 991–995.

25. Stepansov M. Age structure model for secondary school teachers // Proceedings of the international conference "Mathematical modelling of social and economical dynamics" (MMSED-2004), June 23-25, 2004, Moscow, Russia. — 2004. — P. 352–355.

26. Степанцов М.Е. Моделирование и прогнозирование динамики возрастной структуры учителей средней школы // Математические модели и приложения. Труды одиннадцатых математических чтений МГСУ. М.: МГСУ, 2004. — С. 149–151.

27. Малинецкий Г.Г., Равлюк С.Г., Степанцов М.Е. Математическое моделирование и прогнозирование динамики возрастной структуры учителей средних школ России. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. — 2005. — №90.

28. Степанцов М.Е. О возможности применения математических моделей для иллюстрации некоторых вопросов философии // Математические методы и приложения. Труды четырнадцатых математических чтений РГСУ. — М.: РГСУ, 2005. — С. 175–177.

29. Степанцов М.Е. Математическое моделирование динамики возрастной структуры профессиональной группы на примере учителей средней школы // Рефлексивные процессы и управление (RPC'2005). V Международный научно-практический междисциплинарный симпозиум. Москва, Институт философии РАН, 11-13 октября 2005 г. Материалы. — М.: Когито-Центр, 2005. — С. 252–254.

30. Малинецкий Г.Г., Равлюк С.Г., Степанцов М.Е. Моделирование и прогнозирование динамики возрастной структуры учителей // Социология: методология, методы, математические модели. — 2006. — № 23. — С.169–194.

31. Степанцов М.Е., Равлюк С.Г. Прогнозирование динамики возрастной структуры учителей средних школ // Проблемы управления безопасностью сложных систем. Труды XIV Международной конференции. — М.: РГГУ, 2006. — С. 425–428.

32. Равлюк С.Г., Степанцов М.Е. Прогноз динамики возрастной структуры учителей средних школ Москвы // Проблемы регионального и муниципального управления. Материалы международной научной конференции. Москва, 26 апреля 2007 года. — 2007. — С. 60–62.

33. Степанцов М.Е. Математические модели класса клеточных автоматов в качестве примеров, иллюстрирующих некоторые вопросы философии // Философия математики: актуальные проблемы. Материалы Международной научной конференции 15-16 июня 2007. — М.: Изд. Савин С.А., 2007. — С. 277–279.

34. Степанцов М.Е. Динамическая модель развития транспортной сети. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. — 2008. — №79.

35. Степанцов М.Е., Степнова И.В. Моделирование динамики численности студентов на основе метода когорт // Математические методы приложения. Труды девятнадцатых

математических чтений РГСУ. Часть I. — М.: РГСУ, 2010. — С. 171–173.

36. Stepantsov M.E. On calibrating the dynamic model of a transport network // Труды Третьей международной конференции "Математическое моделирование социальной и экономической динамики" (MMSED-2010). 23-25 июня 2010 года. — М.: ЛЕНАНД, 2010. — С. 247–251.

37. Агапова Г.И., Гавдаева А.В., Степанцов М.Е. Моделирование динамики развития железнодорожных сетей. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. — 2011. — №73.

38. Степанцов М.Е. Моделирование некоторых сценариев развития систем железных дорог России и Украины// Пятая всероссийская научно-практическая конференция по имитационному моделированию и его применению в науках и промышленности "Имитационное моделирование: теория и практика" ИММОД-2011. Труды конференции. — СПб: ОАО Центр технологии и судостроения, 2011. — Т.1. — С. 282–285.

39. Степанцов М.Е. Моделирование динамики развития транспортных систем// Альманах современной науки и образования. — 2011. — №11 (54). — С. 68–70.

40. Степанцов М.Е. Улучшенная динамическая модель транспортной сети // Альманах современной науки и образования. — 2012. — №11 (66). — С. 178–180.

41. Степанцов М.Е. Пробные расчеты с использованием улучшенной модели динамического развития транспортной сети // Альманах современной науки и образования. — 2013. — №10 (77). — С. 164–167.

42. Степанцов М.Е. Модифицированная динамическая модель транспортной сети // Сборник докладов шестой всероссийской научно-практической конференции "Имитационное моделирование. Теория и практика" (ИММОД-2013). Том 1. — Казань: Издательство "ФЭН" Академии наук РТ, 2013. — С. 263–266.

43. Степанцов М.Е. Моделирование системы "власть-общество-экономика" на основе клеточного автомата // Седьмая всероссийская научно-практическая конференция "Имитационное моделирование. Теория и практика" (ИММОД-2015). Труды конференции. 21-23 октября 2015 г., Москва: в 2 т. — М.: ИПУ РАН, 2015. — Т.1. — С. 168–172.

44. Степанцов М.Е. Математическое моделирование системы «власть-общество» при помощи клеточного автомата // Теория активных систем (ТАС-2014) [Электронный ресурс]: Материалы международной научно-практической конференции, 17-19 нояб. 2014 г, Москва. — М.: ИПУ РАН, 2014. — С. 213–215.

45. Петров А.П., Степанцов М.Е. Модификация модели "власть-общество" на основе клеточного автомата // Математическое моделирование социальных процессов. Сборник трудов (вып. №17). — М.: Изд-во "Экон-Информ", 2015. — С. 110–126.

46. Степанцов М.Е. Модель системы "Власть-общество" на основе клеточного автомата // Первая российская конференция "Социофизика и социоинженерия". МГУ им. М.В. Ломоносова, 8-11 июня 2015 года. — М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2015. — С. 60.
47. Степанцов М.Е. Моделирование транспортных систем на примере железных дорог // Людина, суспільство, комунікативні технології: матеріали III міжнар. наук.-практ. конф., 18-19 вересня 2015 р., Харків - Красний Лиман. — Краматорськ: ТОВ "Контраст", 2015. — С. 288-291.
48. Степанцов М.Е. Дискретная математическая модель системы «власть–общество–экономика» на основе клеточного автомата // Компьютерные исследования и моделирование. — 2016. — Т. 8, № 3. — С. 561–572
49. Степанцов М.Е. Учет транспортных связей между регионами в дискретной модификации модели "Власть-общество-экономика" // Людина, суспільство, комунікативні технології: матеріали IV міжнар. наук.-практ. конф., 24-25 червня 2016 р. Харків – Лиман. — 2016. — С. 324–328.
50. Степанцов М.Е. О возможности анализа справедливости формул проведения спортивных соревнований // Альманах современной науки и образования. — 2017. — №6. — С. 83–85.
51. Степанцов М.Е. Замена интегро-дифференциального уравнения клеточным автоматом в модели информационного противоборства // Девятая всероссийская научно-практическая конференция по имитационному моделированию и его применению в науке и промышленности «Имитационное моделирование. Теория и практика» (ИММОД-2019). Труды конференции, 16–18 октября 2019 г., Екатеринбург: Урал. гос. пед. ун-т., 2019.– С. 553-558.
52. Stepantsov M.E. Information warfare model based on a cellular automaton // Computational Mathematics and Information Technologies. – 2020. – Т. 1. № 1. – С. 12-18.
53. Stepantsov M.E. Cellular automaton based model of information warfare Mathematical Models and Computer Simulations. 2021. – Т. 13. № 2. – С. 210-217.
54. Степанцов М.Е. Моделирование оптимального управления в некоторых сценариях информационного противоборства при помощи клеточного автомата // Десятая всероссийская научно-практическая конференция по имитационному моделированию и его применению в науке и промышленности «Имитационное моделирование. Теория и практика» (ИММОД-2021). Труды конференции (электронное издание). – Санкт-Петербург, 2021. – С. 389-395.
55. Степанцов М.Е. Моделирование некоторых сценариев информационного противоборства при помощи клеточного автомата // Проектирование будущего. Проблемы цифровой реальности. – 2022. – № 1(5). – С. 205-214.
56. Степанцов М.Е. Оптимальное управление в рамках ряда сценариев информационного

противоборства // Информационные войны. – 2022. – № 4(64). – С. 29-33.

57. Степанцов М.Е. Моделирование сценария информационного противоборства с асимметричным влиянием на малые группы // Проблемы управления безопасностью сложных систем : Материалы XXX международной конференции, Москва, 14 декабря 2022 года / Под общей редакцией А.О. Калашникова, В.В. Кульбы. – Москва: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2022. – С. 232-238.

58. Степанцов М.Е. Моделирование системы "власть - общество - экономика" для одного случая изменения количества регионов // Проектирование будущего. Проблемы цифровой реальности. – 2023. – № 1(6). – С. 199-204.

59. Степанцов М.Е. Имитационное моделирование системы "власть - общество" с переменным количеством регионов // Имитационное моделирование. Теория и практика (ИММОД-2023): Сборник трудов одиннадцатой всероссийской научно-практической конференции по имитационному моделированию и его применению в науке и промышленности, Казань, 18–20 октября 2023 года. – Казань: Издательство АН РТ, 2023. – С. 187-193.

60. Степанцов, М.Е. Клеточные автоматы как математические модели // Проектирование будущего. Проблемы цифровой реальности. – 2024. – № 1(7). – С. 244-250.

ГЛАВА 1.

МЕТОД ЗАМЕНЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КЛЕТЧНЫМИ АВТОМАТАМИ ПРИ РАССМОТРЕНИИ ЗАДАЧ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

В настоящей работе будет предложен подход к моделированию социально-экономических процессов, основанный на использовании дискретных математических объектов и на максимально возможном упрощении самой модели. Он основан на разработанном автором методе замены дифференциальных уравнений, используемых в классических моделях, объектами, относящимися к классу клеточных автоматов. При этом основным принципом такой замены является соответствие макродинамики исходной непрерывной и новой дискретной моделей при возможном существенном различии их микродинамики.

Главными целями перехода от непрерывного описания к дискретному являются расширение области применимости модели, повышение ее вариативности, а также уход от методологической проблемы, состоящей в том, что дискретная социально-экономическая реальность моделируется непрерывными объектами, причем во многих случаях при расчетах их приходится заменять дискретными разностными схемами. Таким образом, совершается один или два перехода между принципиально различными представлениями реальности, что приводит к возникновению разного рода погрешностей и снижению адекватности модели.

При этом микродинамика дискретной модели может, но не обязана в точности соответствовать микродинамике моделируемого объекта. Достаточно разумным представляется применять модели с наиболее простой микродинамикой, по возможности аналогичной моделируемой реальности. При моделировании социально-экономических явлений, то есть таких явлений в которых принимает участие субъект, это становится возможным, если влияние субъекта на рассматриваемый процесс может быть формализовано и сведено к небольшому количеству параметров и управляющих переменных. Поскольку при этом при таком подходе описание субъекта характеризуется крайней упрощенностью и его активность сводится к небольшому числу проявлений, то не имеет смысла усложнять и другие аспекты модели.

Итак, получаемые модели должны носить дискретный характер и отличаться простотой построения. Таким требованиям, в частности, удовлетворяют модели на основе клеточных автоматов [79] - дискретных динамических систем, поведение которых полностью определяется локальными в пространстве и времени зависимостями. Поскольку большая часть моделей, предлагаемых в настоящей диссертации, основана в той или степени на клеточных автоматах, уместно будет ввести связанную с ними терминологию и оговорить особенности построения таких моделей. В рамках данной работы можно ограничиться рассмотрением двумерных клеточных автоматов на ортогональной сетке.

1.1. Особенности моделей класса клеточных автоматов и связанная с ними терминология

Пусть задана некая бесконечная равномерная однородная сетка (например, ортогональная сетка на плоскости). Сопоставим всем узлам сетки одинаковые конечные автоматы, выходной алфавит которых совпадает с множеством их состояний, а входной представляет собой множество всех возможных состояний автоматов, сопоставленных данному узлу и соседним.

Узлы решетки, принято называть *клетками*, а их множество – *полем* клеточного автомата. Функцию перехода автомата назовём *правилами клеточного автомата*, а состояние конечного автомата – *состоянием клетки*. *Соседями* данной клетки называются клетки, расположенные рядом с ней, причем здесь есть терминологический произвол - понятие "рядом" определяется для каждого конкретного клеточного автомата по-своему. Набор соседей и их расположение относительно данной клетки задают *окрестность клетки*, рассматриваемую в данном клеточном автомате. Например, в случае ортогональной двумерной сетки мы можем назвать соседями четыре клетки, имеющие с данной общую сторону (окрестность фон Неймана), или добавить к ним еще четыре, лежащие по диагонали (окрестность Мура).

Время в этих системах дискретно, шаг по времени не меняется. На каждом шаге состояние клетки изменяется в зависимости от состояния ее соседей. Правила клеточного автомата одинаковы для всех клеток (модель однородна).

На практике иногда однородность модели нарушается необходимостью задать границы поля клеточного автомата и, соответственно, особые правила для пограничных клеток. Этот вопрос решается особо в каждом конкретном случае. В частности, для двумерной ортогональной сетки можно вообще отказаться от границ, замкнув ее в тор.

То, что состояние клетки определяется исключительно состояниями ее соседей и ее самой на предыдущем временном шаге, вставляет важнейшее свойство клеточных автоматов - локальность.

Однако в некоторых случаях при построении моделей этого класса оказывается целесообразным ввести в правила зависимость состояния клетки от клеток, не являющихся ее соседями, или от состояния соседей на предыдущих временных шагах. В этом случае клетки, влияющие на состояние данной и не являющиеся ее соседями, называют *псевдососедями*. Очевидно, что чем шире класс псевдососедей в модели, тем слабее выражена ее локальность.

Клеточный автомат А может быть сведен к клеточному автомату В, если каждую клетку А можно рассматривать как одну или несколько клеток В, а состояние каждой клетки А соответствует совокупности состояний клеток В, входящих в нее. При этом такие соответствия должны быть, естественно, одинаковы во всех клетках автомата А.

Было доказано [64], что любой клеточный автомат можно свести к: универсальному

клеточному автомату: имеющему восемь состояний клетки и окрестность Мура.

Важной особенностью моделирования при помощи клеточных автоматов заключается в том, что при таком моделировании мы сталкиваемся с задачей, прямо противоположной обычному математическому описанию физической реальности. Если классическая термодинамика, например, усредняет зависимости микроскопических величин с тем, чтобы получить для них макроскопические уравнения, то при построении моделей класса клеточных автоматов, наоборот, перед нами стоит обратная задача, заключающаяся в выборе модели, микродинамика которой дает при усреднении нужную макродинамику [161], [162]. При этом совершенно необязательным является более или менее полное соответствие микродинамики модели и моделируемого явления.

1.2. Стандартная запись правил клеточных автоматов и их примеры

При записи правил клеточного автомата в виде формул или алгоритмов для стандартных окрестностей применяются следующие обозначения. Сама клетка именуется *Center*, ее состояние на следующем шаге – *Center'*, соседи по фон Нейману – *North*, *South*, *East* и *West*, дополнительные соседи по Муру – *NorthEast*, *NorthWest*, *SouthEast* и *SouthWest*, то есть клетки сопоставляются со стандартным расположением сторон света на географической карте.

Покажем на примере, как могут быть записаны правила клеточного автомата. Рассмотрим игру Конвея «Жизнь» [65]. Поле данного клеточного автомата представляет собой ортогональную сетку на плоскости с окрестностью Мура. Множество состояний клетки состоит всего из двух элементов $\{0; 1\}$. Клетка переходит из состояния 0 в 1, если у нее ровно 3 соседа в состоянии 1, и из состояния 1 в 0, если у нее более трех или менее двух соседей в состоянии 1. В остальных случаях состояние клетки не меняется.

Правила этого автомата выглядят следующим образом.

$$Center' = Center$$

$$S = North + South + East + West + NorthEast + NorthWest + SouthEast + SouthWest$$

$$\text{If } S=3 \text{ and } Center=0 \text{ then } Center'=1$$

$$\text{If } (S>3 \text{ or } S<2) \text{ and } Center=1 \text{ then } Center'=0$$

Оказывается, что такие простые правила приводят ко многим нетривиальным закономерностям динамики модели. Эта особенность, в частности, использовалась в [163] при обсуждении вопроса о реальности механического движения физических тел на микроуровне. Надо отметить, что в этой работе, таким образом, была попытка использовать клеточные автоматы именно как иллюстрацию к рассуждениям автора, однако в дальнейшем был осуществлен переход к моделированию физической реальности и сопоставлению ее законов развития с правилами клеточных автоматов. Кроме того, этот автомат был рассмотрен как пример в рамках концепции горизонта прогноза [164].

Кроме того, оказывается, что с помощью этого клеточного автомата можно имитировать сколь угодно сложные процессы. Было доказано, что этот клеточный автомат обладает рядом интересных свойств, например, самоорганизованной критичностью [165], каковая свойственна и другим моделям класса клеточных автоматов [166], а также, что он эквивалентен универсальной вычислительной машине Тьюринга [167].

1.3. Общие принципы замены непрерывных моделей моделями на основе клеточных автоматов

Итак, на основе всего вышесказанного теперь рассмотрим, каким образом может быть построена модель на основе клеточных автоматов или родственных им объектов, описывающая то или иное социальное или экономическое явление.

Прежде всего, следует решить вопрос об объектах моделирования: являются ли такими объектами отдельные люди, группы людей, выделенные по какому-либо признаку, либо системы, образованные людьми. Каждый из этих объектов будет описан в рамках модели клеткой клеточного автомата (либо аналогичной составной частью родственной клеточному автомату дискретной модели).

Затем, как и при любом моделировании, следует выбрать существенные свойства объекта. Каждая из его характеристик описывается некоторой переменной, множеству дискретных значений которой ставится в соответствие состояние клетки клеточного автомата. Законы изменения этих переменных и зависимости между переменными, относящимися к разным объектам определяют правила автомата и вид окрестности. Если такие зависимости не носят локальный характер, то для их моделирования в клеточный автомат добавляются псевдососеди, либо строится модель из класса родственных клеточным автоматам объектов (сетевых автоматов, конечных цепей и т.п.).

В каждом случае особо должен оговариваться вопрос о границах поля клеточного автомата. Теоретически поле автомата является бесконечным, что не может быть реализовано при построении имитационной системы, о котором пойдет речь дальше, поэтому построение границ является существенно необходимым. Традиционные подходы, состоящие в том, что границы объявляются абсолютно поглощающими либо прямоугольная область поля замыкается в топологический тор, обычно плохо подходят для моделирования социально-экономических процессов, происходящих на ограниченном пространстве и при этом имеющих различные особенности на границах этого пространства. В связи с этим вопрос о границах поля решается в каждом случае отдельно. В частности, в Главе 2 настоящей диссертационной работы будет подробно рассмотрен такой вопрос относительно модели движения неорганизованной группы людей.

1.4. Проверка адекватности замены методом среднего поля для клеточного автомата

В случае, если в рамках непрерывной модели было получено аналитическое или численное решение рассматриваемой задачи, адекватность дискретной модели можно обосновать, доказав соответствие ее макродинамики макродинамике непрерывной модели. Для этого к клеточному автомату применяется метод среднего поля.

Он основывается на том, что мы полагаем вероятность нахождения конкретной клетки в состоянии A равной плотности клеток, находящихся в состоянии A . Затем, на основании правил клеточного автомата, находим вероятности всех возможных конфигураций окрестности клетки и, как следствие – вероятности всех возможных состояний клетки на следующем шаге. Наконец, мы принимаем, что плотности клеток, находящихся в данном состоянии на следующем шаге, равны найденным вероятностям этих состояний.

Формально эта процедура может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} P(S_i) &= \rho_t(S_i) \\ P(S_i) &= \frac{N(S_k^{(n)}: R(S_k^{(n)}) = S_i)}{\sum_j N(S_k^{(n)}: R(S_k^{(n)}) = S_j)} \\ \rho_{t+1}(S_i) &= P(S_i) \end{aligned}$$

Здесь S_i – i -тое состояние клетки, $S_k^{(n)}$ – k -тое состояние множества из n клеток, включающих данную и ее окрестность, $\rho_t(S)$ – плотность клеток находящихся в состоянии S , $P(S)$ – вероятность для клетки быть в состоянии S , $N(S)$ – число клеток, находящихся в состоянии S ,

Рассмотрим изложенный метод на примере клеточного автомата Majority («большинство») на ортогональной сетке с окрестностью фон Неймана. Множество состояний такого автомата $\{0; 1\}$, а правила задаются следующим образом:

$$S = \text{North} + \text{South} + \text{East} + \text{West} + \text{Center}$$

$$\text{If } S > 2 \text{ then Center}' = 1 \text{ else Center}' = 0$$

То есть клетка принимает то состояние, которое имеет большинство ее соседей, считая ее саму.

Докажем, например, что клеточный автомат Majority порождает макродинамику, эквивалентную решению дифференциального уравнения

$$\frac{d\rho}{dt} = 6\rho^5 - 15\rho^4 + 10\rho^3 - \rho,$$

Пусть плотность клеток в состоянии 1 (а, значит, и вероятность того, что конкретная клетка находится в данном состоянии) в момент времени t равна $\rho(t)$. Тогда вероятность того, что в окрестности клетки, включая ее саму, содержится не менее трех клеток, находящихся в

состоянии 1, определяется биномиальным распределением:

$$p(t) = C_5^3 \rho^3(t)(1 - \rho(t))^2 + C_5^4 \rho^4(t)(1 - \rho(t)) + C_5^5 \rho^5(t)$$

$$p(t) = 6\rho^5(t) - 15\rho^4(t) + 10\rho^3(t)$$

$$\rho(t + 1) = 6\rho^5(t) - 15\rho^4(t) + 10\rho^3(t)$$

Данная рекуррентная зависимость соответствует (с поправкой на свой дискретный характер) решению дифференциального уравнения

$$\frac{d\rho}{dt} = 6\rho^5 - 15\rho^4 + 10\rho^3 - \rho$$

■

Метод среднего поля, таким образом, позволяет соотнести поведение дискретной модели на основе клеточного автомата с эталонной непрерывной моделью.

В случае, если классической модели, дающей непрерывное решение, для исходной задачи не существует, адекватность дискретной модели следует проверять при помощи численных экспериментов. Для проведения таковых строится имитационная система, реализующая на компьютере разработанную дискретную модель с конкретными параметрами. Разумеется, целью построения такой системы в первую очередь является практическое использование дискретной модели, однако в рассматриваемом случае, прежде всего, проводится проверка ее адекватности.

При построении имитационной системы возникает вопрос о значениях параметров дискретной модели, соответствующих конкретному варианту моделируемого объекта. Этот вопрос решается путем выбора определенного набора целевых значений переменных модели, которые должны достигаться при заданных условиях. После этого проводится большого количество численных экспериментов, в которых значения параметров модели меняются таким образом, чтобы достигнутые значения переменных как можно лучше в смысле евклидовой метрики приближали целевые значения.

Тем же способом, но без изменения параметров, проводится оценка адекватности модели, при помощи которой проводится расчет значений переменных, соответствующих известным результатам для моделируемого объекта. Здесь роль целевых значений переменных играют эти известные результаты. Типичным случаем такой проверки является ретроспективный прогноз, при котором осуществляется прогнозирование уже состоявшейся динамики системы, после чего результаты прогноза сравниваются с реальными данными о системе.

В обоих этих случаях (подбор значений параметров и проверка адекватности модели) возникает вопрос о статистической погрешности результатов, получаемых по итогам множественных численных экспериментов. При этом, разумеется, они могут давать

различающиеся результаты только в случае если дискретная модель имеет стохастическую составляющую. Здесь нужно указать, что результат численного эксперимента в таком случае складывается из большого количества одинаково распределенных случайных величин, получающихся в результате вероятностного розыгрыша [168] того или иного состояния каждой клетки автомата. Поэтому в соответствии с классической центральной предельной теоремой имеем, что результирующие значения переменных являются случайными величинами, распределение которых близко к нормальному закону. Найдя в каждом случае параметры этого нормального распределения из полученной в ходе численных экспериментов статистики, мы можем использовать их для оценки статистической погрешности результатов.

1.5. Замена дифференциальных уравнений и теорема о сходимости

Как уже упоминалось, применяемый для моделирования социально-экономических явлений математический аппарат не столь разнообразен, как в случае физических задач. Обычно здесь рассматривается задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.

Рассмотрим такую задачу:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Построим стохастический клеточный автомат с произвольной окрестностью и полем, включающим n клеток, состояния которых обозначим y_i . Пусть эквивалентом переменной y из непрерывной модели, будет среднее состояний клеток по ансамблю

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i,$$

причём правила автомата задают переход клетки, находящейся в состоянии y_i , с одной и той же для всех клеток, но изменяющейся на каждом шаге вероятностью p в состояние $y_i + \delta y$ при $f(x, \bar{y}) > 0$ и $y_i - \delta y$ при $f(x, \bar{y}) < 0$. Обозначим ξ_i случайную величину, равную изменению состояния клетки i , при этом

$$\xi_i = \begin{cases} \pm \delta y \\ 0 \end{cases}$$

и

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$$

Отметим, что $|\bar{\xi}| = p\delta y$.

Представим заданную вероятность такого перехода в виде $p = \alpha |f(x, \bar{y})|$ и найдем коэффициент α . Для того, чтобы динамика величины \bar{y} соответствовала динамике y , должно

выполняться равенство:

$$\left| \frac{d\bar{y}}{dx} \right| = |f(x, \bar{y})|$$

Примем шаг по времени (соответствующему независимой переменной x) в клеточном автомате за h . Динамика величины \bar{y} в течение шага не меняется, поэтому её изменение численно равно

$$\bar{\xi} = \Delta \bar{y} = h \frac{d\bar{y}}{dx}.$$

Тогда

$$|\bar{\xi}| = h \left| \frac{d\bar{y}}{dx} \right|$$

Откуда

$$\begin{aligned} p\delta y &= h |f(x, \bar{y})| \\ \alpha |f(x, \bar{y})| \delta y &= h |f(x, \bar{y})| \\ \alpha &= \frac{h}{\delta y} \end{aligned}$$

Итак, для замены обыкновенного дифференциального уравнения требуется построить описанный выше стохастический клеточный автомат, в котором вероятность перехода клетки в соседние состояния будет задаваться формулой:

$$p = \frac{h}{\delta y} |f(x, \bar{y})|$$

Теперь рассмотрим такой клеточный автомат, у которого существует m состояний клетки, соответствующие m значениям y_i . Отметим, что без ограничения общности можно положить $y_i \in [0; 1]$ (переход к такому множеству значений при условии ограниченности y_i возможен путем замены переменной $y_i' = \frac{y_i - y_{min}}{y_{max} - y_{min}}$), тогда $\delta y = \frac{1}{m}$.

Теорема 1 (о сходимости). Решение \bar{y}_i , полученное при помощи вышеописанного клеточного автомата с шагом по независимой переменной $h > 0$, на некотором интервале $x \in (x_1, x_2)$ сходится для каждого h при $m \rightarrow \infty$ по вероятности к решению, полученному при помощи явной разностной схемы Эйлера

$$\begin{cases} y = y_0 + hf(x_0, y_0) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

если y и $\frac{dy}{dx}$ ограничены на (x_1, x_2) .

Доказательство.

Положим без ограничения общности $f(x_0, y_0) > 0$.

$$y = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Зададим начальное состояние каждой клетки y_{0i} так, чтобы среднее этих состояний по

ансамблю клеток соответствовало начальному значению переменной y , то есть $\bar{y}_0 = y_0$. При этом в построенном выше клеточном автомате на первом шаге по времени, который мы теперь примем равным h , клетка i с вероятностью $p = \frac{h}{\delta y} |f(x_0, \bar{y}_0)| = mh f(x_0, \bar{y}_0)$ переходит из состояния y_0 в состояние $y_0 + \frac{1}{m}$, противоположное событие состоит в том, что она остается в состоянии y_0 . Тогда

$$M(\bar{y}) = M(\bar{y}_0) + M(\bar{\xi}) = M(y_0) + \frac{p}{m} = y_0 + hf(x_0, \bar{y}_0)$$

Итак, математическое ожидание среднего от состояний клеток по ансамблю оказывается в точности равно решению, получаемому на основании разностной схемы.

При этом дисперсия этой величины.

$$D(\bar{y}) = D(\bar{y}_0 + \bar{\xi}) = D(\bar{\xi}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(\xi_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{p(1-p)}{m^2} = \frac{1}{n} \frac{p(1-p)}{m^2}$$

Вспомним, что $p = mh f(x_0, \bar{y}_0)$

Тогда:

$$D(\bar{y}) = \frac{h f(x_0, \bar{y}_0)(1 - mh f(x_0, \bar{y}_0))}{nm} \quad (1.2)$$

Таким образом, при $m \rightarrow \infty$ $D(\bar{y}) \rightarrow 0$, поэтому решение \bar{y} , сходится вероятности к y .

Однако при $m \rightarrow \infty$ может быть нарушено естественное условие $p \leq 1$. Здесь следует воспользоваться тем, что переход к решению исходного дифференциального уравнения осуществляется при $h \rightarrow 0$. Если устремить m к бесконечности при условии $mh = \text{const} < \frac{1}{\max |f(x,t)|}$, то условие $p \leq 1$ будет выполнено, а решение, получаемое при помощи клеточного автомата, будет сходиться по вероятности к решению исходной задачи Коши.

Данные рассуждения далее повторим на всех шагах разностной схемы, принимая значение y в конце предыдущего шага за начальное значение y_0 для текущего шага. ■

Следует указать, что доказанная теорема имеет лишь теоретический смысл, а именно: обоснование того, что решение дифференциальных уравнений путем замены их клеточными автоматами является следующим шагом на пути дискретизации переменных по сравнению с разностными схемами.

В вопросе же сходимости решения, полученного при помощи клеточного автомата. к решению дифференциального уравнения имеет место более сильное **утверждение**.

Рассмотрим равенство (1.2). Из него следует, что $D(\bar{y}_i) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, причем в качестве n можно рассматривать не только количество клеток на поле клеточного автомата, но и произведение этого количества на количество повторенных численных экспериментов. Таким образом, для сходимости решения, полученного при помощи клеточного автомата, к решению

дифференциального уравнения нет необходимости стремиться $m \rightarrow \infty$, а дальнейшее стремление $h \rightarrow 0$ не ухудшает эту сходимость. То есть, решение, полученное при помощи клеточного автомата, сходится по вероятности к решению исходного дифференциального уравнения при увеличении количества численных экспериментов без необходимости увеличивать количество состояний клетки.

Здесь может возникнуть законный вопрос: в чем смысл применения клеточных автоматов для нахождения решения дифференциального уравнения, если, как видно из доказанного, в рамках заявленных требований такое решение может быть получено и при помощи разностной схемы? Дело в том, что модель на основе клеточного автомата позволяет не только получить решение, соответствующее макродинамике исходного дифференциального уравнения, но и ввести в задачу дополнительные факторы (вариацию параметров, локальные взаимодействия, пространственное распределение и т.п.), которые сложно или невозможно учесть в рамках классического подхода, включающего использование дифференциальных уравнений и разностных схем.

При необходимости замены клеточным автоматом системы дифференциальных уравнений первого порядка можно поставить различные зависимые переменные в соответствие разным клеткам или областям поля клеточного автомата. При этом в клетках, содержащих данную зависимую переменную, остальные зависимые переменные могут рассматриваться как параметры, следовательно, теорема о сходимости будет применима. Пример такого подхода будет рассмотрен в Главе 3.

Интегральные операторы при этом заменяются простым суммированием соответствующей величины по полю клеточного автомата или некоторой заданной его части. Эти суммы представляют собой суммы Римана для исходных интегралов, таким образом, использование клеточного автомата в данном аспекте аналогично численному интегрированию по той же сетке, которая соответствует схеме Эйлера для дифференциальных операторов. Пример такого подхода будет рассмотрен в Главе 2.

Далее перейдем к изложению применения предлагаемого в работе общего подхода к конкретным областям исследований.

ГЛАВА 2.

ЗАМЕНА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КЛЕТОЧНЫМИ АВТОМАТАМИ В МОДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННОГО ПРОТИВОБОРСТВА

2.1. Модель информационного противоборства на основе интегро-дифференциального уравнения

Типичным случаем моделирования социальных явлений, в котором уместно использование клеточных автоматов вместо непрерывных величин и связывающих их уравнений, является математическая модель информационного противоборства.

На современном этапе ускоренного развития цифровых технологий проблемы информационного противоборства перестают быть важными лишь для узкого круга специалистов в этой области. Эти вопросы приобретают особую значимость в сферах политики, экономики и безопасности, и это не позволяет продолжать решать их только качественными методами, приводящими к приближенным, умозрительным выводам. Задачи в области информационной безопасности требуют точного количественного подхода и, следовательно, создания надежного математического аппарата, позволяющий такой подход осуществить.

В данной работе хотелось бы обратить внимание на модели информационного противоборства [159], [169], основанные на нейробиологической схеме Рашевского [160].

В этих моделях рассматривается простейший случай пропаганды [159], [170], когда речь идет о выборе индивидами одной из двух позиций по некоторому вопросу, например, какую из партий – L или R – поддержать на выборах. Предполагается, что у индивидов может быть априорное мнение по этому вопросу, либо же у некоторых из них оно изначально не определено.

Модель, предложенная в [159] имеет вид интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{d\psi}{dt} = A \left(C \left(2 \int_{-\psi(t)}^{+\infty} N(\varphi) d\varphi - N_0 \right) + b_R - b_L \right) - a\psi \quad (2.1)$$

с начальным условием, задаваемым в виде

$$L(0) = \int_{-\infty}^{-\psi(0)} N(\varphi) d\varphi. \quad (2.2)$$

Здесь функция $\psi(t)$ имеет смысл сдвига предпочтений индивидов под влиянием пропаганды, определяя численность сторонников партий L и R как

$$L(t) = \int_{-\infty}^{-\psi(t)} N(\varphi) d\varphi$$

$$R(t) = \int_{-\psi(t)}^{+\infty} N(\varphi) d\varphi,$$

то есть функция $N(\varphi)$ задает распределение отношения индивидов к альтернативам L и R, а

$$N_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} N(\varphi) d\varphi$$

– численность социума. Параметры b_R , b_L , C , A и a характеризуют соответственно, влияние пропаганды партий R и L, общественного мнения, способность индивидов менять свое мнение и «затухание» таких изменений. Они не будут механически перенесены в дискретную модель, поэтому обойдемся без их подробного рассмотрения.

Распределение $N(\varphi)$ характеризует, в частности, ситуацию со взглядами в обществе на проблему выбора между альтернативами. Так, нормальный характер этого распределения с центром в нуле соответствует консолидированному обществу, а если эта функция представляет собой сумму двух функций нормального распределения с симметричными относительно нуля центрами – речь идет о поляризованном по данному вопросу обществе [170].

Хотя точное решение задачи (2.1), (2,2) в общем виде не было получено, его исследование вполне осуществимо [159]. Однако рассмотренная непрерывная модель не всегда может быть удачно модифицирована для решения конкретных задач. Так, в ее рамках трудно учесть возможную различную восприимчивость индивидов к пропаганде, особое влияние мнения референтной для данного индивида группы и вообще дисперсию любых характеристик индивидов, кроме, собственно, их начальных отношений к альтернативам.

Одним из способов преодоления указанных трудностей является применение имитационного моделирования. В данном случае представляется уместной замена непрерывной модели клеточным автоматом, макродинамика которого будет соответствовать динамике решений приведенного выше интегро-дифференциального уравнения. Такой подход является и несколько более адекватным методологически, поскольку речь идет о моделировании дискретных явлений при помощи дискретных математических объектов без промежуточного перехода к непрерывному рассмотрению.

2.2. Построение дискретной модели

В рамках данной работы ограничимся построением такой имитационной системы на основе клеточного автомата, которая бы описывала ту же реальность, что и исходная непрерывная модель информационного противоборства, демонстрировала бы такую же макродинамику и давала возможность повторить результаты, полученные при помощи непрерывной модели. Модификации, позволяющие расширить область применимости модели,

будут предметом исследований, планируемых в дальнейшем.

В качестве поля предлагаемого клеточного автомата возьмем классическую ортогональную решетку, в каждом из узлов которой разместим конечный автомат, описывающий текущие взгляды отдельного индивида. В рамках традиционной для клеточных автоматов терминологии будем называть его клеткой, имеющей три возможных состояния: поддержка альтернативы L (-1), поддержка альтернативы R (1) и не определившиеся взгляды (0). Также припишем каждой клетке в качестве параметра состояние взглядов индивида без воздействия пропаганды, которое также может принимать одно из трех перечисленных значений, но является неизменным – в отличие о состояния клетки, описывающего текущие взгляды индивида.

В рамках этого подхода для данной модели вместо непрерывного распределения индивидов по взглядам на предлагаемые альтернативы будет использовано их дискретное распределение по трем возможным точкам зрения. В качестве величины, аналогичной (но не равной в точности) переменной ψ будет выступать выражение

$$\psi^* = \frac{R(t) - L(t)}{N_0}.$$

Тогда динамика этой величины задается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi^*}{dt} &= \frac{\frac{dR(t)}{dt} - \frac{dL(t)}{dt}}{N_0} \\ \frac{d\psi^*}{dt} &= 2 \frac{d\psi N(\psi)}{dt N_0} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Соотношение (2.3) можно использовать для проверки соответствия макродинамики дискретной и непрерывной моделей, но следует заметить, что большая часть результатов в [159] и [170] получена в терминах динамики численности сторонников альтернатив, то есть сравнение моделей уместно проводится именно по этим показателям.

Нам же важно, что в дискретной модели динамика среднего количества клеток, находящихся в заданном состоянии, должна приближенно соответствовать решению уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Требуемый клеточный автомат строится таким образом, чтобы он соответствовал условиям теоремы о сходимости, то есть с некоторой вероятностью $p = \alpha|f(x)|$ переходил в состояние, соответствующее большему значению x при $f(x) > 0$ и меньшему – при $f(x) < 0$ (при этом x теперь представляет собой среднюю величину соответствующих значений в каждой из клеток). Пусть в обоих случаях изменение x , то есть шаг дискретности этой величины, равно Δx ($\Delta x > 0$), тогда, считая, что шаг по времени равен 1, находим коэффициент α из условия:

$$|f(x)| = \left| \frac{dx}{dt} \right| \approx p = \alpha|f(x)|\Delta x$$

$$\alpha = \frac{1}{\Delta x} \quad (2.4)$$

Итак, взяв в качестве x величину ψ^* , можно легко «перевести на язык клеточного автомата» все члены правой части уравнения (2.1), кроме интегрального. Что же касается интегрального слагаемого, то очень удачным оказывается тот факт, что оно представляет собой не что иное как разность количеств сторонников двух альтернатив $R(t) - L(t)$. Эту величину мы можем получить прямым подсчетом по полю клеточного автомата и использовать с соответствующим коэффициентом в качестве еще одного слагаемого, входящего в $f(\psi^*)$.

Таким образом, на каждом шаге по времени в предлагаемом клеточном автомате к каждой клетке применяются последовательно три алгоритма, приводимые ниже.

Алгоритм А: влияние прямой пропаганды.

```

if  $\Delta > 0$  then
if  $Center = 0$  and  $r < \Delta$  then  $Center = 1$ 
if  $Center = -1$  and  $r < \Delta$  then  $Center = 0$ 
end if
if  $\Delta < 0$  then
if  $Center = 0$  and  $r < -\Delta$  then  $Center = -1$ 
if  $Center = 1$  and  $r < -\Delta$  then  $Center = 0$ 
end if

```

Здесь $\Delta = A^*(b_R - b_L)$ – параметр, отвечающий за суммарное влияние прямой пропаганды в пользу каждой из альтернатив, r – случайное число, равномерно распределенное на промежутке $[0; 1]$, $Center$ – стандартное обозначение состояния самой (в отличие от ее соседей) рассматриваемой клетки поля клеточного автомата. Все параметры, обозначенные звездочкой, подбираются исходя из соотношения (2.4).

Алгоритм Б: затухание изменений точки зрения, вызванных пропагандой.

```

if not  $u = Center$  then
if  $r < \alpha^*$  then
if  $Center > u$  then  $Center = Center - 1$ 
if  $Center < u$  then  $Center = Center + 1$ 
end if
end if

```

Здесь α^* – параметр, отвечающий за затухание влияния пропаганды, u – параметр, устанавливающий начальное состояние клетки (собственное отношение индивида к альтернативам), заданный для каждой клетки.

Алгоритм В: влияние общественного мнения.

```

if  $\psi^* > 0$  then
if  $Center < 1$  and  $r < c^* \psi^*$  then  $Center = Center + 1$ 
end if
if  $\psi^* < 0$  then
if  $Center > -1$  and  $r < -c^* \psi^*$  then  $Center = Center - 1$ 
end if

```

Здесь ψ^* – введенная ранее величина, характеризующая превышение числа сторонников

альтернативы R над числом сторонников альтернативы L, c^* – параметр, описывающий влияние общественного мнения.

2.3. Численные эксперименты

Предложенный клеточный автомат, как показано выше, при правильном подборе коэффициентов должен порождать такую же макродинамику, как и исходная непрерывная модель. Для проверки этого утверждения был проведен ряд численных экспериментов. В них использовался клеточный автомат с размерами поля 20x20, содержащий, таким образом, 400 клеток. В каждом эксперименте начальное распределение мнений совпадало с полем значений собственных мнений z . В качестве числа не определившихся индивидов было взято нормированное соответствующим образом значение непрерывной функции распределения при $\varphi = 0$, а в качестве чисел сторонников двух альтернатив – значения этой функции в точках перегиба для консолидированного общества и ее значения в максимумах для поляризованного. Точные количества априорных сторонников каждого из вариантов для $N_0 = 400$ приведены в таблице 2.1.

Тип общества	Количество индивидов		
	Сторонники L	Не определившиеся	Сторонники R
Консолидированное	110	180	110
Поляризованное	150	100	150

Таблица 2.1. Распределение индивидов по отношению к альтернативам, использовавшееся при численных экспериментах.

Прежде всего, в рамках нескольких сотен экспериментов были получены зависимости $\psi^*(t)$ при различных значениях параметров. В каждом случае эта величина стремилась к стационарному значению, следовательно, как и в [170] формировались стационарные значения численности сторонников каждой из альтернатив. Типичный пример такой зависимости представлен на рис. 2.1.



Рис. 2.1. Формирование стационарных значений численностей сторонников альтернатив.

Поскольку, как и в случае непрерывной модели, имеет место выход динамики системы на стационарное решение, оказывается возможным, как это было сделано в [170], исследовать функцию отклика на пропаганду. Эта функция представляет собой зависимость стационарного значения численности сторонников одной из альтернатив (например, R) от интенсивности пропаганды в поддержку этой альтернативы.

В экспериментах были использованы значения параметров $b_L = 10$, $c^* = 0,1$, $a^* = 0,1$, $A^* = 0,1$, и изучалась зависимость стационарного значения уровня поддержки альтернативы R от параметра b_R , который менялся в интервале от 0 до 26. Как и для непрерывной модели в [170], в случае консолидированного общества эта зависимость представляла собой функцию, выпуклую вверх (рис. 2.2), а при поляризованном обществе – функцию с S-образным графиком (рис. 2.3).

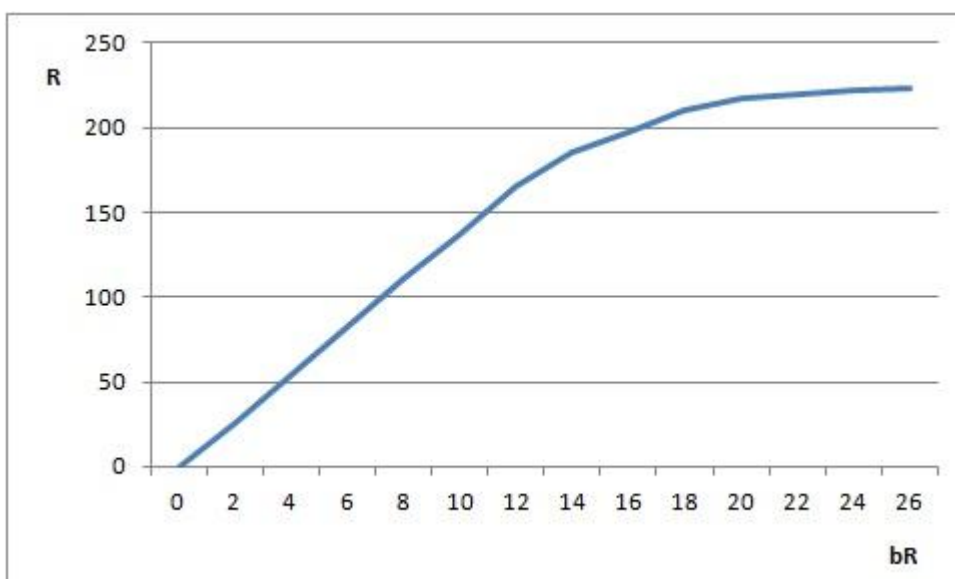


Рис. 2.2. Функция отклика для случая консолидированного общества.

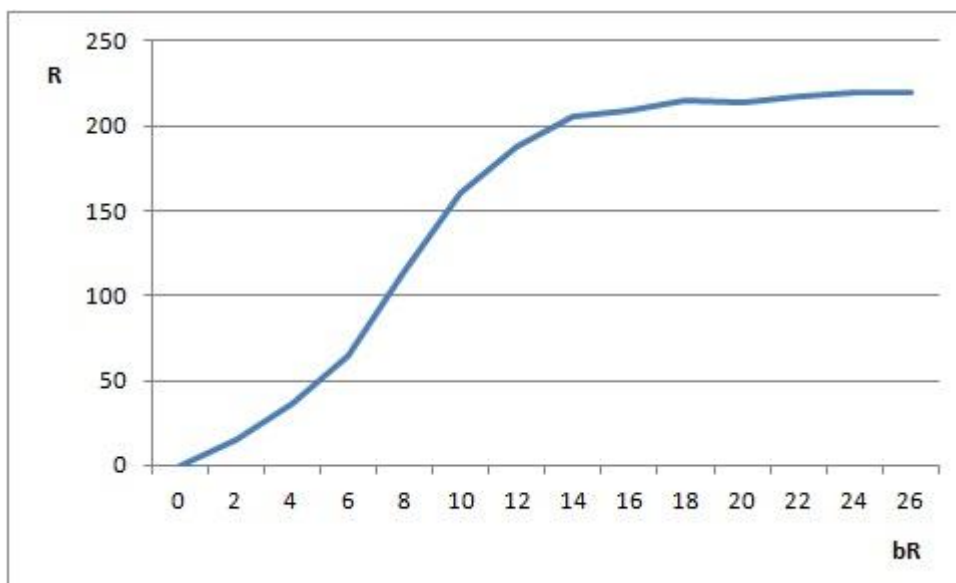


Рис. 2.3. Функция отклика для случая поляризованного общества.

Таким образом, предложенная в работе дискретная модель на основе клеточного автомата порождает макродинамику, совпадающую с макродинамикой исходной непрерывной модели и позволяет получить результаты, аналогичные тем, которые были получены при помощи непрерывной модели.

2.3. Модификация дискретной модели, расширяющая область ее применимости

Изложенная выше модель, таким образом, представляет собой полный аналог исходной непрерывной модели, но ее клеточно-автоматная природа никак не была использована в предыдущем исследовании, а ведь именно она дает возможность, используя подход имитационного моделирования, расширить границы применимости модели.

При этом следует обратить внимание на то, что непрерывная модель не учитывает то, что наибольшее влияние на мнение индивида оказывают малые группы, здесь учитывается влияние общества в целом. Предлагаемая же модель позволяет рассмотреть это влияние как воздействие окрестности клетки на ее состояние (что является отличительной чертой клеточного автомата). Кроме того, в исходной модели не рассматривается процесс интериоризации индивидом внешних представлений, что легко можно осуществить в клеточно-автоматной модели путем задания правил изменения параметров u , описывающих внутренние убеждения индивидов.

Таким образом, уместно рассмотреть такую модификацию вышеизложенной модели, в которой были бы добавлены возможности рассмотрения факторов, не могущих быть введенными в непрерывную модель и, таким образом, учесть некоторые аспекты взаимодействия индивида с обществом в рамках информационного противоборства, которые

невозможно исследовать при помощи классических методов анализа. В частности, рассмотрим возможность введения влияния малых референтных групп на мнение человека. Обозначим d^* коэффициент, характеризующий влияние на мнение индивида его ближайшего окружения, в качестве модели которого может быть взята окрестность клетки, например, окрестность Мура [79]. Тогда алгоритм, описывающий такое влияние, может быть построен по аналогии с алгоритмом В (и даже просто внесен в него в качестве дополнительной составляющей), если вместо функции использовать сумму значений состояний клеток из окрестности данной, а вместо коэффициента c^* подставить d^* .

Интериоризация общественного мнения и мнения малых групп также может быть осуществлена в рамках этого нового алгоритма, для чего потребуется ввести аналоги вышеупомянутых коэффициентов cc^* и dd^* . Здесь изменениям будет подвергаться не состояние клетки, а параметр u , характеризующий собственное отношение индивида к альтернативам. Формальных математических ограничений на значения этих коэффициентов нет, но из соображений адекватности модели необходимо, чтобы выполнялись ограничения $c^* < 1$, $d^* < 1$, $cc^* \ll c^*$ и $dd^* \ll d^*$.

Таким образом, в модифицированной модели используются прежние алгоритмы А и Б, а вместо В применяется следующий алгоритм.

Алгоритм В1 (влияние общественного мнения и малых групп, интериоризация)

$S = \text{North} + \text{NorthWest} + \text{West} + \text{SouthWest} + \text{South} + \text{SouthEast} + \text{East} + \text{NorthEast}$

if $\psi^* > 0$ *then*

if $\text{Center} < 1$ *and* $r < c^* \psi^*$ *then* $\text{Center} = \text{Center} + 1$

end if

if $\psi^* < 0$ *then*

if $\text{Center} > -1$ *and* $r < -c^* \psi^*$ *then* $\text{Center} = \text{Center} - 1$

end if

if $S > 0$ *then*

if $\text{Center} < 1$ *and* $r < d^* S$ *then* $\text{Center} = \text{Center} + 1$

end if

if $S < 0$ *then*

if $\text{Center} > -1$ *and* $r < -d^* S$ *then* $\text{Center} = \text{Center} - 1$

end if

if $\psi^* > 0$ *then*

if $u < 1$ *and* $r < cc^* \psi^*$ *then* $u = u + 1$

end if

if $\psi^* < 0$ *then*

if $u > -1$ *and* $r < -cc^* \psi^*$ *then* $u = u - 1$

end if

if $S > 0$ *then*

if $u < 1$ *and* $r < dd^* S$ *then* $u = u + 1$

end if

if $S < 0$ *then*

if $u > -1$ *and* $r < -dd^* S$ *then* $u = u - 1$

end if

2.5. Численные эксперименты с модифицированной моделью

Предложенный ранее клеточный автомат порождает такую же макродинамику, как и исходная непрерывная модель. На основе новой модели, учитывающей влияние малых групп и интериоризацию мнений, в среде VBA была построена имитационная система, моделирующая информационное противоборство двух сторон при наличии у части индивидов априорного отношения к двум альтернативам. Таким образом, новая модель является адекватным аналогом непрерывной модели, но позволяет получать результаты, выходящие за рамки ее применимости. В частности, в рамках новой модели, в отличие от [171], возможно произвольное изменение интенсивностей пропаганды обеих сторон, не обязательно являющееся аналитической или сколь-нибудь гладкой функцией времени.

Это позволило исследовать в рамках настоящей работы вопросы об оптимальном распределении интенсивности пропаганды при одноразовой дестабилизации этой интенсивности, а также при выяснении, каковой может быть оптимальная реакция второй стороны на изменение тактики первой.

В следующих численных экспериментах использовался клеточный автомат на ортогональной решетке 20x20 клеток с окрестностью Мура. В каждом эксперименте начальное распределение мнений совпадало с полем значений собственных мнений u , которое формировалось аналогично первому варианту модели для двух случаев: консолидированного и поляризованного обществ при суммарном числе индивидов $N_0 = 400$. Численности сторонников каждой альтернативы приведены в таблице 1.

Тип общества	Количество индивидов		
	Сторонники L	Не определившиеся	Сторонники R
Консолидированное	110	180	110
Поляризованное	150	100	150

Таблица 2.2. Распределение собственных мнений (они же – начальные значения при проведении экспериментов) индивидов по отношению к альтернативам.

В первой серии экспериментов рассматривалась возможность одной из сторон однократно усилить пропаганду на некоторый период времени. Было проведено исследование зависимости итогового результата для альтернативы R от соотношения параметров a^* (коэффициента влияния общественного мнения) и c^* (характеризующего затухание изменений мнений индивидов, произошедших под влиянием пропаганды). В экспериментах этой серии были использованы значения параметров $b_L = 10$, $A^* = 0,1$ и рассматривался временной промежуток длительностью 50 шагов по времени, что можно представить как 50 дней ведения пропагандистской кампании. Предположим, что в любой момент времени партия R имеет

возможность повысить уровень интенсивности своей пропаганды b_R до 19 на 5 дней, но при этом в остальные дни он должен был оставаться равным 9, чтобы интегральные интенсивности пропаганды с обеих сторон равными.

Такие эксперименты проводились для случаев консолидированного и поляризованного типов обществ при различных значениях параметров a^* и c^* . Оказалось, что для всех рассмотренных значениях c^* при низких значениях a^* оптимальный результат партии R достигался при повышении интенсивности пропаганды в последние 5 дней, а при высоких – в первые 5 дней. Следует отметить, что ни в одном эксперименте результат R не был оптимальным при каком-либо ином расположении отрезка повышенной интенсивности пропаганды на временной шкале. При этом для каждого рассмотренного множества значений других параметров нашлось некоторое критическое значение a_0^* такое, что при более низких значениях a^* оптимальным является повышение интенсивности в конце периода, а при более высоких – в начале. Пример результатов моделирования пропагандистской кампании при $c^* = 0,1^*$ приведен в таблице 2 (здесь $a_0^* \approx 0,16$). В ходе численных экспериментов выяснилось, что в некоторой небольшой окрестности точки a_0^* дестабилизация уровня пропаганды приводит к проигрышу альтернативы R по сравнению со стратегией равномерной интенсивности, в то время как при достаточно больших или достаточно малых значениях a^* оптимальный результат R оказывается лучше, чем при использовании стратегии равномерной интенсивности.

a^*	Повышение интенсивности пропаганды		
	в начале	в середине	в конце
0,1	-0,325	-0,11	0,0575
0,15	-0,1525	-0,08	0,0275
0,16	-0,051	-0,055	-0,045
0,2	0,0375	-0,014	-0,065
0,25	0,38	0,01	-0,36
0,5	0,9125	0,35	-0,8925

Таблица 3.3. Значения ψ^* по результатам моделирования 50-дневной пропагандистской кампании. Жирным выделены оптимальные для партии R результаты.

Графики типичных зависимостей итоговых количеств сторонников альтернатив R и L от значения a^* приведены на рисунке 2.4.

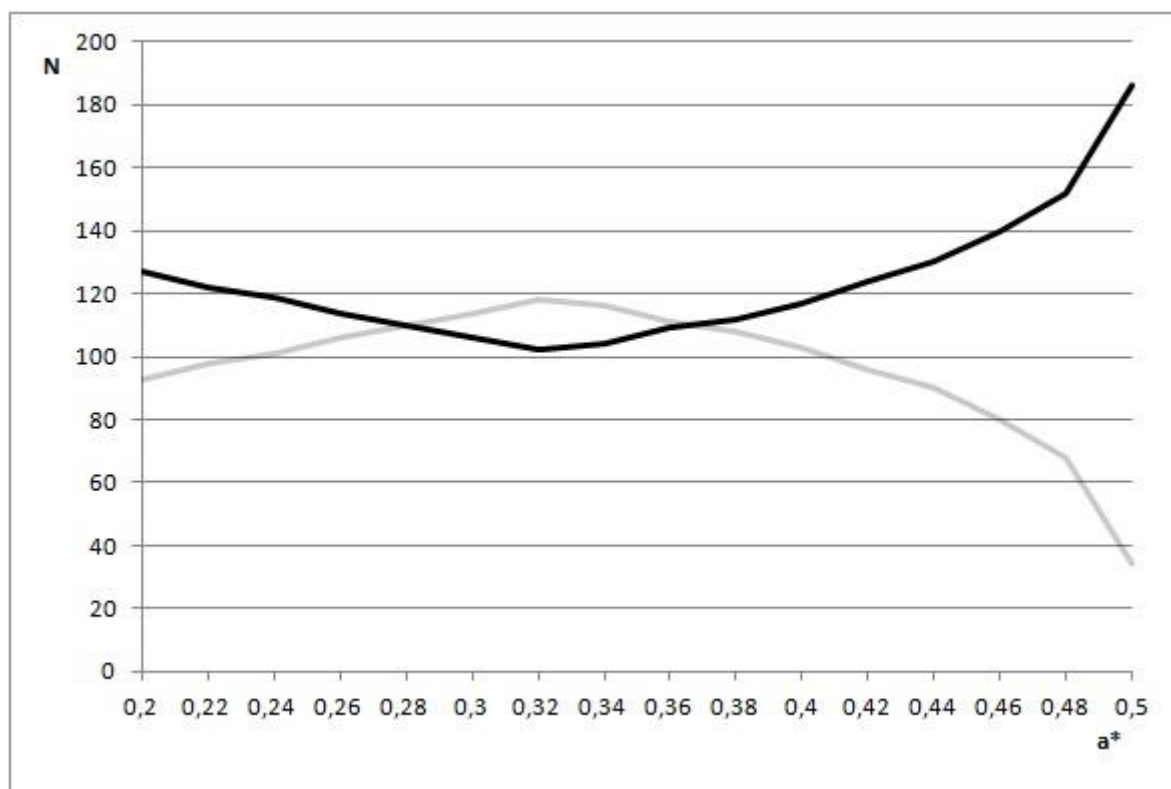


Рис. 2.4. Зависимости итоговых количеств сторонников альтернатив R (черная кривая) и L (серая кривая) от значения a^* .

Вторая серия экспериментов была посвящена рассмотрению оптимального управления с противоположной стороны, то есть вопросы об оптимальных действиях сторонников альтернативы L на изменение интенсивности пропаганды со стороны R. Здесь мы снова предполагаем, что ресурсы двух сторон, предназначенные для ведения кампании, равны. Сторона R в некоторый момент времени постепенно повышает интенсивность пропаганды, а затем – снижает ее до прежнего значения. Возникает вопрос: какая реакция стороны L является в данной ситуации оптимальной?

В качестве возможных действий стороны L рассматривались: 1) продолжение ведения кампании с прежней интенсивностью; 2) равномерное повышение интенсивности на весь период после действий со стороны R; 3) временное повышение интенсивности после действий R с таким же, как у R изменением по времени; 4) действия, аналогичные пунктам 2 и 3, проводимые до начала действий R (разумеется, последний пункт подразумевает осведомленность стороны L о планах R).

Многочисленные численные эксперименты показали, что в данном случае оптимальным управлением со стороны L является третий вариант, то есть повторение действий стороны R с некоторым отставанием. Характерные результаты моделирования приведены на рисунке 2.5. Здесь сторона R увеличивает интенсивность пропаганды, начиная с шага 4, а сторона L

отвечает на это несколькими различными способами, оптимальным из которых является первый сценарий, соответствующий упомянутому выше варианту 3.

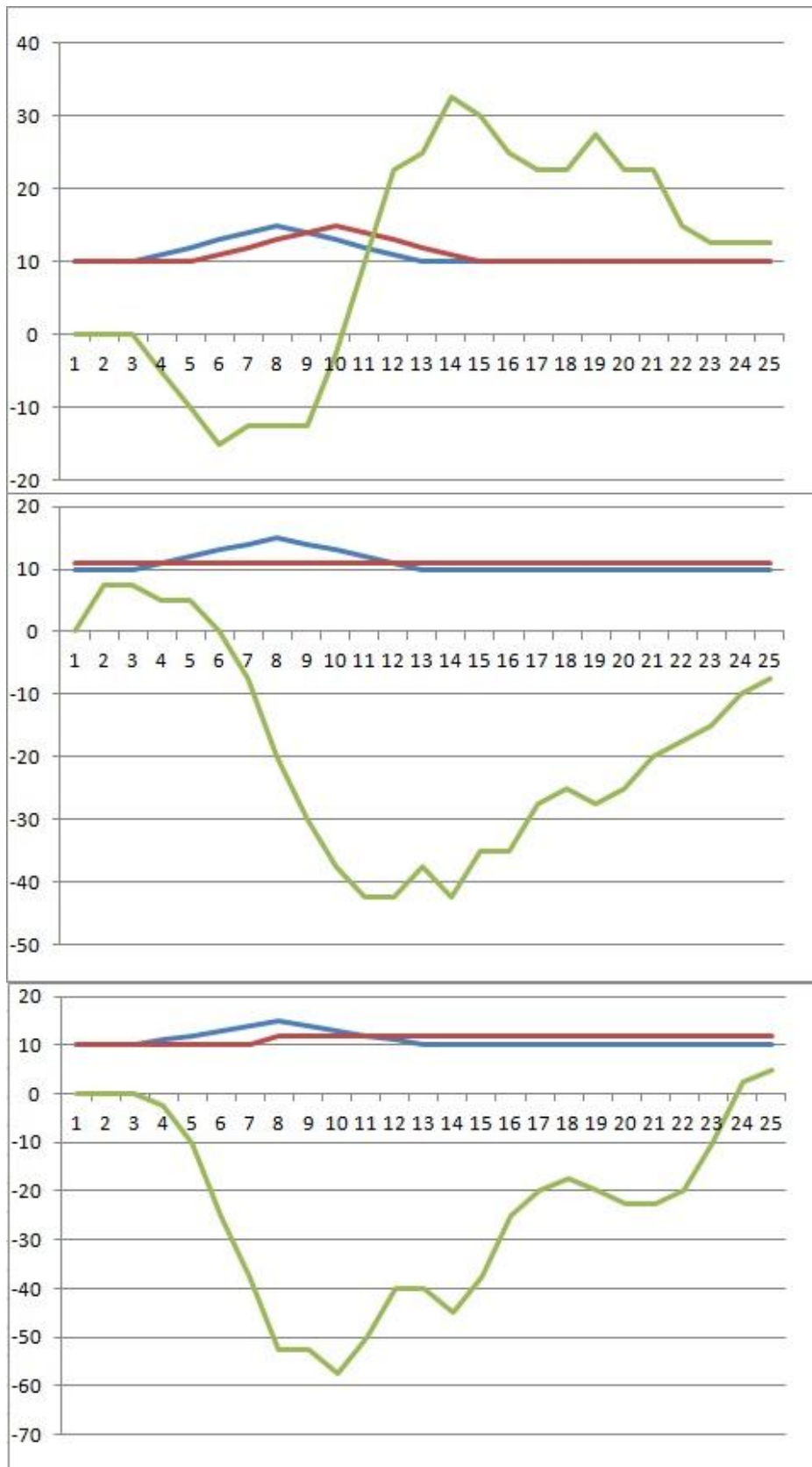


Рис. 2.5. Зависимости от времени интенсивностей пропаганды альтернативы R (синяя

кривая) и L (красная кривая) и превышения численности сторонников L над R (зеленая кривая). Оптимальным для L является первый сценарий.

Таким образом, можно сделать вывод, что новая модификация дискретной модели информационного противоборства соответствует исходной непрерывной модели в области ее применимости, и при этом использование имитационного моделирования позволяет исследовать вопросы, лежащие за рамками этой области.

В ходе таких экспериментов были исследованы вопросы оптимального управления в рамках некоторых сценариев информационного противоборства, и результаты экспериментов приводят к следующим рекомендациям.

1. Оптимальным управлением для партии R является повышение интенсивности пропаганды в начале агитационного периода при больших (по сравнению с c^*) значениях a^* , и в конце этого периода при малых. Выбор промежуточного момента времени для повышения интенсивности пропаганды не является оптимальным ни в каком случае.

2. Всегда существует критическое значение a_0^* такое, что при меньших значениях выгоднее повышать интенсивность пропаганды в конце периода агитации, а при больших – в его начале.

3. В небольшой окрестности этого значения оптимальный результат для альтернативы R оказывается хуже результата в отсутствие дестабилизации, для остальных случаев использование дестабилизации приводит к выигрышу альтернативы R.

4. Оптимальным ответом стороны L на действия стороны R является повторение действий R по изменению интенсивности пропаганды с некоторым запаздыванием.

Полученные закономерности имеют место как для консолидированного, так и для поляризованного общества, и можно предположить, что они слабо зависят от начального распределения мнений индивидов.

ГЛАВА 3.

ЗАМЕНА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КЛЕТОЧНЫМИ АВТОМАТАМИ В МОДЕЛИ А.П. МИХАЙЛОВА «ВЛАСТЬ-ОБЩЕСТВО»

3.1. Модель А.П. Михайлова «власть-общество»

Хорошим примером применения метода замены может служить построение дискретной модели взаимодействия власти и общества. В качестве базовой системы здесь используем классическую модель А.П. Михайлова «власть-общество», описывающую динамику распределения власти в иерархии [172], [173], [174]). Рассмотрим построение и исследование модификации данной модели, основанного на стохастическом клеточном автомате.

Краевая задача, лежащая в основе модели имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(p, \frac{\partial p}{\partial x}, x, t) \frac{\partial p}{\partial x} \right) + F(p, x, t) \\ \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь $p(x, t)$ – количество власти, основная переменная модели, зависящая от времени и уровня властной иерархии $x \in [0; 1]$, $F(p, x, t)$ – функция реакции общества как источника властных полномочий. Остановимся подробнее на величине $p(x, t)$.

Предполагается, что властные полномочия любой инстанции могут быть определены с помощью некоторого совокупного количественного критерия, характеризующего возможный уровень влияния данного властного института на поведение других инстанций и на жизнь гражданского общества. При этом не вводятся какие-либо абсолютные единицы власти, считается достаточным принять властные полномочия высшей инстанции за 1. Тогда полномочия любой другой инстанции будут выражаться в долях по отношению к высшему институту. Для каждой инстанции существуют наибольшие и наименьшие полномочия, то есть, максимально допустимый объем действий и то, что инстанция обязана выполнять постоянно. В ходе рассуждений автор [173] приходит к тому, что именно максимальные властные полномочия задаются в математической модели некоторой положительной невозрастающей по x функцией $p(x, t)$, удовлетворяющей краевой задаче (3.1).

Эта модель носит ярко выраженный теоретический характер, позволяющий получать довольно общие результаты, такие, как возникновение контрастных структур в потоках власти [175]. Однако при ее использовании для рассмотрении прикладных задач мы сталкиваемся с рядом проблем, среди которых наиболее существенны непрерывный характер переменной x (в то время как уровни реальной властной иерархии дискретны) и игнорирование социально-экономических факторов (каковые заметно влияют на деятельность любой системы управления), в том числе коррупции.

Сказанное выше привело к необходимости модификации исходной модели (3.1) с переходом от уравнения в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, каждое из которых описывало бы отдельный уровень иерархии из их конечного набора. В такую систему могут быть добавлены социально-экономические факторы, что приводит нас к модели [153], имеющей следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dp_F}{dt} = k_F(p_R - p_F) + F_F(p_F, t) \\ \frac{dp_{Ri}}{dt} = k_{Ri}(p_F - 2p_{Ri} + p_{Mi}) + F_{Ri}(p_{Ri}, t) \\ \frac{dp_{Mj}}{dt} = k_{Mj}(p_{Ri} - p_{Mj}) + F_{Mj}(p_{Mj}, t) \end{cases} \quad (3.2)$$

Здесь p_s - количество власти в федеральном центре, регионе или муниципалитете, $p_R = \overline{p_{Ri}}$, $p_{Mi} = \overline{p_{Mj}}$, причём муниципалитеты j относятся к региону i , k_s и F_s - соответствующие коэффициент перетекания власти и функция реакции общества. Функция реакции общества, обыкновенно рассматриваемая в модели Михайлова, имеет вид:

$$F(p) = -a(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3) \quad (3.3)$$

Эта модель является гораздо более адекватной для решения прикладных задач моделирования и прогнозирования динамики властной структуры. Однако в ней по-прежнему не учтены существенные аспекты моделируемой системы власти, такие, как административно-территориальное деление, соответствующее всем, кроме верхнего, уровням иерархии, возможность движения фондов и трудовых ресурсов, сложные и неаналитические зависимости величин, описывающих социально-экономическую динамику и т. п.

Влияние гражданского общества на власть описывается в модели "власть-общество" с помощью так называемой функции реакции гражданского общества. Ее конкретный вид определяет, в частности, распределения власти, которые являются желательными с точки зрения гражданского общества. Данные распределения могут быть охарактеризованы как политические аттракторы: в рамках детерминированной модели эти распределения близки к устойчивым стационарным решениям системы обыкновенных дифференциальных уравнений (либо, для непрерывной иерархии – решениям параболического уравнения). В рамках детерминированной модели, чем больше разность между текущим количеством власти некоторой инстанции от соответствующего желательного (с точки зрения общества) количества власти, тем больше скорость изменения власти данной инстанции. В модели на основе клеточного автомата вероятность изменения власти инстанции на текущем временном шаге пропорциональна значению между желательным и существующим количеством власти.

Хотя здесь мы имеем не одно дифференциальное уравнение первого порядка, а их систему, мы можем поставить в соответствие каждому из этих уравнений отдельную клетку или

множество клеток клеточного автомата (что и будет сделано в дальнейшем). В этом случае все остальные зависимые переменные, входящие в данное уравнение могут быть рассмотрены как параметры, и, следовательно, каждое из уравнений соответствует условию теоремы о сходимости.

3.2. Построение стохастической модели на основе клеточного автомата

Следовательно, мы можем применить к этой модели метод замены дифференциальных уравнений клеточным автоматом и построить её клеточно-автоматную модификацию на ограниченной ортогональной сетке, где каждый муниципалитет моделируется клеткой, а регион – связным множеством некоторого количества таких клеток. Окрестность клетки в данной модификации модели может быть произвольной. Каждая клетка (муниципалитет) в базовой модели характеризуется состоянием, соответствующим количеству власти, реализуемому данной инстанцией, и набором параметров, характеризующих реакцию общества. Каждый регион и федеральный центр представлены такими же клетками, не принадлежащими полю автомата и являющимися псевдососедями для всех клеток поля. Время в данной модели предполагается дискретным. Переменная $p(t)$, характеризующая каждый конкретный муниципалитет в каждый момент времени, имеет смысл количества власти, реализуемого администрацией данного муниципалитета.

Отдельно остановимся на номере региона, к которому относится данный муниципалитет. Этот атрибут приписывает данной клетке одного псевдососеда – клетку, характеризующую состояние региона, к которому относится данный муниципалитет. Также необходима и клетка, характеризующая состояние всей системы в целом – она будет являться псевдососедом для всех клеток-регионов. Следовательно, при моделировании системы с m регионами, множество клеток данного автомата следует пополнить $m+1$ клеткой, которые не находятся на поле клеточного автомата. Каждая из этих клеток (каждый регион и федеральный центр) также характеризуется своими значениями параметров и переменной, имеющей смысл количества власти, реализуемого соответствующей администрацией.

При моделировании реальной государственной системы соответствие между клетками-муниципалитетами и клетками-регионами может быть задано в виде приближенного изображения реального географической конфигурации этой системы. Если же речь идет о модельных расчетах абстрактных систем, то соответствие между муниципалитетами и регионами может быть генерировано при помощи вспомогательного клеточного автомата.

Для этой цели используем клеточный автомат «копируй со случайного соседа» [79]. Используем то же самое поле и ту же самую окрестность, что и в основном автомате, а множество состояний клетки составят множество номеров регионов и число 0, которое будет

означать то, что муниципалитет не приписан к конкретному региону. Затем разместим в ячейках, выбранных случайным образом, номера регионов и запустим процедуру автомата, повторяя ее до тех пор, пока на поле существуют клетки в состоянии 0. В итоге получим конфигурацию, в которой каждой клетке поставлен в соответствие регион таким образом, чтобы к одному региону относились клетки, связанные транзитивным замыканием отношения соседства (то есть, чтобы территория региона была целостной).

Правила вспомогательного клеточного автомата «копируй со случайного соседа» (для окрестности фон Неймана) приведены ниже в виде псевдокода.

```

if Center=0 then
a=Random (0, 1)
if a<0,25 then Center' = North
if a≥0,25 and a<0,5 then Center' = East
if a≥0,5 and a<0,75 then Center' = West
if a≥0,75 then Center' = South
end if

```

Здесь и далее штрихом обозначено состояние клетки на следующем шаге.

Пример построения системы, в которой 100 муниципалитетов распределены по 8 регионам, приведен на рисунке 3.1.

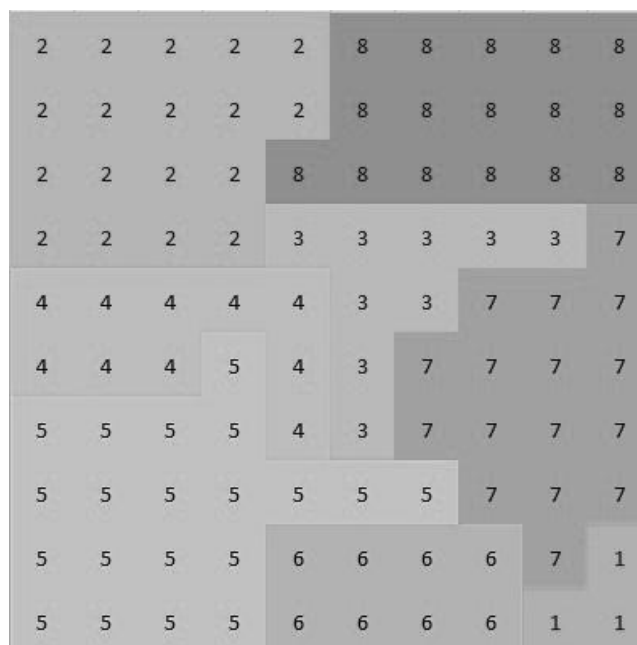


Рис. 3.1. Распределение 100 муниципалитетов по 8 регионам. Цифры указывают номер региона.

Распределение муниципалитетов по регионам завершает построение системы. Таким образом, построение модели завершено в части описания реакции общества на текущее распределение власти, а также «географии».

Перейдем к описанию динамики распределения власти в системе.

Непрерывная модель предполагает, что поток власти между двумя соседними инстанциями иерархии пропорционален разности текущих значений власти этих инстанций (политологический аналог законов Фурье и Фика, [176]). В рамках дискретной стохастической модели на основе клеточного автомата именно этой разности пропорциональна вероятность передачи кванта власти от одной инстанции к другой.

Положим экзогенно заданными начальные количества власти, реализуемые всеми инстанциями (муниципальными, региональными, федеральной). Как известно [152], в модели «власть-общество» динамика определяется двумя факторами: перераспределением власти между инстанциями и влиянием гражданского общества. В детерминированной модели этим факторам соответствуют различные слагаемые в дифференциальных уравнениях. В модели на основе клеточного автомата это приводит к тому, что каждый шаг динамики автомата состоит из следующих двух этапов.

Этап 1. Изменение объема власти инстанции ввиду потоков власти между соседними иерархическими уровнями описывается следующим алгоритмом.

$d = \text{Region}(\text{Center}) - \text{Center}$

$a = \text{Random}(0, 1)$

If $d > 0$ then

If $a < k d / \text{Number}(\text{Region}(\text{Center}))$ then $\text{Region}'(\text{Center}) = \text{Region}(\text{Center}) - 1$

If $a < k d$ then $\text{Center}' = \text{Center} + 1$

End If

If $d < 0$ then

If $a < -k d / \text{Number}(\text{Region}(\text{Center}))$ then $\text{Region}'(\text{Center}) = \text{Region}(\text{Center}) + 1$

If $a < -k d$ then $\text{Center}' = \text{Center} - 1$

End If

Здесь $\text{Region}(\text{Center})$ обозначает псевдососеда клетки, описывающего регион, к которому относится данный муниципалитет, а функция $\text{Number}(\text{Region}(\text{Center}))$ возвращает число клеток, для которого данный регион является псевдососедом (то есть число муниципалитетов, относящихся к данному региону). Коэффициент k имеет тот же смысл, что и соответствующий коэффициент из детерминированной модели и характеризует интенсивность обмена властью между соседними инстанциями (так, в детерминированной модели с непрерывной иерархией, имеющей вид уравнения в частных производных параболического типа, данный коэффициент аналогичен коэффициенту теплопроводности).

Заметим, что этап 1 сохраняет суммарное количество власти в системе. Действительно, если количество власти на региональном уровне превышает количество власти на уровне

муниципалитета на величину d , то с вероятностью kd количество власти на региональном уровне уменьшается на 1, а с вероятностью $k\frac{d}{N}$ (где N – число муниципалитетов в составе данного региона) увеличивается количество власти на уровне муниципалитета. Таким образом, среднее изменение суммарного количества власти в рамках одного региона после применения алгоритма ко всем клеткам региона равно

$$-kd + k\frac{d}{N}N = 0$$

. Если количество власти на региональном уровне меньше количества власти на уровне муниципалитета, среднее изменение суммарного количества власти аналогичным образом равно 0. ■

Алгоритм перетекания власти между федеральным и региональным уровнями аналогичен, но вместо числа муниципалитетов используется число регионов, и он также сохраняет суммарное количество власти в системе.

Этап 2. Изменение объема власти инстанций за счет влияния общества моделируется следующим образом. Вычисляется функция реакции общества:

Вероятность изменения состояния клетки r на любом уровне иерархии принимается равной

$$r = \min \left\{ k_1 \frac{F(p)}{F_{\min(\max)}}; 1 \right\}. \quad (3.4)$$

В связи с тем, что функция реакции общества носит кубический характер, в случае, если ее значение больше нуля, оно сравнивается с ее значением (F_{\max}) в локальном максимуме, также положительным, а если меньше нуля – со значением (F_{\min}) в минимуме, каковое отрицательно. Происходящее с этой вероятностью изменение равно $\text{sign } F(p)$, то есть объем власти в клетке меняется на единицу с вероятностью тем большей, чем больше значение функции F , причем в ту сторону, на которую указывает знак функции F . Коэффициент k_1 имеет тот же смысл, что и соответствующий коэффициент из детерминированной модели (3.2) и характеризует степень влияния реакции общества на изменение количества власти.

Применение формулы (3.4) требует предварительного вычисления величин $F_{\min(\max)}$. Для этого находим точки экстремумов функции (3.3); соответствующие значения p равны

$$p_{\min(\max)} = \frac{p_1 + p_2 + p_3 \pm \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_1 p_2 - p_1 p_3 - p_2 p_3}}{3}.$$

Затем находим наибольшее или наименьшее значение функции в этих точках.

Алгоритм изменения количества власти за счет влияния общества, таким образом, имеет следующий вид:

$$F = -(Center - p1)(Center - p2)(Center - p3)$$

If $F > 0$ then

$$p_{extr} = (p1 + p2 + p3 + \sqrt{(p1 p1 + p2 p2 + p3 p3 - p1 p2 - p1 p3 - p2 p3)}) / 3$$

else

$$p_{extr} = (p1 + p2 + p3 - \sqrt{(p1 p1 + p2 p2 + p3 p3 - p1 p2 - p1 p3 - p2 p3)}) / 3$$

End if

$$F_{extr} = -(p_{extr} - p1)(p_{extr} - p2)(p_{extr} - p3)$$

$$r = k1 F / F_{extr}$$

$$a = \text{Random}(0, 1)$$

If $a < r$ and $F > 0$ then $Center' = Center + 1$

If $a < r$ and $F < 0$ then $Center' = Center - 1$

Алгоритмы изменения объема власти на федеральном и региональном уровнях аналогичны. На Этапе 2 суммарное количество власти в системе не остается постоянным, как и в исходной непрерывной модели, где источником изменения количества власти является функция реакции общества.

Таким образом, в соответствии с алгоритмами Этапа 1 и Этапа 2, количество власти любой инстанции изменяется единичными «квантами». Вследствие этого, если в начальный момент времени количество власти каждой инстанции является целым числом, то и в любой следующий момент времени количество власти каждой инстанции будет целым числом.

Следует отметить также, что в изложенной базовой модели количество власти в муниципалитете не зависит от соседних муниципалитетов (поэтому, в частности, выше не конкретизировался вид окрестности клетки: фон Неймана либо Мура). Такая зависимость предполагается для дополнительных переменных, таких, как объем производства или уровень коррупции в муниципалитете, регионе или стране в целом. Эти переменные предполагается ввести при развитии модели, предполагающем разработку конкретных имитационных систем, описывающих анализ динамики власти с учетом упомянутых дополнительных параметров.

Таким образом, в данном варианте модели «власть-общество», для изучения дискретной иерархии используется стохастический клеточный автомат вместо системы обыкновенных дифференциальных уравнений (данная альтернатива была предложена в [100] для моделирования физических процессов)..

3.3. Численные эксперименты с базовой моделью

Рассмотрим нескольких сценариев динамики распределения власти в модели, при этом результаты численных экспериментов со стохастическим клеточным автоматом будем сопоставлять с детерминированной моделью.

В следующих численных экспериментах, описанных ниже, рассматривается система власти с пятью регионами и 100 муниципалитетами, случайно распределенными по этим

регионам.

Были проведены несколько серий численных экспериментов с построенным в предыдущем разделе вариантом модели «власть-общество», имеющим вид стохастического клеточного автомата. Для каждой рассматриваемой комбинации параметров системы проводилось 50 экспериментов, отличающихся друг от друга начальными условиями. Эти начальные условия генерировались случайным образом: для каждой инстанции муниципалитета, региона и страны в целом) начальное количество власти являлось реализацией случайной величины, равномерно распределенной на множестве $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Серия экспериментов №1.

Рассмотрим ситуацию, когда для всех клеток значения параметров функции реакции общества, заданной формулой (3.3), равны $p_1 = 2, p_2 = 5, p_3 = 7$. Этот случай соответствует детерминированной модели (3.2), в которой

$$F_{m,1} = \dots = F_{m,100} = F_{r,1} = \dots = F_{r,5} = F_f = -k_1(p-2)(p-5)(p-7). \quad (3.5)$$

Нетрудно показать, что система (3.2) с функциями реакции общества вида (3.5) имеет при любых положительных k, k_1 стационарные решения

$$p_{m,1}(t) = p_{m,2}(t) = \dots = p_{m,100}(t) = p_{r,1}(t) = \dots = p_{r,5}(t) = p_f(t) = 2 \quad (3.6)$$

$$p_{m,1}(t) = p_{m,2}(t) = \dots = p_{m,100}(t) = p_{r,1}(t) = \dots = p_{r,5}(t) = p_f(t) = 5, \quad (3.7)$$

$$p_{m,1}(t) = p_{m,2}(t) = \dots = p_{m,100}(t) = p_{r,1}(t) = \dots = p_{r,5}(t) = p_f(t) = 7 \quad (3.8)$$

причем решения (3.6) и (3.8) являются асимптотически устойчивыми, а (3.7) – неустойчивым.

Основной целью численных экспериментов со стохастическим клеточным автоматом являлось сопоставление результатов с указанными решениями детерминированной модели.

Эксперименты проводились при значениях $k=1, k_1=1$ (см. описания алгоритмов Этапа 1 и Этапа 2), и случайном начальном распределении количества власти в клетках. В результате, течением времени количество власти всех инстанций стремилось к одному из стационарных значений (одному и тому же для всех инстанций).

На рисунке 3.2 показаны типичные графики изменения среднего количества власти в системе. За 200 шагов ситуация почти полностью стабилизируется, и количество власти во всех клетках становится одинаковым, принимая одно из стационарных значений. Стохастический

характер модели приводит к тому, что в очень редких случаях (2 случая из 50 численных экспериментов) количество власти сходится и к значению $p=5$, которое является неустойчивым в детерминированной модели.

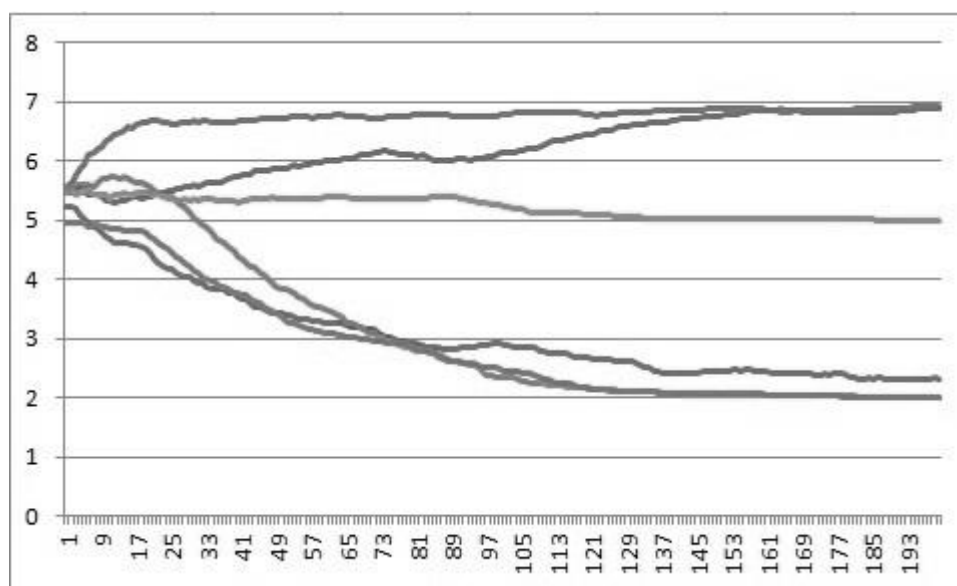


Рис. 3.2. Динамика среднего количества власти в системе (Серия экспериментов №1).

Серия экспериментов №2.

Изменим условия экспериментов со стохастическим клеточным автоматом по сравнению с Серией 1, положив $k=0,05$ (значения прочих параметров остаются неизменными).

Данная ситуация соответствует детерминированной модели (3.4), (3.5) с малым параметром. Аналогичная модель с непрерывной иерархией является сингулярно возмущенной и имеет решения, относящиеся к классу контрастных структур [177]. Дискретная стационарная контрастная структура системы (3.5) – это стационарное решение, при котором количество власти одних инстанций близко (при $k \ll 1$) к $p_1 = 2$, для других – к $p_3 = 7$. Контрастные структуры играют большую роль при анализ системы «власть-общество»: например, в [175] этим решениям была дана содержательная политологическая интерпретация. Цель данной серии экспериментов заключалась в том, чтобы определить наличие или отсутствие аналогов таких решений в стохастической модели.

Эксперименты на основе построенного клеточного автомата показали, что с течением времени количество власти в части муниципалитетов принимает значения в окрестности значения $p = 2$ (т.е. $p = 2$ либо $p = 1$, либо $p = 3$, причем среднее значение по муниципалитетам этой группы превышает 2), в других муниципалитетах объем власти принимает значения, близкие к значению $p = 7$ (то есть, $p = 7$, $p = 6$ либо $p = 8$).

Количество власти инстанций федерального и регионального уровня с течением времени

также стремится к одному из этих значений. В качестве примера приведем результаты одного из экспериментов: распределение муниципалитетов по количеству власти представлено на рисунке 3.3, объемы власти пяти региональных инстанций составляют, соответственно, 6, 7, 7, 7, 5, объем власти на федеральном уровне равен $p = 7$. Следует отметить, что здесь контрастная структура возникает не по всем вертикалям иерархии, а лишь по некоторым.

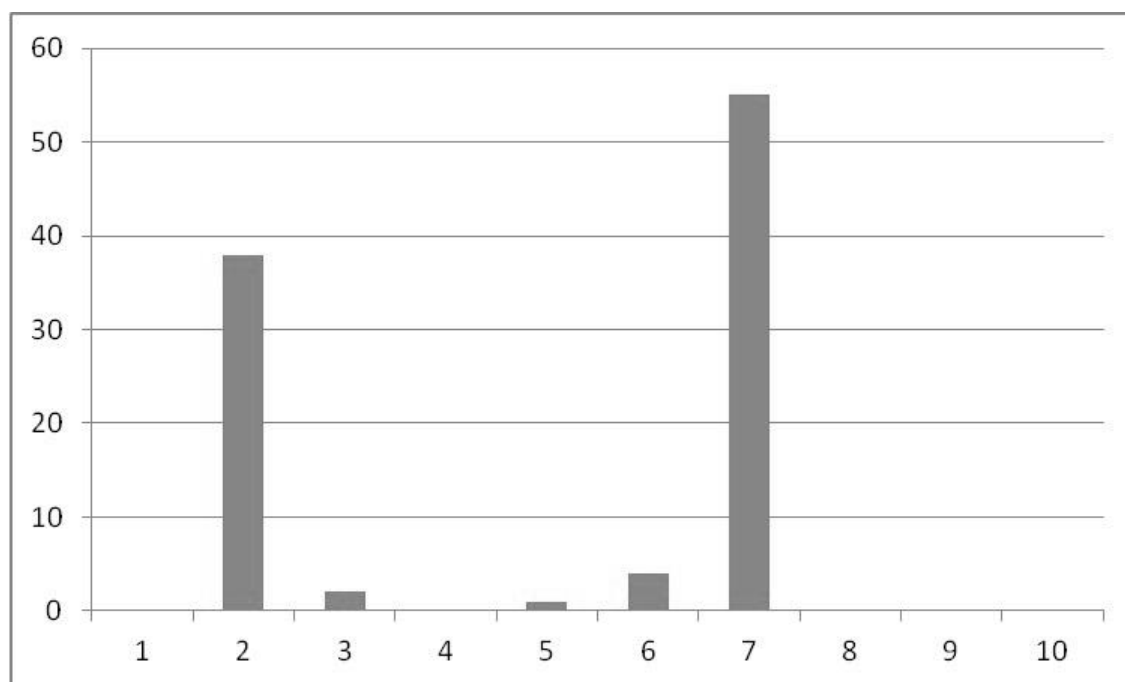


Рис. 3.3. Распределение 100 муниципалитетов по количеству власти в случае возникновения контрастной структуры по некоторым вертикалям (Серия экспериментов №2).

В редких случаях (3 эксперимента из 50), количество власти всех инстанций стремилось к одному и тому же стационарному значению, как и в случае $k=1$ (т.е. в Серии экспериментов №1). Следует отметить, что, поскольку в данной серии экспериментов реакция общества предполагалась одинаковой для всех уровней власти, а также для всех регионов и всех муниципалитетов, то результаты получались симметричные. Имеется в виду, что возникали как контрастные структуры, в которых количество власти на федеральном уровне было больше, чем на муниципальном (примеры приведены выше), так и наоборот, структуры, в которых большее количество власти сосредотачивалось на муниципальном уровне.

Серия экспериментов №3.

Перейдем к изучению модели в случаях, когда реакция общества является различной: как по уровням власти, так и по регионам. Рассмотрим следующую ситуацию. На федеральном уровне власти $p_1 = 4, p_2 = 7, p_3 = 9$, на региональном $p_1 = 3, p_2 = 6, p_3 = 8$, на муниципальном $p_1 = 2, p_2 = 5, p_3 = 7$. Однако в системе имеется один регион, в котором как для регионального, так и для муниципального уровней параметры имеют значения $p_1 = 1, p_2 =$

$2, p_3 = 3$. Другими словами, в стране присутствует «особый» регион, настроения в котором отличаются (от настроений в остальной части страны) в сторону меньшего желаемого обществом количества власти у региональной и муниципальных инстанций.

Цель данной серии экспериментов заключается в том, чтобы изучить возможность влияния гражданского общества одного региона на распределение власти в других регионах.

Как показали численные эксперименты (проводившиеся при значениях параметров $k=1$, $k_1=0,05$), наличие этой возможности зависит от размера «особого» региона. Если он имеет значительные размеры, то может оказать влияние на другие регионы, причем, в первую очередь – на количество власти региональных инстанций (а не муниципальных). При этом, однако, некоторые регионы могут остаться при «своем мнении». Результаты одного из экспериментов приведены в таблице 3.1 и на рис. 3.4.

Уровень	Установившееся количество власти				
	Регион 1 «особый»	Регион 2	Регион 3	Регион 4	Регион 5
Федеральный	5	5	5	5	5
Региональный	3	8	3	3	4
Среднее по муниципалитетам	3	7	4,5	4,7	4,9

Таблица 3.1. Результаты эксперимента из Серии №3.

Регион 1 является «особым», и оказывает влияние на остальные регионы и федеральный центр, но при этом в Регионе 2 сохраняются сильные региональная и муниципальные инстанции. В самом Регионе 1 муниципальная власть обладает количеством власти $p_3=3$, что превышает местные значения $p_2=2$, $p_1=1$; хотя эта величина меньше, чем среднее количество муниципальной власти в других регионах.

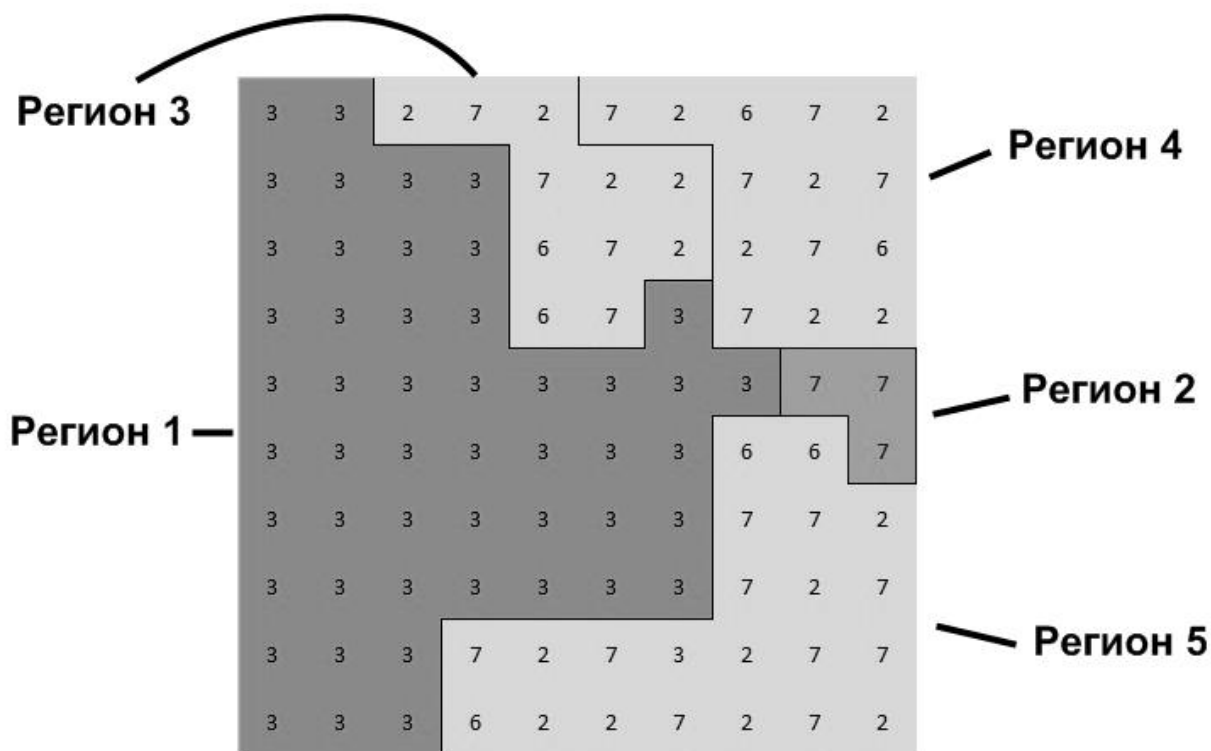


Рис. 3.4. Распределение количества власти в системе с отличающимся регионом (Серия экспериментов №3). Выделены регионы 1 и 2. Цифры показывают количество власти.

Серия экспериментов №4

Рассмотрим теперь случай, когда внутри каждого региона существует муниципалитет с отличающимися характеристиками (например, большой город). На федеральном уровне власти $p_1 = 4, p_2 = 7, p_3 = 9$, на региональном $p_1 = 3, p_2 = 6, p_3 = 8$, на муниципальном $p_1 = 2, p_2 = 5, p_3 = 7$, и в каждом регионе есть один муниципалитет с $p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 3$ (в данной серии экспериментов, по-прежнему $k=1, k_1=1$).

Такая постановка задачи моделирует ситуацию, при которой каждый регион состоит из большого города (областного центра) и некоторого количества сельских муниципалитетов, причем общественные настроения на селе и в городе отличаются. Более конкретно: данные значения параметров предполагают, что в большом городе гражданское общество настроено на более низкое количество власти у местной инстанции, а гражданское общество на селе – на более высокое.

Численные эксперименты (см. рис. 6.5) показали, что при указанных параметрах, в городских муниципалитетах количество власти почти всегда остается на низком, но при этом самом большом из соответствующих стационарных значений (т.е., на «городском» $p_3 = 3$; для эксперимента, представленного на рис.6.5, лишь у одного городского муниципалитета $p = 4 > p_3$). При этом, часть сельских муниципалитетов также переходит на относительно

низкие значения власти $p = 2, p = 3$ которые для них являются нижними стационарными («сельское» $p_1 = 2$). Федеральный центр и все региональные инстанции имеют с объемы власти, соответствующими наибольшим стационарным значениям: соответственно, «федеральное» $p_3 = 9$ и «региональное» $p_3 = 8$. Другими словами, 5 городских муниципалитетов (из 100) в рамках данной модели не оказывают влияния на количество власти региональных и федеральной инстанций.

3	7	2	2	7	7	7	7	7	7
2	7	3	7	2	3	7	2	7	2
2	2	7	7	7	7	7	3	3	2
7	7	3	7	3	7	7	7	2	3
2	2	8	2	2	7	7	7	3	3
2	7	3	3	7	7	7	7	7	7
3	7	7	2	7	2	7	7	7	2
7	2	7	7	2	7	7	3	4	7
2	7	7	7	7	7	7	7	2	4
3	7	7	7	2	7	3	2	7	8

Рис. 3.5. Распределение количества власти в системе с отличающимися муниципалитетами (выделены). Цифры показывают количество власти.

Построенный стохастический клеточный автомат позволяет моделировать довольно сложные структуры системы «власть-общество», повторяя все результаты, достигнутые на классической непрерывной модели. Однако преимущество предложенного подхода состоит в том, что данная модель позволяет без существенного повышения вычислительной сложности вводить различных новые переменные и параметры, характеризующие каждый из уровней власти.

3.4. Дополнение базовой модели экономическими и социальными параметрами.

Рассмотрим примеры введения в модель этих дополнительных параметров. Поскольку модель представляет собой клеточный автомат, то речь пойдет о добавлении параметров, характеризующих состояние каждой клетки. Итак, в базовой модели каждая клетка

характеризовалась номером псевдососеда (соответственно, региона, к которому относится муниципалитет или указанием на федеральный центр для региона), количеством власти и параметрами функции реакции общества. Характер предлагаемой модели позволяет добавить к этим характеристикам следующие:

1. Население муниципалитета.
2. Объем основных производственных фондов муниципалитета.
3. Уровень коррупции в муниципалитете.

Эти параметры задаются натуральными числами из некоторого заданного интервала, поскольку являются характеристиками состояния клетки.

Помимо этого, рассматриваются еще вспомогательные переменные: объем произведенного в муниципалитете продукта и удельное потребление. Эти величины представляют собой действительные числа.

Описание социально-экономической динамики в рамках системы «Власть-общество» при помощи адаптированной модели Солоу было предложено в [153]. Будем придерживаться высказанных там предположений и допущений. Динамика модели определяется системой дифференциальных и алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_1}{dt} &= (k_1(p_2 - p_1) + F_1(p_1, t)) \frac{\gamma}{c} \\
 \frac{dp_i}{dt} &= (k_i(p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}) + F_i(p_i, t)) \frac{\gamma}{c} \\
 \frac{dp_n}{dt} &= (k_n(p_{n-1} + p_n) + F_n(p_n, t)) \frac{\gamma}{c} \\
 L &= L_0 e^{\nu t} \\
 \frac{dK}{dt} &= -\mu K + \rho(1 - a - \omega P - m_1 QP)X \\
 X &= (A_1 P - A_2 P^2)(1 - m_2 Q)K^\alpha L^{1-\alpha} \\
 c &= (1 - \rho)(1 - a - \omega P - m_1 QP) \frac{X}{L}
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Здесь, как и в ранее представленной непрерывной модели «Власть-общество», p_i - количество власти на i -м уровне иерархии, k_i и F_i - соответствующие коэффициент перетекания власти и функция реакции общества. В последних четырех уравнениях использованы стандартные обозначения модели Солоу с макроэкономической производственной функцией Кобба-Дугласа [178]: L – количество занятых в экономике, L_0 - его значение в момент времени, выбранный в качестве начального, ν – коэффициент прироста населения, μ - коэффициент выбытия основных производственных фондов, K – объем основных производственных фондов, X – валовый выпуск, a – коэффициент прямых затрат, ρ – норма накопления, α – эластичность производственной функции по фондам, c – уровень потребления на одного работающего.

Новыми по сравнению с базовой моделью обозначениями являются P – суммарное количество власти в иерархии и Q – объем коррупции. Причем первая величина широко использовалась в классической модели «Власть- общество», но не понадобилась при построении предложенной дискретной модели.

Коэффициенты γ , ω и $m_{1,2}$ задают, соответственно, влияние уровня потребления на динамику власти, долю продукта, идущую на нужды властной иерархии и влияние коррупции на экономическое производство.

Теперь выясним, какие изменения следует внести в предлагаемую в данной работе базовую модель для соответствия вышеприведенной системе, и какие еще модификации могут быть сделаны в рамках повышения адекватности модели.

Динамика власти остается практически такой же, социально-экономическое развитие влияет на нее только через коэффициент $\frac{\gamma}{c}$. Таким образом, меняется выражения для вероятности (3.4):

$$r = \frac{\gamma}{c} \min \left\{ k_1 \frac{F(p)}{F_{\min(\max)}}; 1 \right\}. \quad (3.10)$$

Точно так же в алгоритма перетекания власти меняются вероятности изменения количества власти на нижнем ($\frac{\gamma}{c} k \frac{d}{N}$) и верхнем ($\frac{\gamma}{c} kd$) уровнях.

Что касается экономических и коррупционных величин, то как и планировалось, припишем каждой клетке (муниципалитету, региону и федеральному уровню) некоторое значение уровня коррупции Q , а «муниципальным» клеткам – еще и значения величин K , L , X и c . При этом значения Q , K и L будем рассматривать как дополнительные характеристики состояния клетки, а, следовательно, они будут задаваться целыми числами из некоторого выбранного интервала. X и c не будем включать в состояние клеток, эти величины будут рассчитываться в соответствии с формулами (3.9).

В этом случае возникает вопрос о значениях K и L для клеток, не являющихся «муниципальными». Решается он самым простым способом: эти величины для клеток-регионов определяются как сумма по всем входящим в регион муниципалитетам, а для «федеральной» клетки – как сумма этих величин по всем «муниципальным» или «региональным» клеткам (оба варианта, естественно, должны давать один и тот же результат).

Далее можно было бы, аналогично базовой модели, задать вероятностную микродинамику клеточного автомата так, чтобы в среднем получить все уравнения (3.9). Однако в этом случае мы получили бы просто прямой аналог непрерывной модели, ничем не хуже, но и не лучше таковой. Однако наша цель – воспользоваться дополнительными возможностями, которые дает модель на основе клеточного автомата, и первый шаг к этому уже

был сделан, когда каждой клетке был приписан свой уровень коррупции и свои социально-экономические показатели, которые в общем случае могут быть различными для различных клеток.

Не будем строго привязываться к макродинамике социально-экономических параметров, заданной (3.9) для всей системы в целом, но рассмотрим изменение этих параметров с учетом коррупции для каждой клетки в отдельности. Разумеется, будем основываться на прежней схеме изменения социально-экономических показателей, использованной в модели Солоу (рисунок 3.6).

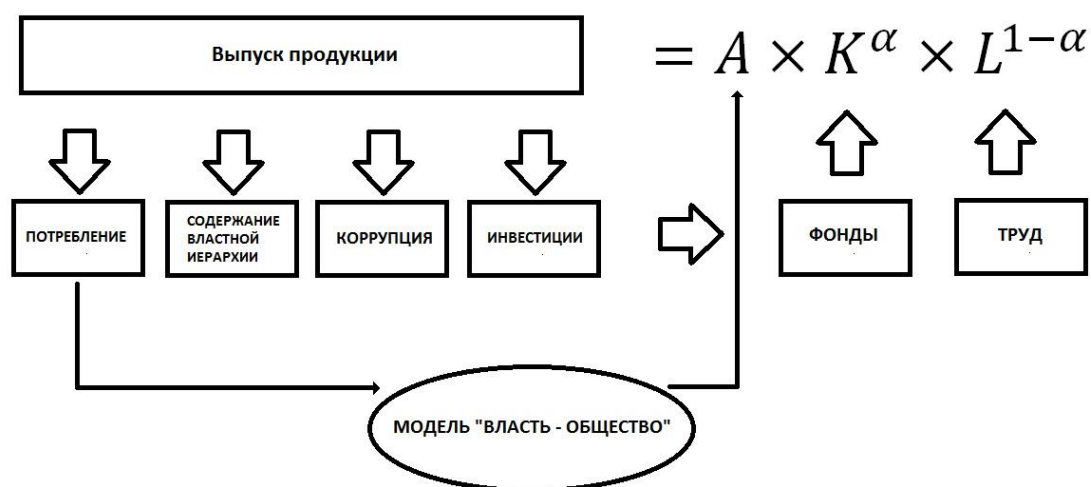


Рис. 3.6. Взаимное влияние факторов в модели «Власть-общество» с добавленными социально-экономическими показателями и коррупцией.

Здесь крупными стрелками показано перераспределение произведенного продукта. Тонкие стрелки отображают влияние уровня потребления на интенсивность потоков власти и объема власти на коэффициент в макроэкономической производственной функции.

Второе следует рассмотреть подробнее. Авторами непрерывной модели сделано предположение о квадратичной зависимости этого коэффициента от объема власти P . Прежде всего, следует указать, что в предлагаемом варианте модели мы будем рассматривать в качестве P следующую величину:

$$P = p_{m,j} + \frac{p_{r,i}}{N_i} + \frac{p_f}{n}$$

Здесь N_i - число муниципалитетов в регионе i , n - общее число муниципалитетов в системе. Таким образом, в качестве количества власти, определяющего социально-экономическую динамику данного муниципалитета, рассматривается сумма количества местной власти и долей количеств региональной и федеральной властей, приходящихся на

данный муниципалитет.

Сделанное в рамках непрерывной модели предположение означает (в силу вида зависимости коэффициента макроэкономической производственной функции от объема власти), что для каждого муниципалитета существует некоторое оптимальное количество власти

$$P_{opt} = \frac{A_1}{2A_2}$$

при котором экономика региона функционирует наиболее эффективно в смысле производства.

Итак, в новой модели остается только задать динамику величин K и L в каждой из муниципальных клеток. Численность трудоспособного населения, в отличие от непрерывной модели, может быть задана целым числом, а ее изменение определяться следующим представляющимся естественным образом через отображение:

$$L' = L(1 + \nu)$$

При построении имитационной схемы, моделирующей реальную страну, коэффициент прироста населения может быть задан различным для различных территорий, а также переменным во времени. Если модель планируется использовать в иллюстративных целях, в него также может быть добавлена случайная составляющая. Однако в изложенных ниже пробных расчетах этот коэффициент будет принят постоянным и одинаковым для всех клеток.

Наконец, зададим динамику объема основных производственных фондов K . Вначале для каждой муниципальной клетки рассчитывается объем продукции, который может быть направлен на инвестиции, округленный в нижнюю сторону до целого числа:

$$I = [\rho(1 - a)X]$$

После этого для каждой единицы потенциальных инвестиций разыгрываются варианты ее использования: затраты на поддержку властной иерархии, потери на коррупцию или собственно инвестиции. Алгоритм A этого выглядит следующим образом:

For $i=1$ to I

$a=Random(0, 1)$

If $a > \omega P$ *then*

$a=Random(0, 1)$

If $a > QP$ *then*

$K=K+1$

End if

End if

Next i

$K'=K(1-\mu)$

Наконец, в модель может быть введена возможность обмена продукцией между клетками-муниципалитетами. Более уместно было бы ввести такое дополнение при рассмотрении многопродуктовой модели, а в рамках рассматриваемой ситуации, в которой производимая продукция не разделяется по видам, можно ограничиться возможностью перетекания продукции в регионы, где ощущается ее нехватка.

Это потребует введения в модель еще одного матричного параметра $T = (t_{ij})$, характеризующего интенсивность обмена товарами между клетками i и j . Положим $0 \leq t_{ij} < 1$, отсутствие транспортного сообщения между клетками задается $t_{ij} = 0$, считаем, что $t_{ii} = 0$.

Теперь на каждом шаге по времени перед алгоритмом А выполняем следующий алгоритм (В):

For i=1 to n

For j=1 to n

a=Random (0, 1)

If a>t(i,j) then

If I(i)>I(j) then

I(i)= I(i)-1

I(j)= I(j)+1

End if

If I(i)<I(j) then

I(i)= I(i)+1

I(j)= I(j)-1

End if

End if

Next j

Next i

Возможен также вариант модификации модели, в которой транспортные потоки между клетками описываются не таким примитивным образом, а на основе подхода, изложенного в Главе 6.

3.5. Численные эксперименты с дополненной моделью

Для пробных численных экспериментов рассматривалась модель системы «Власть-общество-экономика-коррупция» с пятью регионами и 100 муниципалитетами, случайно распределенными по этим регионам.

Как и в базовой модели, для всех клеток значения параметров функции реакции общества, заданной формулой (3.2), были взяты равными $p_1 = 2, p_2 = 5, p_3 = 7$. Были

использованы следующие значения параметров модели Солоу: $v=0,02$, $a=0,5$, $\rho = \alpha = 0,3$ (оптимальная по Солоу норма накопления), $A_1 = 10$, $A_2 = 1$ (что дает оптимальное количество власти 5, то есть значение, соответствующее неустойчивой равновесной точке в функции реакции общества). Начальные значения переменных модели были приняты $K=1000$ и $L=1000$ в каждом муниципалитете, доля расходов на поддержание властных структур была принята $\omega = 0,04$ (при максимальном объеме власти 10 это соответствует доле ВВП, идущей на государственные расходы, равной 40%).

В ходе численных экспериментов задавался различный уровень коррупции, а также менялись некоторые приведенные выше начальные значения переменных и параметров. Для каждого набора начальных данных проводилась серия из 50 экспериментов, каждый из которых продолжался в течение 100 шагов по времени. Затем проводились такие же серии из 50 экспериментов, каждый из которых продолжался в течение 1000 шагов по времени.

Разумеется, без калибровки модели на основании реальных статистических данных и привязки ее к географической реальности нельзя говорить о каких-либо количественных результатах. Однако некоторые из большого числа проведенных экспериментов дали интересные качественные результаты, которые изложены ниже.

1. Сравнивая динамику среднего значения количества власти в системе при случайном начальном распределении количества власти в отсутствие коррупции и при наличии коррупции на уровне $Q=0,3$, получаем следующую типичную картину.

В отсутствие коррупции наблюдается сходимость среднего количества власти в системе к одному из устойчивых стационарных значений. Приблизительно через 200-250 шагов по времени количество власти на всех уровнях иерархии во всех муниципалитетах и регионах системы устанавливается на уровне этого значения. При этом, благодаря стохастическому характеру модели, происходят незначительные осцилляции этого показателя, лучше заметные на коротком масштабе времени (рисунок 3.7).

В большинстве экспериментов среднее количество власти в системе сходилось в зависимости от его начальной величины к значению 7 (если начальная величина была больше 5, рисунок 3.8) или к значению 2 (если начальная величина была меньше 5, рисунок 3.9). Однако эта закономерность не является однозначной из-за стохастической составляющей модели.

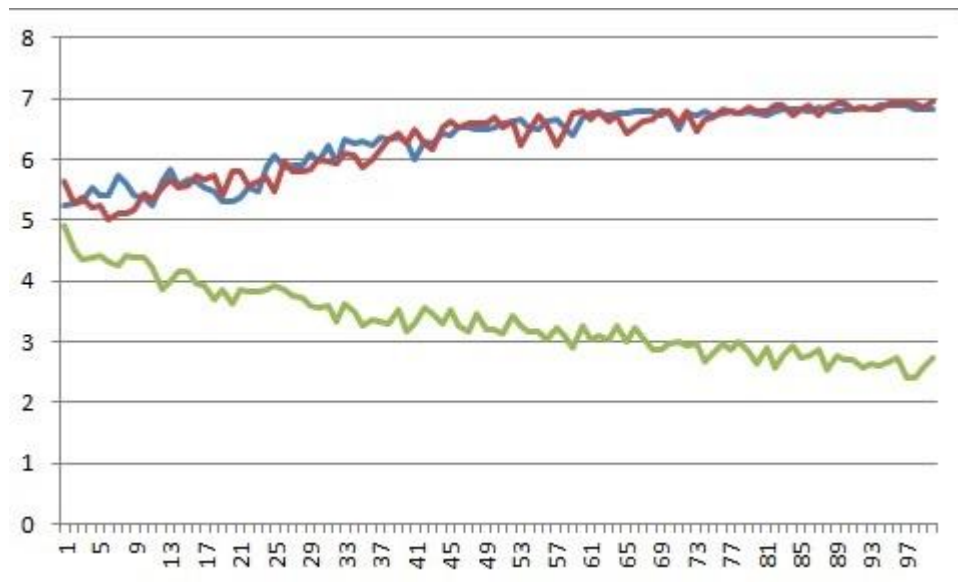


Рис. 3.7. Динамика количества власти в системе без коррупции на 100 шагах по времени. По вертикальной оси отложено количество власти, по горизонтальной – время.

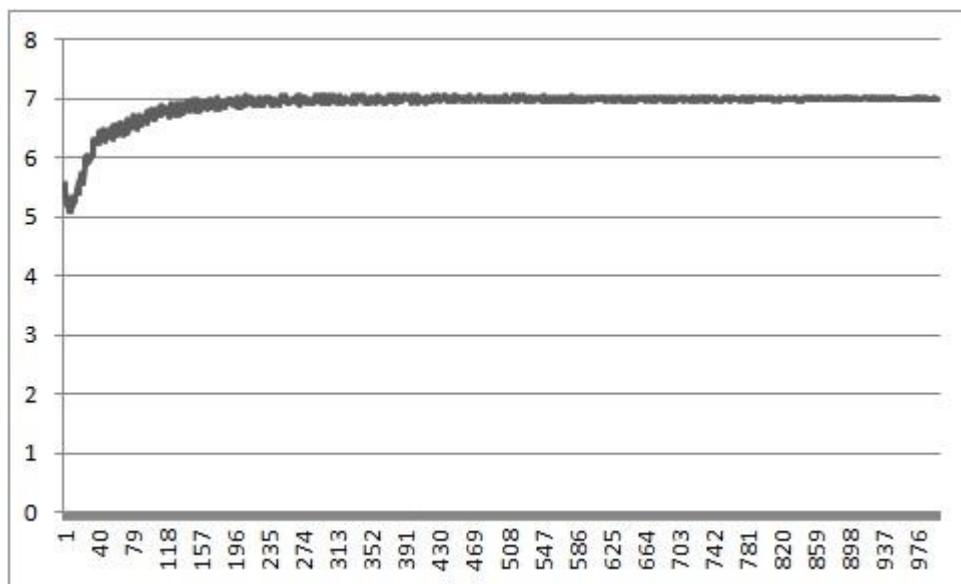


Рис. 3.8. Среднее количество власти в системе без коррупции на 1000 шагах по времени сходится к значению 7. По вертикальной оси отложено количество власти, по горизонтальной – время.

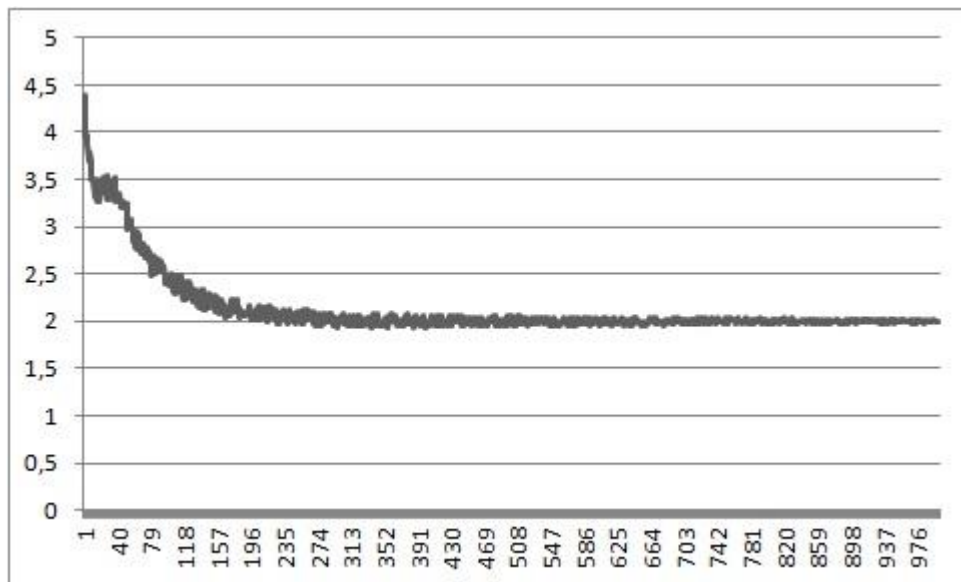


Рис. 3.9. Среднее количество власти в системе без коррупции на 1000 шагах по времени сходится к значению 2. По вертикальной оси отложено количество власти, по горизонтальной – время.

При наличии коррупции ($Q=0,3$) среднее количество власти в системе в масштабе 1000 шагов по времени также стремится к одному из устойчивых стационарных значений. Однако в этом случае стабилизация динамики происходит лишь через 350-450 шагов по времени, а сходимости к стационарному значению предшествуют нерегулярные колебательные изменения среднего количества власти (рисунок 3.10).

При этом зависимость того, к какому стационарному значению будет стремиться этот показатель, от его начального значения, становится гораздо менее явной, поскольку она «размывается» упомянутыми колебательными изменениями (рисунки 3.11 и 3.12).

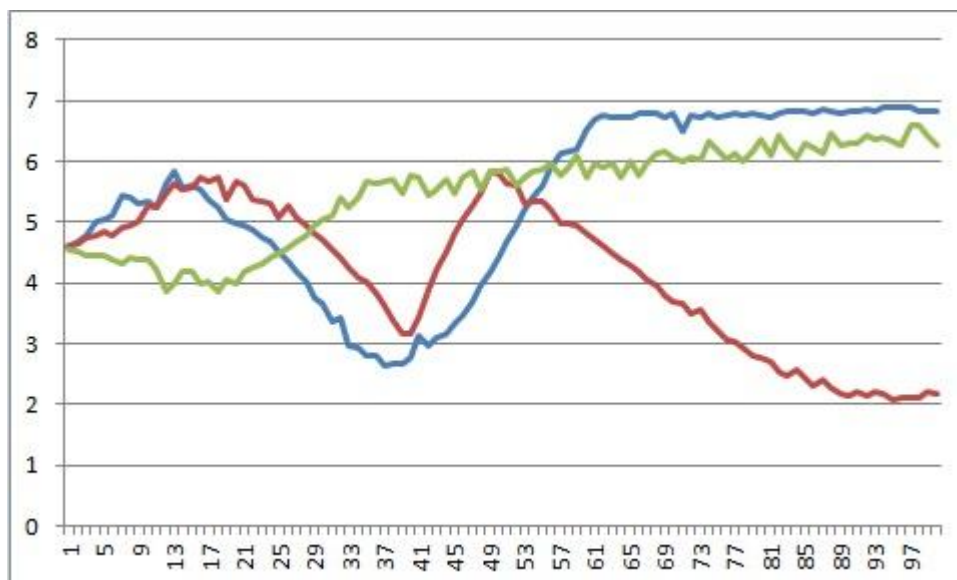


Рис. 3.10. Динамика количества власти в системе с коррупцией на 100 шагах по времени. По вертикальной оси отложено количество власти, по горизонтальной – время.

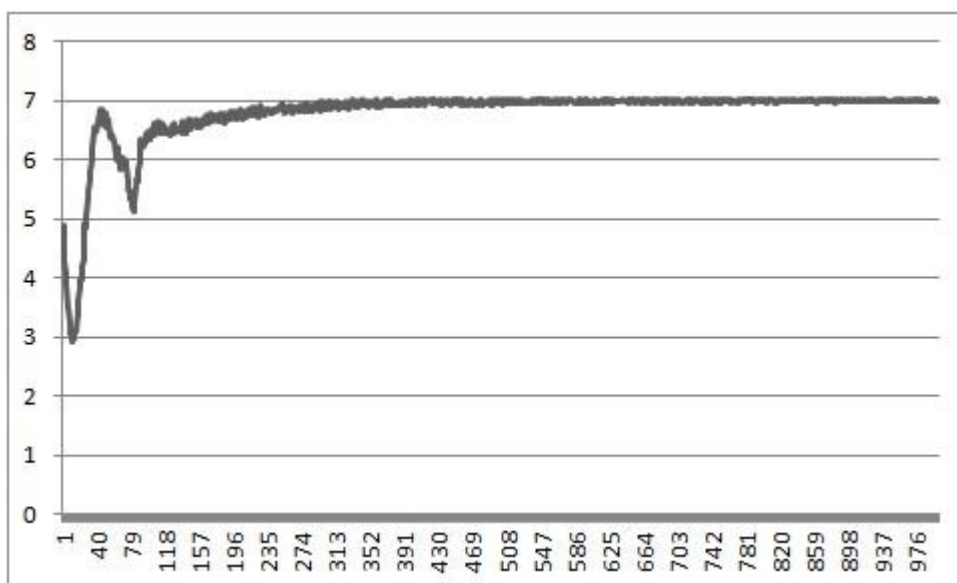


Рис. 3.11. Среднее количество власти в системе с коррупцией на 1000 шагах по времени после значительных осцилляций сходится к значению 7. По вертикальной оси отложено количество власти, по горизонтальной – время.

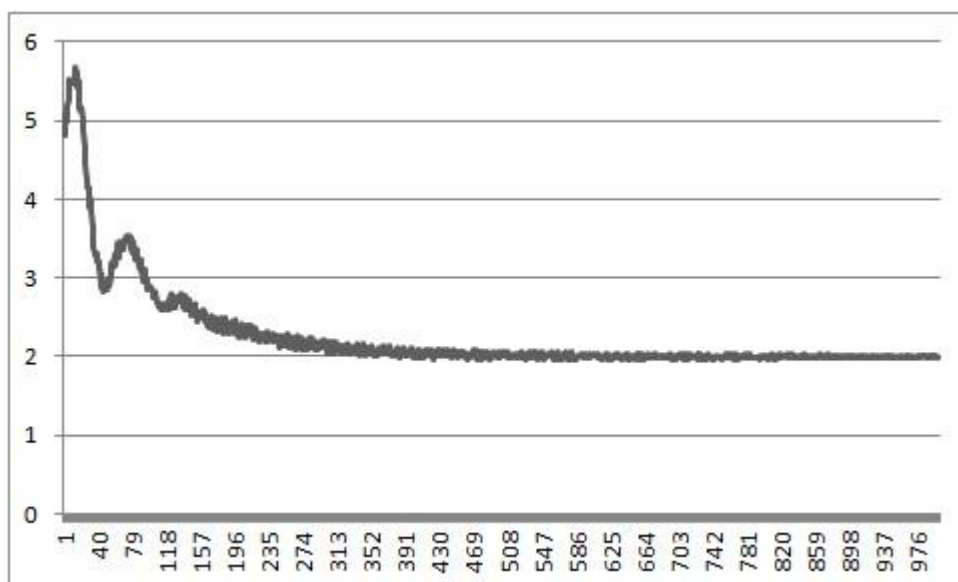


Рис. 3.12. Среднее количество власти в системе с коррупцией на 1000 шагах по времени после значительных осцилляций сходится к значению 2. По вертикальной оси отложено количество власти, по горизонтальной – время.

Наличие достаточно высокого уровня коррупции, как видно, приводит сильным изменениям количества власти в системе, которая в каком-то смысле «мечется» между устойчивыми состояниями. Отсюда можно сделать вывод, что коррупция отрицательно влияет на стабильность ситуации в системе управления.

2. В параметры исходной модели были внесены изменения, касающиеся коэффициентов прироста населения. В двух регионах этот коэффициент был повышен до значения $\nu=0,04$, а в трех остальных – понижен до значения $\nu=0,01$. После этого исследовалась динамика системы в случаях различных начальных распределений количества власти. В ходе этих численных экспериментов была обнаружена следующая особенность: если вначале количество власти во всех муниципалитетах было равно 2, а количество власти на региональном и федеральном уровнях – 7, то в большинстве случаев высокий уровень количества власти устанавливался почти во всех муниципалитетах с быстро растущим населением, в то время как в остальных муниципалитетах преимущественно сохранялся низкий уровень количества власти (2).

Также в случае, когда в муниципалитетах изначально было задано количество власти 7, а на региональном и федеральном уровнях – 2, в большинстве случаев муниципалитеты с быстро растущим населением быстро переходили в состояние с количеством власти 2.

Таким образом, можно сделать вывод, что в моделируемой системе территории с более высоким коэффициентом прироста населения являются более восприимчивыми к тому подходу к управлению, который задается верхними уровнями иерархии.

3. Наконец, при проведении сравнительного анализа динамики уровня потребления в моделируемой системе, выяснилось, что наличие или отсутствие транспортных связей между муниципалитетами сильно влияет на социально-экономическую ситуацию во всей системе.

В ходе численных экспериментов моделировалась система с приведенными выше начальными значениями переменных и параметров. В первом случае, как и ранее, транспортные связи внутри системы не рассматривались ($t_{ij} = 0$). Во втором случае транспортное сообщение «включалось» ($t_{ij} = 0,1$ при $i \neq j$). Динамика среднего по системе уровня потребления на одного занятого в экономике приведена на рисунке 3.13.

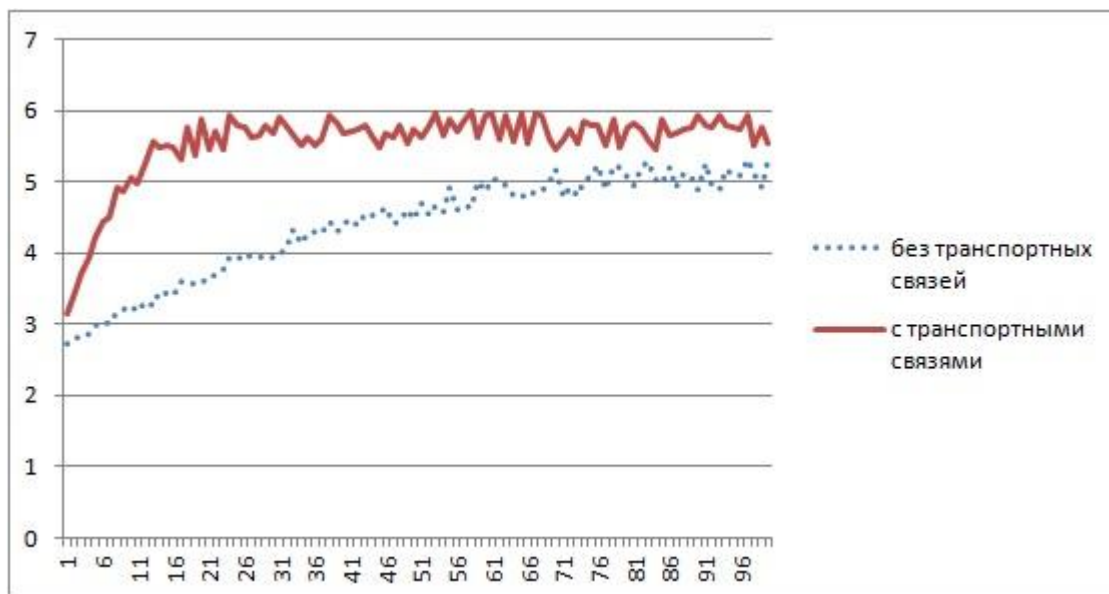


Рис. 3.13. Динамика среднего уровня потребления. По вертикальной оси отложен уровень потребления, по горизонтальной – время.

Мы видим, что наличие транспортных связей между муниципалитетами сильно улучшает положительную динамику социально-экономического развития моделируемой системы.

Отличительной чертой предлагаемого подхода к моделированию системы «Власть-общество» при помощи клеточных автоматов является его значительная гибкость. Он не подразумевает того, чтобы ограничиваться при построении имитационных систем рассмотренными выше переменными и параметрами, и в заключение хотелось бы указать еще несколько направлений его усовершенствования. В данную модель могут быть непосредственно введены: возможность миграции населения, изменение числа регионов и/или муниципалитетов, входящих в систему, зависимость коэффициента прироста населения от социально-экономической ситуации или зависимость уровня коррупции от структуры и количества власти.

ГЛАВА 4.

ЗАМЕНА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КЛЕТЧНЫМИ АВТОМАТАМИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДВИЖЕНИЯ НЕОРГАНИЗОВАННОЙ ГРУППЫ ЛЮДЕЙ

В качестве первой области приложения изложенных идей к построению моделей социально-экономических процессов рассмотрим задачу о моделировании движения неорганизованной группы людей в условиях, когда существуют некоторые препятствия к такому движению. Следует заметить, что в описанной ситуации всё многообразие способностей и характеристик человека сводится к небольшому перечню:

1. Человек занимает некоторое определенное место на плоскости, на которой происходит движение, тем самым являясь препятствием для других людей.

2. Человек имеет возможность двигаться с некоторой скоростью от занимаемого им положения на рассматриваемой плоскости в любом направлении, в каком он не встречает препятствий, в том числе и представляющих собой других людей, участвующих в движении.

3. Человек обладает стремлением двигаться в некотором определенном направлении (модификацией этого пункта может быть утверждение, что человек обладает стремлением двигаться по направлению от или к какому-либо объекту на плоскости).

4 (факультативная). Человек обладает способностью принимать решения об изменении направления своего движения в зависимости от окружающей обстановки.

Моделирование объекта (до какой-то степени даже – субъекта), обладающего перечисленными характеристиками, очевидно, не требует сложных моделей и может быть осуществлено на основе принципиально простых моделей класса клеточных автоматов.

Терминологически следует обратить внимание, что, по мнению социологов¹, неверно называть толпой неорганизованную группу людей, не имеющую никаких общих социальных характеристик, и объединенную лишь общим направлением движения. Поэтому, хотя в первых работах автора, посвященных рассматриваемой тематике, решаемая задача и именовалась «моделированием толпы», но в следующих работах, равно как и в настоящей диссертации, этот термин применяться не будет.

4.1. Моделирование диффузии при помощи клеточных автоматов с окрестностью Марголуса

Прежде чем переходить к рассмотрению моделирования движения неорганизованной группы людей, следует обратить внимание на математические модели физических процессов, которые легли в основу модели группы людей. Соображения и подходы, о которых пойдет речь, уже были частично изложены в диссертации «Применение клеточных автоматов для математического моделирования динамических процессов» на соискание степени кандидата

¹ Автор благодарит Равлюк С.Г. за подробные разъяснения данного вопроса.

физико-математических наук, которую автор успешно защитил в 1998 году. Однако их изложение здесь уместно для понимания основы, на которой базируются предлагаемые далее математические модели движущейся неорганизованной группы людей.

Итак, рассмотрим возможность моделирования явления диффузии при помощи клеточного автомата. При численном решении уравнений в частных производных, описывающих диффузионные процессы, часто используются разностные схемы. Теория сходимости разностных схем показывает, в какой мере последние отражают свойства исходных дифференциальных уравнений [116]. Часто для достижения устойчивости разностной схемы приходится прибегать к различным специальным приемам [179].

В последнее время, в связи с появлением компьютеров с высокой степенью параллельности, для моделирования диффузионных процессов широко используются клеточные автоматы, при помощи которых были успешно изучены и решены некоторые нетривиальные проблемы гидродинамики [180], [181]. Возникает тот же вопрос - в каком отношении к решению уравнения диффузии находятся пространственные и временные распределения, получаемые при помощи моделей этого класса. В нашей статье этот вопрос рассматривается для клеточного автомата с окрестностью Марголуca [79] и его трехмерного аналога.

Иногда при решении довольно простых дифференциальных уравнений возникают проблемы, связанные со сложными граничными условиями. Например, при решении параболического уравнения, описывающего диффузию:

$$u_t = \alpha \Delta u, \quad (4.1)$$

в области со сложной границей (например, в пористой среде) возникают серьезные трудности.

В [79] для моделирования диффузии предлагается клеточный автомат, в котором правила заданы особым образом (рассматривается так называемая окрестность Марголуca).

1. В качестве поля клеточного автомата выбирается плоскость, разбитая на одинаковые квадраты-клетки; каждая клетка может находиться в одном из двух состояний: 1 - в ней есть частица и 0 - в ней пусто.

2. Массив клеток разбит на блоки 2x2 двумя способами, которые будем называть четным и нечетным разбиениями (рис. 1).

3. На очередном шаге каждый из блоков четного разбиения поворачивается на $\frac{\pi}{2}$ по или против часовой стрелки с равной вероятностью (направление поворота разыгрывается как случайная величина с двумя значениями и вероятностями принятия каждого значения, равными $\frac{1}{2}$). Затем то же самое проделывается с блоками нечетного разбиения.

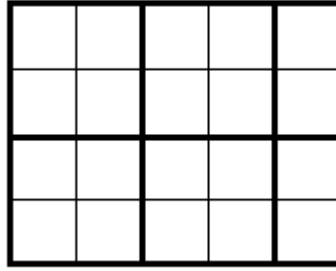


Рис. 4.1. Четное (жирные линии) и нечетное (тонкие линии) разбиение на блоки.

Представляет интерес применение к этому клеточному автомату метода усреднения и получение уравнения, описывающего его макроскопическое поведение.

Приняв за единицу времени шаг клеточного автомата, а за единицу длины - размер его клетки, и перебрав все возможные сочетания поворотов блоков четного и нечетного разбиения, видим, что за один шаг частица может переместиться вдоль каждой из координатных осей на расстояние 0, 1 или 2 (учитывать направление перемещения для наших рассуждений не потребуется) с вероятностями:

$$\begin{aligned}
 P(\Delta x = -2) &= \frac{1}{8} \\
 P(\Delta x = -1) &= \frac{1}{4} \\
 P(\Delta x = 0) &= \frac{1}{4} \\
 P(\Delta x = 1) &= \frac{1}{4} \\
 P(\Delta x = 2) &= \frac{1}{8}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

При этом вероятность попадания частицы в данную точку зависит только от ее положения в предыдущий момент времени, поэтому мы можем рассмотреть движение частицы вдоль оси x как случайное блуждание. Известно (например [182]), что такое движение описывается уравнением Смолуховского:

$$\rho(t_0, x_0 | t + \Delta t, x') = \int \rho(t_0, x_0 | t, x) \rho(t, x | t + \Delta t, x') dx \tag{4.3}$$

где $\rho(t, x)$ - плотность вероятности нахождения частицы в данной точке в данный момент времени, $\rho(t_1, x_1 | t_2, x_2)$ - плотность соответствующей условной вероятности, t_0, x_0 и $t + \Delta t, x'$ - начальное и конечное, а t, x - некоторое промежуточное положение частицы на отрезке времени (использованы обозначения [182], см. рис. 4.2).

Это интегральное уравнение имеет, как показано в [155], физически осмысленное решение, удовлетворяющее дифференциальному уравнению (Фоккера-Планка)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (A(x)\rho) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (B(x)\rho) = 0$$

при $C_k(x) \equiv 0$, где

$$A(x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{x - x'}}{\Delta t},$$

$$B(x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{(x - x')^2}}{\Delta t},$$

$$C_k(x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{(x - x')^k}}{\Delta t}$$

представляют собой центральные моменты случайной величины x .

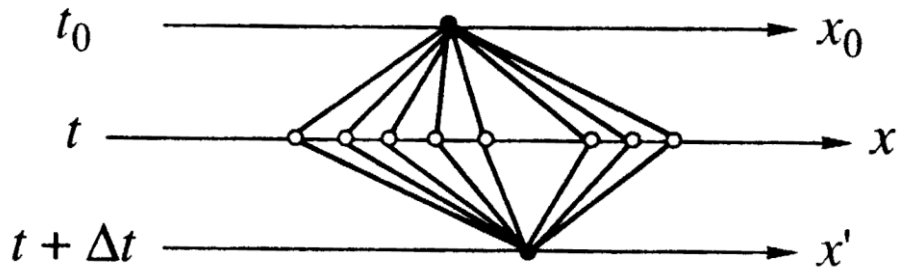


Рис. 4.2. Иллюстрация к обозначениям в уравнении Колмогорова.

Для рассматриваемого случая дискретной системы примем приближенно

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\Delta t} \cong f(x) |_{\Delta t=1}$$

(т.е. рассмотрим x как дискретную случайную величину). Тогда, учитывая (4.2), имеем:

$$A(x) = \sum_i \Delta x_i P(\Delta x_i) = 0,$$

$$B(x) = \sum_i (\Delta x_i)^2 P(\Delta x_i) = \frac{3}{2}$$

$$C_k(x) = \sum_i (\Delta x_i)^k P(\Delta x_i) = 0$$

и получаем уравнение, задающее закон изменения плотности вероятности распределения частиц по оси x .

$$\rho_t = \frac{3}{2} \rho_{xx}. \quad (4.3)$$

По оси y частицы будут распределяться по такому же закону, что следует из симметрии условий (4.2).

Поскольку движение частиц рассматривалось как независимое случайное блуждание вдоль координатных осей, мы можем найти плотность частиц, усредняя произведение

плотностей вероятности по времени:

$$u(x, y) = \overline{\rho(x)\rho(y)}.$$

Используя (4.3), получаем

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho(x)\rho(y)} = \overline{\rho_t(x)\rho(y)} + \overline{\rho(x)\rho_t(y)} = \frac{3}{2} \overline{\rho_{xx}(x)\rho(y)} + \frac{3}{2} \overline{\rho(x)\rho_{yy}(y)} = \frac{3}{2} \overline{\Delta(\rho(x)\rho(y))} \\ &= \frac{3}{2} \Delta u, \end{aligned}$$

что соответствует уравнению диффузии (4.1) при $\alpha = \frac{3}{2}$.

Для тестирования возможностей этого клеточного автомата были выбраны две модельные задачи.

В первом случае моделировалась диффузия частиц, находившихся в начальный момент времени в малой области пространства (начальные условия близки к дельта-функции). На рис. 4.3 показано распределение частиц в момент времени $\tau = 100$. При этом кривая гладкой функции, аппроксимирующей распределение частиц, с очень хорошей точностью совпадает с аналитическим решением данной задачи.

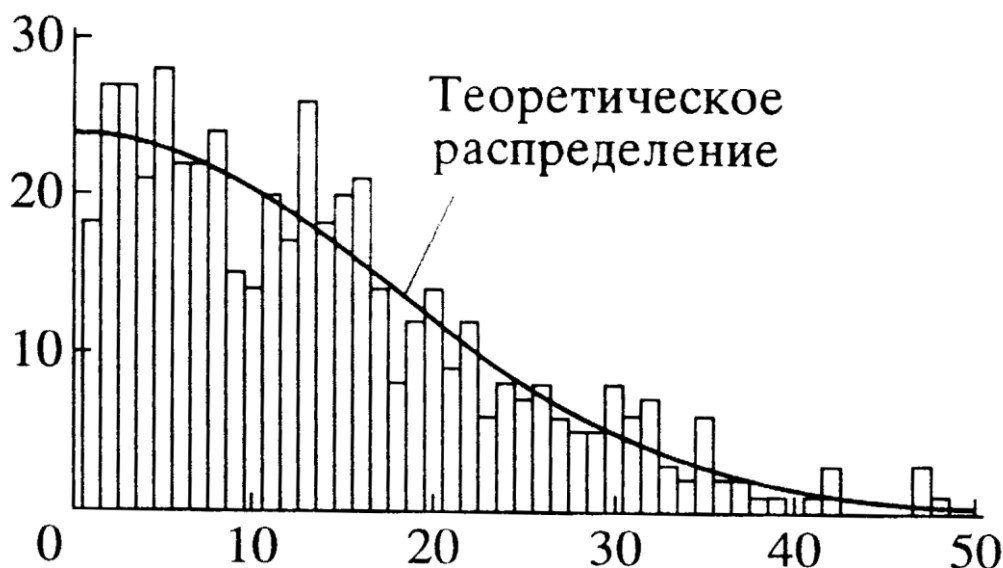


Рис 4.3. Моделирование диффузии частиц из малой области пространства.

Вторая задача состояла в моделировании диффузии в пористой среде, которое очень трудно осуществить при помощи традиционных методов, например, разностных схем. Для реализации в клеточном автомате непроницаемых стенок был установлен запрет на повороты соответствующих блоков клеток, т.е. каждой клетке поля клеточного автомата ставилось в соответствие число 0 (стенок нет) или 1 (стенка есть). Если в блок попадала хотя бы одна клетка со значением 1, то операция поворота блока не производилась.

Типичная картина, полученная в результате моделирования, приведена на рис 4.4.

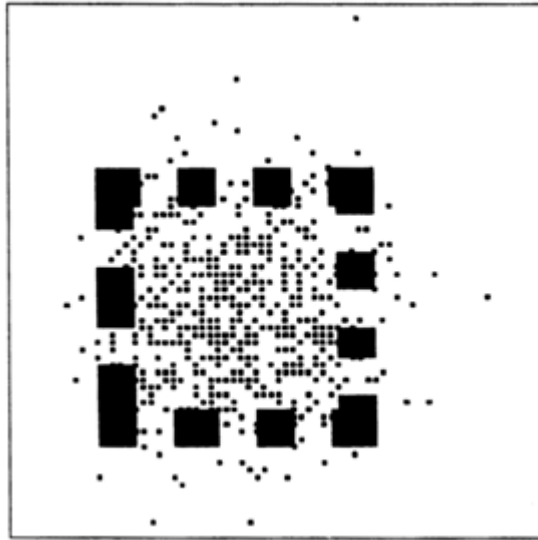


Рис. 4.4. Диффузия в пористой среде.

Часто приходится сталкиваться с необходимостью решения подобных задач в трехмерном случае. Для этого автором был построен аналогичный трехмерный клеточный автомат.

Его клетки представляют собой кубы, и подвергаются разбиению на блоки $2 \times 2 \times 2$ двумя способами, как и в двумерном случае. Теперь случайным образом выбирается не только направление поворота блока на $\frac{\pi}{2}$, но и одна из трех возможных осей поворота. В остальном правила модели остаются неизменными.

Рассуждая аналогично двумерному случаю и принимая шаг по времени и размер клетки равными 1, имеем:

$$\begin{aligned}
 P(\Delta x = -2) &= \frac{1}{9} \\
 P(\Delta x = -1) &= \frac{7}{36} \\
 P(\Delta x = 0) &= \frac{7}{18} \\
 P(\Delta x = 1) &= \frac{7}{36} \\
 P(\Delta x = 2) &= \frac{1}{9}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$A(x) = \sum_i \Delta x_i P(\Delta x_i) = 0,$$

$$B(x) = \sum_i (\Delta x_i)^2 P(\Delta x_i) = \frac{23}{18}$$

$$C_k(x) = \sum_i (\Delta x_i)^k P(\Delta x_i) = 0$$

В итоге получим, что плотность распределения частиц в данном клеточном автомате удовлетворяет уравнению диффузии

$$u_t = \frac{23}{18} \Delta u$$

Конечно, решение трехмерных задач при помощи данного клеточного автомата связано с гораздо большим объемом операций и требует значительно более мощной вычислительной техники, чем двумерный случай. Но при использовании специализированных машин клеточных автоматов [79] скорость вычислений в обоих случаях многократно увеличивается.

Кроме того, стоит указать, что этот клеточный автомат может быть применен для решения любых других задач, связанных с дифференциальными уравнениями параболического типа, например, некоторых термодинамических. В этом случае, в дополнение к изложенным правилам клеточного автомата можно задать появление (или исчезновение) частиц в определенных областях с некоторой вероятностью, что позволит моделировать источники (или стоки) тепла.

4.2. Моделирование движения неорганизованной группы людей при помощи клеточных автоматов с окрестностью Марголуса

Этот же клеточный автомат может быть использован в качестве базового при математическом моделировании движения неорганизованной группы людей. Такие модели являются востребованными в связи со следующей проблематикой.

Одной из наиболее серьезных проблем наших дней является обеспечение безопасности людей в нештатных ситуациях. Во многих таких ситуациях главной угрозой здоровью и жизни людей часто оказывается возникающая при этом паника.

При проектировании сооружений, рассчитанных на нахождение в них большого количества людей, полезно было бы моделировать беспорядочное движение большой неорганизованной группы людей (которую в дальнейшем будем называть для краткости толпой) в условиях паники и устранить особенности конструкций, которые могут привести к заторам и давке.

Кроме того, жители крупных городов ежедневно сталкиваются с проблемой движения в толпе при пользовании общественным транспортом (например, в подземных переходах, в

турникетах и на эскалаторах метро). Планирование строительства городских пешеходных коммуникаций целесообразно было бы вести, не только учитывая общий поток пассажиров, но и детально рассматривая движение людей на конкретных участках пути.

Одной из проблем, возникающей при движении группы людей, является образование заторов или «пробок» при наличии некоторых препятствий на пути движения такой группы. Если по каким-то причинам такие препятствия должны обязательно находиться на пути людей, то кажется целесообразным заранее предсказать, насколько сильную помеху они создадут.

Поскольку реальный эксперимент требует значительных затрат, а иногда в качестве экспериментальных данных могут выступать лишь результаты уже произошедших ЧП, подчас с трагическим исходом, продуктивной может оказаться идея проведения численных экспериментов, моделирующих подобные ситуации.

При математическом моделировании процессов, в которых активно действуют люди, возникает проблема, заключающаяся в том, что на данном этапе развития науки полное математическое описание поведения отдельно взятого человека не представляется возможным, поскольку его действия определяются очень большим количеством факторов как рациональных, так и иррациональных.

Однако поведение большой группы людей в стандартной ситуации легко поддается предсказанию и хорошо описывается вероятностным образом. Здесь работает закон больших чисел: даже если один человек по каким-то причинам решит действовать нетривиально, его действия никак не повлияют на группу в целом.

Для математического моделирования динамики толпы оказалось возможным применить класс крайне упрощенных дискретных моделей - клеточные автоматы [79], которые ранее успешно использовались во многих других областях исследований, в частности, для решения задач газодинамики [180].

Необходимый нам клеточный автомат должен, по-видимому, иметь два состояния клетки, соответствующие наличию и отсутствию в этой точке человека, и учитывать две составляющие движения толпы - хаотичную и направленную.

Модифицируем приведенный выше клеточный автомат с окрестностью Марголуса, моделирующий двумерные диффузионные процессы.

В качестве поля клеточного автомата, как и раньше, выбирается плоскость, разбитая на одинаковые квадраты - клетки; каждая клетка может находиться в одном из двух состояний: «1» - в ней есть частица и «0» - в ней пусто. (рис. 4.5а).

На каждом шаге каждый из блоков четного разбиения поворачивается на $\frac{\pi}{2}$ по или против часовой стрелки с равной вероятностью (направление поворота выбирается при помощи генератора случайных чисел). Затем то же самое проделывается с блоками нечетного разбиения

(рис. 4.5б).

Теперь добавим к диффузионной составляющей движения направленную. Для этого на каждом временном шаге будем производить перемещение частиц внутри блоков в некотором заданном направлении, если соответствующие соседние клетки свободны (то есть, там нет частиц), как показано на рис. 4.5в.

Кроме этого, объявим некоторые области поля клеточного автомата запрещенными, то есть не будем выполнять в них этих перемещений частиц. Такие области будут соответствовать непроходимым стенам или другим препятствиям.

Выясним динамику распределение плотности людей вдоль оси x , соответствующей желательному направлению движения и оси y , перпендикулярной ему.

Теорема 4.1. Динамика потока людей в рамках представленной модели описывается двумя независимыми дифференциальными уравнениями:

$$u_t = \left(\frac{11}{2} - 6u + 2u^2\right) u_{xx} - 12(1 - u)(u_x)^2 - \left(\frac{7}{4} - 4u\right) u_x \quad (4.5)$$

$$v_t = \frac{3}{2} v_{yy} \quad (4.6)$$

При этом плотность людей равна произведению uv .

Доказательство. Рассмотрим движение частицы вдоль оси x как суперпозицию случайного блуждания и направленного движения.

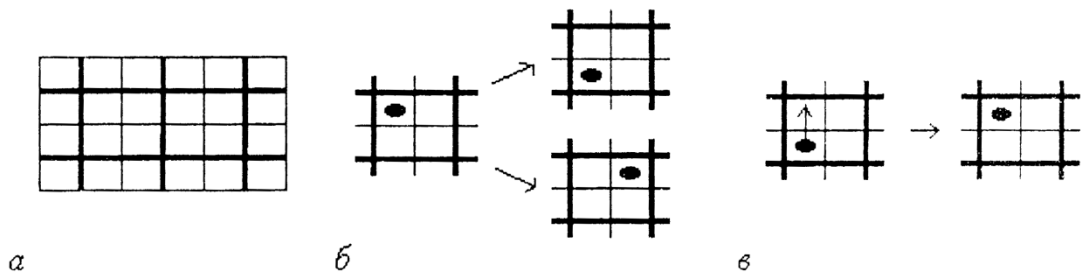


Рис.4.5. Правила модифицированного клеточного автомата с окрестностью Марголуса, описывающего движение неорганизованной группы людей.

Аналогично газодинамической модели рассмотрим функцию распределения частиц вдоль оси x .

$$\rho(t_0, x_0 | t + \Delta t, x') = \int \rho(t_0, x_0 | t, x) \rho(t, x | t + \Delta t, x') dx$$

Переходим к уравнению (Фоккера-Планка)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (A(x)\rho) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (B(x)\rho) = 0$$

при $C_k(x) \equiv 0$, где

$$A(x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{x - x'}}{\Delta t},$$

$$B(x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{(x - x')^2}}{\Delta t},$$

$$C_k(x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{(x - x')^k}}{\Delta t}$$

Используя дискретное приближение

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\Delta t} \cong f(x) |_{\Delta t=1},$$

И, принимая шаг по времени и размеры клетки за 1, получаем для оси x (направления желательного движения), естественно, иные вероятности перемещения частицы.

Рассмотрев все возможные комбинации поворотов блоков и количества частиц в блоке, получим, что изменение координаты x частицы за один шаг может принимать значения от - 2 до 4 с вероятностями

$$P(\Delta x = -2) = \frac{1}{8}\rho^2$$

$$P(\Delta x = -1) = \frac{1}{4}\rho$$

$$P(\Delta x = 0) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\rho - \frac{1}{8}\rho^2$$

$$P(\Delta x = 1) = \frac{1}{4}$$

$$P(\Delta x = 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\rho^2$$

$$P(\Delta x = 3) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\rho$$

$$P(\Delta x = 4) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\rho^2$$

Здесь ρ – плотность частиц на поле автомата.

Отсюда получаем:

$$A(x) = \sum_i \Delta x_i P(\Delta x_i) = \frac{7}{2} - 2\rho(x),$$

$$B(x) = \sum_i (\Delta x_i)^2 P(\Delta x_i) = \frac{11}{2} - 6\rho(x) + 2\rho^2(x)$$

Подставим эти выражения в уравнение Фоккера-Планка.

$$\rho_t = \left(\frac{11}{2} - 6\rho + 2\rho^2\right)\rho_{xx} - 12(1 - \rho)(\rho_x)^2 - \left(\frac{7}{4} - 4\rho\right)\rho_x$$

Распределение плотности частиц $u(x)$ вдоль оси x найдем как среднее по ансамблю от функции распределения одной частицы, то есть получим:

$$u_t = \left(\frac{11}{2} - 6u + 2u^2\right)u_{xx} - 12(1 - u)(u_x)^2 - \left(\frac{7}{4} - 4u\right)u_x$$

Для оси y проведем аналогичные рассуждения. В связи с тем, что вдоль этой оси перемещение частиц является совершенно случайным, получим для плотности частиц вдоль этой оси $\nu(y)$ те же результаты, что и в диффузионной модели.

$$P(\Delta y = -2) = \frac{1}{8}$$

$$P(\Delta y = -1) = \frac{1}{4}$$

$$P(\Delta y = 0) = \frac{1}{4}$$

$$P(\Delta y = 1) = \frac{1}{4}$$

$$P(\Delta y = 2) = \frac{1}{8}$$

Следовательно,

$$v_t = \frac{3}{2} v_{yy}$$

Поскольку перемещения частицы вдоль двух осей являются независимыми, плотность вероятности, а, следовательно, и плотность распределения частиц по полю автомата равны произведению uv . ■

Построенный клеточный автомат позволяет решить ряд прикладных задач о движении неорганизованной группы людей.

Одной из таких задач является проблема построения сужения пешеходного прохода. Такое сужение области движения является одной из наиболее частых причин, приводящих к заторам, давке, а иногда – и более тяжелым последствиям.

Рассмотрим некий проход (например, подземный переход), по которому передвигается неорганизованная группа людей, имеющая намерение двигаться в заданном направлении. Пусть в некотором месте этот проход должен быть сужен в три раза. Как повлияют различные конфигурации такого сужения на характер движения группы?

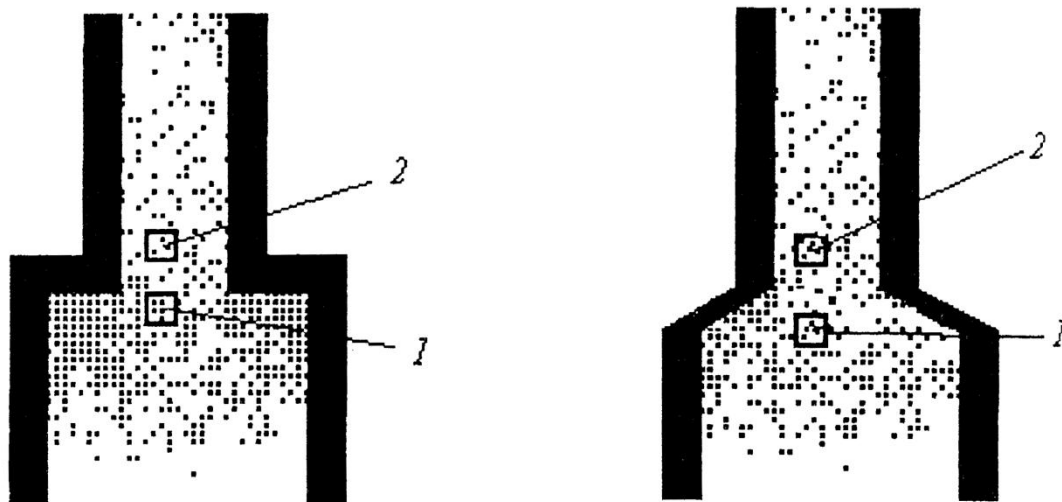


Рис. 4.6. Две конфигурации сужения прохода.

На рис. 4.6 изображены две возможные конфигурации такого сужения. При проведении численных экспериментов измерялась зависимость плотности числа людей до сужения и после (в областях, выделенных прямоугольниками и отмеченных цифрами 1 и 2) от времени.

В первом случае в течение определенного времени концентрация частиц в области 1 значительно превышает концентрацию частиц в области 2, что можно трактовать как возникновение затора. В случае иной конфигурации сужения «пробки» нет. На рис. 4.7 показаны временные зависимости плотности числа людей в областях 1 и 2 в этих двух случаях. В первом из них (рис. 4.7а) плотность толпы перед сужением (в широкой части прохода) в течение некоторого отрезка времени устойчиво превышает плотность после сужения, что соответствует наличию «пробки». Во втором случае (рис. 4.7 б) этого явления нет.

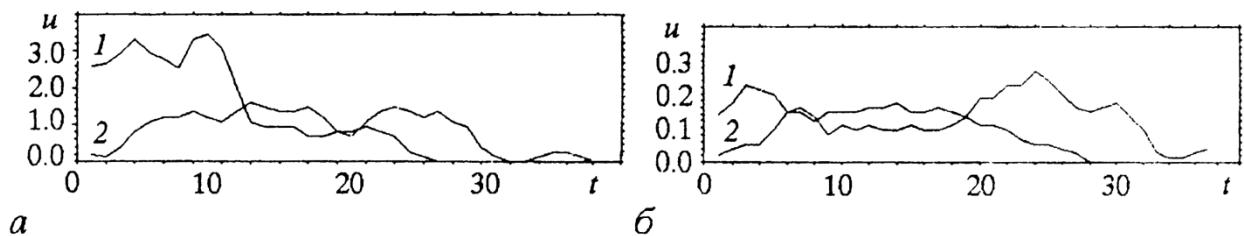


Рис.4.7. Зависимость плотности числа частиц (людей) от времени перед сужением и после сужения в случаях разных конфигураций.

Изложенная выше модель, однако, не отражает того важного факта, что люди в толпе движутся с различными скоростями. Присвоение каждой частице индивидуальной скорости свело бы на нет такие достоинства модели, как простоту и однородность правил. Поэтому был применен подход, уже использованный автором при моделировании газовой динамики. В модель были введены два сорта частиц: быстрые и медленные, что можно интерпретировать, например, как наличие в толпе людей с тяжелыми сумками или хозяйственными тележками, которым трудно двигаться быстро.

На четных шагах по времени оба сорта частиц двигались совершенно одинаково по ранее изложенным правилам. На нечетных же шагах двигались лишь быстрые частицы, а медленные оставались неподвижными и рассматривались наравне с непроходимыми стенами, мешая движению быстрых.

Известно, что в пешеходных переходах существует эффект «отрицательной вязкости», а именно: при прохождении сужения перехода скорость потока людей у стенок выше, чем в середине прохода. Поскольку этот эффект не был обнаружен в численных экспериментах у односкоростной модели, логично предположить, что он обусловлен различием средних

скоростей отдельных людей.

При проведении экспериментов при помощи имитационной схемы на основе клеточного автомата, модифицированного вышеописанным образом, это предположение подтвердилось: измерения потока частиц через сечение перехода устойчиво давали два максимума вблизи стенок и минимум в середине прохода. На рис.4.8 показан характерный профиль усредненного значения потока частиц f в сечении перехода.

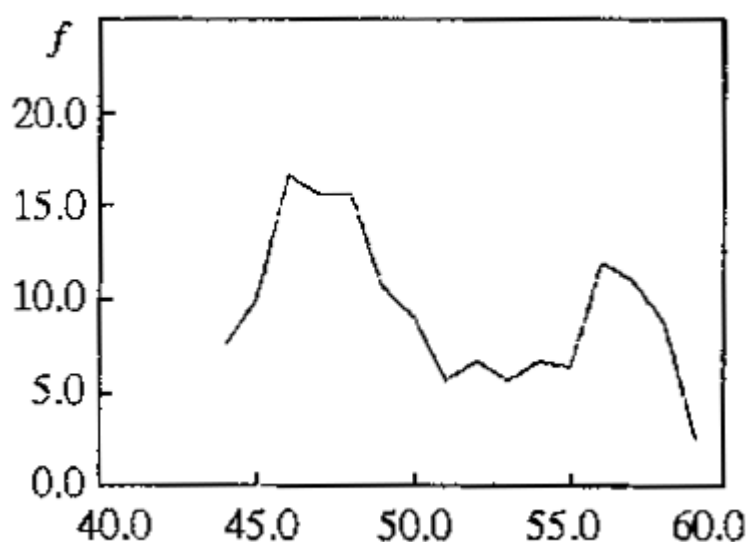


Рис. 4.8. Профиль среднего значения потока частиц (людей) через сечение перехода с эффектом «отрицательной вязкости».

Предлагаемая модель может оказаться полезной при проектировании сооружений, рассчитанных на значительные потоки людей, а также при оценке безопасности зданий и помещений. Однако следует указать, что эта модель, являясь весьма простой и представляя собой классический вероятностный клеточный автомат, не лишена ряда недостатков. Вследствие этого ее область применимости является довольно узкой.

Логика построения этой модели предполагает, что люди стремятся двигаться в некотором заданном направлении. Однако не принимается во внимание возможность человека по анализу ситуации и принятию решений по обходу препятствий его движению, представляющих собой как неподвижные заграждения, так и других людей. В данной модели человек как бы не видит, что происходит вокруг, и движется исключительно по правилу необходимости перемещения в заданном направлении, если такая возможность есть. В связи с этим в более поздних работах автора данная модель также именовалась «моделью слепых котят».

Несмотря на указанный недостаток, описанная модель все же применима в тех случаях, когда предположение об отсутствии у участника движения возможности проанализировать окружающую обстановку адекватно. Примером таких ситуаций могут быть движение в

темноте, либо просто возникновение паники, когда теряется как возможность, так и желание людей анализировать происходящее. Вполне разумно предположить, что именно так могут развиваться события при возникновении чрезвычайной ситуации, поэтому модель «слепых котят» уместно применять при анализе проектируемых сооружений на предмет безопасности при ЧС.

4.3. Модель движения неорганизованной группы людей с элементами прогнозирования ситуации на основе решеточного газа

Однако, разумеется, при решении поставленной задачи нельзя обходить вниманием и те случаи, в которых участники движения имеют возможность и желание для простейшего анализа обстановки и принятия соответствующих решений.

Для этого предлагается вместо модели на основе клеточного автомата с окрестностью Марголуса использовать клеточный автомат класса решеточных газов [181]. [158] с нелокальными взаимодействиями.

Поведение достаточно большой группы людей в стандартной ситуации хорошо описывается вероятностным образом: даже если один человек будет действовать нетривиально, его действия никак не повлияют на группу в целом.

Фактически при построении новой модели ей были приданы черты, которые можно охарактеризовать в качестве элементов искусственного интеллекта. Поскольку автомат с классической окрестностью Марголуса не позволяет осуществлять нелокальные зависимости, в качестве основы нового автомата был взят двумерный решеточный газ на ортогональной решетке.

Как и в предыдущей модели, каждая клетка может находиться в одном из двух состояний: «1» (заполнена) или «0» (пуста). На плоскости также задано направление движения «вперед», в котором частицы движутся при отсутствии препятствий. Препятствием могут служить как другие частицы, так и стационарные препятствия (стены и т.п.), моделируемые запретом движения в соответствующих клетках. На каждом шаге клеточного автомата осуществляется анализ ситуации в каждой точке и, затем, происходит перемещение частиц.

Анализ ситуации состоит в подсчёте вероятности выбрать одно из трех направлений (движение назад, то есть, в направлении, противоположном желательному, не рассматривается) (рис. 4.9). При этом учитывается состояние N клеток в каждом из этих направлений, где N (глубина анализа) является параметром модели. В связи с тем, что имитационная схема модели предназначена для реализации на компьютере, повернем оси координат на угол $\frac{\pi}{2}$ по часовой стрелке.

Тогда вероятности выбора направлений «вперед» (F), вправо (R) и влево (L) находятся

по следующим формулам:

$$P_F(i, j) = 1 - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X(i - k, j)$$

$$P_R(i, j) = 1 - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X(i, j + k)$$

$$P_L(i, j) = 1 - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X(i, j - k)$$

Здесь i и j - координаты текущей клетки, X - состояние соседних клеток. Если при последовательной проверке клеток встречается стенка, то все последующие клетки считаются заполненными ($X=1$ для всех $k > k_0$), так как они являются недоступными.

Найденные вероятности используются на втором этапе. Вначале проверяется возможность передвижения частицы вперед, то есть отсутствие в ближайшей клетке в этом направлении частицы как в данный момент, так и на предыдущем шаге (это необходимо для предотвращения попадания двух частиц в одну клетку, что приведет к нарушению закона сохранения числа частиц). Если такая возможность есть, то с вероятностью P_F частица перемещается вперед.

В противном случае аналогичным способом совершаются попытки перемещения частицы вправо и влево. Варианты «сначала вправо, затем влево» и «сначала влево, затем вправо» выбираются с равной вероятностью, чтобы сохранить симметрию модели. В любом случае, если перемещение частицы удастся, вся данная процедура прекращается, и автомат переходит к следующей клетке. Если же частица все еще остается на своем месте, совершается последняя попытка - переместить ее назад. Здесь перемещение осуществляется с вероятностью 1, если передвижение назад возможно, то есть соседняя клетка свободна.

Таким образом, частицы перемещаются по клеткам автомата в соответствии со следующими правилами:

- при возможности частица двигается вперед (по отношению к некоторому заданному направлению);
- если движение вперед невозможно, частица двигается вправо/влево или назад;
- наличие в каком-либо направлении других частиц или стен уменьшает вероятность движения частицы в этом направлении.

Пример анализа ситуации в рамках алгоритма, описывающего правила предлагаемого клеточного автомата, приведен на рис. 4.9.

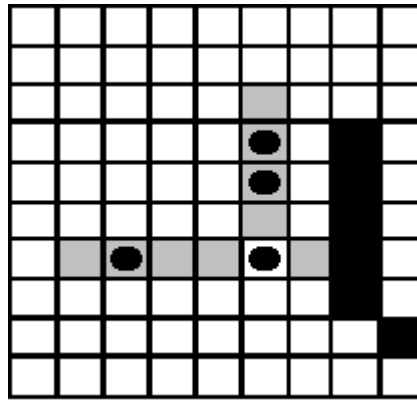


Рис. 4.9. Пример анализа ситуации.

Здесь при глубине анализа $N = 4$ получаем $P_F = 0,5$, $P_L = 0,75$, $P_R = 0,25$. В последнем случае на втором шаге встречена неподвижная стенка и все следующие клетки автоматически полагаются занятыми.

Этот набор простейших правил позволяет имитировать разумное поведение людей, движущихся в группе.

В качестве модельных задач для проведения численных экспериментов были взяты ситуации паники в помещении, когда группа людей пытается покинуть помещение через один или несколько выходов, и движение людей через сужающийся проход.

Исследование первой задачи не дало никаких оригинальных результатов. Было показано, в частности, что эвакуация людей происходит быстрее через несколько выходов, чем через один того же полного сечения, однако этот факт очевиден и без построения модели, поскольку в первом случае эвакуирующиеся через разные выходы не мешают друг другу. Поэтому конкретные результаты моделирования здесь не приводятся.

При моделировании движения людей в сужающемся проходе рассматривался профиль сужения, который, как показано выше, приводит в некоторых случаях к образованию «пробки». И действительно, такой эффект был получен и в данной модели.

На рис. 4.10 показаны зависимости плотностей количества частиц перед сужением прохода и за ним от времени. Видно, что в некоторый момент времени (первая вертикальная стрелка) они сравниваются (заполнен весь проход). Затем плотность за сужением падает, в то время как перед ним остается большое количество частиц - возникает «пробка». В дальнейшем она исчезает (вторая вертикальная стрелка), и движение продолжается без «пробок».

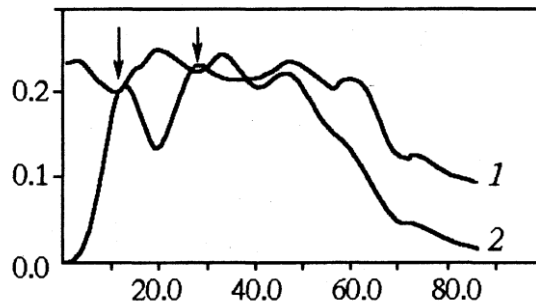


Рис. 4.10. Зависимости плотностей числа частиц от времени: 1 – после сужения, 2 - до сужения

Следует указать на то, что в данной серии численных экспериментов затор прекращается значительно быстрее, чем при использовании модели на основе клеточного автомата с окрестностью Марголуса – примерно в два раза в моделировавшейся ситуации. Это напрямую связано с наличием в новой модели у участников движения возможности выбрать оптимальный в определенном смысле вариант направления движения.

Построенная модель, таким образом, является не менее адекватной, чем исходная модель «слепых котят», поскольку повторяет ее основные результаты, однако, в отличие от нее, наделяет участников движения простейшей возможностью анализа ситуации.

Следует, однако, обратить внимание на то, что в данной модели не рассматривается различие мышления людей, принимающих решения об изменении направления движения. В реальной ситуации помехи их движению разные люди в том или ином случае с различной вероятностью будут ждать, двигаться в стороны или даже назад с целью обойти возникший затор.

4.4. Модель движения неорганизованной группы людей с элементами прогнозирования ситуации на основе стохастического клеточного автомата

Рассмотрим теперь вариант модели, основанный не на классическом решеточном газе, а на некотором стохастическом клеточном автомате, в котором вероятности изменения состояния клеток, однако, задаются аналогичным образом.

Как и ранее, строим модель в предположении, что каждый человек в группе стремится двигаться в определенном (одном для всех) направлении. При невозможности двигаться в этом направлении, наличии на пути непреодолимых препятствий или значительного количества других людей человек пытается изменить направление движения, выбирая то, на котором препятствия минимальны.

Пусть поле клеточного автомата представляет собой равномерную ортогональную сетку, в узлах которой заданы величины, которые могут принимать значения 1 или 0 (в терминологии теории клеточных автоматов каждая клетка может находиться в одном из двух этих состояний), соответствующие наличию или отсутствию человека в данной точке. Каждой

точке приписывается еще один атрибут наличия (1) или отсутствия (0) препятствия в данном месте. Значение этого атрибута 1 фактически запрещает данной клетке находиться в состоянии 1. Зададим окрестность фон Неймана, то есть в качестве соседей будем рассматривать клетки, имеющие с данной общую сторону.

На каждом шаге рассчитаем вероятности перемещения человека (его присутствие задаётся состояние клетки 1) в каждую из соседних клеток. Для этого положим эти вероятности равными нулю в случае, если соседняя клетка занята (запретим смещение в этом направлении). Для оставшихся направлений осуществим «просмотр» на расстояние r (являющееся параметром модели, полный аналог числа «просматриваемых» клеток N в предыдущей версии клеточного автомата) следующим образом: суммируется число всех клеток, лежащих в данном направлении на расстоянии, не превышающем r , находящихся в состоянии 1, причем, если в этом направлении встречается клетка с препятствием, она и все клетки, лежащие за ней, рассматриваются как занятые.

Теперь вычислим вероятности смещения в направлениях, которые не были запрещены, по формулам:

$$p_i = \frac{S_i}{r},$$

где S_i - результат такого суммирования, $i \in \{1; 2; 3; 4\}$ - индекс направления.

Повысим вероятность смещения в одном (заданном) направлении, моделируя направленное движение неорганизованной группы людей. Для этого увеличим вероятность смещения в одном из направлений, уменьшив соответственно, вероятности смещения в остальных направлениях, так, чтобы сумма их не изменилась, например, по формулам:

$$p'_1 = p_1 + \frac{a}{3}(p_2 + p_3 + p_4)$$

$$p'_2 = p_2 \left(1 - \frac{a}{3}\right)$$

$$p'_3 = p_3 \left(1 - \frac{a}{3}\right)$$

$$p'_4 = p_4 \left(1 - \frac{a}{3}\right)$$

где $a \in [0; 1]$ - некоторый коэффициент, задающий степень стремления двигаться в заданном направлении от 0 (такого стремления нет) до 1 (такое движение осуществляется при любой возможности).

Далее разыграем с этими вероятностями направления перемещения людей из каждой клетки, находящейся в состоянии 1, и осуществим это перемещение, увеличив значение в соседней клетке, куда осуществляется перемещение, на 1. Отметим, что эта операция не производится, если все вероятности для данной клетки оказались равными нулю (смещение

заблокировано во всех направлениях).

Наконец, решим проблему, связанную с тем, что в некоторых клетках значение состояния превышает 1, так как в них было произведено смещение из нескольких соседних клеток. Пусть состояние данной клетки равно n ($n \in \{2; 3; 4\}$). Случайным образом с равными вероятностями выберем $n - 1$ соседнюю клетку, находящуюся в состоянии 0 (такие найдутся, ведь именно из них происходило смещение в данную клетку). Припишем всем выбранным клеткам, а также и центральной значение 1.

Описанные выше правила задают динамику модели, при которой каждая частица перемещается в выбранном направлении, стремясь обходить препятствия такому движению в направлении, наиболее свободном для движения. Надо отметить, что заданный таким образом закон изменения конфигурации поля сохраняет число клеток, находящихся в состоянии 1, что является естественным требованием к модели, поскольку речь идет о количестве людей, движущихся в составе группы.

Оказалось интересным проверить эффективность этой модели на некоторых тестовых, однако, возможно, имеющих практическую ценность, задачах, являющихся естественным продолжением задач, решавшихся качественно при помощи предыдущих моделей, но теперь уже рассматриваемых с количественной точки зрения. Первая заключалась в том, чтобы, исследовав различные профили сужения подземного перехода (рис.4.11), найти наибольшее значение угла φ (при этом общая длина сужения будет наименьшей, что, видимо, выгодно конструктивно), при котором не будет наблюдаться ярко выраженного затора при потоке людей большой плотности.

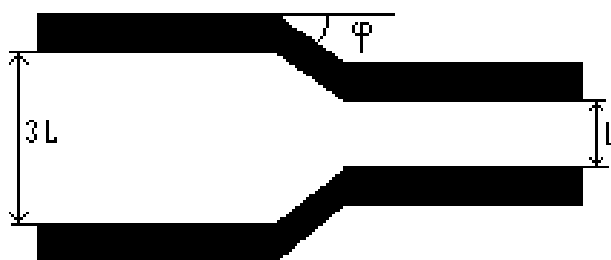


Рис. 4.11. Профиль сужения подземного перехода

Численные эксперименты состояли в моделировании этой ситуации при различных

значениях параметров – угла φ и плотности потока людей. Результаты их показали, что при значениях угла, не превышающих $\varphi_{кр} = \frac{\pi}{4}$, затор возникает лишь при плотности потока, приближающейся к максимально возможной. Если же значение угла превышает $\varphi_{кр} = \frac{\pi}{4}$, то затор возникает уже при сравнительно небольших плотностях потока.

Вторая задача состояла в том, чтобы найти оптимальное (то есть, не приводящее к затору при возможно больших плотностях потока людей) расположение двух одинаковых конструкций, перекрывающих вместе 40% ширины прохода (рис.4.12). Здесь в роли параметра выступало расстояние между конструкциями Δ , а минимизировалось время прохождения группы из заданного числа человек. Из полученных результатов был сделан однозначный вывод, что оптимальным является расположение, при котором конструкции оставляют в проходе на три равных зазора.

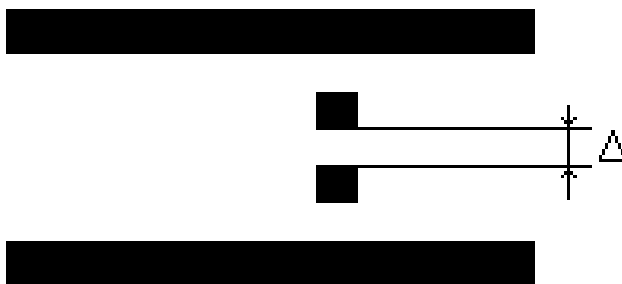


Рис.4.12. Профиль прохода, перегороженного двумя конструкциями.

Следует отметить, что данная модель может быть отнесена к классу клеточных автоматов (хотя и с оговоркой по поводу учета нелокальных связей при «просмотре» направлений), поэтому наиболее эффективно с точки зрения скорости вычислений она может быть реализована на компьютерах с высокой степенью параллельности вычислений.

4.5. Общая модель движения неорганизованной группы людей с элементами прогнозирования ситуации

Оказалось, что вторую и третью из предложенных выше моделей, а именно модель на основе клеточного автомата класса решеточных газов и модель на основе существенно стохастического клеточного автомата (при том, что в каждом случае помимо классической окрестности фон Неймана на состояние клетки влияют также псевдососеди), можно свести к

некоторой обобщенной модели. Рассмотрим эту общую модель, а заодно и изложим правила соответствующего клеточного автомата строго формализовано, тем самым доказав принадлежность модели к классу стохастических клеточных автоматов с псевдососедями, а, следовательно, ее принципиальную вычислимость и отсутствие проблем с устойчивостью решения.

По-прежнему рассматриваем задачу моделирования движения неорганизованной группы людей, предпочитающих перемещаться в некотором заданном направлении на плоскости, часть которой занята непроходимыми препятствиями. При невозможности двигаться в этом направлении, наличии на пути непреодолимых препятствий или значительного количества других людей человек пытается изменить направление движения, выбирая то, на котором препятствия минимальны. Будем также считать, что движущиеся люди могут просматривать обстановку в толпе на расстоянии r и выбирать направление движения, в котором они наблюдают наименьшее количество других людей и отсутствие препятствий.

Пусть поле клеточного автомата представляет бесконечную равномерную ортогональную решетку, бесконечный граф, в вершинах которого заданы два множества значений: F – множество значений состояний клеток $f_i \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$, соответствующих наличию (1) или отсутствию (0) человека в данном месте (остальные значения используются на промежуточном шаге динамики модели и собственного смысла не имеют), V - множество значений состояний виртуальных псевдососедей клеток $v_i \in \{0; 1\}$, соответствующих наличию (1) или отсутствию (0) препятствия в данном месте (здесь множество виртуальных псевдососедей равнозначно и поставлено во взаимно однозначное соответствие множеству клеток, состояние каждого виртуального псевдососеда фиксировано).

Состояние клетки, таким образом, соответствует наличию или отсутствию частицы (человека) в данной точке, но не определяет направление его движения в отличие от классических решеточных газов [182].

Зададим окрестность фон Неймана (на изменение состояния клетки влияют четыре ее соседа; традиционно обозначим их первыми буквами названий сторон света, а саму клетку –

слова *center*: $\begin{matrix} N \\ W \ C \ E \\ S \end{matrix}$). Введем переменную α , которая может принимать значения из

множества $\{N, W, E, S, C\}$, и определим для этой переменной операцию $\bar{\alpha}$, результатом которой будет противоположное направление (например, $\bar{N} = S$, причем $\bar{C} = C$) и примем соответствующие обозначения для состояний соседей выбранной клетки:

$$f_{ij}^{(N)} = f_{i+1,j}$$

$$f_{ij}^{(E)} = f_{i,j+1}$$

$$f_{ij}^{(S)} = f_{i-1,j}$$

$$f_{ij}^{(W)} = f_{i,j-1}$$

$$f_{ij}^{(C)} = f_{i,j}$$

Аналогичные обозначения введем для соответствующих значений элементов множества V .

Зададим правила вычисления вероятностей перемещения из данной клетки в соседние (они будут применяться к клеткам, для которых $f_{ij} = 1$).

Прежде всего, запретим перемещаться в занятые клетки и клетки, содержащие препятствия:

$$p_{ij}(\alpha) = \frac{1}{4} (1 - f_{ij}^{(\alpha)}) (1 - v_{ij}^{(\alpha)}) \quad (4.7)$$

Затем введем в модель элемент анализа окружающей обстановки людьми, движущимися в группе. На каждом шаге находим, с какой вероятностью в каком из направлений будет осуществлено смещение из каждой клетки, находящейся в состоянии 1 данного положения в одну из четырех соседних клеток. Если соседняя клетка занята, вероятность смещения туда объявляется, естественно, равной 0. В ином случае проводится «просмотр» на расстояние r (радиус просмотра): находится количество клеток в состоянии 1, лежащих в данном направлении на расстоянии, не превышающем r , причем, если в этом направлении встречается клетка с препятствием, она и все клетки, лежащие за ней, рассматриваются, как занятые.

Для реализации этого изменим вероятности $p_{ij}(\alpha)$ перемещения в соседние клетки, уменьшив их в тех направлениях, где большое число клеток занято людьми или препятствиями:

$$p'_{ij}(N) = \left(1 - \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{r^*} (f_{i,j+k} + r - r^*) \right) p_{ij}(N)$$

$$p'_{ij}(S) = \left(1 - \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{r^*} (f_{i,j-k} + r - r^*) \right) p_{ij}(S)$$

$$p'_{ij}(E) = \left(1 - \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{r^*} (f_{i+k,j} + r - r^*) \right) p_{ij}(E)$$

$$p'_{ij}(W) = \left(1 - \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{r^*} (f_{i-k,j} + r - r^*) \right) p_{ij}(W)$$

Здесь r - глубина просмотра при оценке ситуации (задаваемый параметр модели), r^* - расстояние от данной клетки до ближайшей в данном направлении клетки, содержащей препятствие, а $p_{ij}(\alpha)$ - вероятности, вычисленные по формулам (4.7).

Теперь увеличим вероятность движения в заданном направлении, выбрав в качестве такого направления, например, N .

$$\begin{aligned}
 p''_{ij}(N) &= p'_{ij}(N) + a \min \{1 - p'_{ij}(N); p'_{ij}(S); p'_{ij}(W); p'_{ij}(E)\} \\
 p''_{ij}(S) &= p'_{ij}(S) + \frac{a}{3} \min \{1 - p'_{ij}(N); p'_{ij}(S)\} \\
 p''_{ij}(E) &= p'_{ij}(E) + \frac{a}{3} \min \{1 - p'_{ij}(N); p'_{ij}(E)\} \\
 p''_{ij}(W) &= p'_{ij}(W) + \frac{a}{3} \min \{1 - p'_{ij}(N); p'_{ij}(W)\}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Здесь $a \in [0; 1]$ - некоторый коэффициент, задающий степень стремления двигаться в этом направлении от 0 (такого стремления нет) до 1 (такое движение осуществляется при любой возможности).

Вероятности (4.8), вычисляются для каждой клетки, находящейся в состоянии 1, и определяют динамику модели на данном шаге, задаваемую излагаемым далее образом.

Сформулируем закон изменения конфигурации поля клеточного автомата F на каждом шаге времени t в виде рекуррентного соотношения:

$$F_{t+1} = \varphi(F_t)$$

где многомерное отображение φ представимо в виде суперпозиции двух отображений той же размерности

$$\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$$

Вначале рассмотрим отображение φ_1 .

Введем для каждой клетки, для которой $f_{ij} = 1$, переменную β_{ij} , которая может принимать значения из множества $\{N, W, E, S, C\}$, и вычислим значения этих переменных как случайных величин со следующими законами распределения:

$$\begin{aligned}
 p(\beta_{ij} = \alpha) &= p_{ij}(\alpha), \\
 p(\beta_{ij} = C) &= 1 - \sum_{\gamma \neq C} p_{ij}(\gamma)
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

или

$$\begin{aligned}
 p(\beta_{ij} = \alpha) &= \begin{cases} 0, \text{ если } \forall \gamma p_{ij}(\gamma) = 0 \\ \frac{p_{ij}(\alpha)}{\sum_{\gamma \neq C} p_{ij}(\gamma)} \text{ в ином случае} \end{cases} \\
 p(\beta_{ij} = C) &= \begin{cases} 1, \text{ если } \forall \gamma \neq C p_{ij}(\gamma) = 0 \\ 0 \text{ в ином случае} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

(в формулах 4.9-4.10 везде предполагается $\alpha \neq C$).

При этом вариант (4.9) соответствует модели «терпеливых» людей, а вариант (4.10) – «беспокойных». Разумеется, возможным также является вычисление вероятностей как линейной комбинации результатов (4.9) и (4.10) с суммой весов, равной 1. Результатом будет

вариант модели с заданным уровнем терпения участников движения.

Теперь определим отображение φ_1 .

$$\varphi_1(f_{ij}) = \sum_{\alpha} g_{ij}(\alpha)$$

$$g_{ij}(\alpha) = \begin{cases} f_{ij}^{(\alpha)}, & \text{если } \beta_{ij}(\alpha) = \bar{\alpha} \\ 0 & \text{в ином случае} \end{cases}$$

(здесь α принимает любые значения).

Таким образом, отображение φ_1 описывает смещение частиц (участников движения) на свободные места, игнорируя то, что на одно свободное место может найтись до четырех «претендентов». Следует отметить, что множество значений $\varphi_1(F)$ не является полем битов: $\varphi_1(F) \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Теперь рассмотрим отображение φ_2 , введенное для того, чтобы решить эту проблему «перенаселения» некоторых клеток.

Его проще всего описать при помощи следующего алгоритма.

Для $\forall i, j$ выполнить:

1. Если $\varphi_1(f_{ij}) \leq 1$, то перейти к пункту 5.
2. $\alpha := \text{Random}\{N, W, E, S, C \mid v_{ij}^{(\alpha)} \cdot \varphi_1(f_{ij}^{(\alpha)}) \neq 0\}$
3. $\varphi_1(f_{ij}^{(\alpha)}) := 1$
4. $\varphi_1(f_{ij}) := \varphi_1(f_{ij}) - 1$
5. $\varphi_2(\varphi_1(f_{ij})) := \varphi_1(f_{ij})$

Конец цикла по i, j

Таким образом, полностью заданы правила данного клеточного автомата, а вместе с этим – и закон перемещения частиц по полю клеточного автомата, при котором каждая частица перемещается в выбранном направлении, стремясь обходить препятствия такому движению в направлении, наиболее свободном для движения. Следует указать, что заданный таким образом закон изменения конфигурации поля оставляет инвариантным число клеток, находящихся в состоянии «1», то есть

$$\sum_{i,j} f_{ij} = \text{const}$$

что является естественным требованием к модели.

Продемонстрируем функционирование имитационной схемы, построенной на основе данной общей модели на тех же тестовых задачах, какие были использованы для апробации предыдущих версий модели.

Исследуем профили сужения подземного перехода (рис. 4.11) для различных значений угла φ , с тем, чтобы найти наибольшее значение этого угла (при этом условии общая длина сужения будет наименьшей, что, видимо, выгодно конструктивно), при котором не будет наблюдаться ярко выраженного затора при потоке людей большой плотности.

Моделирование этой ситуации при различных значениях параметров – угла φ и плотности потока людей показало, что при значениях угла, не превышающих $\varphi_{кр} = \frac{\pi}{4}$, затор возникает лишь при плотности потока, превышающей $\frac{1}{3}$ максимально возможной (на входе заполняется треть всех клеток). Это связано с ограничением физической пропускной способности узкой части перехода – он сужается именно в три раза, и при большей начальной плотности потока принципиально нет возможности избежать затора.

Если же значение угла превышает $\varphi_{кр} = \frac{\pi}{4}$ (в модели, из-за дискретного характера конфигурации препятствий, наименьшим из таких углов был $\varphi = \arctg \frac{3}{2} \approx 0,98$), то затор возникает при сравнительно небольших плотностях потока. На рис. 4.13 показана зависимость от времени плотностей потока перед сужением и после него при начальной плотности потока, равной 0,1. Видно, что на протяжении некоторого периода времени плотность входящего потока стабильно превышает плотность выходящего, при этом последний даже несколько снижается. Это указывает на возникновение в сужении «пробки», что подтверждается и визуальными наблюдениями за картинкой, графически отображающей распределение состояний клеток автомата (рис 4.14).

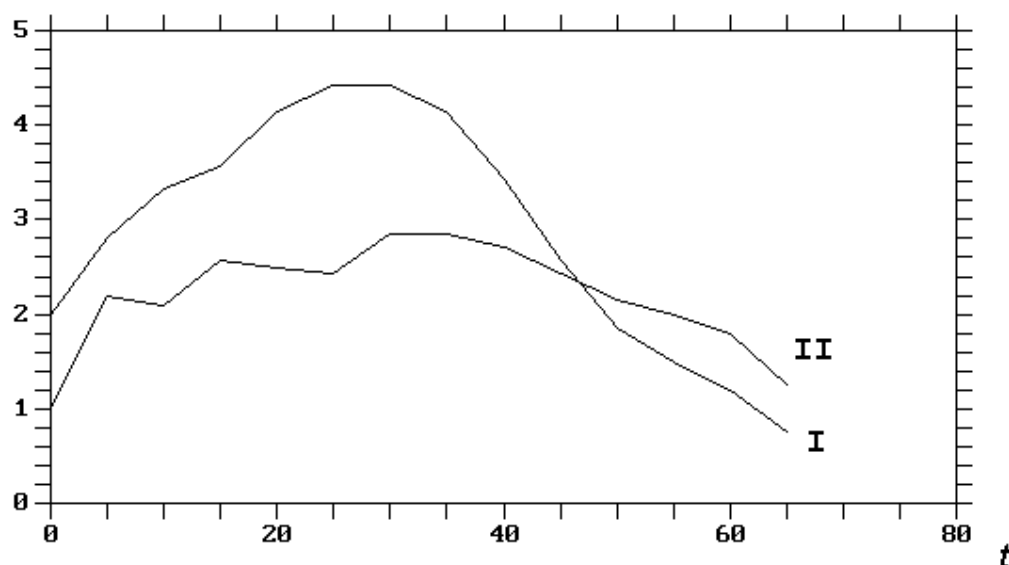


Рис. 4.13. Зависимость плотностей потока перед сужением (I) и после него (II) от времени при значении угла $\varphi = \arctg \frac{3}{2}$ (наблюдается наличие «пробки» при $15 < t < 45$).

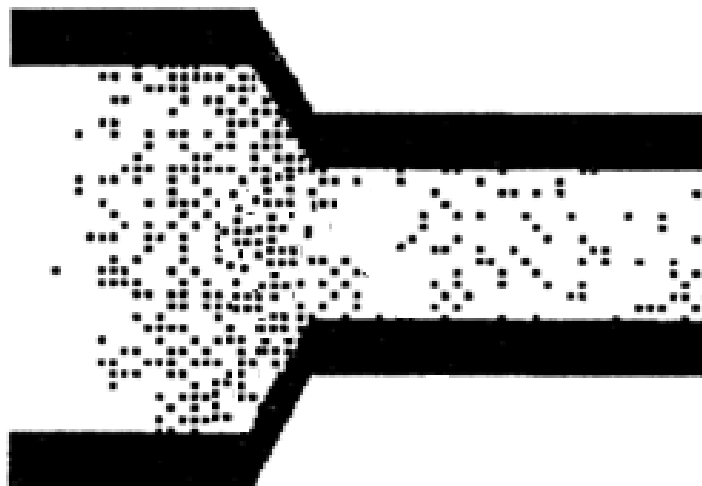


Рис. 4.14. Визуальная картина распределения состояний клеточного автомата при значении угла $\varphi = \arctg \frac{3}{2}$ и начальной плотности потока $\frac{1}{6}$ в момент времени $t = 30$).

Вторая задача состояла в том, чтобы найти оптимальное (то есть, не приводящее к затору при как можно больших плотностях потока людей) расположение двух одинаковых конструкций, перекрывающих вместе 40% ширины прохода (рис. 4.12). Здесь в роли параметра выступало расстояние между конструкциями Δ , а минимизировалось время прохождения группы из заданного числа (40) человек. Зависимость среднего (по 100 численным экспериментам) времени прохождения от Δ показана на рис 4.15. Из этих результатов может быть сделан вывод, что оптимальным является расположение, при котором конструкции оставляют в проходе на три равных зазора.

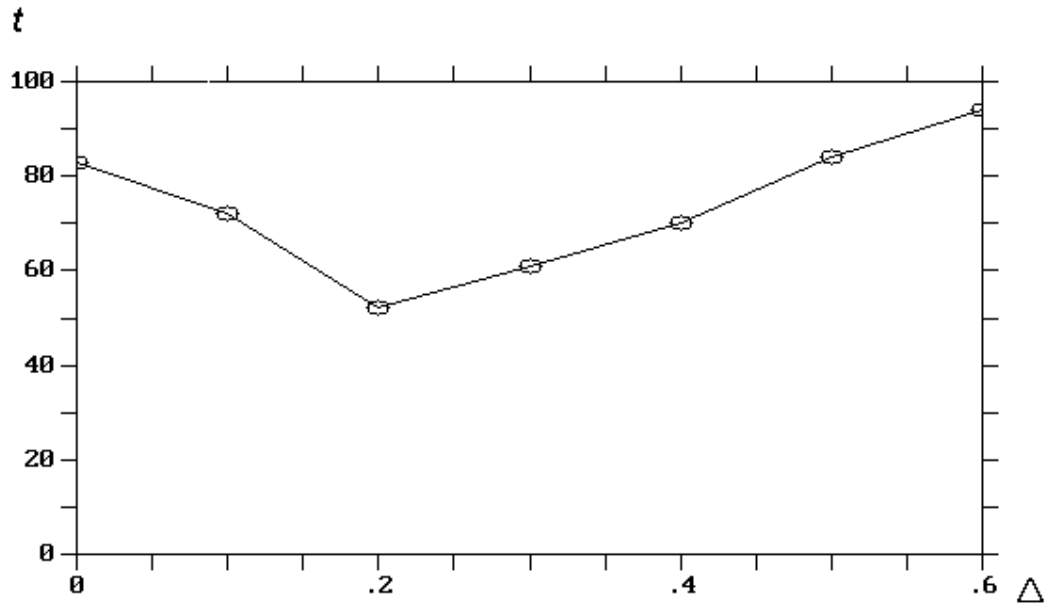


Рис. 4.15. Зависимость времени прохождения группы людей через частично перекрытый проход от расстояния между перекрывающими конструкциями (выраженного в долях ширины прохода).

Представленная модель, построенная на базе моделей, применявшихся в области газовой динамики (причем следует отметить, что эти базовые модели относились к разным классам клеточных автоматов) является примером междисциплинарного подхода, при котором результаты, полученные в одной области научного знания, могут быть применены при исследованиях в другой сфере.

4.6. Вопрос о границах поля клеточного автомата

Во всех четырех описанных выше моделях не был рассмотрен важный для построения имитационной схемы на основе клеточного автомата вопрос о топологии поля автомата или, что то же самое, о границах.

Теоретически поле клеточного автомата считается бесконечным, что на практике, естественно, не может быть реализовано. Стандартными приемами решения данной проблемы являются замыкание поля клеточного автомата в тор или простое ограничение его размеров. Первый случай неуместен в классе рассмотренных задач. Во втором требуется задание граничных условий. Казалось бы, естественным решением может быть размещение по границе поля непроницаемых стенок. Однако при этом вполне реально проявление побочных эффектов, а именно - накопления клеток в состоянии «1» (участников движения) возле таких непроницаемых границ. В связи с этим более адекватным было признано создание поглощающих границ. То есть, правила клеточного поля в граничных клетках (находящихся на

расстоянии до глубины анализа модели r от границ поля, и, таким образом, могущих влиять на состояние внутренних клеток) заменялись на одно-единственное правило обнуления состояния всех этих клеток на каждом шаге.

Такая модификация при построении имитационной системы нарушала закон сохранения количества ненулевых клеток в автомате, а это, как упоминалось выше – важный показатель отсутствия ошибок в процессе проведения численного эксперимента. Для того, чтобы продолжать пользоваться этим способом проверки на отсутствие ошибок, вместо числа ненулевых клеток следует просто использовать сумму числа ненулевых клеток и количества клеток, обнуленных согласно модифицированным правилам для пограничного слоя.

Подводя итог, отметим, что в данной главе были изложены четыре модели класса клеточных автоматов, позволяющие строить на их основе имитационные схемы для моделирования движения неорганизованной группы людей по плоскости, на которой имеются препятствия такому движению.

На примере модели «слепых котят» показан путь перехода от газодинамических моделей к моделям движения группы людей. Кроме того, данная модель может использоваться для анализа ситуаций, в которых люди не могут принимать решения о направлении своего движения на основе анализа окружающей обстановки (темнота, паника и. т. п.). В остальном данная модель уступает по адекватности следующим перечисленным.

Модель с элементами анализа ситуации участниками движения, построенная на основе решеточного газа с нелокальными взаимодействиями и модель на основе существенно стохастического клеточного автомата, по сути, решают одну и ту же задачу. Выбор между ними при их использовании должен определяться конкретикой решаемой частной задачи. Во многом эти модели являются взаимозаменяемыми.

Более того, они фактически являются двумя вариантами более общей модели, последней из рассмотренных в данной главе. Задавая различные варианты ее параметров, можно рассматривать широкий спектр ситуаций движения групп людей.

Следует особо подчеркнуть, что при использовании каждой из изложенных моделей допускаются – и даже приветствуются – не нарушающие их адекватности модификации при приложении их к конкретным частным задачам и построении имитационных схем на их основе.

Решенные в качестве примеров частные задачи имеют, конечно, несравнимо меньшую ценность, чем сами идеи предлагаемых моделей, однако также заслуживают внимания.

Первые две модели, изложенные в данной главе, были разработаны в рамках ГНТП «Безопасность» и в 1996-1997 годах сданы заказчику. К сожалению, заказчик не представил обратной связи, позволившей бы оценить успешность применения этих разработок.

ГЛАВА 5.

ОДНОМЕРНЫЙ КЛЕТОЧНЫЙ АВТОМАТ ВЗАМЕН НЕПРЕРЫВНОЙ МОДЕЛИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ ЧИСЛЕННОСТИ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ГРУППЫ

5.1. О математическом моделировании профессиональных групп

Исследуем теперь задачу, состоящую в построении математической модели профессиональной группы людей и прогнозированию ее количественного и качественного состава. Подобные задачи имеют большое значение при рассмотрении проблем стратегического планирования развития крупных организаций, отраслей хозяйства, регионов, городов и целых стран.

При такой постановке задачи нас будут интересовать следующие аспекты трудовой деятельности:

1. Наличие у работника внутренней мотивации (желания, интереса, склонности) к работе в данной области деятельности.

2. Наличие у работника материальной заинтересованности в работе в данной области деятельности.

3. Наличие у работника необходимой подготовки, способностей и навыков, требуемых в данной профессиональной области.

4. Очевидный факт, состоящий в том, что в течение периода времени (за который обычно принимают год) работники, входящие в некоторую возрастную группу (или иную группу, выделенную по временному признаку – стаж, год обучения и т.п.) переходят в следующую такую группу, относящуюся к периоду времени с номером, увеличенным на единицу.

Последний пункт является фундаментальной основой для применения хорошо известного в демографии метода когорт [183]. Он позволяет описать математически одну из важнейших численных характеристик профессиональной группы – численность входящих в нее работников разных возрастов..

Классический метод когорт применяется при изучении изменения того или иного демографического признака в пределах жизни одного поколения. Когорты - группы населения, объединенные одним демографическим признаком. Метод когорт позволяет без дополнительных допущений исследовать события, происходящие на протяжении жизни данного поколения. При этом демографические процессы, например, рождаемость или смертность анализируются в совокупностях людей, одновременно вступивших в какое-либо демографическое состояние.

Однако мы вместо таких причин изменения численности когорт, как рождаемость и

смертность, будем рассматривать механизмы пополнения профессиональной группы и ухода из нее.

Построение математической модели профессиональной группы вообще, без конкретики, представляется, с одной стороны, затруднительным, благодаря значительному количеству параметров, которые необходимо будет вводить, причем зачастую какой-либо параметр будет использоваться только для одной профессиональной группы, поскольку будет характеризовать присущие только ей особенности. С другой стороны конкретная модель, претендующая на некую общность подходов, в любом случае не сможет охватить все многообразие профессиональных и иных подобных групп людей – хотя бы потому, что конфигурация общества постоянно меняется во многих аспектах, в том числе меняется и структура профессиональных групп в нем.

Поэтому представляется правильным изложить общий подход к построению такой математической модели профессиональной группы на некотором примере. В качестве объекта на примере которого будет изложен этот подход предлагается профессиональная группа учителей средних школ России.

При рассмотрении вопроса о социально-экономическом развитии общества важную роль играет исследование взаимодействия между профессиональными группами и внутренней динамики этих групп. Разделение труда и справедливое взаимодействие между ними, согласно Дюркгейму [184], – основа стабильности общества, условие нормального его функционирования. Поддержание такого состояния может осуществляться только в условиях достаточной экономической мотивации трудовой деятельности профессиональной группы.

Базовой мотивацией трудовой деятельности, безусловно, является экономическая заинтересованность, а профессиональная этика группы, традиции, сложившиеся отношения внутри группы – вторичны. Однако они, согласно [184], крайне важны для упорядочивания внутренних и внешних отношений группы, несут регулирующую функцию и могут поддерживаться долгое время только при условии сохранения целостности группы и преемственности при смене поколений. В этом процессе очень важную роль играет характер возрастной структуры профессиональной группы, изучению которой на конкретном примере и посвящена данная работа.

Речь пойдет о возникновении проблемных явлений в возрастной структуре учителей средней школы, что происходит следующим образом. Снижение экономической мотивации ведет к изменению нормальной возрастной структуры группы, что влечет за собой нарушение внутренних отношений в группе или даже потерю ее целостности, а, следовательно, снижение устойчивости ее этических норм, благодатную почву для их деформации. При этом проблемы экономического характера могут непосредственно провоцировать такую деформацию.

Важность изучения динамики возрастной структуры учительства в России проявляется в двух основных аспектах. Первый из них связан с вопросом кадрового обеспечения среднего общего образования, как с точки зрения его достаточности, так и с точки зрения уровня профессиональной подготовки.

Другой аспект непосредственно обусловлен той социальной ролью, которую учительство как профессиональная группа выполняет в обществе, т.е. обучением школьников, а также трансляцией социальных ценностей. И с этой точки зрения значимым становится не только вопрос о численности кадрового состава средних учебных заведений, но о соотношении в структуре кадров различных возрастных групп. Исследования профессиональных позиций учителей [185] показывают существенные различия ценностных ориентаций учителей различных возрастных групп, и таким образом, вопрос о кадровой структуре - это вопрос, с одной стороны, о преемственности в образовании, с другой стороны, о стабильности и снижении конфликтности внутри рассматриваемой профессиональной группы.

При исследовании положения, сложившегося в российской средней школе, безусловно, необходимо анализировать не статическое состояние системы, а ее динамику, прогнозировать развитие процессов в заданных социально-экономических условиях.

Одна из главных проблем сегодняшней средней школы - недостаточное количественное и качественное кадровое обеспечение. Безусловно, корни этой проблемы следует искать в низком уровне оплаты труда учителей. Но вот пути ее решения уже не так очевидны. Поможет ли этому решению само по себе значительное повышение заработной платы учителей? За какой срок и путем каких затрат возможно восстановить нормальное функционирование средней школы? Является ли кадровая проблема действительно наиболее острой по сравнению с трудностями, возникающими с материальной базой школ и недостаточным методическим обеспечением?

Поиск ответов на эти и другие подобные вопросы тесно связан с количественным анализом трудовых ресурсов среднего образования. В частности, многое может показать динамика возрастной структуры учительских кадров.

5.2. Математическая модель возрастной структуры учителей средних школ

Для количественного анализа такой динамики оказалось возможным построить математическую модель, учитывающую основные факторы, влияющие на возрастной состав учителей.

Эта модель создана по аналогии с математической моделью для анализа возрастной структуры преподавателей высшей школы, предложенной в [10] в рамках решения общей задачи прогноза развития ситуации в образовании.

Обе модели восходят к применяемой при моделировании биологических систем модели

популяции с неперекрывающимися поколениями [186], в которой зависимость

$$\frac{d\bar{N}}{dt} = f(\bar{N}), \quad (5.1)$$

где \bar{N} - вектор численностей поколений популяции, сводится к дискретному отображению

$$N_{i+1}^{(t+1)} = \varphi_i(N_i^{(t)}),$$

где величины t - момент времени и i - номер поколения (возраст) дискретны с шагом 1.

В модели возрастной структуры преподавателей высшей школы рассматривались три категории преподавателей вузов, располагавшиеся в порядке возрастания среднего возраста представителей категории - «аспиранты», «молодые преподаватели» и «доценты и профессора». Принималось, что профессиональная карьера начинается работника высшей школы в 25 лет, а затем у него при определенных условиях появляется возможность перехода из группы, в которой он находится, в следующую.

Модель представляла собой дискретное отображение с шагом по времени в один год. Обозначив $q_i^n(t)$ число сотрудников i -й группы ($i \in \{1; 2; 3\}$) возраста t в момент времени n , запишем это отображение, задающее возрастную динамику, в виде

$$q_i^{n+1}(t+1) = (1 - \mu_i(t))q_i^n(t) + \delta_i^n q_{i-1}^n(t),$$

где $\mu_i(t)$ - коэффициент мобильности в i -й группе для возраста t , δ_i^n - коэффициент перехода из предыдущей группы:

$$\delta_i^n = \min \left\{ \frac{V_i - \sum_t q_i^n(t)}{\sum_{t>t_{min}} q_{i-1}^n(t)}; 1 \right\}$$

В последнем выражении V_i обозначает количество рабочих мест в i -й группе

Изложенная выше весьма несложная модель давала результаты, хорошо согласующиеся с наблюдаемыми в современной высшей школе процессами. Поэтому при решении задачи моделирования возрастной структуры учителей средней школы естественным шагом было построение аналогичной модели.

Здесь следует отметить некоторые особенности структуры трудовых ресурсов средней школы по сравнению с высшей. Во-первых, учителя не подразделяются на формальные или хотя бы четко обозначенные группы, для которых характерны существенные различия среднего возраста и стажа работы.

С другой стороны, переход учителей от преподавания предметов одного цикла к предметам другого - весьма редкое явление. Исходя из этих двух фактов, можно рассматривать учителей как представителей единственной группы (в терминологии модели из [10]).

Кроме того, в формировании возрастной структуры учителей средней школы заметную роль играет приход в школу сотрудников с высшим непедagogическим образованием. Чаше всего это происходит в связи с нехваткой кадров, а возможности пригласить человека «со

стороны» определяются способностями директора или завуча конкретной школы. Этот процесс является в достаточной степени непредсказуемым.

Поскольку в средней школе не существует четкого деления учителей на отдельные группы по признакам возраста и стажа, каждому значению возраста можно сопоставить единственное значение количества сотрудников. Вследствие этого такую модель можно рассмотреть как одномерный клеточный автомат [79]. Использование моделей класса клеточных автоматов для моделирования динамики возрастного состава преподавателей высшей школы предлагалось в [187]. Особенностью рассматриваемой здесь модели является то, что клеточный автомат для случая моделирования учителей средней школы должен быть вероятностным или стохастическим. Причина этого состоит в вероятностном характере приглашения на работу в среднюю школу людей «со стороны», о чем упоминалось выше.

Итак, за основу модели возьмем клеточный автомат, в котором значение $q^n(t)$ будет задавать состояние клетки под номером t на n -ном шаге по времени.

Правила этого автомата зададим в обозначениях [10]

$$q^{n+1}(t+1) = (1 - \mu(t, s))q^n(t) + p(t, s)v(t),$$

Здесь $\mu(t, s)$ - по-прежнему коэффициент мобильности, равный доле учителей возраста t , которая при данном уровне материального обеспечения s (включающего заработную плату и социальные льготы) по каким бы то ни было причинам перестанет работать в среднем образовании. Новым параметром модели является $p(t, s)$ - коэффициент привлекательности профессии, определяемый как вероятность того, что получивший предложение работать в данной области представитель некоторой социальной группы примет это предложение. Этот коэффициент также зависит от возраста потенциального работника и уровня материального обеспечения s . Сама же величина s складывается из объективной (реальная заработная плата) и субъективной (оценка работником денежного эквивалента получаемых им социальных льгот) частей. Эту величину проще всего выражать в относительных единицах, беря за точку отсчета уровень обеспечения в некоторый момент времени. Наконец, $v(t)$ - объем выпуска педагогическими высшими и средними специальными учебными заведениями специалистов возраста t .

Данный клеточный автомат, являясь одномерным, соответствует условиям теоремы о сходимости. Его динамика в точности соответствует динамике решения уравнения (5.1), где

$$\varphi_t(x) = (1 - \mu(t, s))x + p(t, s)v(t)$$

В приведенных правилах, таким образом, количество учителей возраста $t+1$ в год $n+1$ равно количеству учителей возраста t в год n , за вычетом их доли, равной $\mu(t, s)$, к которому

прибавляется та часть молодых специалистов-педагогов, которая выбрала работу по специальности $p(t, s)v(t)$. Здесь возможность приглашения на работу в школу сотрудников «со стороны» еще не учтена.

После этого внесем изменение, связанное с возможным приходом в школу сотрудников с непедагогическим образованием. Найдем число незаполненных вакансий, на которые могут быть приглашены люди «со стороны».

Итак, количество незаполненных вакансий равно

$$\Delta V = V_0 - \sum_t q^n(t),$$

где V_0 - количество рабочих мест.

При этом в случае, если $\Delta V < 0$ (избыток кадров) полагаем $\Delta V = 0$.

Увеличение численности работников средней школы за счет прихода лиц с непедагогическим образованием может быть выражено следующим уравнением:

$$\Delta q^{n+1}(t+1) = \frac{\alpha p^*(t, s)\Delta V}{t_{max} - t_{min}}$$

где t_{max} и t_{min} - возрастные границы модели, а α - случайная величина, распределенная по некоторому закону на отрезке $[0; 1]$ и отражающая усредненные способности администрации школ привлечь сотрудников «со стороны». Здесь коэффициент привлекательности $p^*(t, s)$, очевидно, будет иным, видимо, меньшим, чем для выпускников педагогических учебных заведений.

Таким образом, получаем в итоге:

$$q^{n+1}(t+1) = (1 - \mu(t, s))q^n(t) + p(t, s)v(t) + \frac{\alpha p^*(t, s)\Delta V}{t_{max} - t_{min}} \quad (5.2)$$

Обозначим \bar{Q} вектор, компонентами которого являются $q(t)$, здесь t играет роль индекса.

Последнее слагаемое в уравнении (5.2) и задает приток работников в состав профессиональной группы «со стороны». Учёт этого явления в рамках исходной непрерывной модели приводит к её существенному усложнению, в то время как в рамках клеточно-автоматной модели практически не увеличивает вычислительную сложность. Таким образом, эта модификация модели представляет собой очередной пример расширения области применимости модели на основе клеточного автомата по сравнению с непрерывной моделью.

Для получения качественных результатов вполне разумным является допущение о линейной зависимости коэффициентов мобильности μ и привлекательности профессии p от s при естественных предположениях $\mu(t, 0) = 1$, $p(t, 0) = 0$ и $p^*(t, 0) = 0$. Из этих соображений получаем:

$$\begin{aligned} \mu(t, s) &= k_1(t)(1 - s) \\ p(t, s) &= k_2(t)s \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$p^*(t, s) = k_2^*(t)s$$

Для проведения конкретных расчетов эти зависимости определялись, исходя из статистических данных. Вначале адекватность построенной модели проверялась при помощи тестовых расчетов, некоторые результаты которых затем использовались и при прогнозировании динамики возрастной структуры учителей.

5.3. Тестовые расчеты при помощи модели

Для проведения тестовых расчетов были использованы данные социологического исследования учителей г. Москвы (Равлюк С.Г., 2001) [188]. Рассматривались два возможных сценария развития современной ситуации, в первом из которых кардинальных изменений в уровне оплаты труда учителей не происходит, а во втором этот уровень однократно повышается. При этом предполагается, что в начальный момент (соответствующий примерно 1990 году) существует устойчивая возрастная структура, сложившаяся за длительный период, на протяжении которого уровень оплаты труда (параметр s) не менялся. Затем этот уровень снижается, после чего модель развивается в течение 10-15 шагов (лет). И после этого параметр s сохраняется прежним либо меняется в соответствии с двумя упомянутыми выше сценариями.

Коэффициенты модели k_1 подбирались на основе заявленных учителями в ходе исследования [188] намерений сменить сферу профессиональной деятельности. Наиболее разумное соответствие наблюдаемому распределению было получено в предположении, что реально готовы сменить работу 10 % от заявивших о таком желании. Другие коэффициенты полагались равными $k_2(t) \equiv 1$ и $k_2^*(t) \equiv 0,1$ для всех возрастов. Несмотря на довольно произвольный выбор параметров модели, при этом были получены некоторые разумные результаты.

Вначале параметры модели были подобраны таким образом, чтобы наиболее соответствовать ситуации, наблюдаемой в настоящее время. Для этого алгоритм, реализующий модель, был запущен при значении $s = 0,99$, после достижения стационарного состояния уровень материального обеспечения был снижен в 3 раза, и были проделаны еще 11 шагов алгоритма (1990-2001 годы). Первое приближение к наблюдаемой возрастной структуре показано на рис.5.1.

Оказалось, что модель дает даже в этом случае более сильный дефицит молодых сотрудников, чем это наблюдается в действительности. Было сделано предположение, что отток молодых кадров в реальности ниже из-за некоторой психологической особенности работы в школе, которую проще всего описать фразой «молодежь втягивается в работу». Применительно к модели это означает, что реальные коэффициенты мобильности для младшей возрастной группы ниже, чем можно сделать вывод из декларированного при ответе на вопросы исследования [188]. Оказалось, что для большего соответствия наблюдаемому распределению,

достаточно снизить коэффициенты мобильности для возрастов 22-29 лет, приравняв их значению коэффициента для 30 лет, равного 0,019. Рассчитанное таким образом и наблюдаемое распределение возрастов показаны на рис. 5.2.

Все приведенные кривые получены из дискретных распределений (наблюдаемых и рассчитанных) при помощи процедуры сглаживания, примененной для большей наглядности иллюстраций. По вертикальной оси отложены расчетные и наблюдаемые частоты, соответствующие значению $V_0 = 1000$ (поскольку таков был объем выборки в исследовании, результаты которого использовались при оценке коэффициентов мобильности и привлекательности профессии).

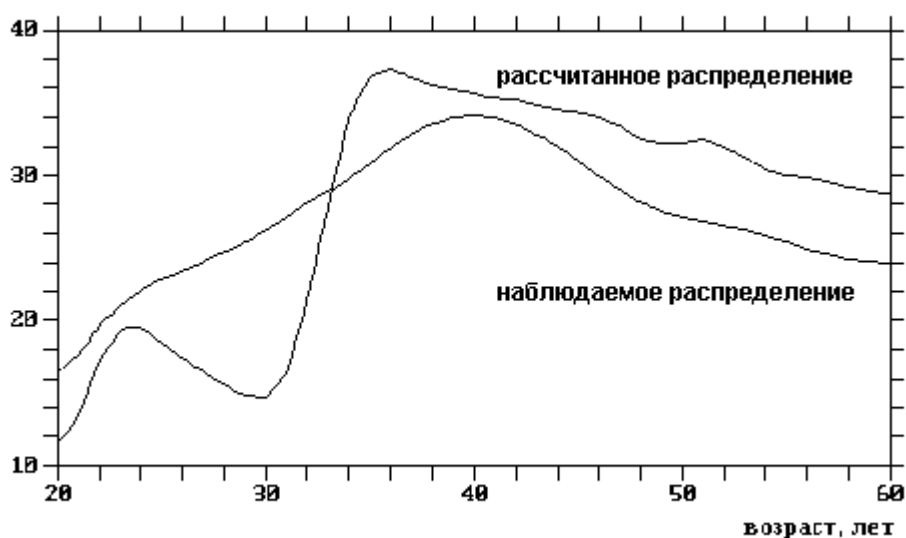


Рис. 5.1. Наблюдаемая и рассчитанная на основе оценок коэффициентов мобильности возрастные структуры учителей средней школы в настоящее время.

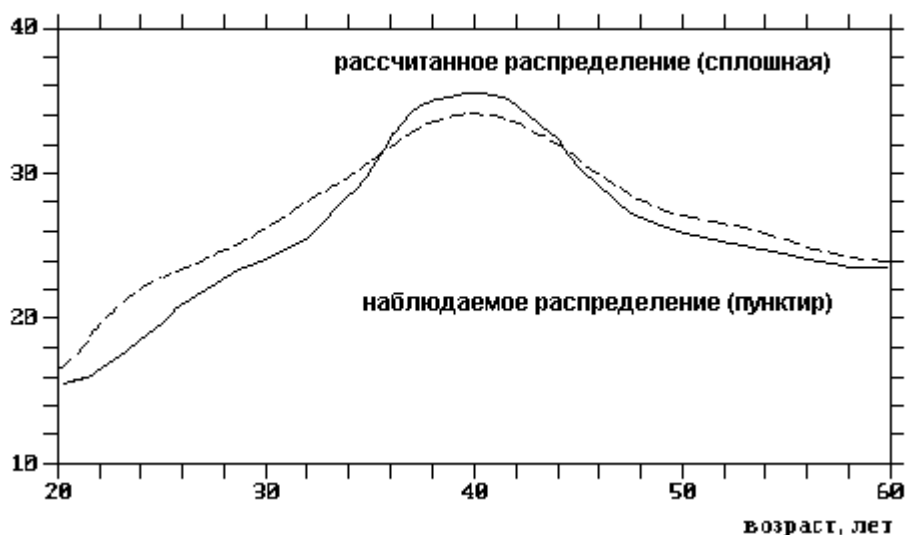


Рис. 5.2. Наблюдаемая и рассчитанная после корректировки коэффициентов возрастные структуры учителей средней школы в настоящее время.

Полученное при помощи модели распределение возрастов далее было принято за исходное, после чего были проделаны еще 10 шагов алгоритма, причем в одном случае величина s была оставлена без изменений, а во втором – ее значение было возвращено на прежний уровень. В первом случае, моделировалось отсутствие изменений в материальном обеспечении учителей. При этом, естественно, примерно через десять лет ситуация с кадрами сильно обострится (рис. 5.3). Во втором случае, при восстановлении полноценного финансирования, проблема нехватки кадров будет решена, однако явно проявится разделение учительской среды на специалистов «старой закваски» - пожилых, опытных учителей, основная часть карьеры которых, однако, пришлось на проблемный период, и новое поколение, пришедшее работать в школу после того, как профессия учителя перестала быть синонимом нищеты. Учителей среднего возраста, способных осуществить «связь поколений», передать какие-то традиции, практически нет (рис. 5.4). Возможно, такая ситуация породит проблемы, которые сейчас нам по понятным причинам неизвестны, проблемы взаимоотношений двух этих крупных возрастных групп учителей.

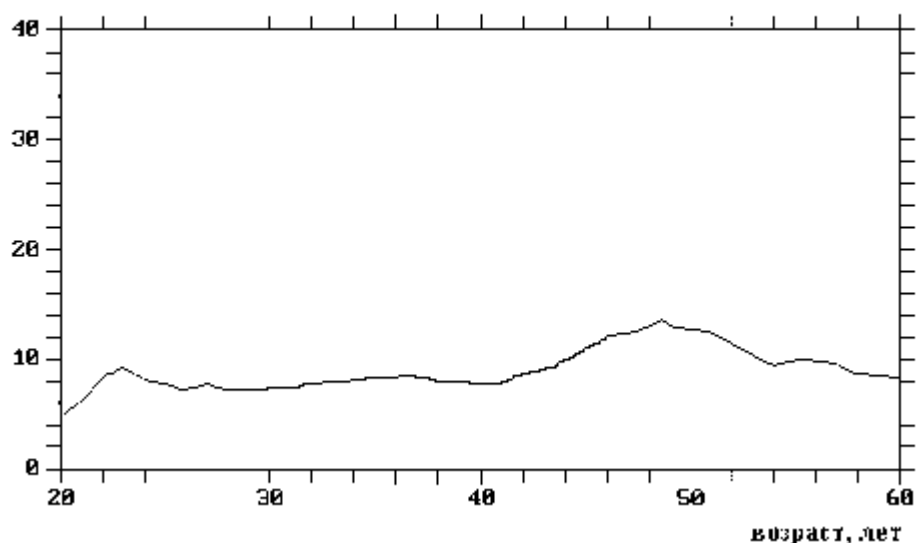


Рис. 5.3. Рассчитанная возрастная структура после 10 лет низкого финансирования.

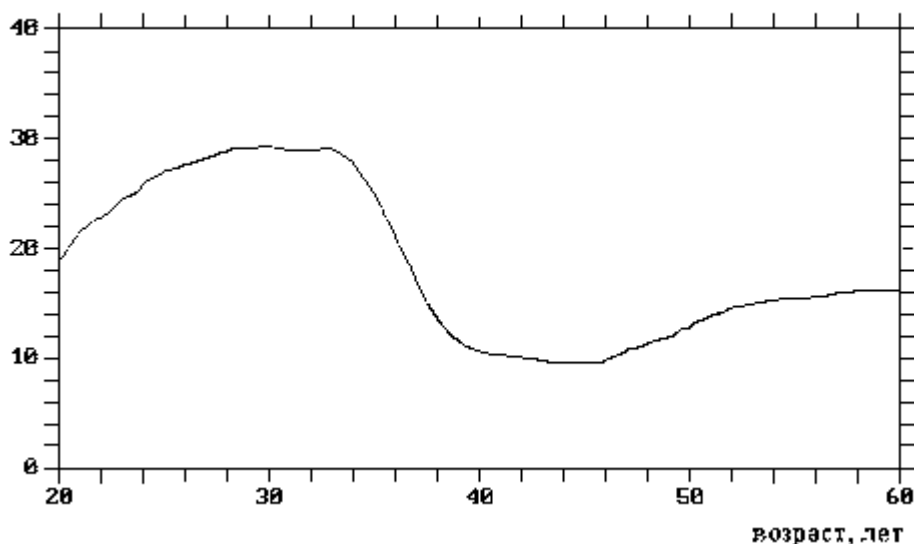


Рис. 5.4. Рассчитанная возрастная структура после 10 лет достаточного финансирования.

Забегая вперед, следует отметить, что в основном приведенные выше выводы подтвердились при строгом вычислении коэффициентов модели. Ниже изложена методика этого.

5.4. Методика вычисления параметров модели

Параметры модели (коэффициенты k_1 , k_2 и k_2^* для каждого целого значение возраста между $t_{min} = 20$ и $t_{max} = 65$) определялись, исходя из следующих соображений. Поскольку в период до начала 90-х годов прошлого века заметных проблем нехватки кадров не наблюдалось, но оплата труда учителей средних школ была сравнительно невысокой, для этого периода. Поэтому для этого периода было установлено наименьшее значение уровня материального обеспечения, при котором заметного дефицита кадров не возникает $s = 0,9$. При заданном s после достаточно большого количества шагов достигается некоторое стационарное распределение учителей по возрастам. Затем уровень материального обеспечения снижается в 3 раза (при проведении пробных расчетов результаты показали, что именно такое изменение уровня обеспечения дает возможность получить в итоге распределение, близкое к реальному), и проделываются еще несколько шагов алгоритма, соответствующие периоду с 1990 по рассматриваемый год.

Очевидно, что, если полученное после этого распределение близко к реально наблюдаемому, можно сделать вывод, что коэффициенты подобраны правильно.

Главной задачей при наполнении модели реальным содержанием, таким образом, становится подбор коэффициентов. Попытка сделать это на основе данных о желании и готовности учителей средних школ сменить работу [188] привела, как было показано раньше, к не совсем корректным результатам.

Для получения более точных результатов нахождения коэффициентов модели, соответствующих реальным условиям, был применен следующий алгоритм (А).

1. Возьмем некоторое начальное приближение для коэффициентов.
2. Для него рассчитаем стационарное распределение при $s = 0,9$, а затем совершим число шагов, соответствующее числу лет, прошедших с 1990 года при $s = 0,3$.
3. Результаты сравним с реальным распределением в декартовой метрике, вычислив расстояние между векторами \bar{Q} для рассчитанного и реального распределения.
4. Варьируем коэффициенты (для сокращения затрат времени можно выбрать вариацию вручную из очевидных соображений, например, если рассчитанное распределение дало для данного возраста меньшую численность, чем есть на самом деле, необходимо уменьшить коэффициент мобильности для возраста, меньшего на единицу).
5. Повторяем пункты 2 - 3 и сравниваем результаты вычисления расстояний. Если новые коэффициенты дают меньшее расстояние, переходим к ним в качестве следующего приближения, после чего повторяем весь алгоритм, пока не достигается локальный минимум для расстояния.

Число варьируемых переменных можно сократить, если воспользоваться результатом тестовых расчетов, согласно которому существующая на сегодняшний день ситуация достигается в модели при $k_2(t) = 1$ и $k_2^*(t) = 0,1$ для $\forall t \in [20; 64]$. Это подразумевает, что при идеальном уровне обеспечения все выпускники профильных учебных заведений и 10% специалистов с непедагогическим образованием готовы работать в средней школе.

Зато на практике в число варьируемых коэффициентов необходимо включить объемы выпуска педагогов высшими и средними специальными учебными заведениями. Параметры, полученные в результате минимизации отклонения рассчитанного распределения от реального, кладутся в основу модели.

Однако исходные статистические данные, использованные для вычисления коэффициентов модели, не содержали в явном виде требуемой информации о возрастной структуре учителей, поэтому нуждались в предварительной обработке.

5.5. Предварительная обработка статистических данных по профессиональной группе учителей Москвы и Ярославской области

Параметры модели были рассчитаны для двух регионов Российской Федерации: Москвы и Ярославской области.

Исходными данными по Москве были сведения о распределении учителей средних школ города по возрастным группам на 2001 год. Эти сведения, взятые из работы [185], в относительных величинах в расчете на 1000 вакансий приведены в таблице 5.1.

Возраст, лет	Количество учителей
до 20	10
21- 26	111
27- 35	202
36- 45	283
46- 55	222
от 56	152

Таблица 5.1. Исходные данные численности учителей по возрастным группам, Москва.

Поскольку для вычисления коэффициентов модели требовалось распределение по возрастам с точностью до года, была проведена их интерполяция кубическими сплайнами, а ее результаты были сглажены. В итоге получены оценки распределения учителей средних школ Москвы по возрастам, приведенные в таблице 5.2, а соответствующая гистограмма изображена на рис. 5.5.

Возраст, лет	Количество учителей	Возраст, лет	Количество учителей
18	2	42	30
19	7	43	29
20	12	44	29
21	14	45	28
22	15	46	27
23	16	47	26
24	17	48	25
25	18	49	24
26	19	50	23
27	19	51	22
28	19	52	22
29	20	53	21
30	21	54	20
31	22	55	19
32	24	56	19
33	25	57	18
34	25	58	17
35	27	59	16
36	27	60	15
37	28	61	15
38	29	62	14
39	30	63	14
40	30	64	13
41	30	65	12

Таблица 5.2. Оценки распределения учителей по возрастам, Москва.

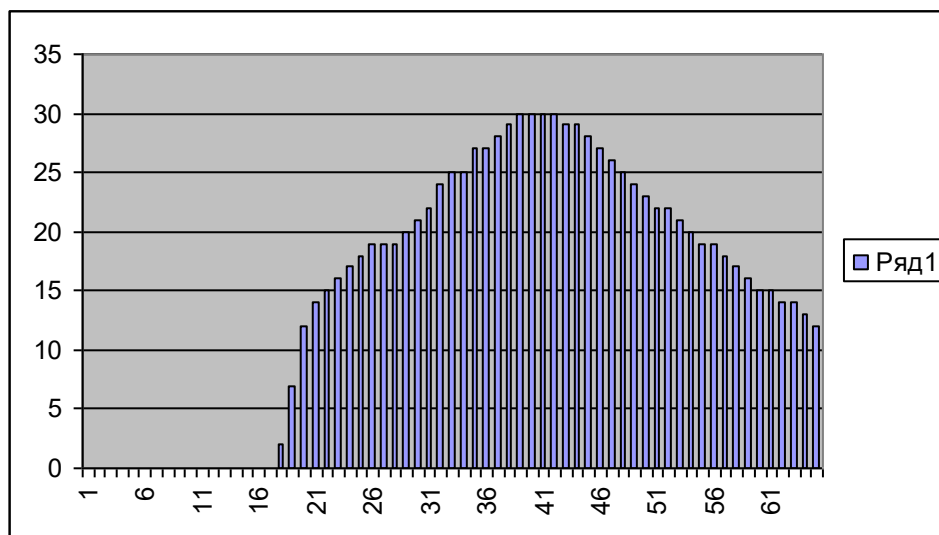


Рис. 5.5. Распределение учителей средних школ по возрастам, Москва.

Для Ярославской области в качестве исходных использовались статистические данные о численности групп по стажу за три года, приведенные в таблице 5.3. Здесь и далее для Ярославской области приведены абсолютные значения численностей групп.

Стаж, лет	Количество учителей		
	2002 год	2003 год	2004 год
до 2	724	631	466
2-5	622	601	603
5-10	1311	1137	936
10-20	3598	3365	3175
от 20	4406	4456	4590

Таблица 5.3. Исходные данные численности учителей по группам по стажу, Ярославская область.

Поскольку для модели требовались сведения о распределении по возрасту, был произведен пересчет данных.

Было сделано предположение о том, что в среднем факторы, влияющие на соотношение распределений по возрастам и по стажу (средний возраст выпускников вузов, средний возраст и средняя длительность пребывания в отпуске по уходу за ребенком и т.п.) в Москве и Ярославской области примерно одинаковы. Тогда интересующий нас результат можно было получить при помощи корреляционных таблиц, составленных на основе данных исследования [185].

Поскольку интервалы распределения по стажу в московских и ярославских данных различны, вначале необходимо было получить оценки численности ярославских учителей в группах по стажу с интервалами, соответствующими московским данным.

Эти оценки были получены в предположении о линейности производной функции

распределения на границах интервалов путем приближенного вычисления количества учителей со значениями стажа, которых требовалось «передать» из одного интервала в другой (например, численность для значения стажа 8 и 9 лет требовалось «передать» из третьего интервала исходного разбиения во второй интервал нового разбиения). Результаты такого оценивания приведены в таблице 5.4.

Стаж, лет	Количество учителей		
	2002 год	2003 год	2004 год
до 3	900	863	851
от 3 до 8	1213	1097	979
от 9 до 13	1557	1390	1207
от 14 до 18	1783	1654	1529
от 19 до 23	1557	1465	1380
от 23	3651	3721	3824

Таблица 5.4. Пересчитанные данные численности учителей по группам по стажу, Ярославская область.

После этого по кросс-таблицам (возраст-стаж), построенным по данным [185], были вычислены коэффициенты корреляции и найдены наиболее вероятные значения функции распределения по возрастам учителей Ярославской области, приведенные в таблице 5.5.

Возраст, лет	Количество учителей		
	2002 год	2003год	2004год
до 20	96	91	89
21- 26	1026	959	909
27- 35	1813	1646	1473
36- 45	3039	2828	2621
46- 55	2711	2670	2647
от 56	1950	1972	2010

Таблица 5.5. Оценки распределения учителей по возрастным группам, Ярославская область.

Как и в предыдущем случае, была проведена интерполяция данных кубическими сплайнами, а ее результаты были сглажены. Оценки распределения численности учителей средних школ Ярославской области по возрастам, приведенные в таблице 5.6. На рис. 5.6 приведена гистограмма этого распределения на 2004 год.

Возраст, лет	Количество учителей		
	2002 год	2003год	2004год
18	5	5	4
19	10	9	8
20	35	33	32
21	59	56	53
22	82	77	73

23	102	95	90
24	119	111	104
25	133	123	115
26	144	133	123
27	154	142	130
28	164	150	136
29	173	158	142
30	184	167	149
31	196	177	158
32	208	188	168
33	223	202	180
34	238	216	193
35	255	232	208
36	271	247	223
37	287	262	238
38	301	277	252
39	314	289	265
40	324	300	277
41	331	308	286
42	336	314	294
43	337	317	299
44	337	318	301
45	333	317	303
46	328	314	302
47	322	310	300
48	314	305	297
49	306	298	292
50	297	291	287
51	288	284	282
52	279	276	276
53	271	269	269
54	262	261	262
55	253	253	255
56	245	245	247
57	236	237	240
58	227	229	232
59	219	221	224
60	210	212	216
61	202	204	208
62	193	196	200
63	185	188	192
64	176	180	185
65	168	172	177

Таблица 5.6. Оценки распределения учителей по возрастам, Ярославская область.

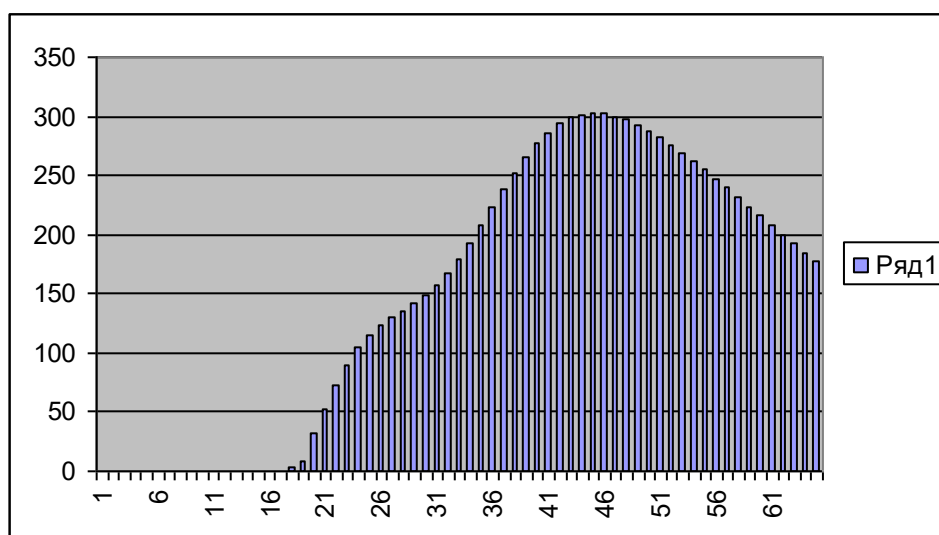


Рис. 5.6. Распределение учителей средних школ по возрастам, Ярославская область.

Таким образом, в результате предварительной обработки данных были получены нужные для расчета коэффициентов модели распределения. Поскольку в модели минимальный возраст сотрудников выбран равным 20 лет, то группы, соответствующие возрастам 18 и 19 лет нужно было отбросить, что не создало проблем из-за малочисленности этих групп.

5.6. Расчет коэффициентов для имитационных схем профессиональных групп учителей Москвы и Ярославской области

На следующем этапе используем данные из таблиц 3.2 и 3.6, содержащих информацию о возрастной структуре учителей средних школ Москвы и Ярославской области в 2001 и 2002-2004 годах соответственно. Наличие этих данных позволяет применить алгоритм (А), для чего требуется еще задать начальное приближение параметров модели.

Для Москвы в этом качестве начального приближения коэффициентов $k_1^{(0)}$ были взяты оценки на основе данных о желании и готовности учителей средних школ сменить работу из [188], поскольку в тестовых расчетах их использование привело к рассчитанному распределению, достаточно близкому к реальному (хотя при этом, очевидно, минимум расстояния не достигался). Эти оценки приведены в таблице 3.7.

Возраст t , лет	Коэффициенты $k_1^{(0)}(t)$	Возраст t , лет	Коэффициенты $k_1^{(0)}(t)$
20	0,24	43	0,17
21	0,2	44	0,16
22	0,19	45	0,16
23	0,19	46	0,16
24	0,19	47	0,15
25	0,19	48	0,15

26	0,19	49	0,14
27	0,19	50	0,14
28	0,19	51	0,14
29	0,19	52	0,13
30	0,19	53	0,13
31	0,19	54	0,12
32	0,19	55	0,12
33	0,19	56	0,12
34	0,19	57	0,11
35	0,19	58	0,11
36	0,18	59	0,11
37	0,18	60	0,11
38	0,18	61	0,1
39	0,18	62	0,1
40	0,17	63	0,1
41	0,17	64	0,1
42	0,17	65	0,1

Таблица 5.7. Начальные приближения коэффициентов $k_1^{(0)}$ для учителей Москвы.

В случае Ярославской области наличие данных за три последовательных года позволило просто оценить начальные приближения этих коэффициентов, исходя из анализа динамики численности учителей одного года рождения в течение этих трех лет. На основании имеющихся данных вычислялись предположительные (поскольку сами данные есть результат аппроксимации) реальные коэффициенты мобильности в 2002 и 2003 годах, затем на их основе по формулам модели находились два предположительных значения коэффициентов $k_1^{(0)}(t)$ (с учетом того, что мы считаем параметр $s = 0,3$), а в качестве начального приближения выбиралось их среднее арифметическое. Полученные результаты приведены в таблице 5.8.

Возраст t , лет	Коэффициенты $k_1^{(0)}(t)$	Возраст t , лет	Коэффициенты $k_1^{(0)}(t)$
20	0	43	0,0745
21	0	44	0,0763
22	0,0143	45	0,0761
23	0,0286	46	0,0746
24	0,0429	47	0,071
25	0,0429	48	0,0677
26	0,0429	49	0,0668
27	0,0571	50	0,0614
28	0,0571	51	0,0534
29	0,0642	52	0,0499
30	0,0655	53	0,0437
31	0,0657	54	0,0449
32	0,0655	55	0,041
33	0,051	56	0,0395

34	0,0542	57	0,0379
35	0,0445	58	0,0363
36	0,0501	59	0,0345
37	0,0497	60	0,039
38	0,0522	61	0,0339
39	0,0594	62	0,0352
40	0,0615	63	0,0331
41	0,0686	64	0,0307
42	0,0692	65	0,0281

Таблица 5.8. Начальные приближения коэффициентов $k_1^{(0)}$ для учителей Ярославской области.

Начальное приближение объемов выпуска педагогов высшими и средними специальными учебными заведениями было взято в следующем виде

$$v^{(0)}(t) = \frac{V_0}{t_{max} - t_{min}}$$

для $t \in [20; 30]$.

Далее, после применения алгоритма (А), после 10 – 20 итераций были получены коэффициенты для модели для ситуаций в Москве и в Ярославской области, приведенные в таблицах 5.9 и 5.10 соответственно. Следует отметить, что расчеты делались на 1000 рабочих мест для Москвы и на 10000 (что примерно соответствует реальному общему количеству ставок) для Ярославской области.

Возраст t , лет	Коэффициенты $k_1(t)$	Условный объем выпуска $v(t)$
20	0,001	7
21	0,005	7
22	0,01	7
23	0,015	5
24	0,015	3
25	0,015	2
26	0,015	2
27	0,015	2
28	0,015	1
29	0,015	
30	0,015	
31	0,015	
32	0,015	
33	0,015	
34	0,015	
35	0,015	
36	0,014	
37	0,014	
38	0,014	
39	0,014	
40	0,013	

41	0,013	
42	0,013	
43	0,013	
44	0,014	
45	0,014	
46	0,014	
47	0,014	
48	0,014	
49	0,014	
50	0,014	
51	0,014	
52	0,013	
53	0,013	
54	0,012	
55	0,012	
56	0,012	
57	0,015	
58	0,016	
59	0,017	
60	0,018	
61	0,02	
62	0,03	
63	0,04	
64	0,05	
65	0,06	

Таблица 5.9. Финальные значения коэффициентов модели для Москвы.

Возраст t , лет	Коэффициенты $k_1(t)$	Условный объем выпуска $v(t)$
20	0,001	70
21	0,005	70
22	0,03	50
23	0,04	30
24	0,06	20
25	0,06	20
26	0,06	20
27	0,07	20
28	0,07	10
29	0,08	
30	0,06	
31	0,05	
32	0,05	
33	0,05	
34	0,05	
35	0,05	
36	0,05	
37	0,05	
38	0,048	
39	0,05	
40	0,05	

41	0,06	
42	0,07	
43	0,08	
44	0,08	
45	0,08	
46	0,08	
47	0,071	
48	0,068	
49	0,067	
50	0,062	
51	0,054	
52	0,05	
53	0,044	
54	0,043	
55	0,041	
56	0,04	
57	0,05	
58	0,06	
59	0,07	
60	0,08	
61	0,09	
62	0,1	
63	0,11	
64	0,12	
65	0,13	

Таблица 5.10. Финальные значения коэффициентов модели для Ярославской области.

5.7. Прогнозирование динамики возрастной структуры учителей для некоторых сценариев развития ситуации

Для каждого из регионов при помощи модели с использованием найденных коэффициентов проводились расчеты для шести сценариев динамики возрастной структуры учителей средних школ.

1. Достижение стационарного состояния при $s=0,9$, затем 11 шагов для Москвы (1990 – 2001 г.г.) и 13 шагов для Ярославской области (1990 – 2003 г.г.) при $s=0,3$ (полученное распределение сравнивалось с реальным при расчете коэффициентов). Результаты этого расчета являются приближением нынешней ситуации; они использовались как отправная точка для пяти других сценариев.

2. Сохранение нынешней ситуации ($s=0,3$) в течение 10 лет.

3. Прекращение дополнительной социальной поддержки учителей ($s=0,2$, можно представить себе это как отказ от каких-либо доплат, сохранение лишь зарплаты согласно ЕТС), продолжающееся в течение 10 лет.

4. Скачкообразное повышение уровня обеспечения до $0,99$ и поддержание его в течение

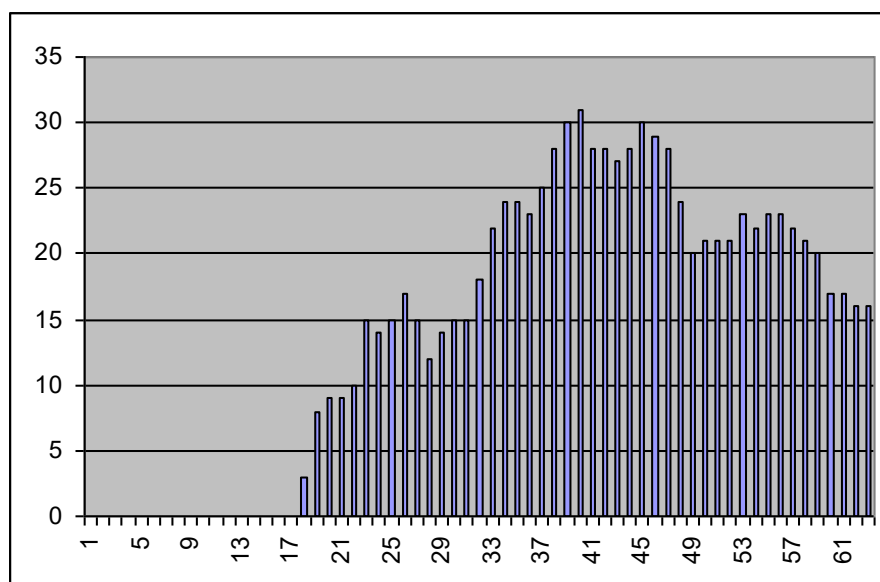
10 лет.

5. Постепенное повышение уровня обеспечения, соответствующее повышению средней зарплаты учителей до средней зарплаты по стране ($s=0,6$). в течение 3 лет, затем 7 лет поддержания обеспечения на этом уровне.

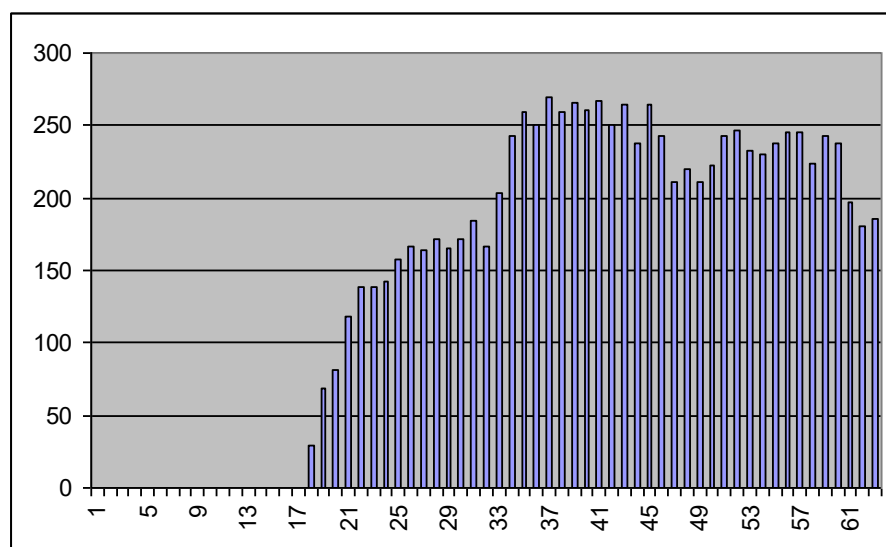
6. Постепенное повышение уровня обеспечения до нормального ($s=0,99$) в течение 5 лет, затем еще 5 лет поддержания обеспечения на этом уровне.

Для каждого сценария было найдено итоговое распределение по возрастам и суммарное количество занятых. Последняя величина определяет дефицит кадров, поскольку количество вакансий мы считаем постоянным.

Рассмотрим результаты прогнозирования динамики возрастной структуры учителей школ в каждом из шести сценариев. Они приведены в расчете на 1000 рабочих мест для Москвы и на 10000 (то есть практически в абсолютных показателях) для Ярославской области.



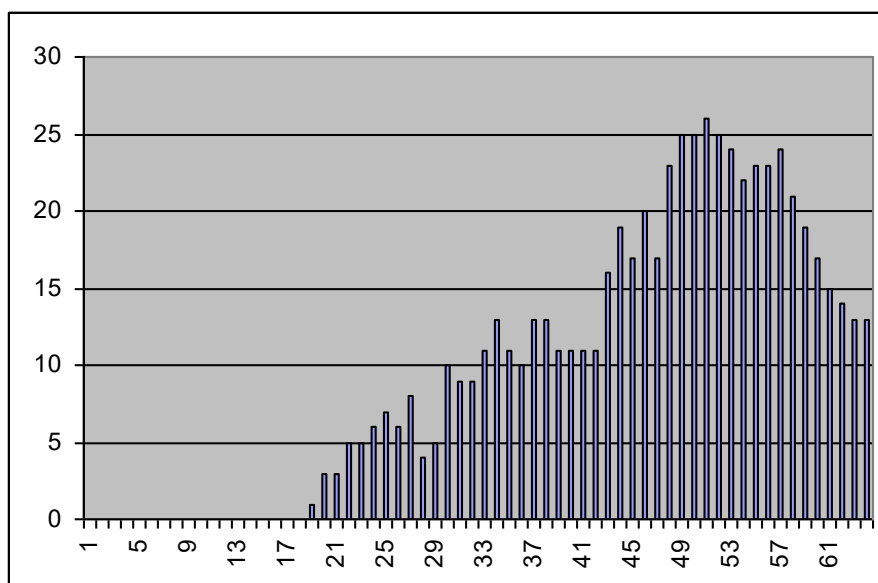
Москва



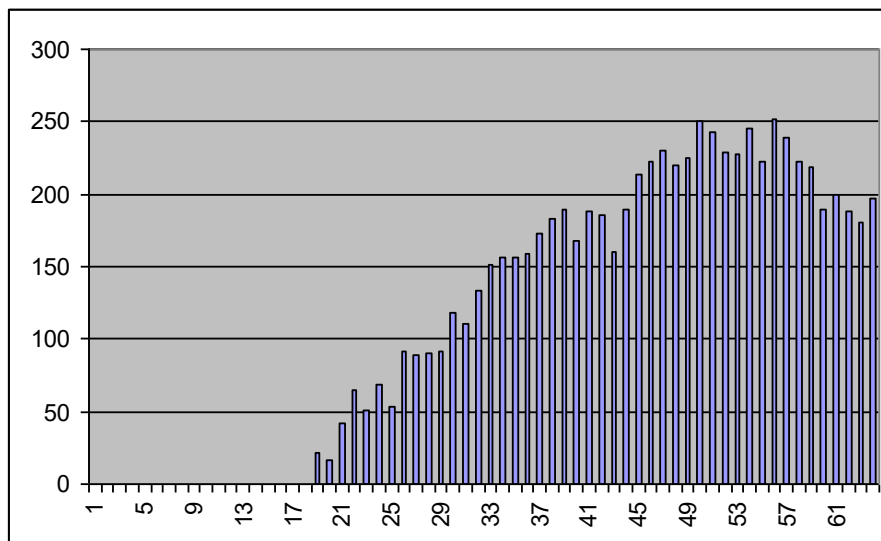
Ярославская область

Рис. 5.7. Современное распределение учителей по возрастам, рассчитанное при помощи модели.

На рис. 5.7 приведена картина, которую дает модель для современной (точнее, соответствующей 2001 году для Москвы и 2003 году для Ярославской области) ситуации. Максимум распределения уже сместился на возрасты 40-50 лет в Москве и 35-45 лет в Ярославской области, хотя в нормальной ситуации он должен находиться в районе 23-27 лет, то есть приходится на возраст выпускников вузов (с учетом возможности обучения в аспирантуре или отпуска по уходу за ребенком). Однако эта ненормальная ситуация еще не вызывает серьезного дефицита кадров: в Москве занята 921 вакансия из 1000, в Ярославле – 9413 из 10000.



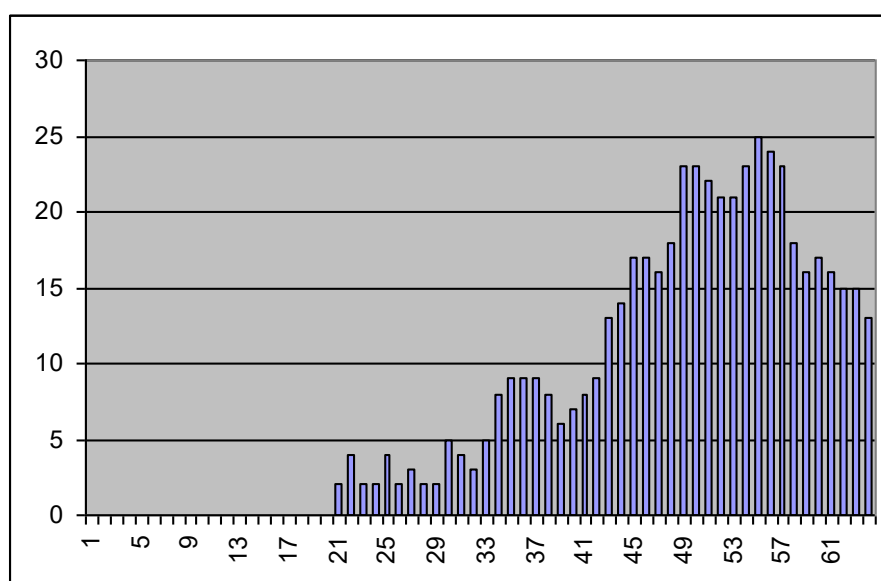
Москва



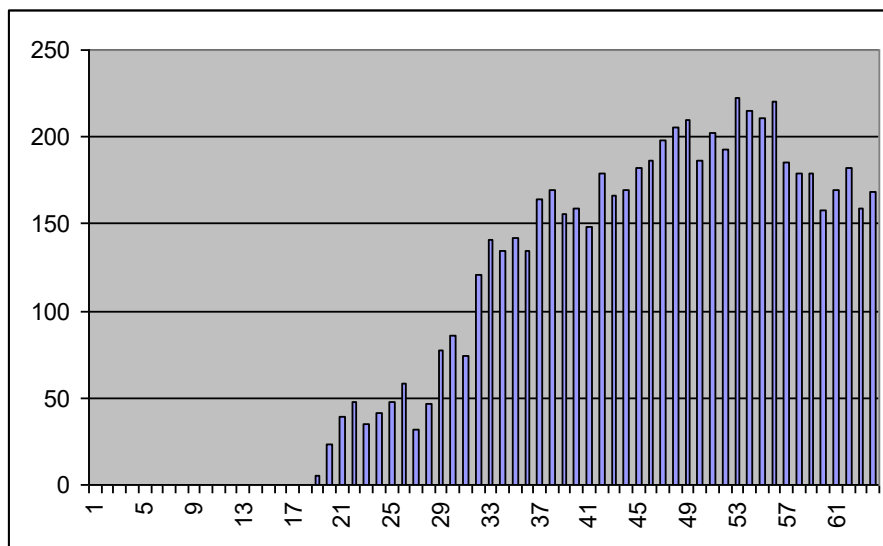
Ярославская область

Рис. 5.8. Результаты моделирования сценария сохранения ситуации в течение 10 лет.

На рис. 5.8 показаны результаты моделирования динамики при сохранении ситуации в течение 10 лет, т.е. до 2011/2013 годов. Отсутствие изменений социально-экономических условий приводит к тому, что максимум распределения смещается в сторону увеличения возраста, достигает пенсионного и начинается период обвального сокращения числа занятых, появляется значительный дефицит: заняты лишь 637 вакансий из 1000 в Москве и 7515 в Ярославской области. Видно, что кризис, который можно ожидать в провинции, не такой жесткий, как в столице, но и там возникает 25%-ный дефицит кадров.



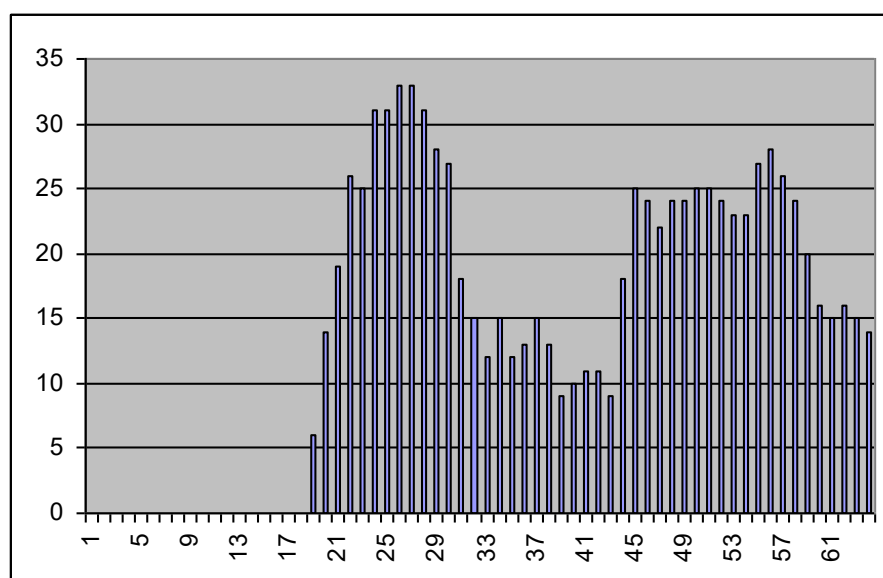
Москва



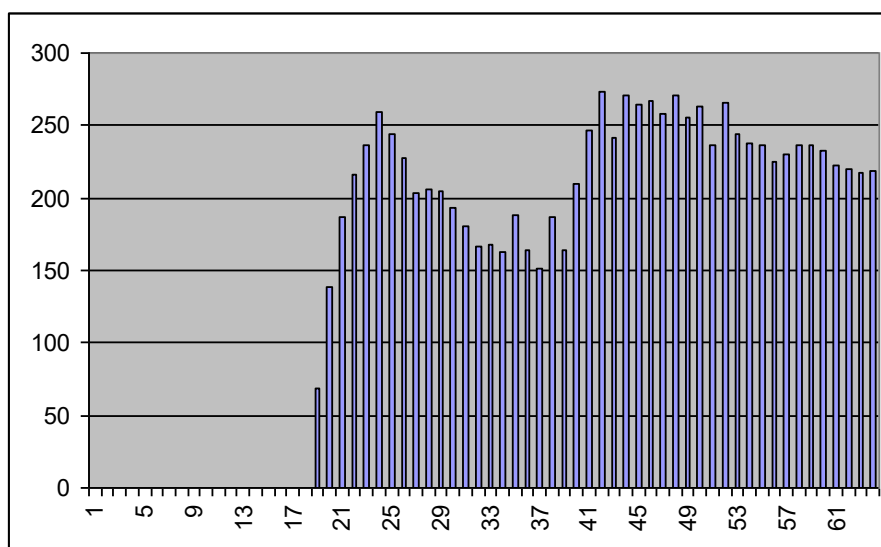
Ярославская область

Рис. 5.9. Результаты моделирования сценария ухудшения социальной обстановки.

На рис. 5.9 показаны последствия третьего сценария. Как видно, ситуация при ухудшении социального обеспечения учителей также критическая, но принципиально мало отличается от второго сценария. Здесь заняты 523 из 1000 московских вакансий и 6408 ярославских.



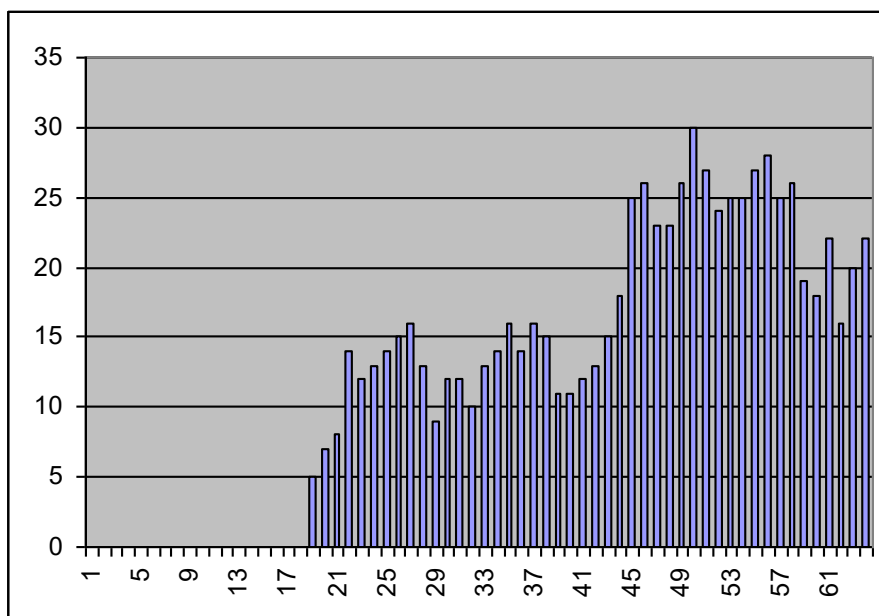
Москва



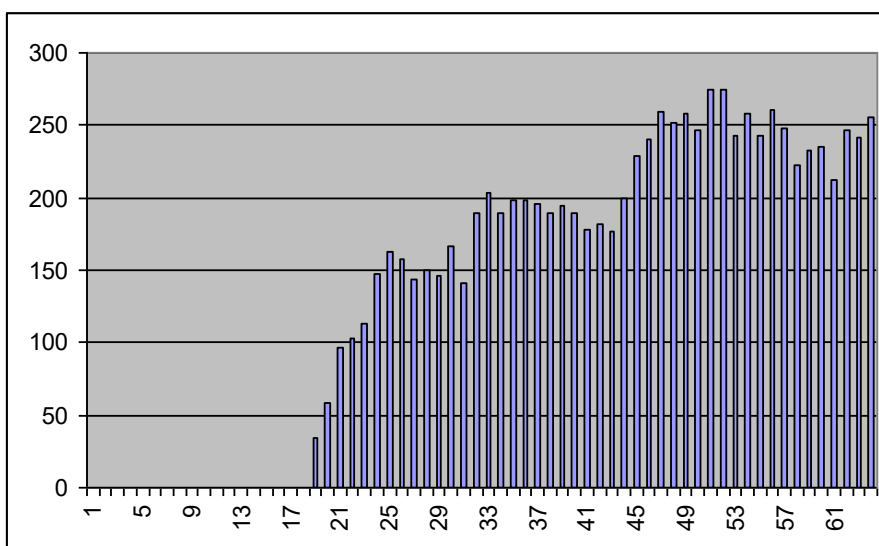
Ярославская область

Рис.5.10. Результаты моделирования сценария скачкообразного перехода к полноценному финансированию.

Рис. 5.10 изображает положение дел по прошествии 10 лет в случае скачкообразного перехода к полноценному финансированию. К этому моменту количественная проблема с кадрами уже решена, в Москве заняты 925 из 1000 вакансий, в Ярославской области – 9998, то есть практически 100%. Однако, имеет место ярко выраженное в столице и несколько смазанное в провинции расслоение учителей на возрастные группы. У распределения теперь два максимума. Первый – вновь пришедшие молодые специалисты, скорее всего, с новой системой ценностей и намерением восстановить разрушенное. Второй – учителя предпенсионного возраста, которые пережили кризис, со своими ценностями, не просто сохранившимися с докризисных времен, а претерпевшими значительные трансформации в кризисный период. Общих точек у этих групп мало, а сотрудники 30-40-летнего возраста, способные осуществить «связь поколений», немногочисленны. Таким образом, условия четвертого сценария, внешне благополучные, могут привести к внутреннему «конфликту поколений». Правда, в провинции он будет менее резко выражен.



Москва

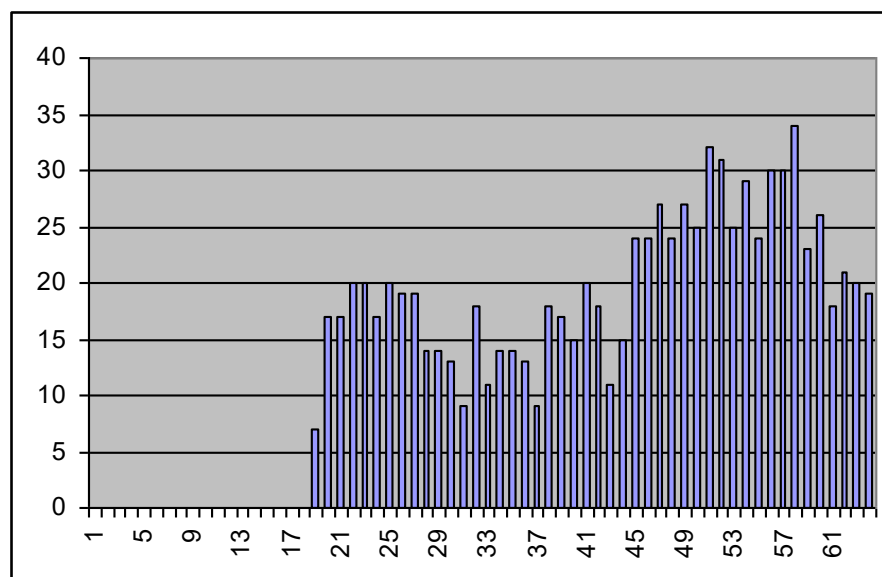


Ярославская область

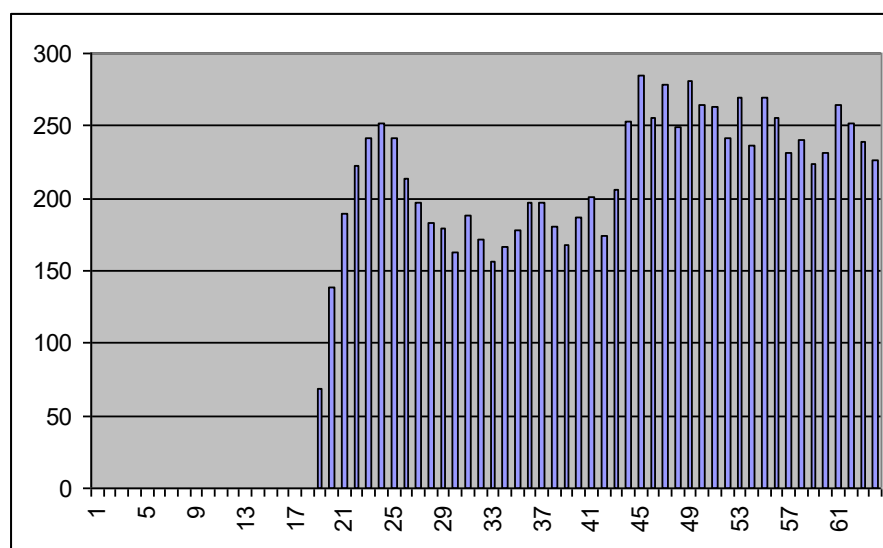
Рис. 5.11. Результаты моделирования сценария постепенного повышения уровня зарплаты до среднего по стране.

Пятый сценарий, представляющий постепенный подъем средней зарплаты учителей до уровня средней зарплаты по стране в течение 3 лет, дает еще через семь лет ситуацию, показанную на рис. 5.11. Эта ситуация близка в смысле среднеквадратичного отклонения к результатам первого сценария (результатам модели для настоящего момента), в частности, отличие от них не больше, чем их отличие от наблюдаемого распределения. Особой похожестью отличается положение дел, прогнозируемое в этом случае для Ярославля, где заняты 9042 вакансии, а в Москве дефицит даже увеличится, несмотря на проведенное повышение уровня обеспечения - 805 из 1000 вакансий будут заполнены. Таким образом, пятый

сценарий предполагает замораживание нынешней не вполне благополучной кадровой структуры.



Москва



Ярославская область

Рис. 5.12. Результаты моделирования сценария постепенного повышения уровня заработной платы до оптимального.

Наконец, посмотрим на итоги сценария, предполагающего постепенный подъем обеспечения до $s=0,99$ в течение 5 лет. (Этот срок является максимальным из приводящих к похожему результату – аналогичная картина получается, если повышение проводить в течение 3 или 4 лет.) После этого были проделаны еще пять шагов, чтобы продолжительность сценария достигла 10 лет. Здесь ситуация с дефицитом кадров выправлена (912 на 1000 вакансий в

Москве и 9967 на 10000 в Ярославской области), при этом исчезла угроза «кадрового обвала» из сценария 2, но и нет явного расслоения, как в сценарии 4. В целом, данный сценарий можно назвать наиболее благополучным из исследованных, что, конечно, не мешает предполагать возможность дальнейшей оптимизации управления ситуацией.

Итак, прогнозирование динамики возрастной структуры учителей средних школ в столице и в одном из регионов на период в десять лет, позволяет сделать следующие выводы:

1. Сохранение нынешнего уровня обеспечения учителей, соответствующего параметру $s=0,3$, приведет через десять лет к наступлению острейшего дефицита кадров в этой области. При этом ситуация не будет принципиально отличаться от варианта, при котором государство перестает проявлять заботу о материальном обеспечении педагогов ($s=0,2$).

2. Предполагаемое повышение средней зарплаты учителей до средней зарплаты по стране «заморозит» проблемную ситуацию с возрастной структурой. Поскольку нынешняя средняя зарплата учителей примерно вдвое ниже средней по стране, составляющей 8500 рублей, то это повышение соответствует переходу к $s=0,6$ и описано в пятом сценарии.

3. Одномоментный переход к высокому уровню обеспечения (а если предположить пропорциональную зависимость параметра s от реальной заработной платы, то уровню $s=1$ соответствует средняя зарплата учителей в 14000 рублей при покупательной способности 2003 года) приведет к разделению учителей на две ярко выраженные возрастные группы и возможному «конфликту поколений».

4. Проблема дефицита учительских кадров может быть решена при постепенном, но в течение не более пяти лет, повышении уровня обеспечения до $s=1$ (средняя зарплата в 14000 рублей при покупательной способности рубля 2003 года). При этом следует отметить один важный момент, находящийся за рамками применявшейся математической модели, но, тем не менее, очевидный: для успешного решения кадровой проблемы необходимо кардинальное улучшение системы подготовки молодых специалистов в высших и средних специальных педагогических учебных заведениях.

5.8. О соответствии результатов прогнозирования текущей ситуации в профессиональной группе учителей

В настоящее время в нашей стране не проводятся достаточно детальные количественные исследования возрастного состава профессиональной группы учителей средних школ, которые позволили бы провести аккуратное сравнение результатов прогнозирования с реальным положением вещей.

Тем не менее, грубое сопоставление представляется вполне возможным. Статистические данные об уровне оплаты труда учителей средних школ России, проводимые Федеральной

службой государственной статистики [189], позволяют утверждать, что реализовался сценарий, представляющий собой нечто среднее между третьим и четвертым из использовавшихся в качестве основы для численных экспериментов. В частности, в 2013 году средняя зарплата учителя государственного среднего общеобразовательного учреждения по России составила 29038 рублей, по Москве – 60026 рублей, по Ярославской области - 23262 рубля. В то же самое время средняя зарплата по всей экономике в целом составляла соответственно 29960 рублей, 56262 рубля и 22848 рублей. Здесь, конечно, нельзя исключать возможных манипуляций статистическими данными с целью обеспечить заявленное представителями власти превышение уровнем оплаты труда школьных учителей среднего уровня оплаты труда по стране. Тем не менее, можно рассчитывать на то, что реальная картина не носит принципиальных отличий.

Повышение учительской зарплаты до средней по экономике вместе с повышением покупательной способности, обеспечиваемой этим самым средним уровнем, таким образом, решило количественную проблему с педагогическими кадрами, однако, как и было указано в прогнозе, основанном на этих сценариях, проблемы качества кадров сохранились и усугубились.

Картина, представленная в современных качественных исследованиях учителей средних школ, оказывается сложнее, чем предсказанной моделью простой раскол на группу старых кадров, «переживших тяжелые времена» и молодых «самодостаточных карьеристов». Помимо обнаруженных в таких исследованиях проблем с передачей опыта между старыми кадрами и вновь пришедшими в школы педагогами, появляется группы учителей с принципиально разным подходом к основам своей профессиональной деятельности [190], расслоение на «успешных» и «неуспешных» учителей [191] и тому подобное. Внесли свою лепту в усложнение социальных отношений и некоторые меры, принимавшиеся в экстренном порядке, а потому совершенно непродуманные, как, например, московское повышение заработной платы учителям иностранных языков при сохранении прежнего уровня оплаты труда для других категорий педагогов.

Таким образом, можно утверждать, что прогнозы, построенные при помощи предлагаемой модели, дали правильные качественные результаты. Проверка адекватности модели в смысле точности количественного прогноза могла бы быть проведена при наличии соответствующих социологических исследований, которые, к сожалению, не проводятся и не входят в сферу деятельности автора настоящей работы.

5.9. Моделирование динамики численности студентов

Вышеизложенная модель может быть адаптирована для решения задач моделирования динамики числа студентов, обучающихся в конкретном вузе либо в группе вузов по одной и той же программе. Рассмотрим такую ее модификацию как иллюстрацию утверждения о

возможности применения предлагаемого подхода для самых различных профессиональных или сходных с ними (как в этом примере) групп.

Здесь характеристикой когорт является не биологический возраст, который не играет важной роли для рассматриваемых процессов, а год обучения в вузе.

При моделировании динамики численности студентов, обучающихся в вузе, мы, как и в вышеупомянутых работах, должны рассмотреть различные процессы, изменяющие численность студентов на курсе.

К таким процессам следует отнести:

- отчисление студента;
- восстановление с потерей года;
- уход в академический отпуск и возвращение из него;
- перевод студента из другого вуза.

При этом очевидно, что процессы «академический отпуск» и «отчисление» + «восстановление с потерей года» хотя и представляют собой различные юридические процедуры, однако при моделировании динамики численности студентов могут рассматриваться как один и тот же процесс, который назовем для краткости «потерей года».

В рамках построения модели динамики численности студентов уместным кажется рассматривать численность студентов, обучающихся по одной специальности или направлению в рамках одного вуза. В качестве основных переменных модели естественно взять численность студентов на каждом году обучения (курсе). Переменные эти могут принимать неотрицательные целые значения и зависят от времени, которое будем измерять в годах и которое также может принимать лишь целые значения (то есть все события, влияющие на численность когорты студентов, произошедшие в течение учебного года, рассматриваются как одномоментные).

Итак, обозначим $M_i(t)$ количество студентов на курсе i в учебном году t . Будем считать, что следующие коэффициенты меняются достаточно медленно для того, чтобы положить их постоянными:

α_i – доля студентов, отчисляемых с i -го курса;

β_i – доля студентов, потерявших год на i -м курсе;

N_i – среднее число студентов, которые перевелись из других вузов на i -й курс.

Тогда число студентов на данном курсе на следующий год будет выражаться следующим образом:

$$M_{i+1}(t+1) = M_i(t) - \alpha_i M_i(t) - \beta_i M_i(t) + \beta_{i+1} M_{i+1}(t) + (1 + \zeta) N_{i+1}$$

Здесь выражено утверждение, что на следующий курс переходят студенты предыдущего курса, за исключением отчисленных и потерявших год, а также к ним добавляются студенты

следующего курса, потерявшие год, и те, кто перевелся из других вузов. При этом ζ – случайная величина с математическим ожиданием, равным 0, описывающая процесс перевода из других вузов. Коэффициенты α_i и β_i , а также величины N_i могут быть получены на основании статистических данных методами, изложенными выше в отношении коэффициентов модели численности учителей средних школ.

Данное многомерное рекуррентное отображение и является математическим представлением метода когорт для описания динамики численности студентов. Задавая различные начальные значения $M_1(t)$, можно построить прогноз изменения численности этой когорты по годам обучения и предсказать количество выпускников, успешно окончивших вуз по данной специальности. Сама же величина $M_1(t)$ – количество студентов, пришедших на первый курс – изменяется под воздействием большого числа факторов (количество бюджетных мест: уровень оплаты контрактного обучения, привлекательность специальности, конкуренция других вузов за абитуриентов и т.п.), поэтому ее вычисление находится за рамками данной модели.

Изложенная выше модель динамики численности студентов была применена для прогнозирования объема выпуска ряда специальностей факультета информационных технологий РГСУ. Полностью это исследование изложено в выпускной квалификационной работе студентки факультета информационных технологий РГСУ Степновой И.В. [192]. Здесь же приведем методику расчетов, разработанную автором настоящей диссертации, и основные результаты применения модели.

Для построения имитационных схем, отражающих динамику численности студентов, были использованы данные, предоставленные учебной частью факультета информационных технологий Российского государственного социального университета за 2007-2010 годы по следующим специальностям или направлениям подготовки студентов:

- «Автоматизированные системы обработки информации и управления»
- «Прикладная математика в экономике»
- «Прикладная математика и информатика»
- «Информатика и вычислительная техника»

Согласно данным количество студентов, осуществивших перевод из других вузов, было пренебрежимо мало по сравнению с численностью обучавшихся (не более 1 на каждой специальности или направлении, в связи с чем рекуррентное отображение (3.1) можно было упростить до следующего вида:

$$M_{i+1}(t+1) = M_i(t) - \alpha_i M_i(t) - \beta_i M_i(t) + \beta_{i+1} M_{i+1}(t)$$

Для вычисления коэффициентов модели применялся следующий подход. Вначале делалось предположение о том, что никаких процессов, связанных с потерей студентом года, не

происходит. Исходя из этого предположения, начальные приближения для коэффициентов α_i вычислялись следующим образом:

$$\alpha_i^{(0)} = \frac{M_{i+1}(t+1) - M_i(t)}{M_i(t)}$$

Затем с применением алгоритма (А), описанного выше, на основании статистических данных о количестве студентов в группах, были найдены окончательные оценки коэффициентов α_i и β_i для каждого года обучения по всем специальностям или направлениям подготовки студентов. Результаты этих вычислений приведены в таблице 3.11.

Специальность / направление	Курс	1	2	3	4	5
АСУ (дневное отделение)	α_i	0,055556	0,11561866	0,04737903	0,03333333	0
	β_i	0	0,01149425	0,01041667	0	0
АСУ (вечернее отделение)	α_i	0,244939	0,05718954	0,02941176	0	0
	β_i	0	0	0,01960784	0,01960784	0
ПИЭ	α_i	0,034483	0,04351852	0,05263158	0	0
	β_i	0	0	0,00877193	0	0
ПМИ	α_i	0,197198	0,06623932	0	0	
	β_i	0	0,02564103	0	0	
ИВТ	α_i	0,085714	0,15625	0,04166667	0	
	β_i	0	0,01041667	0	0	

Таблица 5.11. Коэффициенты модели динамики числа студентов для имитационной схемы некоторых специальностей или направлений подготовки студентов РГСУ.

Для последних двух направлений не указаны коэффициенты для пятого года обучения, поскольку это программы бакалавриата, предусматривающие срок обучения 4 года, что, естественно, учитывалось при расчетах.

В результате на основе построенных таким образом имитационных систем было осуществлено прогнозирование количества студентов на каждом году обучения и итоговое количество выпускников по каждой специальности или направлению подготовки студентов для разных сценариев, различавшихся количеством абитуриентов, поступивших на первый курс. Подробно результаты моделирования изложены в [192].

Таким образом, другой аспект деятельности людей, а именно – их трудовой деятельности (конечно, лишь в смысле нахождения в составе профессиональной группы) может быть описан при помощи математической модели, также относящейся к классу клеточных автоматов. Разумеется, в данном случае, поскольку этот автомат является одномерным, такая классификация модели не приносит никаких вычислительных преимуществ, а лишь подтверждает тезис о перспективности упрощенных дискретных моделей вообще и клеточных автоматов в частности для описания процессов с участием больших групп людей.

Полученные же при построении имитационных схем на основе предложенных моделей результаты представляют несомненный практический интерес. Следует выразить сожаление, что в последнее время соответствующие количественные исследования и прогностический анализ на их основе перестали осуществляться.

Также нужно отметить, что предлагаемая методика, по мнению автора, может быть достаточно легко адаптирована для описания, моделирования и прогнозирования динамики численности самых различных профессиональных групп.

ГЛАВА 6.

ДИСКРЕТНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ

Проблема моделирования транспортных перевозок, проектирования и организации функционирования транспортных сетей далеко не нова. Достаточно упомянуть, что ее исследование привело к появлению целой отдельной области знаний – логистики [193].

Однако большая часть существующих моделей транспортных систем ориентирована на решение одного и того же, пусть и крайне важного, вопроса о построении оптимального в том или ином смысле плана перевозок. В таких моделях подразумевается, что все функционирование транспортной сети управляется из одного центра. При этом либо решается просто задача оптимизации перевозок в рамках существующей неизменной сети (например, [194]), либо изменения в структуре транспортной сети, ее развитие также рассматриваются как результат принятия некоего решения центром управления транспортной сетью и реализации этого решения [195], [196].

Между тем, в условиях наличия большого количества хозяйствующих субъектов эти предположения нельзя считать верными. В этом случае и схема перевозок, и процесс развития транспортной сети складываются из одновременных независимых друг от друга действий этих субъектов. При этом действия не являются ни полностью скоординированными, ни совершенно случайными.

В данном случае не будет рассматриваться конкретная исходная непрерывная модель, которую мы заменим дискретным объектом, хотя многие перечисленные выше модели основаны на дифференциальных уравнениях или, как минимум, на непрерывном описании реальности. Здесь основной акцент сделаем на соответствии макродинамики дискретной модели некоторым общим результатам, полученным ранее при помощи непрерывных моделей. Для этого новая модель должна отражать следующие аспекты деятельности групп людей, участвующих в организации транспортных потоков:

1. Наличие у группы некоего количества благ (товаров).
2. Потребность такой группы получить некое количество других благ (товаров).
3. Существование у каждой такой группы возможности поддерживать и улучшать инфраструктуру транспортной сети, каковая возможность прямо зависит от размера группы.
4. Прямое влияние успешности удовлетворения потребности из пункта 2 на размер группы.

При этом в качестве такой группы и, соответственно, узла транспортной сети, должен рассматриваться не только населенный пункт, к которому привязан соответствующий транспортный узел, но и окружающая его территория с населением и экономическими

ресурсами.

Предлагаемая модель является попыткой описать на языке математики процесс самоорганизации (возникновения и развития) транспортной сети, происходящий не на основании некоторого единого плана, а самопроизвольно складывающийся при заданных географических условиях и параметрах спроса и предложения нескольких видов товаров.

Следует указать, что идея описания деятельности людей в виде самопроизвольно развивающейся системы, также не нова. Видимо, впервые она была выдвинута Торстеном Хагерстрандом в форме описания распространения инноваций как диффузионного процесса [117] (исследования на эту тему он начал еще в 1942 году, в библиографическом списке указана его более поздняя и полная англоязычная работа). Применение такого подхода к моделированию возникновения и развития транспортных потоков стало основой непрерывной модели транспортировок Бекмана [118]. На основе этого подхода было проведено моделирование исторического развития транспортных систем, в частности – на примере Великого Шелкового Пути [119].

Однако подобные модели, при всей их оригинальности, имеют вполне понятный недостаток. Очевидно, что транспортная система, во-первых, функционирует не на непрерывной плоскости, а все-таки на некотором графе или, возможно, какой-либо другой структуре сетевого характера. Во-вторых, величины, характеризующие перевозку грузов, носят ярко выраженный дискретный характер. Взять хотя бы железную дорогу – число путей на перегоне не меняется непрерывно. Существуют лишь отдельные, выражаемые натуральными числами, возможные значения этого показателя, являющегося ключевым для определения пропускной способности на данном участке транспортной сети.

6.1. Первоначальная динамическая модель транспортной сети

Итак, построим математическую модель транспортной сети, отвечающую следующим условиям.

1. Критерием для выбора значений переменных (объемов перевозок) является наилучшее соответствие спроса и предложения перевозимых товаров, а не минимальность суммарных затрат или иное требование глобальной оптимальности данной схемы перевозок.

2. Динамика развития данной части сети определяется успешностью ее функционирования, то есть объемами перевозок через эту часть сети.

3. Все основные величины, характеризующие динамику модели, должны носить дискретный характер.

Предлагаемая модель в каком-то смысле объединяет в себе черты классической транспортной сети на графе и самопроизвольно развивающейся динамической системы Хагерстранда, но не непрерывной, а существенно дискретной.

Основной идеей модели является введение для каждого вида товаров величины, названной потенциалом. Потенциал численно характеризует потребность в данном товаре, существующую в данном узле транспортной сети. Именно разность потенциалов между узлами и создает в модели потоки товаров. Поэтому данный подход можно назвать «электромагнитной» моделью по аналогии с «гравитационными» моделями, уже достаточно давно использовавшимися в моделировании различных социально-экономических процессов, а в последнее время применявшимися и для моделирования транспортных сетей [124].

Другим основанием для такой аналогии служит то, что темпы развития узла в модели полагаются пропорциональными квадрату потока товаров, перевозимых через данный узел. Это вызывает ассоциации с законом Джоуля-Ленца, описывающим количество тепла, выделяемого при прохождении электрического тока через проводник. Разумеется, данная аналогия, как и любая другая, является весьма условной, поскольку в данной модели рассматривается «протекание» не через «проводник», а через узел. Итак, рассмотрим «электромагнитную» модель транспортной сети.

Модель представляет собой полный граф, каждой вершине и каждому ребру которого приписан определенный набор параметров и переменных. Вершины моделируют населенные пункты и характеризуются следующими величинами

1. Размер узла V_i .
2. Выпуск продукции вида k P_{ik} (отрицательное значение означает спрос на продукцию).
3. Потенциал продукции каждого вида φ_{ik}

Ребрам графа, изображающим транспортные коммуникации, связывающие населенные пункты, поставлены в соответствие следующие величины:

1. Длина $L_{ij} > 0$
2. Коэффициент затрат на расширение Q_{ij}
3. Пропускная способность $W_{ij} \geq 0$
4. Поток продукции вида k S_{ijk} .

Кроме этого, модель характеризуется глобальными параметрами «коэффициент проторенного пути» $N > 1$ и «коэффициент роста узлов» $G > 0$. Первый из них показывает, во сколько раз затраты на прокладывание новой дороги с некоторой пропускной способностью превышают затраты на расширение существующей дороги на ту же величину.

Динамика модели реализована с использованием дискретного времени, шаг которого можно условно положить эквивалентным году реального времени – традиционному для экономики отчетному и плановому периоду. В связи с этим возникла известная методологическая проблема, свойственная, например, традиционным разностным схемам – дискретный характер пространства и времени противоречил бы континуальным свойствам

переменных. Поэтому уместно было положить, что все величины (кроме коэффициентов Q_{ij} , N , G , не являющихся переменными модели) также могут принимать только целые значения.

Таким образом, модель представляет собой самоорганизующуюся систему с обратной связью (структура сети определяет схему перевозок, а схема перевозок влияет на изменение структуры сети).

Начальное состояние модели задается набором значений V_i , P_{ik} , L_{ij} , Q_{ij} , W_{ij} и глобальных параметров. Пошаговое изменение состояния модели осуществляется в два этапа, которые носят принципиально различный характер. Первый этап состоит в установлении схемы перевозок товаров при существующих значениях спроса, предложения и возможностях транспортировки. Следует отметить, что в рамках модели эта схема складывается не путем выбора оптимального (в каком-либо смысле) способа перевозок, а через самопроизвольное установление маршрутов перевозки, каждый из которых «закрывает» некоторую часть спроса на данный вид товара.

На каждом шаге методом последовательных приближений устанавливаются значения φ_{ik} и S_{ijk} , исходя из условий:

$$\forall k \forall i: |\varphi_{ik} - (\sum_j S_{ijk} + P_{ik})| \mapsto \min \quad (6.1)$$

$$\forall i \forall j: \sum_k |S_{ijk}| \leq W_{ij} \quad (6.2)$$

Следует отметить, что в модели не требуется равномерного выполнения условий (6.1), минимизация осуществляется по каждому продукту, в порядке заданной «значимости» продуктов.

Установление маршрутов перевозки товаров происходит спонтанно, приоритет отдается маршрутам между вершинами с наибольшей разностью потенциалов для данного вида товаров. Если для данного ребра при достижении условия (1) итерационный процесс останавливается из-за нарушения условия (2), будем говорить, что имеет место перегрузка ребра.

После этого осуществляется изменение параметров вершин и ребер. Размер вершин является также динамической величиной и меняется в зависимости от уровня потока товаров через данную вершину.

$$\forall i: V_i' = [V_i(1 + G \sum_{j,k} S_{ijk}^2)] \quad (6.3)$$

Можно также рассмотреть следующую версию модели.

Номер вида продукции k по-прежнему играет роль индикатора значимости продукции. На каждом шаге алгоритма для каждого значения k , меняющегося от 1 (номер наиболее значимой продукции) до максимального (номер наименее значимой продукции), в каждой вершине рассматривается задача оптимизации:

$$|\varphi_{ik}| \mapsto \min \quad (6.4)$$

при ограничениях (6.2)

где значения потенциалов заданы выражением

$$\varphi_{ik} = \sum_j S_{ijk} + P_{ik} \quad (6.5)$$

К задаче (6.4), (6.2) применяем следующий метод. Поскольку $S_{ijk} \in Z$, то для каждого значения k значение S_{ij} увеличиваем на 1, если $\varphi_{ik} > \varphi_{jk}$ или уменьшаем на 1 в обратном случае, и не меняем при равенстве потенциалов. При переборе ребер приоритет отдается ребрам с наибольшей разностью потенциалов между вершинами. Если для данного ребра итерационный процесс останавливается из-за нарушения условия (6.2), будем говорить, что имеет место перегрузка ребра и приписываем ребру соответствующий атрибут.

Следует отметить, что такой алгоритм, применяемый для каждого вида товаров, нельзя строго назвать решением задачи (6.4), (6.2). Он как раз и моделирует спонтанное установление торговых маршрутов между вершинами транспортной сети. В дальнейшем моделировании использовался именно этот алгоритм.

Также следует указать, что изменение размера вершин может быть при этом задано отображением более общего вида, чем (6.3)

$$\forall i: V'_i = \left[V_i (1 + G \sum_{j,k} F(S_{ijk})) \right], \quad (6.6)$$

где $F(x)$ – некоторая функция, характеризующая зависимость изменения размера вершины от уровня потока товаров. Естественным требованием к такой функции является то, что она должна быть возрастающей. В модельных расчетах было положено $F(x) = x^2$, что можно трактовать как аналогию с физическим законом Джоуля-Ленца и что соответствует (6.3) в первоначальной версии модели.

При изменении размера вершины выпуски продукции всех видов в этой вершины изменяются пропорционально.

Вернемся к описанию модели.

Для всех ребер, на которых возникла перегрузка, проверяется возможность увеличения их пропускной способности. При выполнении условия

$$\frac{V_i + V_j}{2L_{ij}Q_{ij}} \geq 1 \quad (6.7)$$

осуществляется увеличение пропускной способности ребра

$$W'_{ij} = W_{ij} + \left[\frac{V_i + V_j}{2L_{ij}Q_{ij}} \right] \quad (6.8)$$

В случае, если изначально пропускная способность ребра равна 0 (дорога отсутствует), приведенные формулы модифицируются следующим образом:

$$\frac{V_i + V_j}{2L_{ij}Q_{ij}N} \geq 1 \quad (6.9)$$

$$W'_{ij} = W_{ij} + \left[\frac{V_i + V_j}{2L_{ij}Q_{ij}N} \right] \quad (6.10)$$

Таким образом, на каждом шаге устанавливает некоторое распределение потоков товаров, не являющееся ни равновесным, ни оптимальным в классическом смысле этих терминов, а стихийно складывающееся на основе структуры спроса и предложения данного вида продукции в узлах сети.

6.2. Тестовые расчеты при помощи имитационных систем на основе первоначальной модели

В качестве одного из критериев проверки адекватности модели были создано оригинальное программное обеспечение², при помощи которого были построены имитационные системы и проведены пробные расчеты для конфигураций, в которых результат эволюции транспортной сети является в какой-то степени ожидаемым. Наиболее характерными можно назвать два случая роста городов, оказавшихся в благоприятном географическом положении: города, находящегося на пересечении торговых путей и городов, ставших удобными транзитными пунктами в случае, если магистральный торговый путь был перекрыт по внеэкономическим причинам.

Исходя из общепринятых представлений о роли торговли в развитии городов, а также из исторических аналогий, можно ожидать, что в первом случае город, изначально не обладающий экономическим потенциалом, но находящийся на пересечении торговых путей, будет за счет этого ускоренно развиваться. Во втором случае следует ожидать, что отсутствие прямого торгового пути негативно скажется на развитии связываемых им городов, но от этого выиграют новые «перевалочные пункты».

В целом при использовании рассматриваемой модели эти эвристические предположение в основном нашли свое подтверждение.

В первой ситуации рассматривались четыре города (условно для географического соответствия выбраны названия Тверь, Иваново, Тула и Рязань), с начальным размером 100, производящие и потребляющие 4 вида товаров (каждый из городов производит один вид товара и потребляет три остальные), а также один город меньшего размера (20), не производящий продукции, но удачно расположенный на пересечении потенциальных торговых путей (Москва). В начальный момент дорог между городами нет.

Начальная конфигурация показана на рис. 6.1.

Затем на протяжении 45 шагов (лет) происходит развитие транспортной сети. Поначалу новые дороги связывают только города-производители, которые растут за счет торговли. В приведенной на рис. 6.2 конфигурации размер каждого из четырех городов составляет около

2 Автор благодарит Волкова Д.. Н. за помощь в создании имитационных систем, выраженную в написании кодов расчетных программ и интерфейса.

150, рост Москвы не наблюдается.

Однако еще через 55 шагов ситуация резко меняется (рис. 6.3). Перевозчики товара «заметили» удобный перевалочный пункт. Строятся дороги, связывающие четыре города с Москвой, через которую направляется значительная часть потоков товаров и которая переживает бурный рост. В представленный момент размер Москвы достигает 250, в то время как размеры остальных городов едва превышают 200.



Рис. 6.1. Начальная конфигурация. Дороги еще не проложены.

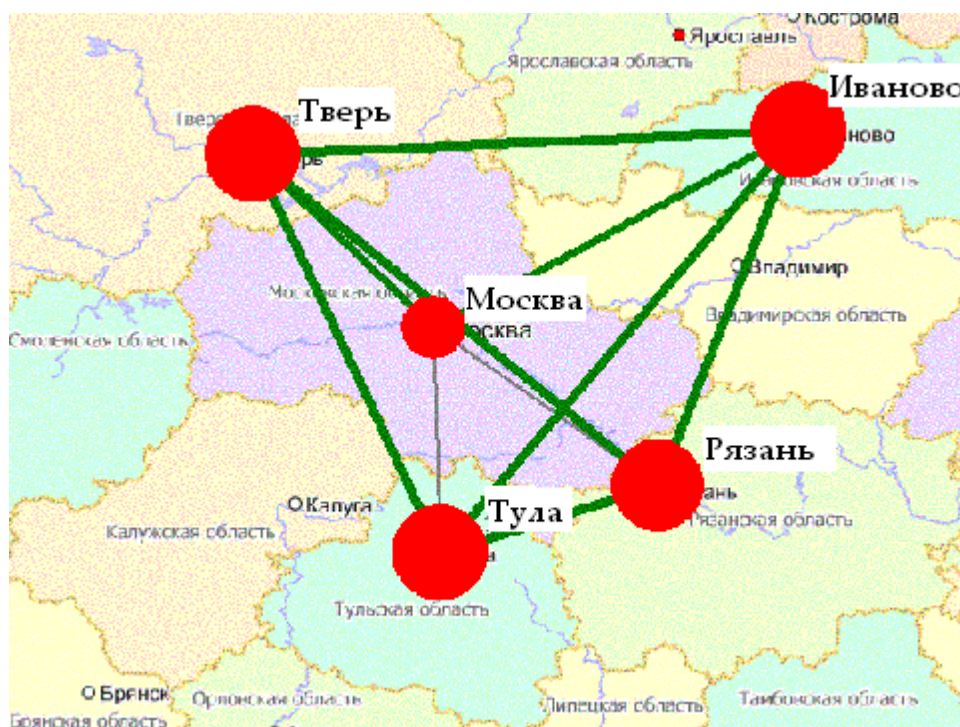


Рис. 6.2. Четыре города активно торгуют между собой, начинается строительство дорог в направлении «неперспективной» Москвы.

Здесь следует отметить, что в модели формально заложен лишь рост городов, а при ее соотнесении с реальностью следует рассматривать относительные размеры узлов. Таким образом, можно даже говорить о некотором упадке (и уж точно - о снижении темпов роста) городов, изначально бывших центрами производства, по сравнению с городом, оказавшимся на пересечении торговых путей.

Следует еще раз указать, что исходные данные рассмотренной имитационной схемы являются вымышленными, а реальные географические названия использованы лишь для условной аналогии, в связи с чем результаты моделирования не претендуют на историческую точность.

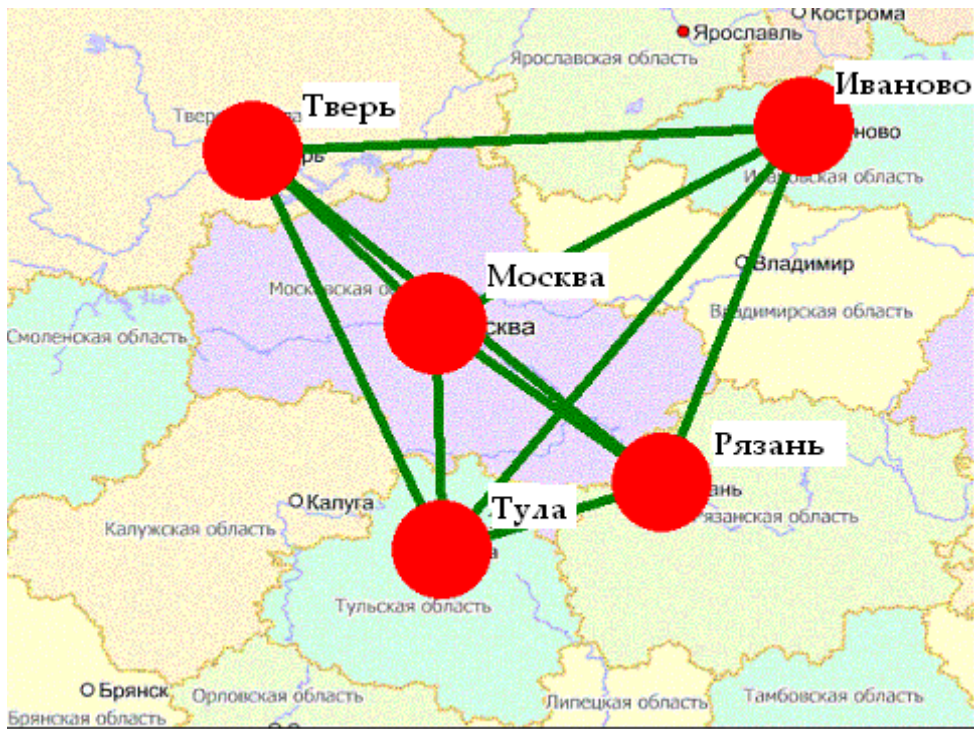


Рис. 6.3. Основные потоки товаров направляются через Москву, которая опережает остальные города в росте.

В качестве второго пробного сценария была рассмотрена конфигурация, в которой существуют два крупных города (начальный размер 100), нуждающихся в продукции друг друга (условные названия Альфа и Омега), прямое сообщение между которыми остановлено по каким-то внеэкономическим (политическим, военным и т.п.) причинам, что моделировалось простым запретом прокладки прямой коммуникации между упомянутыми узлами. Также в данной конфигурации присутствуют два небольших как по размеру (10), так и по экономическому потенциалу города Эпсилон и Ипсилон, на которые не наложено ограничений по установлению транспортных коммуникаций. Эта конфигурация показана на рис. 6.4.

В этом сценарии при сохранении запрета на осуществление прямых транспортных перевозок между Альфой и Омегой уже через десяток шагов не только устанавливается «обходной» торговый путь через Эпсилон и Ипсилон, но и начинается их бурный рост, приводящий к тому, что бывшие «малые» города обгоняют по развитию Альфу и Омегу. Результат представлен на рис. 6.5.

Если же в рамках тех же самых начальных данных не препятствовать самопроизвольному установлению транспортных коммуникаций, то ожидаемо основной поток перевозок установится между городами Альфа и Омега (рис. 6.6). Это приведет к их быстрому росту при том, что Эпсилон и Ипсилон, также выстроив транспортные связи для собственного пользования, не догонят своих крупных соседей и будут развиваться гораздо более медленно,

чем в предыдущем варианте развития событий.

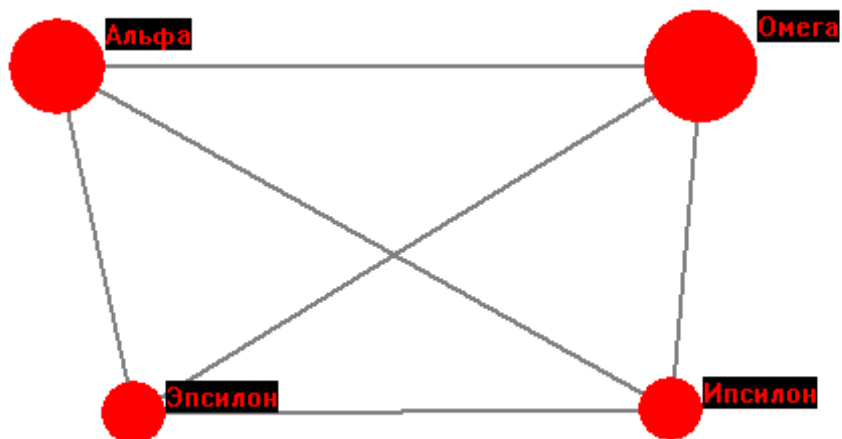


Рис. 6.4. Начальная ситуация при моделировании запрета прямого торгового сообщения. Дороги еще не проложены

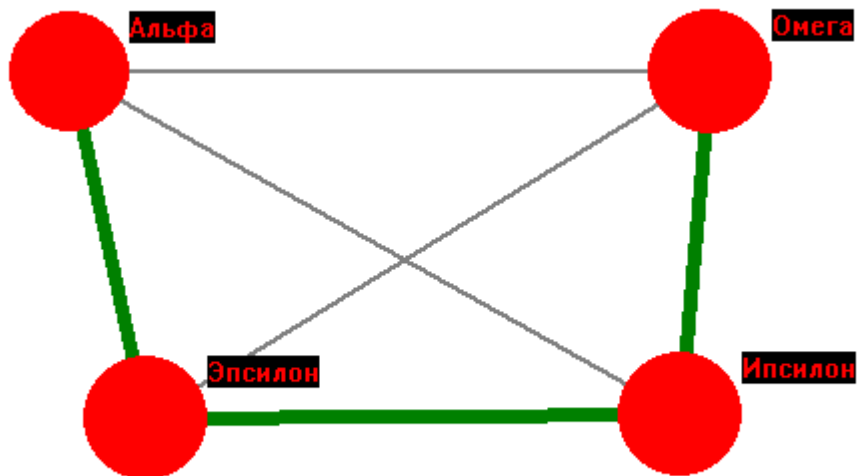


Рис. 6.5. Установлены «обходные» транспортные связи, наблюдается опережающий рост транзитных узлов.

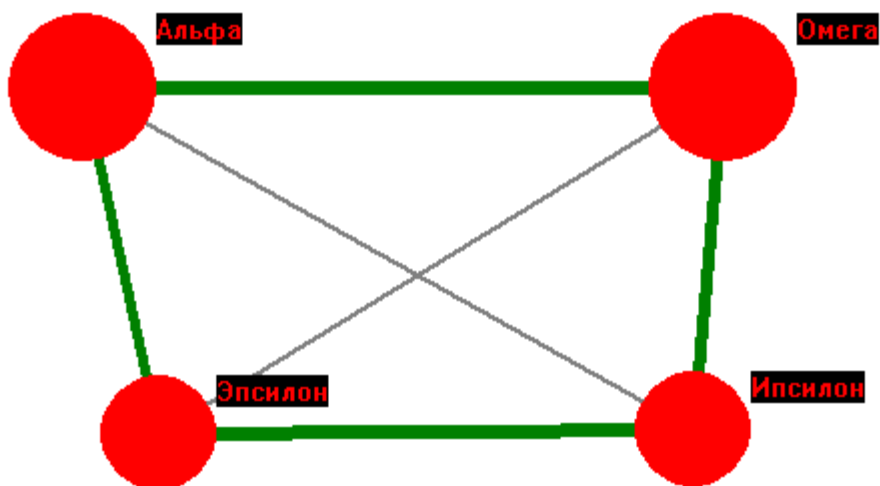


Рис. 6.6. Результат развития той же транспортной сети без запрета прямых перевозок.

Таким образом, установлено что предлагаемая модель корректно описывает динамику развития транспортных сетей по крайней мере для случае наиболее очевидных конфигураций и самых общих исторических аналогий.

Однако умозрительные примеры, приведенные выше, не имеют практической ценности. Рассмотрим теперь построение имитационных схем, моделирующих реальные транспортные сети и их развитие в определенных экономических условиях.

6.3. Построение имитационных систем и прогнозирование развития сетей железных дорог России и Украины

Особенности предлагаемой модели позволяют использовать ее для исследования взаимного влияния экономики территории и расположенной на этой территории транспортной системы, например, сети железных дорог.

Предложенный подход был применен для моделирования в железнодорожных систем России и Украины. Следует указать, что необходимые для построения соответствующих моделей первичные данные (например, объемы существующих перевозок) являются секретными или вовсе отсутствуют. В связи с этим калибровка модели в обоих случаях проводилась на основе оценок необходимых величин, исходя из доступных вторичных данных [197], [198], [199].

Такое внимание, уделенное нами именно железнодорожному транспорту, обусловлено двумя его чертами, дающими ему преимущества перед другими видами транспорта. Это пространственно-временная универсальность (возможность строительства коммуникаций в требуемом месте и функционирование в течение всего года, в отличие, например, от речного

транспорта) и относительная дешевизна перевозок по сравнению с другими универсальными видами транспорта (например, автомобильным). Эти особенности приводят к тому, что именно железные дороги одним из основных факторов, влияющих на социально-экономическое развитие и обеспечивающих сохранение целостности страны или региона.

Моделирование железнодорожной системы России.

При построении модели российской железнодорожной системы рассматривались только основные железнодорожные магистрали нашей страны, по которым осуществляется основной объем перевозок (по данным [200]).

В качестве видов продукции, используемых в модели, были выбраны следующие группы товаров:

- 1) лесоматериалы;
- 2) металлы;
- 3) нефть и нефтепродукты;
- 4) товары народного потребления.

Выпуски продукции P_{ij} для каждого из этих видов продукции в каждом узле были оценены, исходя из открытых данных об объемах производства и потребления продукции в соответствующих регионах, а также о ее импорте и экспорте. На основании данных [197] составим таблицу, содержащую выпуски (или объемы потребления) этих групп товаров, выраженные в некоторых условных единицах.

Узел	1	2	3	4
Москва	-200	5435	-2750	-3622
Петербург	140	3521	3000	-4300
Брянск	-170	-6700	-971	-500
Новосибирск	407	90	2900	-1513
Тайшет	932	-2314	113	545
Белгород	-70	-529	-1065	383
Владивосток	31	102	750	-1124
Самара	-220	-1865	1686	-1000
Екатеринбург	-270	1312	-706	1478
Нижний Новгород	-70	1036	-336	1042
Ростов-на-Дону	-134	-2370	-544	1620
Калининград	-240	-3502	1516	-748
Киев	-150	612	-924	2214
Минск	-30	1420	-950	3836

Рига	-10	312	-304	-1312
Астана	-5	-100	602	-1013
Харбин	9	3540	-2017	4780

Таблица 6.1. Выпуски/объемы потребления основных групп перевозимых РЖД товаров.

В качестве вершин графа в модели были выбраны основные железнодорожные узлы России, а также 5 городов сопредельных стран, с которыми осуществляется наибольший объем трансграничных перевозок. Размеры узлов были заданы пропорционально населению перечисленных городов. При всей спорности такого способа задания размеров узлов, именно он был признан наиболее адекватным.

Узел	Размер
Москва	203
Петербург	89
Брянск	8
Новосибирск	27
Тайшет	1
Белгород	7
Владивосток	12
Самара	22
Екатеринбург	26
Нижний Новгород	25
Ростов-на-Дону	20
Калининград	8
Киев	54
Минск	35
Рига	14
Астана	12
Харбин	63

Таблица 6.2. Размеры узлов в имитационной системе, моделирующей РЖД.

Наконец, на основании открытых данных РЖД [200] был построен взвешенный граф коммуникаций данной транспортной сети (таблица 6.3).

	Москва	Петербург	Брянск	Новосибирск	Тайшет	Белгород
Москва	0	654	387	-	-	697
Петербург	654	0	-	-	-	-
Брянск	387	-	0	-	-	455
Новосибирск	-	-	-	0	1180	-
Тайшет	-	-	-	1180	0	-
Белгород	697	-	455	-	-	0
Владивосток	-	-	-	-	4776	-
Самара	1044	-	-	2429	-	-
Екатеринбург	-	2090	-	1525	-	-
Нижний Новгород	461	-	-	-	-	-
Ростов-на-Дону	1346	-	-	-	-	-
Калининград	1285	1327	-	-	-	-
Киев	-	-	485	-	-	-
Минск	705	864	579	-	-	-
Рига	922	678	-	-	-	-
Астана	-	-	-	1147	-	-
Харбин	-	-	-	-	-	-

Таблица 6.3. Взвешенный граф коммуникаций в имитационной системе, моделирующей РЖД.

	Владивосток	Самара	Екатеринбург	Нижний Новгород	Ростов-на-Дону	Калининград
Москва	-	1044	-	461	1346	1285
Петербург	-	-	2090	-	-	1327
Брянск	-	-	-	-	-	-
Новосибирск	-	2429	1525	-	-	-
Тайшет	4776	-	-	-	-	-

Белгород	-	-	-	-	-	-
Владивосток	0	-	-	-	-	-
Самара	-	0	1265	-	1517	-
Екатеринбург	-	1265	0	1317	-	-
Нижний Новгород	-	-	1317	0	-	-
Ростов-на-Дону	-	1517	-	-	0	-
Калининград	-	-	-	-	-	0
Киев	-	-	-	-	-	-
Минск	-	-	-	-	-	535
Рига	-	-	-	-	-	-
Астана	-	2061	-	-	-	-
Харбин	380	-	-	-	-	-

Таблица 6.3. Взвешенный граф коммуникаций в имитационной системе, моделирующей РЖД
(продолжение).

	Киев	Минск	Рига	Астана	Харбин
Москва	--	705	922	--	--
Петербург	--	864	678	--	--
Брянск	485	579	--	--	--
Новосибирск	--	--	--	1147	--
Тайшет	--	--	--	--	--
Белгород	--	--	--	--	--
Владивосток	--	--	--	--	380
Самара	--	--	--	2061	--
Екатеринбург	--	--	--	--	--
Нижний Новгород	--	--	--	--	--
Ростов-на-Дону	--	--	--	--	--
Калининград	--	535	--	--	--
Киев	0	--	--	--	--
Минск	--	0	--	--	--
Рига	--	--	0	--	--

Астана	--	--	--	0	--
Харбин	--	--	--	--	0

Таблица 6.3. Взвешенный граф коммуникаций в имитационной системе, моделирующей РЖД (окончание).

Скриншот графического интерфейса вычислительной программы приведен на рис. 6.7.

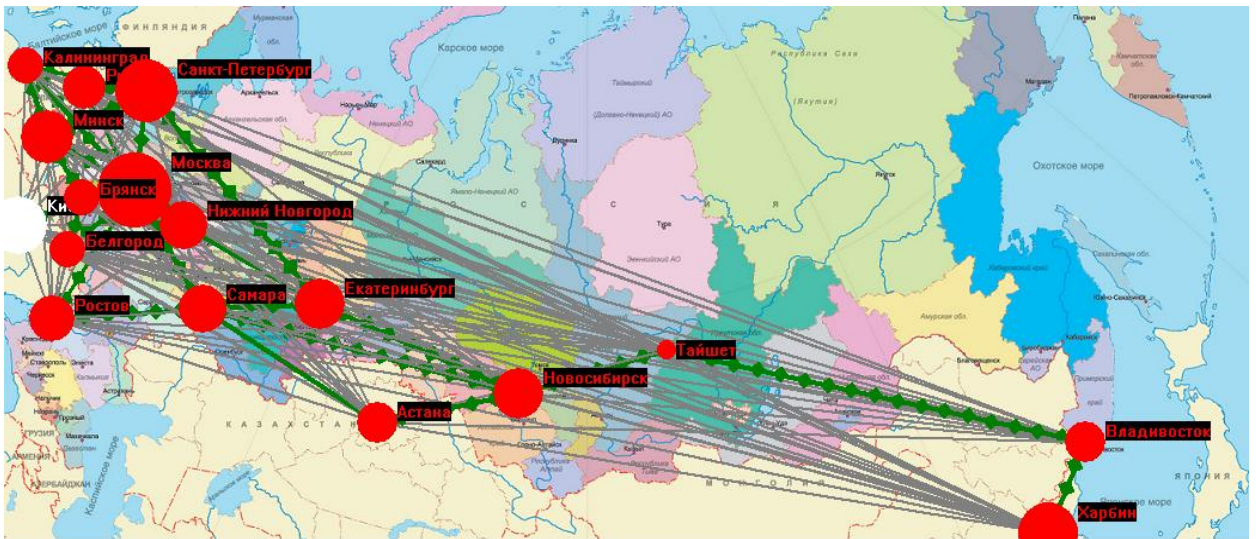


Рис. 6.7. Граф модели на фоне карты России. Начальное состояние. Жирные линии – действующие коммуникации, маркеры на линиях – символ перегрузки.

Данная имитационная система была использована для «проигрывания» ряда сценариев развития железнодорожной системы России.

1. Развитие, исходя из существующей на данный момент ситуации.

Прогнозирование осуществлялось на срок до 50 лет. Полученные в итоге размеры узлов приведены в следующей таблице.

Узел	Размер
Москва	680
Петербург	323
Брянск	204
Новосибирск	312
Тайшет	17
Белгород	232
Владивосток	112

Самара	318
Екатеринбург	263
Нижний Новгород	309
Ростов-на-Дону	194
Калининград	117
Киев	454
Минск	399
Рига	121
Астана	214
Харбин	215

Таблица 6.4. Размеры узлов в имитационной системе, моделирующей РЖД, через 50 шагов первого сценария.

Результаты расчета данного сценария, основанного на исходной модели без каких-либо внесенных в нее изменений, использовались в дальнейшем для сравнения, в качестве базового, то есть «контрольного образца».

Тем не менее, следует отметить, что в данном сценарии наблюдается постепенное сокращение перегрузки железных дорог, с окончательным решением этой проблемы к концу срока. Наибольшее позитивное влияние транспортная сеть оказывает на развитие Москвы, дальневосточного региона и западных приграничных территорий.

2. Отсутствие железнодорожного сообщения с Дальним Востоком.

Сценарий реализуется удалением из системы узла Тайшет.

Несмотря на прекращение сообщения по весьма загруженной магистрали и первоначальных проблем с функционированием системы, уже через 10 лет развитие узлов сети выходит на уровень, полученный в сценарии 1. В таблице приведены результаты моделирования через 50 лет.

Узел	Размер
Москва	672
Петербург	333
Брянск	194
Новосибирск	329
Белгород	218

Владивосток	103
Самара	317
Екатеринбург	293
Нижний Новгород	320
Ростов-на-Дону	191
Калининград	115
Киев	443
Минск	389
Рига	125
Астана	209
Харбин	208

Таблица 6.5. Размеры узлов в имитационной системе, моделирующей РЖД, через 50 шагов второго сценария.

Принципиальное отличие полученных результатов от базового сценария состоит лишь в том, что снабжение товарами узла Владивосток осуществляется исключительно через узел Харбин. Однако это не оказывает заметного влияния на развитие системы. Таким образом, можно сделать вывод, что железнодорожное сообщение с Дальним Востоком является не столько крайней экономической необходимостью, сколько средством сохранения целостности России в этом регионе.

3. Прекращение железнодорожных перевозок на Украину и в Белоруссию.

Сценарий реализуется удалением из системы узлов Минск и Киев. Расчет ведется в течение 50 лет.

Узел	Размер
Москва	557
Петербург	312
Брянск	147
Новосибирск	314
Тайшет	19
Белгород	141
Владивосток	112
Самара	256

Екатеринбург	245
Нижний Новгород	267
Ростов-на-Дону	124
Калининград	131
Рига	142
Астана	211
Харбин	220

Таблица 6.6. Размеры узлов в имитационной системе, моделирующей РЖД, через 50 шагов третьего сценария.

В описанной ситуации экономическое развитие значительной части узлов, особенно на европейской территории России замедляется по сравнению со сценарием 1. Сохранение нормального железнодорожного сообщения с указанными странами важно, особенно с учетом анализа аналогичной модели, касающейся Украины.

4. Прекращение железнодорожного сообщения с Калининградом.

Сценарий реализуется удалением из системы узла Калининград. Расчет ведется в течение 50 лет.

Узел	Размер
Москва	480
Петербург	407
Брянск	189
Новосибирск	301
Тайшет	15
Белгород	219
Владивосток	112
Самара	303
Екатеринбург	259
Нижний Новгород	297
Ростов-на-Дону	193
Киев	531
Минск	467

Рига	149
Астана	211
Харбин	223

Таблица 6.7. Размеры узлов в имитационной системе, моделирующей РЖД, через 50 шагов четвертого сценария.

Прекращение железнодорожного сообщения с Калининградом приводит к замедлению развития практически всех узлов, в первую очередь Москвы. С другой стороны, узлы, соответствующие альтернативным маршрутам перевозок в Европу (Киев, Минск, Петербург), наоборот, начнут развиваться быстрее.

Моделирование железнодорожной сети Украины.

В качестве видов продукции, используемых в модели, были выбраны следующие группы товаров:

- 1) металл;
- 2) уголь;
- 3) сельскохозяйственная продукция.

Однако анализ данных показал, что, несмотря на значимость сельскохозяйственной продукции в транспортном обороте Украины, доля перевозок ее по железной дороге невелика. Поэтому было принято решение без ущерба для модели не вводить этот вид продукции в имитационную систему.

Выпуски продукции P_{ij} для каждого из двух оставшихся видов продукции в каждом узле оценим на основании открытых данных об объемах производства и потребления продукции в соответствующих регионах, а также о ее импорте и экспорте. На основании данных [198] были рассчитаны выпуски и объемы потребления этих групп товаров, выраженные в некоторых условных единицах.

Узел	1	2
Ковель	-11	4
Львов	-11	4
Коростень	-4	-1
Жмеринка	-4	-1
Киев	-56	-20
Бахмач	-4	-2

Одесса	-31	-10
Николаев	-16	-5
Полтава	22	-4
Харьков	-32	-2
Лозовая	-4	-1
Днепропетровск	42	2
Запорожье	62	4
Донецк	25	18
Луганск	-2	11

Таблица 6.8. Выпуски/объемы потребления основных групп перевозимых украинской железной дорогой товаров.

В качестве вершин графа в модели были выбраны основные железнодорожные узлы Украины (по данным [201]). Оцененные по этим же данным размеры узлов приведены в таблице 6.9.

Узел	Размер
Ковель	4
Львов	4
Коростень	4
Жмеринка	2
Киев	147
Бахмач	1
Одесса	54
Николаев	27
Полтава	17
Харьков	76
Лозовая	3
Днепропетровск	53
Запорожье	41
Донецк	53
Луганск	25

Таблица 6.9. Размеры узлов в имитационной системе, построенной для украинской железной дороги.

Размеры узлов и выпуски продукции каждого вида для каждого узла были оценены тем же способом, что в случае России.

Наконец, на основании открытых данных ДАЗТ Украины [201] был построен взвешенный граф коммуникаций данной транспортной сети (таблица 4.10).

	Бахмач	Днепропетровск	Донецк	Жмеринка	Запорожье	Киев	Ковель	Коростень	Лозовая	Луганск	Львов	Николаев	Одесса	Полтава	Харьков
Бахмач	0	-	-	-	-	244	-	-	-	-	-	615	728	322	378
Днепропетровск	-	0	252	-	81	-	-	-	136	380	-	326	-	196	216
Донецк	-	-	0	-	217	-	-	-	75	148	-	-	-	391	-
Жмеринка	-	-	-	0	-	309	474	260	-	-	405	-	471	-	-
Запорожье	-	-	-	-	0	607	-	-	163	-	-	360	-	-	278
Киев	-	-	-	-	-	0	461	505	550	-	-	488	-	317	-
Ковель	-	-	-	-	-	-	0	286	-	-	215	-	-	-	-
Коростень	-	-	-	-	-	-	-	0	725	-	-	-	-	492	-
Лозовая	-	-	-	-	-	-	-	-	0	294	-	-	-	234	136
Луганск	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	418	329
Львов	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-
Николаев	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	120	420	-
Одесса	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-
Полтава	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	141
Харьков	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0

Таблица 6.10. Взвешенный граф коммуникаций в имитационной системе, моделирующей украинскую железную дорогу.

Скриншот графического интерфейса вычислительной программы приведен на рис. 6.8.

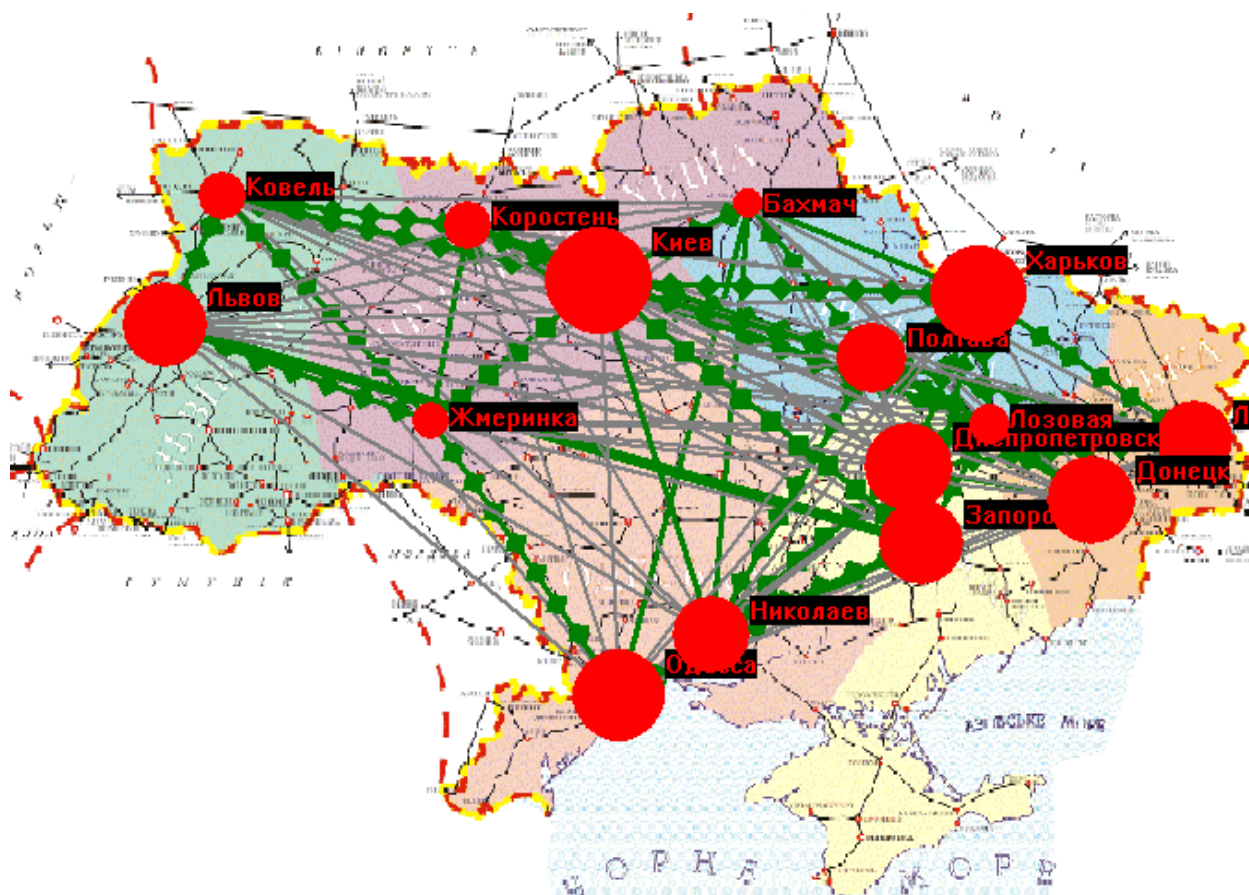


Рис.6.8. Граф модели на фоне карты Украины. Начальное состояние. Жирные линии – действующие коммуникации, маркеры на линиях – символ перегрузки.

Как и в предыдущем случае, вначале были рассмотрены сценарий развития сети железных дорог, исходя из существующей на данный момент ситуации, затем сценарий прекращения железнодорожного сообщения с европейскими странами и, наконец, сценарий прекращения железнодорожного сообщения с Россией.

При моделировании развития железнодорожной системы Украины ограничения вводились путем изменения значений выпусков продукции в узлах, являющихся перевалочными пунктами при железнодорожном сообщении соответственно с Россией и Европой. То есть, значения выпусков в таких узлах приводились к значениям, определяемым только внутренним спросом на данную продукцию, без учета экспорта или импорта (которые учитывались в исходной модели).

Во всех трех случаях страна справляется с перегрузками железных дорог через 40-50 лет, считая от настоящего времени. В таблице приведены результаты расчета базового сценария после 50 лет.

Узел	Размер
------	--------

Ковель	25
Львов	47
Коростень	11
Жмеринка	25
Киев	200
Бахмач	33
Одесса	128
Николаев	29
Полтава	33
Харьков	203
Лозовая	54
Днепропетровск	53
Запорожье	52
Донецк	103
Луганск	37

Таблица 6.11. Размеры узлов в имитационной системе, моделирующей украинские железные дороги, через 50 шагов первого сценария.

В обоих случаях, когда перевозки были ограничены, существенного влияния на динамику развития системы такие ограничения не оказали. Единственным заметным отличием является более быстрое развитие Одессы в рамках сценарии с ограничением перевозок в Европу. Тогда этот порт становится наиболее очевидным альтернативным маршрутом перевозки и развивается быстрее.

Узел	Размер
Ковель	23
Львов	45
Коростень	12
Жмеринка	28
Киев	195
Бахмач	32
Одесса	162
Николаев	40

Полтава	31
Харьков	199
Лозовая	52
Днепропетровск	55
Запорожье	51
Донецк	95
Луганск	39

Таблица 6.12. Размеры узлов в имитационной системе, моделирующей украинские железные дороги, через 50 шагов третьего сценария.

Во всем остальном наличие или отсутствие грузовых железнодорожных перевозок между Украиной и ее соседями не оказывает заметного влияния на экономическое развитие страны.

Следует упомянуть, что во всех рассматриваемых моделях речь шла только о грузовых перевозках, пассажирские не рассматривались.

Подводя итог, отметим, что, используя предложенную модель, мы получили приведенные выше интересные результаты, носящие, однако, исключительно качественный характер. Исследовать же количественные характеристики различных транспортных сетей представляется возможным только с использованием для калибровки моделей точных (а не оценочных) исходных данных.

6.4. Модификация модели транспортной сети с целью повышения ее адекватности

В ходе описанных выше исследований были обнаружены некоторые недостатки исходной модели. По результатам анализа этих недостатков удалось сформулировать несколько модификаций модели, имеющих своей целью устранение упомянутых недостатков.

Рассмотрим подробнее эти выявленные недостатки и соответствующие изменения.

Отказ от полноты графа

Исходная модель базируется на полном графе. Отсутствие коммуникации между двумя узлами транспортной сети задается нулевой пропускной способностью соответствующего ребра. При этом в процессе развития системы такая коммуникация может быть создана.

Это положение оказывается несоответствующим моделируемой реальности в двух случаях.

Во-первых, коммуникацию может быть невозможно создать из-за существующих

природных условий. Следует, правда, отметить, что это несоответствие можно устранить в рамках старой модели, задав очень высокий коэффициент затрат на строительство данной коммуникации.

Во-вторых, в случае, когда узел В расположен практически точно на линии, соединяющей узлы А и С, и при этом существуют коммуникации АВ и ВС, не имеет смысла рассматривать возможность создания новой коммуникации АС.

Таким образом, в качестве одной из модификаций модели уместно отказаться от полного графа в качестве ее базы. Эта модификация, однако, предусматривает некоторый произвол при построении имитационной схемы, поскольку при этом возникает необходимость принимать решение о наличии или отсутствии конкретного ребра графа модели, не имея для этого строгих оснований.

Модификация алгоритма формирования схемы перевозок

В исходной модели на каждом временном шаге для каждого вида товаров k и для каждой вершины i рассматривалась задача (6.1), (6.2) (или (6.4), (6.2), см. выше)

$$\left| \varphi_{ik} - \left(\sum_j S_{ijk} + P_{ik} \right) \right| \mapsto \min$$

при ограничениях

$$\sum_k |S_{ijk}| \leq W_{ij}$$

Эти задачи решались последовательно для каждого вида товаров. Таким образом, виды товаров в исходной модели были упорядочены «по значимости», то есть, прежде всего, минимизировалась нехватка товара с номером $k=1$, затем $k=2$, и так далее. Такой подход в большинстве случаев не адекватен моделируемой реальности.

Поскольку в рассматриваемой задаче предполагается стихийно складывающаяся схема перевозок, более адекватным представляется реализация в рамках модели следующего алгоритма:

1. $\forall k \forall i \quad \varphi_{ik} = P_{ik}$

2. $i_M j_M k_M : \left| \varphi_{i_M k_M} - \varphi_{j_M k_M} \right| = \max \left| \varphi_{ik} - \varphi_{jk} \right|$

Здесь максимум берется по всем существующим неотмеченным ребрам графа. Если максимум достигается на нескольких ребрах и видах товара, то один из вариантов выбирается случайно.

3. Предполагаем без ограничения общности, что $\varphi_{i_M k_M} > \varphi_{j_M k_M}$

$$\varphi_{j_M k_M} := \varphi_{j_M k_M} + 1$$

$$\varphi_{i_M k_M} := \varphi_{i_M k_M} - 1$$

$$S_{i_M j_M k_M} := S_{i_M j_M k_M} + 1$$

4. Если $\sum_k |S_{i_M j_M k}| = W_{i_M j_M}$

то отмечаем ребро (i_M, j_M) .

5. Если существуют неотмеченные ребра и $\max_{i,j,k} |\varphi_{ik} - \varphi_{jk}| > 1$

то переходим к пункту 2, иначе конец алгоритма.

Реализация приведенного выше алгоритма действительно приводит к тому, что в имитационной системе происходит случайное образование маршрутов перевозок, которое основано на минимизации затрат на каждую конкретную перевозку, вместо оптимизации затрат в целом.

Модификация закона динамики размера узлов

Исходная модель характеризовалась обратной связью в виде увеличения размера узлов, что являлось результатом успешного (в том или ином смысле) функционирования сети. Увеличение размера узла приводило, в частности, к повышению возможности развития прилегающих коммуникаций (увеличения пропускной способности инцидентных данной вершине ребер).

Изменение размера вершин задавалось пропорциональным сумме квадратов потоков товаров через вершину (4.3)

$$V_i' = V_i \left(1 + G \sum_{j,k} S_{ijk}^2 \right),$$

или более общим способом (4.6)

$$V_i' = V_i \left(1 + G \sum_{j,k} F(S_{ijk}) \right),$$

Однако данное правило имеет своим следствием неограниченное увеличение размера узлов, средние темпы которого пропорциональны самим этим размерам. В результате этого в модели наблюдается экспоненциальный рост масштаба размеров узлов, а, следовательно, и выпуска, и спроса на товары. В связи с этим при моделировании реальной ситуации приходилось учитывать некоторый экспоненциально растущий средний уровень размера узлов, с которым и следовало сравнивать динамику отдельных узлов.

Помимо этого, возникал и вопрос о том, что динамика развития узлов связана именно с количеством перевозимых через них товаров. Более адекватным представляется

предположение о том, что темпы развития узла зависят от степени удовлетворения спроса на товары в этом узле.

Таким образом, имеет смысл задать динамику изменения размера вершин следующим образом:

$$V_i' = V_i \left(1 + F \left(\sum_{k: \varphi_k < 0} |\varphi_{ik}| \right) \right)$$

Здесь F – функция благополучия узла, численно задающая темпы его роста. Данная функция должна убывать на всей области определения и равняться нулю при некотором фиксированном значении аргумента, меньшем характерного масштаба объемов спроса в модели.

Прочие отображения, задающие динамику модели, сохраняем неизменными по сравнению с первоначальной ее версией.

6.5. Тестовые расчеты с использованием модифицированной модели

В качестве одного из критериев проверки адекватности исходной модели ранее были рассмотрены пробные расчеты для конфигураций транспортной сети, в которых результат эволюции транспортной сети является в какой-то степени ожидаемым. Представляется уместным провести аналогичные расчеты при помощи модифицированной модели и сравнить результаты.

В первом сценарии рассматривались четыре узла, условно названные Тверь, Иваново, Тула и Рязань с начальным размером 100, производящие один из четырех видов товаров и потребляющие три остальных, а также еще один узел меньшего размера (20), не производящий продукции, но удачно расположенный на пересечении потенциальных торговых путей (Москва).

В начальной конфигурации, показанной на рис. 6.9, проложенные дороги отсутствуют.

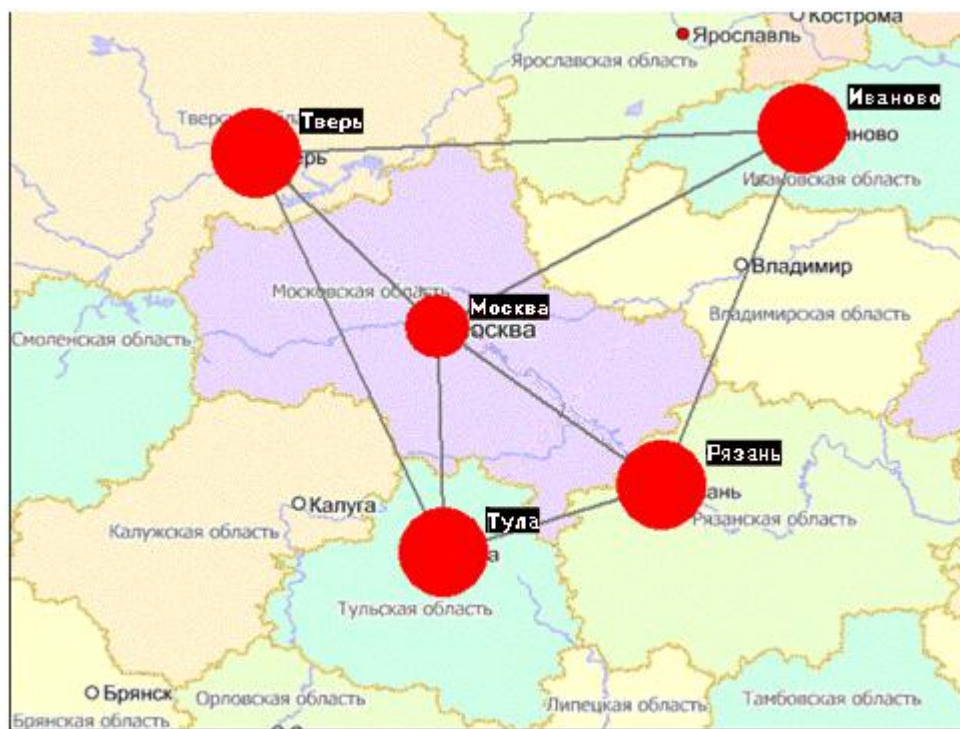


Рис. 6.9. Начальная конфигурация первого сценария.

В новой версии модели из исходного (полного) графа были удалены ребра, соответствующие коммуникациям Иваново- Тула и Рязань-Тверь. Таким образом, средствами модифицированной модели было реализовано предположение о «расположении на пересечении торговых путей». Все остальные параметры были заданы такими же, как в имитационной схеме с использованием старой модели.

Сравним теперь динамику размеров двух вершин графа: узла «Москва» и одного из четырех остальных узлов (благодаря симметрии модели их динамика в среднем одинакова), например, узла «Рязань» в течение 100 шагов с использованием двух моделей.

Номер шага	Исходная модель		Модифицированная модель	
	«Москва»	«Рязань»	«Москва»	«Рязань»
1	20	100	20	100
10	21	108	28	107
20	24	119	39	113
30	25	130	48	118
40	26	142	65	130
50	32	152	87	144
60	49	160	114	151

70	74	169	139	146
80	113	178	163	128
90	171	188	178	125
100	261	198	184	124

Таблица 6.13. Сравнительная динамика узлов «Москва» и «Рязань» в исходной и модифицированной моделях

Из таблицы 6.13 видно, что при использовании модифицированной модели имеют место некоторые особенности динамики размеров узлов по сравнению с исходной моделью: так, размер узла «Рязань» вначале растет, затем, достигнув некоторого максимума, начинает уменьшаться. Это происходит вследствие того, что с увеличением размера узла увеличивается спрос на товары, производящиеся в других узлах, в том числе в диаметрально противоположных. Повысить же объемы перевозок этих товаров через узел «Москва» невозможно до того момента, когда узел «Москва» разовьется достаточно для расширения прилегающих к нему коммуникаций. И только после достижения узлом «Москва» достаточного уровня развития, проблема со снабжением остальных узлов снимается, и их размеры стабилизируются.

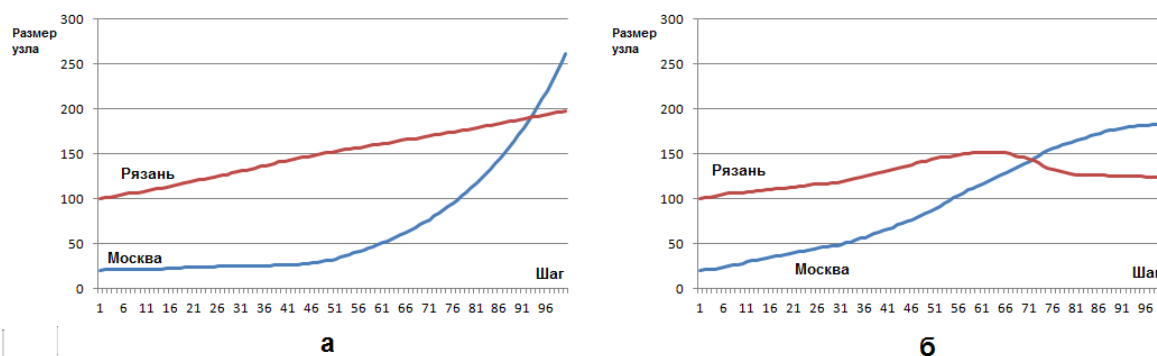


Рис. 6.10. Динамика размеров узлов «Рязань» и «Москва» в исходной (а) и модифицированной (б) моделях.

Наглядно перечисленные особенности показаны на рис. 6.10.

В качестве второго пробного сценария в ранее была рассмотрена конфигурация, в которой существуют два крупных узла (начальный размер 100), каждый из которых нуждается в продукции, производимой в другом узле. друг друга (условные названия Альфа и Омега), прямое сообщение между которыми остановлено по каким-то внеэкономическим (политическим, военным и т.п.) причинам. При использовании модифицированной модели из

графа было удалено ребро, соответствующее коммуникации «Альфа – Омега». Также в начальной конфигурации присутствовали два небольших как по размеру (10), так и по экономическому потенциалу узла Эпсилон и Ипсилон, на которые не налагалось ограничений по установлению транспортных коммуникаций. Эта конфигурация показана на рис. 6.11.

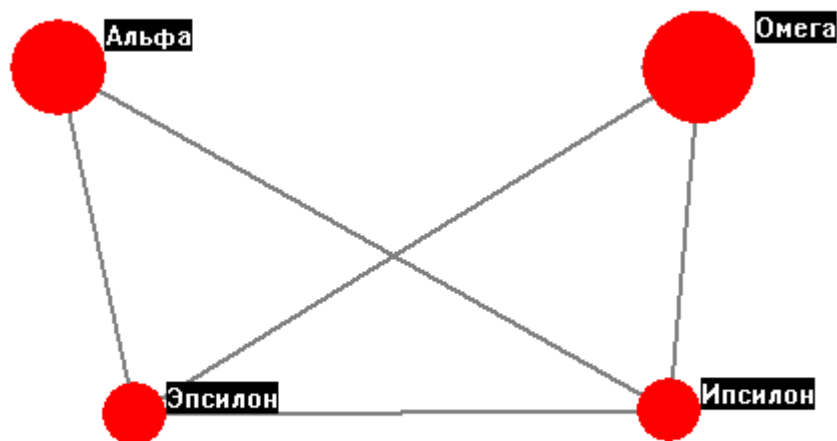


Рис. 6.11. Начальная конфигурация второго сценария.

В рамках этого сценария при сохранении запрета на осуществление прямых транспортных перевозок в старой модели между узлами «Альфа» и «Омега» уже через десяток шагов не только устанавливается обходной торговый путь через Эпсилон и Ипсилон, но и начинается их бурный рост, приводящий к тому, что бывшие «малые» города обгоняют по развитию Альфу и Омегу. Результаты моделирования приведены в таблице 6.14.

Номер шага	Исходная модель		Модифицированная модель	
	«Альфа»	«Эпсилон»	«Альфа»	«Эпсилон»
1	100	10	100	10
5	102	13	116	11
10	105	17	117	13
15	107	23	104	15
20	110	30	80	18

25	113	40	65	20
30	116	54	54	24
35	118	73	48	27
40	121	97	44	32
45	125	130	42	37
50	128	174	40	43

Таблица 6.14. Сравнительная динамика узлов «Альфа» и «Эпсилон» в исходной и модифицированной моделях

Отличие динамики при использовании модифицированной модели состоит лишь в том, что вместо относительной динамики размеров узлов «Альфа» и «Эпсилон» мы можем рассматривать их абсолютные величины: размер «Альфы» через 10 шагов начинает уменьшаться, в то время как размер «Эпсилона» стабильно растет (см. рис. 6.12). Таким образом, новая версия модели в явном виде демонстрирует проблемы развития узлов транспортной сети, появляющиеся при создании искусственных препятствий потокам товаров.

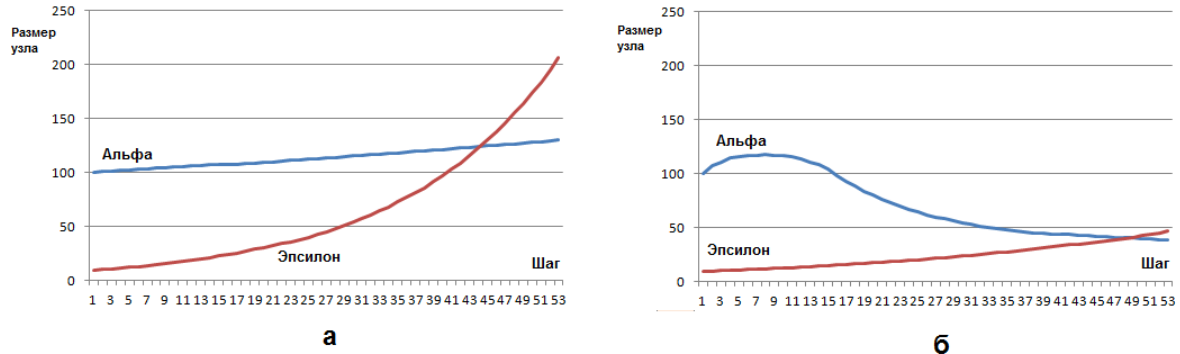


Рис. 6.12. Динамика размеров узлов «Альфа» и «Эпсилон» в исходной (а) и модифицированной (б) моделях.

Итак, по результатам сравнения моделирования в рамках пробных сценариев с использованием старой и новой версий модели можно сделать вывод о более адекватном характере модифицированного варианта модели.

6.6. Имитационные системы сетей железных дорог России и Украины на основе модифицированной модели транспортной сети

В качестве дальнейшего исследования предлагаемой модели представляется уместным повторить построение имитационных схем, моделирующих развитие реальных сетей, в

частности, провести повторные исследования динамики железнодорожных систем России и Украины, в дополнение к изложенным.

На основе исходной модели были построены имитационные схемы сетей железных дорог России и Украины. С их помощью были разыграны несколько сценариев развития этих сетей с горизонтом прогноза до 50 лет. Оказалось интересным повторить эти расчеты на основе модифицированной модели с использованием тех же исходных данных, которые применялись для калибровки и задания начальных параметров имитационных схем.

Поскольку исходные значения параметров V_i , P_{ik} , L_{ij} для модифицированной модели использовались такие же, как и для исходной модели, то не имеет смысла излагать здесь методику их вычисления заново.

Для железнодорожной сети России ранее был разыгран базовый сценарий (использовавшийся для сравнения), а также сценарии:

- прекращения железнодорожного сообщения с Дальним Востоком;
- прекращения железнодорожного сообщения с Украиной и Белоруссией;
- прекращения железнодорожных перевозок грузов из портов на Балтийском море.

Те же сценарии были рассмотрены при помощи модифицированной модели, при этом прекращение сообщения с Украиной и Белоруссией рассматривалось теперь по отдельности.

Результаты численных экспериментов с использованием новой модели позволяют сделать следующие выводы:

1) железнодорожное сообщение с Дальним Востоком является существенным фактором экономической целостности России (сохранения экономических связей Дальнего Востока с остальной страной), но не оказывает существенного влияния на экономическое развитие страны в целом;

2) железнодорожное сообщение с Белоруссией и перевозки через порты Балтийского моря важны для успешного экономического развития России.

Для железнодорожной сети Украины при помощи первоначальной модели был разыгран базовый сценарий (использовавшийся для сравнения), а также сценарии:

- прекращения железнодорожного сообщения с Россией;
- прекращения железнодорожного сообщения с Европой;

Эти же сценарии были рассмотрены при помощи модифицированной модели.

Результаты имитационного моделирования позволяют сделать следующие выводы:

1) железнодорожное сообщение с Россией не оказывает существенного влияния на экономическое развитие Украины;

2) железнодорожное сообщение с Европой является слабым положительным фактором экономического развития Украины, однако может быть замещено грузовыми морскими

перевозками через Одессу настолько, насколько для этого хватит мощности порта (решение этого вопроса лежит вне рамок модели).

Следует иметь в виду, что перечисленные результаты получены на основании данных, в значительной степени являющихся оценками и продуктом экстраполяции и аппроксимации. Они могут рассматриваться как некоторое приближенное отражение общих тенденций. Более конкретные и адекватные результаты могут быть получены при оперировании точными исходными данными во взаимодействии с заинтересованными организациями, что и рассматривается автором как перспективное направление развития модели.

Следует указать, что предлагаемые модели, оставаясь в рамках основной парадигмы настоящей работы как упрощенные дискретные системы, предполагающие использование имитационного моделирования, конечно же, уже теряют право называться моделями класса клеточных автоматов, поскольку в данном случае мы не рассматриваем систему, в которой дискретные объекты (в данном случае - вершины графа) однородны, как это имеет место в случае клеток клеточного автомата.

Содержание данной главы представляет собой полное изложение научной работы, выполненной автором в рамках проекта Российского фонда фундаментальных исследований № 11-06-00193а, в котором автор являлся единственным исполнителем.

ГЛАВА 7. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СПОРТИВНЫХ СОРЕВНОВАНИЙ

Данная глава несколько выходит за рамки основной заявленной цели диссертационной работы, поскольку не включает прямого применения метода замены дифференциальных соотношений клеточными автоматами. Однако в широком смысле в ней применяется тот же подход: дискретная реальность описывается дискретными моделями без промежуточного перехода к непрерывной парадигме и применяется прямое имитационное моделирование вместо аналитического решения или классических численных методов. Это делает данную главу уместной в качестве части проводимого в работе исследования.

Возможность с той или иной степенью достоверности предсказать результат спортивного соревнования, безусловно, является востребованной в наши дни. Однако в том случае, когда речь идет о спортивной игре, о матче между двумя спортсменами или командами зачастую важно не только получить прогноз окончательного результата, но и иметь возможность предсказать промежуточные результаты, а также корректировать их и окончательный прогноз в режиме реального времени по ходу игры. Такая возможность востребована и организаторами соревнований, и руководством команд, и, в первую очередь, букмекерами.

В последние десятилетия были построены различные математические модели, позволяющие прогнозировать результаты спортивных соревнований. Однако, в большинстве своем (например, [202]) они основываются просто на статистически обработанных результатах предыдущих соревнований. В рамках данной главы предлагается модель, в которой соревнование рассматривается как случайный процесс с заданным пространством состояний, на вероятности перехода между которыми оказывают влияние события, происходящие во время соревнования. Такая модель позволяет оценивать вероятности не только того или иного исхода матча, но и различных промежуточных состояний, возникающих по ходу игры, а также вторичные показатели игры.

При решении подобной задачи следует рассматривать следующие существенные для рассматриваемой ситуации характеристики участников соревнования:

1. Стремление участника матча - человека (в одиночных видах спорта) или группы людей (в командных) - одержать победу в матче в целом.
2. Возможность участника матча добиться преимущества над соперником на конкретном отрезке матча, выраженная вероятностью получить такое преимущество, зависящей от некоторых параметров.
3. Изменение упомянутых в пункте 2 параметров в зависимости от хода матча.

Рассмотрим построение такой модели отдельно для случаев соревнований с дискретным и непрерывным временем.

Здесь следует упомянуть, что термины «дискретное» и «непрерывное» время в данной

главе диссертации в отличие от остальных глав трактуются несколько вольно. Спортивной игрой с дискретным временем назовем матч, состоящий из нескольких поединков, каждый из которых проходит в отдельный промежуток времени, и характеризуются собственным результатом. Реальная длительность поединков не регламентируется, а каждый следующий начинается только после четко обозначенного окончания и объявленного результата предыдущего.

Спортивной игрой с непрерывным временем будем называть матч, состоящий из регламентированного по времени состязания участников, в ходе которого соперники состязаются непрерывно (лишь с техническими остановками хода матча), и результат состязания может быть изменен каждым из соперников в любой момент времени матча.

Начнем с рассмотрения первого типа соревнований. Ниже будут подробно рассмотрены модели, описывающие теннис и волейбол, однако следует указать, что незначительные модификации позволяют использовать их для моделирования соревнований по сквошу, настольному теннису, бадминтону и пляжному волейболу.

7.1. Моделирование теннисного матча.

Ход теннисного матча может быть представлен как однородный марковский процесс [203] в предположении, что вероятности взятия очка игроком на своей подаче независимо распределены в гейме, сете и матче. Это предположение сделаем в начале и мы, однако впоследствии от него откажемся.

Для понимания дальнейших рассуждений читателю требуется знать основные правила проведения теннисного матча [204]. В кратком изложении эти правила состоят в следующем. Один из двух соперников (двух игроков или двух команд, состоящих из двух игроков каждая) осуществляет серию подач мяча. Каждая из подач может быть выиграна только одним из соперников. Соперник, первым выигравший четыре розыгрыша, тем самым выигрывает текущую серию подач («гейм»). По окончании гейма на подаче одного соперника право подачи переходит к другому. Однако если в течение гейма оба соперника выиграют по три розыгрыша, то гейм продолжается до того момента, пока один из соперников не опередит другого на два розыгрыша (правило «баланса»). Традиционно выигрыш первой подачи приносит 15 очков, за вторую также добавляется 15, за третью выигранную подачу – 10 очков. Далее очки не начисляются, фиксируется лишь ситуация «баланса» или выигрыш гейма.

Соперник, который выиграл 6 геймов, при том, что противник одержал победу менее чем в 5 геймах, объявляется победителем в сете. Если же счёт по геймам составил 5:5, то победа в сете присуждается тому из соперников, который выиграет два гейма. Если и такого не произойдёт, то есть, счёт по геймам станет 6:6, то играется особый гейм до выигрыша не менее 7 подач с разницей не менее, чем в два очка – «тай-брейк». Для выигрыша всего матча нужно

выиграть заданное регламентом число сетов, обычно – 2 или 3.

В течение гейма один и тот же игрок подаёт мяч в начале розыгрыша, что даёт ему заметное преимущество, поэтому в каждом следующем гейме право подачи получает другой игрок, а право первой подачи в матче определяется жребием.

Начнем с изложения модели гейма.

Используя предположение о независимости, мы можем рассмотреть теннисный гейм как однородный марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем. Введем пространство состояний теннисного гейма:

$$S = \{(x, y): x \in \{0, 15, 30, 40\}, y \in \{0, 15, 30, 40\}\} \cup \{WinA, WinB\} \setminus \{(40, 40)\}$$

Для удобства дальнейшего анализа введем функцию Q , заданную следующей таблицей:

t	0	15	30	40
$Q(t)$	1	2	3	4

и в качестве состояний гейма будем рассматривать пары $a = Q(x), b = Q(y)$.

Пусть гейм находится в состоянии (a, b) , где $a \geq 0$ и $b \geq 0$ и обозначают счет гейма. С вероятностью p система переходит из состояния (a, b) в $(a + 1, b)$ и с вероятностью $1 - p$ в состояние $(a, b + 1)$. Тогда вероятность того, что игрок А выиграет гейм из состояния (a, b) задается рекуррентным выражением:

$$P(a, b) = pP(a + 1, b) + (1 - p)P(a, b + 1) \quad (7.1)$$

Граничные условия: $P(a, b) = 1$ при $a = 4, b \leq 2, P(a, b) = 0$ при $b = 4, a \leq 2$.

При счете «ровно» игрок А с вероятностью p^2 выиграет два очка подряд и закончит гейм своей победой, с вероятностью $(1 - p)^2$ игрок А проиграет два очка подряд и проиграет гейм, а с вероятностью $2p(1 - p)$ игрок А приведет игру к счету «ровно». Поэтому получаем, что вероятность того, что игрок А выиграет игру при условии, что в данный момент счет «ровно» задается как

$$P(3, 3) = \frac{p^2}{p^2 + (1 + p)^2} \quad (7.2)$$

Благодаря применению здесь рекуррентной формулы, мы можем при моделировании матча на любом шаге менять вероятность победы игрока в конкретном розыгрыше. Таким образом, мы получаем возможность оценить вероятность достижения любого состояния системы, исходя из известной оценки для вероятности выигрыша всего гейма. Кроме того, в рамках более широкой модели (марковского процесса без условия равенства вероятностей взятия каждого очка) ничто не мешает задать в имитационной схеме произвольное изменение вероятностей выигрыша каждой подачи.

Важным статистическим показателем текущего состояния игры (в рамках одного гейма) является среднее число розыгрышей, оставшееся до окончания гейма. Обозначим $M(a, b)$

среднее число розыгрышей, оставшееся до окончания гейма при текущем счете (a, b) .

Для нахождения указанного среднего получаем следующее рекуррентное выражение

$$M(a, b) = p(1 + M(a + 1, b)) + (1 - p)(1 + M(a, b + 1)),$$

то есть

$$M(a, b) = 1 + pM(a + 1, b) + (1 - p)M(a, b + 1)$$

Начальные условия $M(a, b) = 0$ при $b = 4, a \leq 2$ или $a = 4, b \leq 2$.

Уточним важный частный случай для счета «ровно»:

$$M(3,3) = \frac{2}{p^2 + (1-p)^2}$$

Аналогично вышеприведенным выражениям для вероятностей победы и математического ожидания, можно вывести и рекурсивное выражение для дисперсии числа розыгрышей, оставшихся до окончания гейма:

$$D(a, b) = pD(a + 1, b) + (1 - p)D(a, b + 1) + p(1 - p)[AM(a + 1, b) - M(a, b + 1)]^2$$

Начальные условия $D(a, b) = 0$ при $b = 4, a \leq 2$ или $a = 4, b \leq 2$.

Дисперсия числа оставшихся розыгрышей при счете «ровно»:

$$D(3,3) = \frac{8p(1-p)}{[Ap^2 + (1-p)^2]^2}$$

Теперь решим задачу нахождения вероятностей появления конкретного счета в процессе розыгрыша гейма.

Пусть $P(a, b|g, h)$ - условная вероятность выпадения счета (a, b) в гейме при счете (g, h) для игрока А. Имеем следующие рекуррентные формулы:

$$P(a, b|g, h) = pP(a - 1, b|g, h), \text{ для } a = 4, 0 \leq b \leq 2 \text{ или } b = 0, 0 \leq a \leq 4$$

$$P(a, b|g, h) = (1 - p)P(a, b - 1|g, h), \text{ для } b = 4, 0 \leq a \leq 2 \text{ или } a = 0, 0 \leq b \leq 4$$

$$P(a, b|g, h) = pP(a - 1, b|g, h) + (1 - p)P(a, b - 1|g, h), \text{ для } 1 \leq a \leq 3 \text{ или } 1 \leq b \leq 3$$

Граничные условия: $P(a, b|g, h) = 1$ при $a = g$ и $b = h$.

Ниже в таблице приведен пример расчета вероятностей появления того или иного счета при текущем счете $g = 0, h = 0$ и $p = 0.6$. Видим, например, что вероятность появления счета «ровно» в таком гейме при счете $(0, 0)$ равна 0,28.

		Игрок В				Гейм
		0	15	30	40	
Игрок А	0	1	0,4	0,16	0,064	0,0256
	15	0,6	0,48	0,288	0,1536	0,06144
	30	0,36	0,432	0,3456	0,2304	0,09216
	40	0,216	0,3456	0,3456	0,27648	0,110592
	Гейм	0,1296	0,20736	0,20736	0,165888	

Таблица 7.1. Значения вероятностей появления определенного счета в гейме.

Мы рассмотрели общий случай гейма, но следует также описать и модель тай-брейка. Здесь и далее становится важным указание, какой игрок подает, а какой принимает. Поэтому обозначим вероятности взятия очка на своей подаче игроками А и В соответственно p_A и p_B . Введем следующие верхние индексы: для обозначения величин, связанных с набором очков в гейме как pg , очков в сете ps , очков в матче pt , геймов в сете gs , геймов в матче gt и сетов в матче – sm .

Таким образом, $P_A^{pg}(a, b)$ и $P_B^{pg}(a, b)$ - условные вероятности взятия гейма игроком А при счете (a, b) игроками А и В соответственно.

Для того чтобы отличать тай-брейк от обычного гейма введем следующие обозначения: $P_A^{pgt}(a, b)$ и $P_B^{pgt}(a, b)$ – условные вероятности победы игроков А и В соответственно при счете (a, b) в гейме на своей подаче.

Условная вероятность победы в гейме игрока А при счете (a, b) находится следующим образом:

$$P_A^{pgt}(a, b) = p_A P_B^{pgt}(a + 1, b) + (1 - p_A) P_B^{pgt}(a, b + 1), (a + b) \text{ кратно } 2 \quad (5.3)$$

$$P_A^{pgt}(a, b) = p_A P_A^{pgt}(a + 1, b) + (1 - p_A) P_A^{pgt}(a, b + 1), (a + b) \text{ не кратно } 2 \quad (5.4)$$

Граничные условия здесь $P_A^{pgt}(a, b) = 1$ при $a = 7, 0 \leq b \leq 5$, $P_A^{pgt}(a, b) = 0$ при $b = 7, 0 \leq a \leq 5$.

При счете 6-6 вероятность игрока А выиграть тай-брейк вычисляется как

$$P_A^{pgt}(6,6) = p_A(1 - p_B) + P_A^{pgt}(6,6)[p_A p_B + (1 - p_A)(1 - p_B)] = \frac{p_A(1 - p_B)}{p_A(1 - p_B) + (1 - p_A)p_B}$$

Среднее число очков $M_A^{pgt}(a, b)$, которое может быть набрано в тай-брейке при счете (a, b) и первом подающем игроке А.

$$M_A^{pgt}(a, b) = 1 + p_A M_B^{pgt}(a + 1, b) + (1 - p_A) M_B^{pgt}(a, b + 1), (a + b) \text{ кратно } 2$$

$$M_A^{pgt}(a, b) = 1 + p_A M_A^{pgt}(a + 1, b) + (1 - p_A) M_A^{pgt}(a, b + 1), (a + b) \text{ не кратно } 2$$

Граничные значения задаются следующим образом:

$$M_A^{pgt}(a, b) = 0 \text{ при } a = 7, 0 \leq b \leq 5, \text{ или } b = 7, 0 \leq a \leq 5$$

При счете 6-6:

$$M_A^{pgt}(6,6) = \frac{2}{p_A(1 - p_B) + (1 - p_A)p_B}$$

Как для предыдущих случаев, выражения для вычисления дисперсии числа очков оставшихся к розыгрышу в тай-брейке при счете (a, b) и первом подающем в тай-брейке А.

$$D_A^{pgt}(a, b) = p_A D_B^{pgt}(a + 1, b) + (1 - p_A) D_B^{pgt}(a, b + 1) + p_A(1 - p_A) [M_B^{pgt}(a + 1, b) - M_B^{pgt}(a, b + 1)]^2, \text{ если } (a + b) \text{ кратно } 2$$

$$D_A^{pgT}(a, b) = p_A D_A^{pgT}(a + 1, b) + (1 - p_A) D_A^{pgT}(a, b + 1) + p_A(1 - p_A) [M_A^{pgT}(a + 1, b) - M_A^{pgT}(a, b + 1)]^2, \text{ если } (a + b) \text{ кратно } 2$$

Граничные условия $V_A^{pgT}(a, b) = 0$ при $a = 7, 0 \leq b \leq 5$, или $b = 7, 0 \leq a \leq 5$. Оценка дисперсии ожидаемого числа очков в тай-брейке при счете 6-6 принимает значение:

$$D_A^{pgT}(6,6) = \frac{4[Ap_A p_B + (1 - p_B)(1 - p_A)]}{[Ap_A(1 - p_B) + (1 - p_A)p_B]^2}$$

Аналогичный подход применяется для моделирования сета и всего матча. Представляет интерес подробнее рассмотреть весь матч.

Итак, рассмотрим теннисный матч целиком. Обозначим p_A^s, p_B^s, p_A^{sT} и p_B^{sT} вероятности побед игроков А и В в сетах без тай-брейка и с тай-брейком, если они подают первые подачи в матче, а p_A^m, p_B^m, p_A^{mT} и p_B^{mT} – аналогичные вероятности для всего матча.

Пусть $P_A^{sm}(e, f)$ и $P_A^{smT}(e, f)$ – вероятности победы игрока А, имевшего право первой подачи, текущем счете (e, f) соответственно в матчах без и с тай-брейком. Тогда, что $P_A^{sm}(e, f) = P_B^{sm}(e, f), P_A^{smT}(e, f) = P_B^{smT}(e, f)$, что прямо следует из утверждения: у игрока, подающего первым, нет преимущества, возникающего за счет первой подачи. Справедливость этого утверждения для данной модели была доказано Прядеиным Р.Б. [205].

Таким образом, можно говорить о справедливости правил подсчета очков в теннисе в смысле отсутствия определяющей роли первой подачи в матче.

Говоря о вероятности взятия очка на своей подаче трудно представить, что она не изменяется на протяжении всей игры. В статье Магнуса и Классена [206] были протестированы несколько гипотез на основе данных Уимблдонского турнира.

Например, эффект первого гейма предполагает, что игрок менее вероятно проиграет очко на своей подаче в первом гейме любого матча – прямое опровержение гипотезы независимости и однородности распределения взятия очка на своей подаче. Но на самом деле существует множество причин, почему бы стоит ожидать изменение вероятности взятия очка на своей подаче в течение матча. Как пример, в длинных матчах она может снижаться под влиянием усталости игрока. Также влияет способность игрока справляться с давлением соперника во время важных розыгрышей.

Другой важный факт, который учитывается не только в теннисе – это психологический момент: выигранное одно очко положительно влияет на взятие следующего. Для проверки предположения о независимости и одинаковости распределения очков Браун, Барнет и Кларк в одной из своих статей изучили среднее число геймов, сыгранных в каждом матче на турнире Australian Open (2003) [202]. Результат, полученный с учетом предположения о независимости и одинаковости распределения вероятностей взятия очка показывал на 7% переоцененный

результат для суммарного числа геймов в 5-сетовом матче и на 7 процентов недооцененный в 3-сетовом матче.

Таким образом, прямое использование выражений (7.1)-(7.5) (вместе с аналогичными формулами для всего матча в целом) не может сделать модель достаточно адекватной. Эта проблема решается построением имитационной схемы, имеющей следующую структуру (на примере гейма).

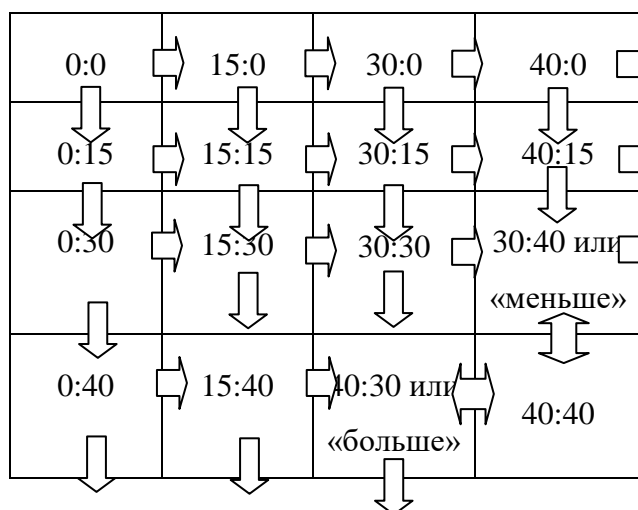


Таблица 7.2. Имитационная схема гейма.

Здесь каждой ячейке соответствует своя модель, изложенная выше, причем для каждой из этих моделей может быть задан свой закон изменения параметров (вероятности взятия очка на подаче): от постоянной вероятности, одинаковой для каждой из моделей, до вероятностей, изменяемых любым функциональным или стохастическим способом в зависимости от хода численного эксперимента, моделирующего матч. Переход от одной модели к другой возможен по результатам моделирования розыгрыша очередной подачи в направлениях, указанных стрелками.

Имитационная схема всего матча строится из имитационных схем сетов, каковые строятся из имитационных схем геймов аналогично приведенному примеру. Разумеется, при реализации схемы на компьютере каждый гейм и каждый сет реализуется одним и тем же программным блоком, возможно, использующим различные массивы в качестве параметров.

7.2. Пример применения имитационной схемы теннисного матча.

Рассмотрим применение изложенной выше имитационной схемы на примере моделирования абстрактного матча. Согласно расчетам в рамках предложенной модели вероятность для игрока А выиграть матч равна:

$$P_A = (p^{st})^2(3 - 2p^{st})$$

Как же следует вести себя игроку, который имеет возможность в какой-то момент

времени увеличить свою силу игры? Допустим, что А может увеличить силу игры в течение сета при счете (e, f) таким образом, чтобы изменить вероятность победы в этом сете с p^{st} до $p^{st} + \varepsilon$, где $p^{st} + \varepsilon < 1$.

В рамках модели это эквивалентно тому, что сила игрока В уменьшается так, что его вероятность выиграть сет снижается с $1 - p^{st}$ до $1 - p^{st} - \varepsilon$. Если изменение вероятностей происходит в начале сета, то есть при счете $(0, 0)$, или при счёте $(1, 1)$, то вероятность игрока А победить в матче в целом:

$$P_A = (p^{st} + \varepsilon)p^{st} + (p^{st} + \varepsilon)(1 - p^{st})p^{st} + (1 - p^{st} - \varepsilon)(p^{st})^2 = (p^{st})^2(3 - 2p^{st}) + \varepsilon 2(p^{st})^2(1 - p^{st}).$$

Если же увеличение силы А произойдёт при счете $(1; 0)$ или $(0; 1)$, то вероятность выигрыша матча составит:

$$P_A = (p^{st})^2(3 - 2p^{st}) + \varepsilon 2(p^{st})^2(1 - p^{st}),$$

что соответствует результатам [207]. Результаты для всех возможных вариантов счёта, при котором игрок увеличивает свою силу, приведены в таблице 7.3.

Текущий счет	Счет в момент увеличения силы игры	Изменение вероятности победы
(0; 0)	(0; 0)	$\varepsilon 2p^{st}(1 - p^{st})$
	(1; 0)	$\varepsilon p^{st}(1 - p^{st})$
	(0; 1)	$\varepsilon p^{st}(1 - p^{st})$
	(1; 1)	$\varepsilon 2p^{st}(1 - p^{st})$
(1; 0)	(1; 0)	$\varepsilon(1 - p^{st})$
	(1; 1)	$\varepsilon(1 - p^{st})$
(0; 1)	(0; 1)	εp^{st}
	(1; 1)	εp^{st}
(1; 1)	(1; 1)	ε

Таблица 7.3. Изменение вероятности победы при увеличении силы игры игроком А.

Важно отметить, что усиление игры после двух сетов, считая с начала матча, приводит ровно к такому же увеличению вероятности победы в матче в целом, как и усиление в начале матча или после одного сыгранного сета.

Теперь рассмотрим более реалистичный вариант, состоящий в том, что для увеличения силы игры в одном из сетов на ε игрок А вынужден уменьшить её на столько же в другом сете. Возникает вопрос, усиление игры в каком сете и при каком счете будет оптимальным.

Применение построенной имитационной схемы при различных ε (при естественном ограничении $p^{st} + \varepsilon < 1$) дает следующий результат.

Когда речь идет о запланированном увеличении усилий при каком-либо выбранном счете, то результаты моделирования дают следующую картину. Если игрок планировал произвести

усиление своей игры при достижении счета (1, 0) («выиграю один сет, а потом усилю игру и добыю противника»), а счет оказался (0, 1), то ему следует усиливать игру немедленно, во втором сете. Если игрок планировал произвести усиление игры при достижении счета (0, 1) («если проиграю первый сет, надо будет усилить игру»), а счет оказался (1, 0), то следует усиливать игру только по достижении счета (1,1). Первый из полученных результатов интуитивно очевиден, второй является содержательным, поскольку многие спортсмены в такой ситуации ринутся закончить матч поскорее, усилив игру во втором сете, однако при неудаче в нем вероятность проиграть матч окажется выше из-за потраченных усилий.

Рассмотрим применение этого подхода на примере моделирования полуфинала турнира серии АТР в Париже между Милошем Раоничем и Энди Марреем. Матч не состоялся, поскольку Раонич снялся с турнира из-за травмы ноги. Попробуем восстановить, как мог бы проходить этот матч.

Прежде всего, в качестве первого приближения применим подход, основанный на равенстве вероятностей взятия подач игроком в течение всего матча. Рассмотрим прогноз на этот матч, сделанный на основе коэффициента букмекерской конторы Pinnacle, равного 1,74 на победу Маррея. Это означает, что контора ожидала победу Маррея с вероятностью 0,57. Учитывая, что в данном турнире матчи играют до двух побед в сетах, используя формулы, аналогичные формулам (7.1),(7.2) составляем таблицу, соответствующую таблице 7.2, но не для гейма, а для всего матча.

		Маррей		
		0	1	2
Раонич	0	1	0,5468	0,2990
	1	0,4532	0,495619	0,2710
	2	0,2054	0,2246	

Таблица 7.5. Значения вероятностей появления счета по сетам в матче Раонич-Маррей.

Эти значения соответствуют, как видно, вероятности победы Маррея в сете, равной 0,5468. Проложив такие же выкладки для сета и гейма, получаем в итоге, что для такого развития событий вероятность выигрыша одной своей подачи Марреем должна быть равна $p_A = 0,527$, а Раоничем $p_B = 0,495$. Наиболее вероятным исходом был бы выигрыш матча Марреем со счетом 2:0 по сетам, причем счет в сетах был бы 7:6 (победа на тай-брейке) и 6:4.

Однако насколько здесь оправдано предположение о равенстве вероятностей взятия подач

игроком в течение всего матча? Прежде всего, следует указать, что статистические вероятности взятия своей подачи равны у Маррея 0,81, а у Раонича 0,76 (здесь и далее статистическая информация о матчах Маррея и Раонича взята с ресурса championat.com). Это, естественно, связано, прежде всего, с тем, что они чаще играют с более слабыми соперниками, чем они являются друг для друга. Однако и простое сопоставление детального хода их матчей с тем, который получается по описанной выше методике, показывает, что вероятность взятия своей подачи у обоих этих спортсменов оказывается выше (а вероятность взятия чужой, соответственно, ниже), чем расчетные результаты. Более того, это различие усиливается в случае, если спортсмен ведет в счете.

Детально рассматривались, в частности, следующие матчи: финал Ролан Гаррос Джокович-Маррей 3:1 (3:6, 6:1, 6:2, 6:4), финал турнира в Пекине Маррей-Димитров 2:0 (6:4, 7:6), одна восьмая финала турнира в Петербурге Южный-Раонич 2:1 (2:6, 7:6, 6:4), четвертьфинал турнира в Пекине Каррено-Буста-Раонич 0:2 (4:6, 4:6) и четвертьфинал турнира в Монте-Карло Раонич-Маррей 0:2 (2:6, 0:6). Последний из матчей был выбран по причине того, что в нем встречались друг с другом эти же два теннисиста, остальные матчи с их участием характеризовались одинаковой оценкой вероятности исхода разными букмекерскими конторами, то есть были легко предсказуемы и не имели неожиданных результатов.

Был выдвинут ряд предположений о видах нарушения марковского характера процесса, а именно о зависимости вероятности взятия каждым из игроков мяча на своей и чужой подаче от предыдущих результатов розыгрышей. Для каждого из таких предположений проводилась 1000 численных экспериментов по розыгрышу хода матча при начальных значениях вероятностей, рассчитанных приведенным выше способом, которые в дальнейшем изменялись в соответствии со сделанными предположениями. Критерием адекватности гипотез о характере такого изменения являлось то, что реальный результат матча оказывался наиболее вероятным (в смысле статистической вероятности). Затем сравнивались статистические вероятности результатов при различных параметрах (менявшихся с некоторым заданным шагом) выбранного характера изменения вероятностей.

В отношении Маррея адекватным оказалось предположение о том, что вероятности взятия им своей подачи повышались в том случае, когда он проигрывал или счет был равным. Наибольшей вероятностью достижения реального результата матча в численных экспериментах оказывалась, если предположить повышение этой вероятности на 10%, если он не лидирует в гейме, на 17,5% - в сете и на 15% - в матче. Такую особенность спортсмена можно охарактеризовать как мобилизацию сил при равном счете или проигрыше.

В отношении Раонича более адекватным оказалось предположение о том, что вероятности взятия им подачи повышаются в случае, если он ведет с разницей два пункта и более, либо

находится в «одном шаге» от победы в гейме, сете или матче. Здесь наибольшее приближение реальным результатам дает гипотеза о повышении вероятности взятия подачи на 15% в каждом случае. В обоих случаях при проверке различных значений повышения вероятностей они менялись с шагом 2,5 процентных пункта.

После этого была проведена аналогичная серия численных экспериментов, моделирующих рассматриваемый несостоявшийся матч. В этом случае с наибольшей вероятностью 0,32 Маррей одерживает победу со счетом 2:1 (4:6, 6:4, 6:3), а вероятность его победы с любым счетом возрастет до 0,63.

Однако в предыдущих рассуждениях мы игнорировали один существенный фактор, который не мог бы не повлиять на исход матча. Раонич снялся с игры по причине травмы ноги. Каков был бы исход матча с учетом этого? Калибровать модель с такой поправкой было бы затруднительно, но к нашему счастью (и к несчастью Раонича) у него в этом году уже были проблемы, связанные с травмой ноги, причем проявились они именно в матче с Марреем в полуфинале турнира Australian Open, закончившемся победой Маррея со счетом 3:2 (4:6, 7:5, 6:7, 6:4, 6:2). Травма проявилась после третьего сета и привела к безоговорочному поражению Раонича.

В рамках изложенного похода адекватной оказалась гипотеза о том, что после получения травмы вероятности выигрыша Раоничем подачи снижались равномерно каждый гейм так, чтобы к концу матча достигнуть нуля. В исследуемом матче Раонич был травмирован уже к его началу. Проведя теперь моделирование матча на основе этой гипотезы, мы получаем в качестве наиболее вероятного результата победу Маррея со счетом 2:0 (6:4, 6:1), а вероятность победы Маррея с любым счетом достигает 0,94. Таким образом, отказ Раонича от матча выглядит вполне обоснованным, хотя у нас и нет оснований считать, что он был действительно просчитан этим или иным образом.

7.3. Моделирование волейбольного матча

Модель волейбольного матча строится во многом аналогично модели теннисного. При этом имеют место следующие существенные для модели отличия [208]: 1) не существует уровня розыгрышей, соответствующего геймам; 2) очередность подач не установлена заранее, подает та команда, которая выиграла розыгрыш предыдущей подачи; 3) счет в сете (партии) идет до 15 или 25 выигранных подач, то есть пространство возможных состояний имеет мощность, существенно большую, чем любой из уровней розыгрыша в теннисе.

Целью игры на уровне всего матча является победа в трех сетах. При счете по сетам (2, 2) играется «тай-брейк» до 15 выигранных подач.

Первое и второе отличие сказывается лишь на структуре соответствующей имитационной схемы. Что касается третьего отличия, то, поскольку здесь матрица переходов, имеет

размерность 1265, то экспоненциальная зависимость вычислительной сложности рекурсивного алгоритма от этого значения вызовет некоторые проблемы, решение которых изложено ниже.

При моделировании сета изначально рассмотрим его ход как однородный марковский процесс. В этом случае пространство состояний имеет вид:

$$S = \{(i, j, s): i \in \{0, 1, \dots, 24, Adv, Win\}, j \in \{0, 1, \dots, 24\}, s \in \{1, 2\}\}$$

Здесь s - номер подающей команды, i и j - число выигранных подач первой (в смысле очереди подачи) и второй команд. Этим переменным также могут быть приписаны нечисловые значения Adv и Win , обозначающие состояния «больше» (при счете, большем 23 с обеих сторон).

Пусть игра в сете идет до n очков (или более, если разница в очках не превысит 2), команда А подает первой, p и q – вероятности выигрыша командами А и В своей подачи. Прядеиным Р.Б. [205] было доказано, что вероятность победы в сете, играемом до n очков, определяется выражением:

$$P_n(p_A, p_B) = \frac{1}{2} \left(1 + (p_A - p_B) \sum_{k=0}^{n-2} (1 - p_A - p_B)^k L_k(\mu) \right) + \frac{(1 - p_A - p_B)^{n-1}}{2d} \\ \times ((p_A^2 + p_A p_B - p_B) L_{n-1}(\mu) + p_B (1 - p_A) (1 - p_A - p_B) L_{n-2}(\mu))$$

Здесь, как и раньше, p_A и p_B - вероятности выигрыша очка на своей подаче командами А и В. L_k – полином Лежандра степени k первого рода, $d = p_A^2 + p_B^2 + p_A p_B (1 - p_A - p_B)$ и $\mu = \frac{1 - p_A - p_B + 2p_A p_B}{1 - p_A - p_B}$.

Используя данную формулу при проведении численных экспериментов мы избегаем вычислений, объем которых в некоторых случаях (при достаточно произвольном характере изменения коэффициентов модели по оду моделируемого матча) может значительно затруднить и замедлить ход эксперимента, делая его время сравнимым со временем самого матча, что неприемлемо, особенно при анализе изменения ситуации в процессе реального матча. В остальном имитационное моделирование волейбольного матча осуществляется аналогично теннисному.

7.4. Результаты некоторых численных экспериментов с моделью волейбольного матча.

Вначале рассмотрим вопрос, который уже возникал при анализе модели теннисного матча. Является ли право первой подачи в матче преимуществом или, наоборот, помехой для победы в матче? Этот вопрос здесь является сугубо практическим, поскольку правила волейбола [208] гласят, что право выбора первой подачи и либо сторон площадки в первом сете определяется жребием. Таким образом, если для победителя жеребьевки сторона поля не является существенным фактором, ему предстоит решить, кто будет подавать первым. Возможно, есть объективные факторы, на основании которых может быть сделан такой выбор?

Теоретически этот вопрос (в рамках данной модели) был исследован в [205]. Моделирование на основе предлагаемой имитационной схемы после проведения 1000 численных экспериментов для каждой пары значений $0 < p < 1$, $0 < q < 1$, которые менялись в указанных пределах с шагом 0,1 подтвердило этот вывод в 99% случаев.

Пусть команда A выиграла право принять решение о первой подаче. В случае $p + q > 1$ ей выгодно выбрать свою подачу, а если $p + q < 1$ – отдать право первой подачи команде B . Естественно, $p + q = 1$ означает равные шансы на победу в обоих случаях.

Этот вывод позволяет утверждать, что, в отличие от тенниса, волейбольный матч не является вполне справедливым, ведь преимущество одной из команд определяется жребием. Следует отметить, что такое преимущество снижается с увеличением числа розыгрышей подач в сете. Однако большое число подач в сете возникает только в случае довольно близкого уровня игрового мастерства, приводящего к долгой игре «на балансе» в конце партии, что не может рассматриваться как существенный фактор.

Кроме этого, на основе изложенной методики было осуществлено, в частности, моделирование финального матча олимпийского турнира 2012 года по волейболу среди мужских команд между сборными России и Бразилии. Несмотря на то, что сборная Бразилии выиграла два первых сета и вела по ходу третьего, при моделировании всего этого отрезка матча вероятность победы Бразилии в трех сетах не превышала 0,2, поэтому достигнутый сборной России перелом в ходе матча был совершенно предсказуем, в отличие от исхода последнего сета, где вероятности победы каждой из команд были практически точно равны 0,5, поэтому может быть сделан вывод, что победа сборной России явилась следствием не объективных факторов, а проявленных ею и противником субъективных качеств.

7.5. Имитационное моделирование футбольного матча

Перейдем к рассмотрению игры с непрерывным временем, в качестве примера каковой возьмем футбольный матч. Для футбольных поединков существуют многочисленные математические модели, позволяющие строить прогнозы как результатов, та и хода матчей. Однако здесь следует отметить, что такие модели в основном представлены двумя крайностями. С одной стороны это статистические модели, рассматривающие матч как одно событие с дискретным набором исходов и фиксированными вероятностями каждого из исходов [209]. Задача прогнозирования в этом случае состоит просто в получении оценок этих вероятностей на основе имеющейся статистики результатов игр [210].

С другой стороны существует подход, основанный на имитационном моделировании спортивных качеств каждого из спортсменов, участвующих в игре. Ярким представителем такого подхода является игровая система FIFA [150]. Хотя данная модель и преследует, прежде всего, развлекательные цели, она и ее аналоги широко используются для прогнозирования

результатов матчей. При применении такого подхода результаты моделирования подвержены сильному влиянию допущений, проведенных при моделировании игроков, поскольку не подлежит сомнению тот факт, что адекватная математическая модель отдельного человека, пусть даже и с крайне ограниченным списком существенных свойств, пока что не создана.

В данной работе предлагается рассмотреть предложение некоего среднего между двумя указанными крайностями подхода, состоящего в том, что матч представляется в виде марковской цепи событий [211] с непрерывным временем. При осуществлении предлагаемого подхода моделируется не матч в целом, но и не отдельные действия отдельных игроков, а изменение счета, то есть перехода системы из одного состояния в другое. Принимая во внимание условность любой классификации, тем не менее, можно сформулировать этот подход как использование не системного и не агентного, а дискретно-событийного моделирования. В качестве вида спорта, иллюстрирующего марковскую цепь с непрерывным временем будут рассмотрены соответственно футбол и большой теннис.

Построим вначале статистическую модель ожидаемого числа голов в футбольном матче. Рассмотрим количества мячей, забитых в каждом из матчей в ворота каждой команды как случайные величины. Для каждой из команд, участвующих в двухкруговом турнире (то есть турнире, в котором каждая команда играет с каждой два матча – дома и в гостях) введем следующие показатели.

Сила атаки дома:

$$AH_i = \frac{\overline{SH}_i}{\overline{SH}} \quad (7.6)$$

Сила атаки в гостях:

$$AA_i = \frac{\overline{SA}_i}{\overline{SA}} \quad (7.7)$$

Сила защиты дома:

$$DH_i = \frac{\overline{CA}_i}{\overline{CH}_i} \quad (7.8)$$

Сила защиты в гостях:

$$DA_i = \frac{\overline{SH}}{\overline{CA}_i} \quad (7.9)$$

Здесь для команды i \overline{SH}_i – математическое ожидание числа мячей, забитых дома, \overline{SA}_i – математическое ожидание числа мячей, забитых в гостях, \overline{CH}_i – математическое ожидание числа мячей, пропущенных дома, \overline{CA}_i – математическое ожидание числа мячей, пропущенных в гостях, \overline{SH} – математическое ожидание числа мячей, забитых дома (и, соответственно, пропущенных в гостях) в каждом матче лиги, \overline{SA} – математическое ожидание числа мячей, забитых в гостях (и, соответственно, пропущенных дома) в каждом матче лиги.

После этого мы принимаем в качестве математического ожидания числа мячей, забитых

хозяевами в конкретном матче между командой-хозяином i и командой-гостем j :

$$S_{ij} = \frac{AH_i}{DA_j} \overline{SH} \quad (7.10)$$

Математическое ожидание числа пропущенных хозяевами мячей получаем аналогично:

$$C_{ij} = \frac{AA_j}{DH_i} \overline{SA} \quad (7.11)$$

Подставив (7.6) - (7.9) в формулы (7.10) - (7.11) можно сократить по одному множителю в каждом случае, однако и технически, и содержательно удобнее работать именно с представленными выражениями.

В этой модели в качестве оценок всех математических ожиданий, отмеченных в (7.6)-(7.11) чертой сверху, используем средние значения по рассматриваемой футбольной лиге. Вопрос о том, за какой промежуток следует усреднять эти показатели, связан с предположением о неизменности среднего уровня игры футбольной команды в течение определенного периода времени.

Рассмотрим пример построения имитационной схемы на основе такой модели футбольного матча на примере Английской футбольной премьер-лиги для матча команд «Ньюкасл» и «Тоттенхем», который открывал сезон 2012-2013. Статистические оценки показателей получим по итогам предыдущего (2011-2012) сезона [212].

$$\overline{SH} = 1,589$$

$$\overline{SA} = 1,216$$

$$\overline{SH_1} = 1,526$$

$$\overline{CA_2} = 1,263$$

Получаем оценку математического ожидания числа мячей, забитых «Ньюкаслем»:

$$AH_1 = 0,960$$

$$DA_2 = 1,258$$

$$S_{12} = 1,213$$

Аналогично находим математического ожидания числа мячей, пропущенных в этом матче «Ньюкаслем» (то есть забитых «Тоттенхемом»):

$$C_{12} = 1,046$$

Далее обычно используется рассмотрение процесса забивания мячей как пуассоновского, в котором полученные нами оценки используются как математические ожидания пуассоновского распределения числа забитых мячей.

Однако обосновано ли такое предположение? Проверим данные по 16 тысячам матчей ведущих Европейских чемпионатов (Испания, Германия, Франция, Англия, Россия), сыгранных с 2005 года на предмет распределения числа забитых мячей по Пуассону, используя критерий χ^2 . Оказывается, что уровень значимости достигает здесь 0,1.

Число мячей	Реальная частота	Пуассоновская модель
0	0,0840	0,0764
1	0,1887	0,1964
2	0,2515	0,2526
3	0,2137	0,2166
4	0,1392	0,1393
5	0,0723	0,0717
6	0,0321	0,0307
7	0,0117	0,0113
8	0,0048	0,0036
>8	0,0021	0,0014

Таблица. 5.4. Реальная и пуассоновская частоты числа забитых мячей.

Если рассмотреть использовавшиеся для расчета критерия χ^2 частоты, становится ясно, что основные различия существуют для числа забитых мячей 0 (превышение над пуассоновской частотой) и 1 (обратная ситуация).

Следует отметить, что для различных чемпионатов уровень значимости получается существенно различным. Так, для чемпионата Франции он ниже 0,05, а для Английской футбольной премьер-лиги, напротив, превышает 0,1. Но во всех случаях различия частот характерны именно для значений 0 и 1.

Можно предположить, что подобная ситуация связана с тем, что при нулевом счете команды зачастую осторожничают, в то время как гол, забитый одной из команд, очень сильно мотивирует вторую команду к активным действиям, и часто становится причиной второго гола (который может быть забит и в ворота второй команды, «забывшей» об обороне).

С другой стороны, статистическое исследование показывает, что нет значимой корреляции между количеством мячей, забитых хозяевами и гостями.

В связи с этим можно было бы предложить находить вероятности того или иного результата игры между двумя конкретными командами по формуле:

$$p(X, Y) = \text{Poisson}(x, \lambda_x) \text{Poisson}(y, \lambda_y), \quad (7.12)$$

где $\text{Poisson}(x, \lambda_x)$ – вероятность принятия значения x случайной величиной X , подчиняющейся распределению Пуассона с параметром λ_x , $\text{Poisson}(y, \lambda_y)$ – вероятность принятия значения y случайной величиной Y , подчиняющейся распределению Пуассона с параметром λ_y .

В связи с вышеизложенным при разыгрывании результатов матча в рамках имитационного моделирования предлагается использовать исправленное распределение Пуассона с вероятностями счета $X:Y$, задаваемыми формулой:

$$p^*(X, Y) = k(x, y, \lambda_x, \lambda_y) \text{Poisson}(x, \lambda_x) \text{Poisson}(y, \lambda_y), \quad (7.13)$$

где $k(x, y, \lambda_x, \lambda_y)$ определяется следующим образом

$$k(x, y, \lambda_x, \lambda_y) = \begin{cases} 1 + \alpha\lambda_x\lambda_y & \text{при } x = 0, y = 0 \\ 1 - \alpha\lambda_x & \text{при } x = 0, y = 1 \\ 1 - \alpha\lambda_y & \text{при } x = 1, y = 0 \\ 1 - \alpha & \text{при } x = 1, y = 1 \\ 1 & \text{иначе} \end{cases},$$

после чего для получения собственно вероятностей значения p^* нормируются на 1.

Коэффициент α зависит от рассматриваемого турнира и может быть подобран при помощи метода наименьших квадратов (минимизируется расстояние между векторами частот реального и исправленного распределения числа забитых мячей). В случае Английской футбольной премьер-лиги этот показатель равен 0,1.

После построения такого распределения подставляем в него значения среднего числа забитых мячей из формул (7.10)-(7.11) и, в зависимости от задачи, либо находим распределение вероятностей разных исходов моделируемого матча, либо разыгрываем этот исход как двумерную случайную величину в рамках имитационной схемы.

Например, в случае матча «Ньюкасл» - «Тотенхем» такое моделирование дало результат 2:1, соответствующий реальному исходу матча. Это, однако, можно объяснить только удачей проводившего численный эксперимент, поскольку наиболее вероятным счетом в данном противостоянии был 1:1. Этот факт подтверждается и повторным имитационным моделированием матча. Как и следовало ожидать, модель дает 1:1 в качестве наиболее вероятного результата матча.

Однако в приведенной выше модели пока совершенно не учитывается тот факт, что футбольный матч имеет некоторую протяженность по времени, и события в нем, в том числе голы, забитые *одной командой*, могут не являться независимыми. Напротив, есть все основания полагать, что успех команды (забитый мяч) в разных ситуациях может как повысить, так и понизить вероятности забить следующие мячи.

В соответствии с этим предлагается применять изложенный выше подход не ко всему матчу, а к отдельным отрезкам времени, на которые он может быть разбит. Для первого из таких отрезков модель (7.6)-(7.11) с поправкой (7.13) сохраняется в неизменном виде. Для каждого из следующих вычисляются условные средние значения числа забитых мячей, найденные при условии, что в течение предыдущих отрезков времени сложился тот или иной текущий результат матча, и используется та же модель, но уже с условными значениями в качестве пуассоновских констант. Следует отметить, что такой подход требует обработки большого количества статистических данных, поскольку для каждого значения счета матча после i -го отрезка времени нужно собрать значимую статистику мячей, забитых в следующих

отрезках. В рамках данной работы поэтому рассматривалось только деление матча на два тайма.

Но даже в этом случае собранная по матчам Английской футбольной премьер-лиги статистика представляет собой достаточно объемный массив данных, в связи с чем приведем только некоторую показательную ее часть.

1 тайм \ 2 тайм	0-0	1-0	0-1	1-1
0-0	0,271	0,229	0,213	0,239
1-0	0,195	0,184	0,194	0,212
0-1	0,128	0,155	0,168	0,142
1-1	0,118	0,116	0,108	0,109
2-0	0,087	0,084	0,083	0,072
0-2	0,045	0,049	0,059	0,054
2-1	0,043	0,049	0,049	0,052
1-2	0,031	0,042	0,040	0,031
2-2	0,010	0,015	0,019	0,010

Таблица 7.5. Условные вероятности некоторых значений счета по итогам второго тайма в зависимости от счета по итогам первого.

В таблице 7.5 приведены условные вероятности наиболее часто встречающихся исходов второго тайма при известных результатах первого (остальные ситуации в использованном массиве данных встречались недостаточно часто, чтобы по ним можно было оценить соответствующие условные вероятности). Данные таблицы подтверждают, например, что ничейный счет первого тайма снижает активность команд во втором тайме.

Рассмотрим теперь матч «Ньюкасл» - «Тотенхем» при помощи этого подхода. Здесь, найдя для первого тайма величины $\overline{SH} = 0,799$ и $\overline{SA} = 0,608$ и сохраняя прежние значения силы атаки и защиты команд, путем моделирования получаем итог первого тайма 0:0. Затем, разыграв аналогично второй тайм, имеем в качестве его итога (и окончательного счета матча) 1:1. Результат этот, как кажется, не вполне соответствует реальному событию.

Однако взглянем внимательнее на протокол матча. После первого тайма счет действительно был 0:0. Во втором тайме счет 1:1 установился и сохранялся до 80-й минуты, когда в ворота «Тотенхема» был назначен пенальти, успешно реализованный игроком «Ньюкасла». По итогам нашего моделирования можно сделать однозначный вывод, что этот назначенный одиннадцатиметровый удар оказал решающее влияние на результат реального матча, который был изначально «запрограммирован» на итог 1:1.

Следует указать, что вопрос моделирования участников соревнований, ранее не принимавших участия в турнире (или принципиально изменивших свои характеристики после

предыдущих розыгрышей) является проблемным. В рамках данного подхода решение этой проблемы не представляется возможным, однако перспективной является идея сравнения среднего уровня силы участников рассматриваемых соревнований и соревнований, в которых новый игрок ранее принимал участие (модели, подобные рассматриваемой, обычно востребованы в применении к соревнованиям высшего уровня, участники которых до этого обычно участвуют в других турнирах).

Методика, предложенная выше для моделирования теннисных, волейбольных и футбольных матчей, может быть применена к любому виду спорта, в котором результат не зависит напрямую от субъективных человеческих оценок (как это имеет место в художественной гимнастике, синхронном плавании или фигурном катании).

Результаты данного исследования могут быть полезны для организаторов соревнований в тех случаях, когда желательно прогнозировать ход и результаты, в том числе промежуточные, матчей турнира, для тренеров команд, позволяя обращать внимание на объективные и субъективные факторы, определяющие результаты по ходу матча, а также для букмекерских контор, принимающих ставки на промежуточные результаты соревнований и нуждающихся в обоснованном расчете коэффициентов таких ставок. В последней из упомянутых областей некоторые представленные модели уже нашли успешное применение.

Еще одним возможным приложением этих моделей может быть исследование турнирных формул спортивных соревнований на предмет их справедливости.

7.6. Анализ справедливости турнирных формул

Спортивные турниры в игровых видах спорта, ставящие своей целью не только выявление сильнейшего участника соревнований, но и ранжирование некоторых либо всех остальных участников, отличаются разнообразием формул их проведения. Схема проведения турнира может варьироваться в широких пределах: от «кубковой» системы, при которой на каждом этапе соревнования проигравшие в своих матчах участники выбывают, а победители выходят в следующий этап, добираясь до финального матча, до кругового турнира, в котором каждый участник минимум однажды встречается с каждым. Промежуточные варианты включают на разных этапах как круговую систему, так и игры «на вылет».

Преимущества последних – сравнительно небольшое количество матчей и их зрелищность: ведь права на ошибку у участника нет. Однако в этом случае при проведении турнира может возникнуть ситуация, когда одна сильная команда «выбьет» из числа участников другую, чуть менее сильную, причем более слабые продолжают участвовать в соревновании. Кроме того, в таком турнире всего один случайный выигрыш более слабого участника способен сделать результаты всего турнира не соответствующими реальному

соотношению сил участников. В связи с вышеизложенным возникает вопрос о том, насколько справедливо организовано то или иной спортивное соревнование.

Чтобы придать вопросу о справедливости турнирной формулы объективность и математическую строгость, опишем состязание в терминах бинарных отношений [147]. Рассмотрим спортивный турнир с участием команд из множества A как отображение линейного порядка $P \subset A \times A$ в частичный порядок $R \subset A \times A$. P представляет собой отношение «сильнее», а R – отношение «занял более высокое место». Поскольку в некоторых турнирах разыгрываются не все места, а только несколько первых, а иногда также – последних, а участники, не занявшие эти места, не ранжируются, то R не обязательно является линейным порядком. Оба отношения, естественно, задаются антирефлексивными.

Тогда показателем справедливости турнирной формулы назовем некоторым образом заданное расстояние между P и R , нормированное так, чтобы для турнирной формулы, представляющей собой тождественное отображение, оно равнялось бы 1.

Рассмотрим здесь вариант показателя справедливости, задаваемого следующим образом:

$$J = \frac{|P \cap R|}{|A|(|A| - 1)}$$

Знаменатель представляет собой мощность полного антирефлексивного графа на множестве A – максимально возможное число попарных сравнений участников турнира.

При этом можно рассмотреть два фактора, влияющих на J . Это полнота турнирной формулы

$$F = \frac{|R|}{|A|(|A| - 1)},$$

и относительная справедливость турнирной формулы

$$j = \frac{|P \cap R|}{|R|}$$

Очевидно,

$$J = jF$$

Отношение R для конкретной турнирной формулы зависит от многих факторов. Для начала будет считать, что ранжирование участников по силам неизменно по ходу турнира. Тогда исход каждого матча однозначно определен, и R зависит только от распределения участников по сетке турнира. Определим показатели J , F и j для данной турнирной формулы как средние значения этих показателей по всем возможным распределениям участников по сетке турнира.

Другие возможные варианты задания соответствующей метрики и определения понятий справедливости и полноты турнира представлены в [213].

В случае небольшого числа команд и простой турнирной формулы данные показатели

могут быть без труда найдены теоретически. Например, для довольно распространенной схемы турнира, в котором восемь команд разбиты на две равные группы, в которых проходят игры по кругу, а затем по две лучшие команды разыгрывают первые четыре места по системе «на вылет», получаются следующие значения:

$$F = \frac{11}{14}$$

$$j = \frac{53}{55}$$

$$J = \frac{53}{70} \approx 0,76$$

Последний коэффициент и показывает насколько итоговое распределение мест в среднем соответствует уровню, продемонстрированному участниками турнира. Вопрос о том, насколько такая потеря справедливости компенсируется снижением числа матчей (16 вместо 28 при проведении кругового турнира, справедливость которого равна 1) и зрелищными играми «на вылет»

Однако при рассмотрении соревнований с большим количеством участников и более сложной формулой, такой анализ становится затруднительным. Кроме того, допущение о постоянстве силы участников в каждом из матчей является не вполне адекватным.

В связи с этим для оценки коэффициента справедливости турнирной формулы предлагается использовать подходы имитационного моделирования. Сделаем предположение о том, что существует объективный начальный показатель силы каждого участника, однако сила, проявляемая в конкретном матче, представляет собой случайную величину со средним значением, равным этому начальному показателю. Затем проведем численные эксперименты, имитирующие проведение турнира, для каждого возможного распределения участников по турнирной сетке. Статистический анализ показывает, что для каждого случая достаточно проведения 1600 экспериментов, чтобы относительная ошибка в определении значения показателя справедливости не превысила 2,5% (при этом доверительный интервал будет иметь относительную ширину 5%).

Вопрос о механизме моделирования матча может быть решен двумя способами. С одной стороны можно основываться на том, что сила участника в конкретном поединке подвержена влиянию большого числа различных независимых факторов, то есть уместно предположение о том, что она распределена по нормальному закону. Соответственно эта величина просто разыгрывается для каждого участника каждого матча, а победителем объявляется тот, у кого она в этом случае приняла большее значение.

С другой стороны, можно предпринять попытку более детально моделировать ход каждого такого матча, для чего могут быть использованы модели, изложенные выше для видов

спорта, в которых представляют собой непрерывный розыгрыш очков или дискретный набор отдельных розыгрышей. Разумеется, эти модели сильно повысят вычислительную сложность экспериментов и, следовательно, могут применяться только в случае, если затраты времени и вычислительных мощностей для повышения адекватности результатов моделирования будут сочтены обоснованными.

Если при анализе заранее известен состав участников, то их параметры для обоих вариантов имитационного моделирования турнира находятся на основе статистических данных об их прошлых спортивных результатах. В том случае, если состав заранее неизвестен либо нет достаточно полных данных, позволяющих оценить параметры моделей участников, можно рекомендовать провести численные эксперименты для как можно более разнообразных распределений участников по силам. Конечно, в этом случае результат может сильно зависеть от выбора таких распределений.

В качестве примера такого анализа турнирных формул можно привести расчеты справедливости турнирной формулы финальной части чемпионата мира по футболу 2014 года. Здесь мы знаем распределение 32 команд по 8 группам, из которых по две сильнейшие команды выходили в $1/8$ финала, а в качестве параметра, характеризующего силу команды, можем взять рейтинг ФИФА этих сборных. Расчеты дают очень интересный результат: коэффициент справедливости оказывается равным 0,545. Это не очень высокий результат. Для сравнения, средний коэффициент справедливости для турнира «на вылет» из таких же по силе команд, случайным образом распределенных по сетке, оказывается равен 0,6658. При подробном рассмотрении турнирной ситуации на чемпионате действительно бросаются в глаза явно неравномерное распределение команд по группам (так называемые «группы смерти», в которых три или все четыре команды сильны и, соответственно, откровенно слабые «проходные» группы) и такой способ формирования пар в $1/8$ финала, который иногда может сделать выгодным команде играть не в полную силу в групповом турнире, чтобы выйти на более слабого соперника. Турнирная схема чемпионата неоднократно подвергалась критике. Наши же расчеты подтверждают эти умозрительные рассуждения строгими объективными численными результатами.

Предложенная в данном разделе методика может быть использована для получения объективной численной характеристики справедливости турнирных формул, давая возможность внести изменения в схему проведения с целью повышения справедливости соревнования, что может благоприятно сказаться на ходе спортивных мероприятий.

ГЛАВА 8. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ, ПОЛУЧЕННЫХ ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕДЛАГАЕМОГО МЕТОДА

Изложенное выше показывает, что применение метода замены дифференциальных уравнений клеточными автоматами позволило существенно расширить область применимости каждой из исходных математических моделей на основе дифференциальных уравнений, рассмотренных в данной диссертационной работе, и получить результаты, недостижимые при использовании этих исходных моделей.

При моделировании информационного противоборства при помощи модели на основе нейробиологической схемы Рашевского не было возможным получить результаты, связанные с произвольным управлением параметрами из-за интегро-дифференциального характера базового уравнения. Также в модели не могли быть учтены различные аспекты социального взаимодействия индивидов.

Замена исходной модели клеточным автоматом, описанная в Главе 2, позволила менять параметры модели произвольным образом в произвольный момент динамики системы. Также оказалось возможным установить разную степень влияния мнения окружающих на мнение индивида и сделать переменным его априорное мнение. Это позволило расширить область применимости модели и, исключительно благодаря особенностям клеточных автоматов, решить задачи:

- о влиянии на мнение индивида малых референтных групп;
- об интериоризации общественного мнения;
- об оптимальном управлении пропагандистской кампанией;
- об оптимальном ответе на такие действия противной стороны.

При исследовании системы «Власть-общество» клеточно-автоматная модификация модели позволила не ограничиваться при численных экспериментах изначально входящими в модель переменными и параметрами. Без повышения вычислительной сложности в данную модель были введены: возможность миграции населения и перевозки товаров между регионами и муниципалитетами, изменения числа регионов и муниципалитетов в рамках одного численного эксперимента, зависимость коэффициента прироста населения от социально-экономической ситуации, региональные различия в базовых и дополнительных параметрах модели. Это дало возможность решить следующие прикладные задачи моделирования, при исследовании которых с помощью непрерывных моделей возникли сложности:

- о восприимчивости регионов к продвигаемому «сверху» подходу к управлению;
- о влиянии транспортных связей между регионами на их социально-экономическое

развитие;

- о влиянии миграции в более благополучный регион на социально-экономическую ситуацию в нём;

- о последствиях изменения числа регионов в системе;

- о влиянии коррупции на все перечисленные выше процессы.

Следует особо отметить, что моделирование изменения числа регионов и/или муниципалитетов в принципе невозможно в рамках исходной непрерывной модели, поскольку предполагает появление новых уравнений в процессе динамики системы.

При моделировании движения неорганизованной группы людей использование клеточных автоматов вместо дифференциальных уравнений позволило:

- ввести в модель анализ ситуации со стороны движущегося человека;

- рассматривать произвольные граничные условия, имеющие в данной модели смысл конфигурации непреодолимых препятствий;

- таким образом, решить ряд задач, связанных с оптимизацией конструкций, сужающих проход.

В рамках исследования динамики численности и структуры профессиональной группы учителей замена непрерывной модели клеточным автоматом позволила расширить область применимости модели, и, таким образом:

- учесть различные варианты прихода в группу и ухода из неё;

- построить прогноз изменения количества учителей на основе реальных данных;

- решить задачу оптимального управления и выдать рекомендации органам, управляющим сферой образования.

При моделировании динамики транспортной сети модель, построенная в рамках общего подхода к замене непрерывных моделей клеточными автоматами и родственными объектами, позволила создать самоорганизующуюся систему с обратной связью, в которой структура сети определяет схему перевозок, а схема перевозок влияет на изменение структуры сети. Это дало возможность:

- осуществить моделирование реальных железнодорожных сетей;

- решить задачу прогнозирования развития железных дорог России и их влияния на социально-экономическое развитие страны в целом.

В области моделирования спортивных соревнований подход, основанный на аналогии

между этапом матча и клеткой клеточного автомата, позволяет в рамках численного эксперимента описать ход матча и получить оценки вероятностей как промежуточных результатов по известному окончательному, так и наоборот, а также спрогнозировать наиболее вероятный итог матча. Это позволило:

- решить ряд задач оптимального управления ходом спортивного соревнования;
- предложить методику анализа справедливости турнирных формул соревнований.

Таким образом, применение метода замены дифференциальных уравнений клеточными автоматами позволяет решать задачи, которые затруднительно или невозможно решить при помощи исходных моделей, при этом зачастую без увеличения вычислительной сложности, что само по себе повышает эффективность вычислений.

Отдельно ещё раз следует упомянуть, что при использовании для численных экспериментов с моделями на основе клеточных автоматов специализированных компьютеров с высокой степенью параллельности вычислений, эффективность повысится значительно, а именно – пропорционально степени параллельности. В данной работе, носящей теоретический характер и имеющей целью построение моделей, такие компьютеры не применялись.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При выполнении настоящей диссертационной работы достигнуты следующие результаты:

1. Разработан и апробирован на ряде задач социально-экономической динамики метод замены дифференциальных уравнений клеточными автоматами.

2. Построены дискретные модификации математических моделей, описывающие движение неорганизованной группы людей. Разработан ряд алгоритмов, позволяющих осуществлять компьютерное моделирование движения неорганизованной группы людей. На основе построенных модификаций моделей решён ряд задач, имеющих прикладное значение.

3. Построена дискретная модификация модели А.П. Михайлова «власть-общество» на основе клеточного автомата. Доказано соответствие макродинамик дискретной и непрерывной моделей. Разработаны алгоритмы, реализующие динамику каждой переменной исходной непрерывной модели «власть-общество» в рамках предлагаемой дискретной модификации. Построена компьютерная модель, описывающая трехуровневую систему «власть-общество», при помощи которой область применимости исходной модели существенно расширена.

4. Построена дискретная модификация модели информационного противоборства на основе клеточного автомата. Доказано соответствие макродинамик дискретной и непрерывной моделей при наличии у дискретной модели в отличие от непрерывной возможности добавления новых факторов и задания достаточно произвольных зависимостей параметров от времени без существенного увеличения вычислительной сложности. В модифицированную модель добавлены факторы, описывающие влияние малых групп на мнение индивида и интериоризацию общественного мнения. Разработаны алгоритмы, реализующие динамику мнений индивидов в рамках дискретной модели информационного противоборства. Построена компьютерная модель информационного противоборства. С ее помощью решены задачи оптимального управления, связанные с рядом сценариев пропагандистских кампаний. Выработаны рекомендации для оптимального изменения уровня интенсивности агитации, а также для ответных действий второй стороны на такие изменения.

5. Разработана методика моделирования динамики численности профессиональной группы при помощи построенных автором одномерных клеточных автоматов. На ее основе созданы математические модели динамики численности профессиональной группы учителей средних школ, позволяющие, в отличие от непрерывных популяционных моделей, рассматривать профессиональную группу с произвольными структурой и характером изменения коэффициентов мобильности. Разработана и апробирована методика прогнозирования численности и структуры профессиональной группы в зависимости от социально-экономических условий. Построены компьютерные модели профессиональных

групп учителей средних школ Москвы и Ярославской области и получен прогноз социальной динамики этих групп. На основе той же модели разработана и апробирована методика прогнозирования численности студентов вузов.

6. Построена дискретная модификация математической модели динамического развития транспортной сети, основанная на принципах самоорганизации товарных потоков, обратной связи между динамикой этих потоков и развитием сети и при этом, в отличие от подобных моделей, являющаяся полностью дискретной. На её основе разработаны и реализованы компьютерные модели сетей железных дорог ряда стран. Они были использованы для получения прогнозов динамики развития сетей железных дорог и их влияния на социально-экономическую ситуацию в рассматриваемых странах.

7. Разработана методика моделирования хода матчей для спортивных соревнований с дискретным и непрерывным временем. Предлагаемые модели, представляющие собой дискретные немарковские цепи, позволяют получить результаты, недостижимые на классических статистических моделях. Предложен метод нахождения вероятностей промежуточных результатов и дополнительных показателей матчей при заданных вероятностях окончательного исхода. В рамках этих моделей доказан ряд утверждений относительно влияния права первой подачи на результат в играх с дискретным временем. Проведен подробный анализ ряда матчей в разных видах спорта и выявлены факторы, повлиявшие на исходы этих матчей. Исследована справедливость турнирной формулы чемпионата мира по футболу 2014 года и высказаны рекомендации по разработке турнирных формул подобных соревнований.

Полученные результаты позволяют как использовать предложенные в работе модификации математических моделей для решения прикладных задач моделирования и прогнозирования соответствующих явлений, так и строить на основе других существующих математических моделей, сводимых к задачам Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, новые клеточно-автоматные модификации, используя предложенный и обоснованный метод замены дифференциальных уравнений клеточными автоматами. При этом область применимости моделей будет расширена, а эффективность вычислений может быть повышена при условии использования специализированных компьютеров с высокой степенью параллельности.

В дальнейших исследованиях данный метод может быть обобщён на другие классы математических моделей, в основе которых лежат дифференциальные уравнения. Помимо этого, в прикладных исследованиях могут быть использованы новые, специально разработанные для конкретных задач, клеточно-автоматные модификации моделей, рассмотренных в данной работе.

Автор считает важным выразить благодарность тем людям, без которых данная диссертация никогда бы не была создана:

- Равлюк Снежане Григорьевне, чудесным образом являющейся для меня одновременно коллегой и соавтором в ряде исследований, ценным консультантом в области социальных наук, любимой и женой;

- Малинецкому Георгию Геннадьевичу, бессменному научному руководителю с моих студенческих времен, давшему неисчислимо количество бесценных советов и рекомендаций;

- Волкову Денису Николаевичу, без чьего уникального программного комплекса исследования из третьей главы вряд ли были бы настолько полными и успешными;

- Петрову Александру Пхоун Чжо, чья исключительная компетентность в области модели А.П. Михайлова «власть-общество» обеспечила возможность создания дискретного варианта упомянутой модели;

- Гавдаевой Александре Владимировне, Агаповой Галине Игоревне, Степновой Инне Вячеславовне, Прядеину Роману Борисовичу и Кайленову Асхату Сунгатовичу – студентам РГСУ и НИУ ВШЭ, без научного сотрудничества с которыми и без чьих блестящих идей многие разделы диссертации остались бы чисто теоретическими.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стругацкий А. Н., Стругацкий Б. Н. Сказка о Тройке (1-й экз.): История непримиримой борьбы за повышение трудовой дисциплины, против бюрократизма за высокий моральный уровень, против обезлички за здоровую критику и здоровую самокритику, за личную ответственность каждого, за образцовое содержание отчетности и против недооценки собственных сил // Понедельник начинается в субботу. Сказка о Тройке (2 экз.). – М.: ООО «Изд-во АСТ»; СПб.: Terra Fantastica, 1997. – С. 271-472.
2. Арнольд В. И. Полиматематика: является ли математика единой наукой или набором ремесел. - ФАЗИС, 2005. -С. 1-18.
3. Куран Р., Роббинс Г. Что такое математика. Элементарный очерк идей и методов. -М.: Просвещение, 1967. -560 с.
4. Мальтус Т. Опыт о законе народонаселения или изложение прошедшего и настоящего действия этого закона на благоденствие человеческого рода, с приложением нескольких исследований о надежде на отстранение или смягчение причиняемого им зла. — СПб.: типография И И. Глазунова, 1868.
5. Кун Т. Структура научных революций. -М.: АСТ, 2009. -320 с.
6. Лем С. Сумма технологии /Собр. Соч. Т. 13 (дополнительный). – М.: Текст, 1996. – 463 с.
7. Verhulst P. F. Recherches Mathématiques sur La Loi D'Accroissement de la Population // Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles. — 1845. — 18, Art. 1. — P. 1–45.
8. Kremer M. Population Growth and Technological Change: One Million B.C. to 1990 // The Quarterly Journal of Economics. – 1993. – 108. – P. 681-716.
9. Kuznets S. Population Change and Aggregate Output. In Demographic and Economic Change in Developed Countries. — Princeton, NJ: Princeton University Press. — 1960.
10. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. Серия "Синергетика: от прошлого к будущему". Изд. 3. — М.: УРСС, 2003. — 288 с.
11. Малков С.Ю. Математическое моделирование исторических процессов // Новое в синергетике. Взгляд в третье тысячелетие. Под редакцией Малинецкого Г.Г. и Курдюмова С.П. — М.: Наука, 2002. — 478 с.
12. Подлазов А.В. Теоретическая демография как основа математической истории. Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. — 2000. — № 73.
13. Данилов Ю. А. Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение/Изд. 4-е. - М.: URSS, 2011. -208 с.
14. Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б., Подлазов А. В. Нелинейная динамика: Подходы,

результаты, надежды. -М.: КомКнига, 2006. -280 с.

15. Андрианов И. В., Баранцев Р. Г., Маневич Л. И. Асимптотическая математика и синергетика: Путь к целостной простоте. Изд. 2-е. -М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. - 304 с. (Синергетика: от прошлого к будущему).

16. Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. Структуры и хаос в нелинейных средах. -М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. -488 с.

17. Бак П. Как работает природа: Теория самоорганизованной критичности. -М.: Либроком, 2013. -276 с.

18. Безручко Б. П., Короновский А. А., Трубецков Д. И., Храмов А. Е. Путь в синергетику. Экскурс в десяти лекциях. -М.: КомКнига, 2005. -304 с.

19. Буданов В. Б. Методология синергетики в постнеклассической науке и образовании. Изд. 3-е. -М.: ЛКИ, 2009. -240 с.

20. Мухин Р. Р. Очерки по истории динамического хаоса: Исследования в СССР в 1950-1980 годы. Изд. 2-е -М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. -320 с.

21. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации. -М.: Мир, 1979. -512 с.

22. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. -М.: Мир, 1980. -608 с.

23. Sparrow С. The Lorenz equations: bifurcations, chaos and strange attractors. -Berlin: Springer, 1982. -269 p.

24. Подлазов А. В. Математические методы исследования массивов данных социологического мониторинга//Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2012. № 71. 28 с.

25. Человек. Наука, Цивилизация. К семидесятилетию академика В. С. Степина. -М.: Канон+, 2004. -816 с.

26. Вигнер Е. Пределы науки/Этюды о симметрии. -М.: Мир, 1971. -С. 170-181.

27. Динамические системы-2/Под ред. Я. Г. Синая. -М.: ВИНТИ, 1985. -312 с.

28. Тарасов В. Е. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. -М.-Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. -568 с.

29. Самарский А. А. Введение в численные методы. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982. -272 с.

30. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. -М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1974. 224 с.

31. Моисеев Н.Н. Математика ставит эксперимент. М.: Наука, 1979.

32. Хакен Г. Синергетика. - М.: Мир, 1980. - 408 с.

33. Трубецков Д. И. Введение в синергетику. Колебания и волны. Изд. 2-е. -М.: Едиториал УРСС, 2003. -224 с.

34. Трубецков Д. И. Введение в синергетику. Хаос и структуры. Изд.2-е. -М.: Едиториал УРСС, 2004. -240 с.
35. Лоренц Э. Детерминированное непериодическое течение/Странные аттракторы, под ред. Я. Г. Синая, Л. П. Шильникова. -М.: Мир, 1981. -С. 88-116.
36. Черепашук А. М., Чернин А. Д. Горизонты Вселенной. -Новосибирск: Изд-во Со РАН, 2005. -372 с.
37. Пенроуз Р. Новый ум короля. О компьютерах, мышлении и законах физики. Изд. 3е. М.: ЛКИ, 2008.
38. Еленин Г. Г. Нанотехнологии, наноматериалы, наноустройства/Новое в синергетике: Взгляд в третье тысячелетие. -М.: Наука, 2002. -С. 123-135.
39. Синергетика: Будущее мира и России / Под ред. Г. Г. Малинецкого. -М.: Издательство ЛКИ, 2008. -384 с.
40. Малинецкий Г. Г. Пространство синергетики: Взгляд с высоты. -М.: Либроком, 2013.
41. Мне нужно быть: Памяти Сергея Павловича Курдюмова/Ред.-сост. З. Е. Журавлева. - М.: КРАСАНД, 2010. -480 с.
42. Трубецков Д. И. Наука о сложности в лицах, датах и судьбах. Как закладывались основы синергетики: Пиршество духа и драма идей. -М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. - 224 с.
43. Forrester J. W. Industrial Dynamics. — MIT Press, 1961. — 484 p.
44. Егоров В.А., Каллистов Ю.Н., Митрофанов В.Б., Пионтковский А.А. Математические методы глобального развития. – Л., Гидрометеиздат. 1980. 192 с.
45. Glass D. V. Population policies and movements in Europe. — Clarendon Press, Oxford, 1940. —280 p.
46. Von Neumann J. Theory of Self-Reproducing Automata (edited and completed by Arthur Burks), Univ. of Illinois Press, 1966.
47. Фон Нейман Дж. Теория самовоспроизводящихся автоматов. Пер. с англ. — М.: Мир, 1971. — 326 с.
48. Ulam S. Random Processes and Transformations // Proc. Int. Congr. Mathem. (held in 1950) 2 (1952), pp. 264-275.
49. Zuse K. Rechnender Raum Vieweg, Braunschweig (1969)
50. Burks A. (ed.) Essays on Cellular Automata, Univ. Ill. Press, 1970.
51. Holland J. Universal Spaces: A Basis for Studies in Adaptation, Automata Theory, Academic Press (1966), 218-230.
52. Toffoli T. Cellular Automata Mechanic, Tech. Rep. 208 Comp. Comm. Sci. Dept., The Univ. of Michigan (1977).

53. Hedlund G. A., Appel K. I. and Welch L R. All Onto Functions of Span Less Than or Equal To Five // Communications Research Division, working paper (July 1963).
54. Hedlund G. A. Endomorphism and Automorphism of the Shift Dynamical System // Math. Syst. Theory 3 (1969), 51-59.
55. Richardson D. Tessellation with Local Transformations // J. Comp Syst. Sci. 6 (1972), 373-388.
56. Amoroso S. and Patt Y. N. Decision Procedures for Surjectivity and Injectivity of Parallel Maps for Tessellation Structures // J. Comp. Syst. Sci. 10 (1975), 77-82.
57. Smith A. Cellular Automata Theory // Tech. Rep. 2, Stanford Electronic Lab., Stanford Univ. (1969).
58. Aladyev V. Computability in Homogeneous Structures // Izv. Akad. Nauk. Estonian SSR, Fiz.- Mat. 21 (1972), 80-83.
59. Будущее прикладной математики. Лекции для молодых исследователей/Под ред. Г. Г. Малинецкого. - М.: Едиториал УРСС, 2005. -512 с.
60. Будущее прикладной математики: Лекции для молодых исследователей. От идей к технологиям/Под ред. Г. Г. Малинецкого. -М.: КомКнига, 2008. -512 с.
61. Будущее прикладной математики: Лекции для молодых исследователей. Поиски и открытия/Под ред. Г. Г. Малинецкого. -М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. -640 с.
62. Maruoka A. and Kimura M. Injectivity and Surjectivity of Parallel Maps for Cellular Automata // J. Comp. Syst. Sci. 18 (1979), 47-64.
63. Oono Y. and Kohmoto M. // Phys. Rev. Lett, v.55, N 27 (1985), 2927-2931.
64. Codd E. F. Cellular Automata. — Academic Press, 1968. — 132 p.
65. Gardner M. The Fantastic Combinations of John Conway's New Solitaire Game 'Life', // Scientific. American 223:4 — April 1970. — P.120–123.
66. Bagnoli F., Rechtman R. and Ruffo S. Some Facts of Life // Physica A, 171 (1991), 249-264
67. Fredkin E. and Toffoli T. Conservative Logic // Int. J. Theor. Phys. 21 (1982), 249-253.
68. Margolus N. Physics-like models of computation // Physica IOD (1984), 81-95.
69. Margolus N. Quantum Computation // Proceedings of a conference on New Ideas and Techniques in Quantum Measurement Theory (December 1985).
70. Toffoli T. Bicontinuous extension of reversible combinatorial functions, Maths. Syst. Theory 14 (1981), 13-23.
71. Toffoli T. Reversible Computing, "Automata, Languages and Programming (de Bakker and van Leeuwen eds.), Springer-Verlag (1980), 632-644.
72. Bennett C. Logical Reversibility of Computation // IBM J. Res. Develop. 6 (1973), 525-

532.

73. Bennett C. and Grinstein G. Role of Irreversibility in Stabilizing Complex and Nonenergetic Behavior in Locally Interacting Discrete Systems // *Phys. Rev. Lett.* 55 (1985), 657-660.

74. Landauer R. Irreversibility and heat generation in the computing process // *IBM J. Res. Devel.* 5 (1961), 183-191.

75. Mandelbrot B. *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman (1982).

76. Sander L Fractal growth processes // *Nature* 322 (1986) 789-793.

77. Brender R. A Programming System for the Simulation of Cellular Spaces // *Tech. Rep. 25, CONCOMP, The Univ. of Michigan* (1970).

78. Toffoli T. Integration of the Phase-Difference Relations in Asynchronous Sequential Networks," *Automata, Languages, and Programming*, Springer-Verlag (1978), 457-463.

79. Тоффоли Т., Марголюс Н. *Машины клеточных автоматов*. — М.: Мир, 1991. — 280 с.

80. Tucker J. Cellular automata machine: the ultimate parallel computer // *High Technology* 4:6 (1984), 85-87.

81. Margolus N., Toffoli T. and Vichniac G. Cellular-Automata Supercomputers for Fluid Dynamics Modeling // *Phys. Rev. Lett.* 56 (1986), 1694-1696.

82. Toffoli T. CAM: A high-performance cellular-automaton machine," *Physica IOD* (1984), 195-204.

83. Toffoli T. and Margolus N. The CAM-7 Multiprocessor: A Cellular Automata Machine // *Tech. Memo LCS-TM-289, MIT Lab. for Comp. Sci.* (1985).

84. Packard N. and Wolfram S. Two-dimensional cellular automata // *J. Stat. Phys.* 38 (1985), 901-946.

85. Wolfram S. Statistical mechanics of cellular automata // *Rev. Mod. Phys.* 55 (1983), 601-644.

86. Wolfram S. Universality and Complexity in Cellular Automata // *Physica IOD* (1984), 1-35.

87. Wolfram S. Computation Theory of Cellular Automata // *Commun. Math. Phys.* 96 (1984), 15-57.

88. Wolfram S. Random-Sequence Generation by Cellular Automata//*Adv. Applied Math.* 7 (1986), 123-169.

89. Wolfram S. (ed.). *Theory and Applications of Cellular Automata* //World Scientific, Singapore, 1986.

90. Salem J. and Wolfram S. Thermodynamics and hydrodynamics of Cellular Automata. *Theory and Applications of Cellular Automata*. World Scientific (1986) 362-366.

91. Bays C. Classification of semitotalistic cellular automata in three dimensions. *Complex Systems* 2 (1988) 235.
92. Gutowitz H. A. A Hierarchical Classification of Cellular Automata. // *Physica D* 45 (1990) 136-156.
93. Culik K. and Yu S. Undecidability of CA classification schemes // *Complex Systems* 2 (1988) 177
94. Фейнман Р. Квантовомеханические ЭВМ. УФН (1986) т.149 вып. 4, с. 671- 688.
95. Hardy J., de Pazzis O. and Pomeau Y. Molecular dynamics of a classical lattice gas: Transport properties and time correlation functions // *Phys. Rev. A* 13 (1976), 1949-1960.
96. Orszag S. and Yakhot V. Reynolds Numbers Scaling of Cellular-Automaton Hydrodynamics // *Phys. Rev. Lett.* 56 (1986), 1691-1693.
97. U.Frish, D. d'Humiere, B. Hasslacher, P. Lallemand, Y. Pomeau and J-P.Rivet Lattice Gas Hydrodynamics in 2 and 3 Dimensions. // *Complex Systems*, 1 (1987), 648- 655.
98. Pomeau Y. Invariant in Cellular Automata // *J. Phys.* A17 (1984), 1415-1418.
99. Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
100. Toffoli T. Cellular automata as an alternative to (rather than an approximation of) differential equations in modeling physics // *Physica* 10D. — 1984. — P.117–127.
101. Малинецкий Г.Г., Шакаева М.С. Моделирование колебательных химических реакций на поверхности с помощью клеточных автоматов // *Журнал физической химии.* — 1995 — Т. 69, № 8. — С.1523–1527.
102. Малинецкий Г.Г., Степанцов М.Е. Построение моделей класса решеточных газов для решения задач газодинамики // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика.* 1996. Т. 4. № 4. С. 59.
103. Kimura M. and Weiss G. The stepping stone model of population structure and the decrease of genetic correlation with distance // *Genetics* 49 (1964), 561-576.
104. Винер М.. и Розенблют А. В книге: *Кибернетический сборник.* М.: ИЛ, 1961, т. 3, 7-56.
105. Vichniac G. Cellular automata models of disorder and organization. *Disordered Systems and Biological Organization*, Springer Verlag (1986), 1-20.
106. Benjamin S. C., Johnson N. F. and Hui P. M. Cellular automata models of traffic flow along a highway containing a junction // *J. Phys. A: Math Gen.* 29 (1996) 3119-3127.
107. Blue V.J., Adler J.L. Cellular automata microsimulation of bidirectional pedestrian flows // *Transp.Res.Rec.-1999.N1678.-P.135-141.*
108. Kirchner A., Schadschneider A. Simulation of evacuation processes using a bionics-inspired cellular automaton model for pedestrian dynamics // *Physica A-2002.-Vol.312,N1-2.-p.260-*

109. Любимский Э.З. На пути к построению общества программ // Программирование. 2009. № 1. С. 4–9.
110. Preston K. and Duff M. Modern Cellular Automata, Theory and Applications Plenum Press (1984).
111. Banks E. Information Processing and Transmission in Cellular Automata // Теч. Rep. МАСТР-81, MIT Project MAC (1971)
112. Арнольд В.И. Жёсткие и мягкие математические модели. — М.: МЦНМО, 2008. — 32 с.
113. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. -М.: Мир, 1983. -301 с.
114. Курдюмов С. П. Режимы с обострением. Эволюция идеи./Сборник статей под ред. Г. Г. Малинецкого / 2-е изд. исправ. и доп. -М.: Физматлит, 2006. -312 с.
115. Майнцер К. Сложносистемное мышление. Материя, разум, человечество. Новый синтез. — М.: Книжный дом Либроком, 2009. — 464 с.
116. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. — М.: Наука, 1973. — 415 с.
117. Naegerstrand T. Innovation diffusion as a spatial process. — Lund, CWK Gleerup, 1953.
118. Beckmann M.J. A continuous model of transportation. // *Econometrica*, Vol. 20, No. 4. — The University of Chicago, 1952. — P. 643-660.
119. Малков А.С. О математическом моделировании товаропотоков. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. — 2005. — № 11.
120. Бадалян Л. Г., Криворотов В. Ф. История. Кризисы. Перспективы: Новый взгляд на прошлое и будущее/Изд. 2-е. -М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. -288 с.
121. Бадалян Л.Г., Криворотов В.Ф. Динамическая модель исторических экономик // Проблемы математической истории: Математическое моделирование исторических процессов / Отв. ред. Малинецкий Г.Г., Коротаев А.В. М.: ЛИБРОКОМ, 2008.
122. Турчин П.В. Историческая динамика: На пути к теоретической истории / Пер. с англ. Под общ. ред. Малинецкого Г.Г., Подлазова А.В., Боринской С.А. Предисл. Малинецкого Г.Г. М.: ЛКИ, 2007.
123. Вильсон А. Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем. — М.: Наука, 1978. — 248 с.
124. Швецов В.И., Алиев А.С. Математическое моделирование загрузки транспортных сетей. — М.: URSS, 2003. — 64 с.
125. Чернавский Д. С. Синергетика и информация. Изд. 2-е -М.: Едиториал УРСС, 2004. -

288 с.

126. Коротаев А.В., Чернавский Д.С., Малков А.С., Чернавская Н.М. Математические модели исторической демографии (как хаос на микроуровне порождает предсказуемую динамику на макроуровне) // *Общественные науки и современность*. — 2005. — № 5. — С. 140–154.

127. Гольц Г. А. Транспорт и расселение. — М.: Наука, 1981. — 248 с.

128. Кестен Х. Теория просачивания для математиков. -М.: Мир, 1986. -392 с.

129. Кокстер Г. С. М. Введение в геометрию. -М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1966. -648 с.

130. Leontief W. Input-Output Economics. — New York: Oxford University Press, 1966. — 67 p.

131. Cobb C. W., Douglas P.H. A Theory of Production // *American Economic Review*. — 1928. — Vol. 18, No. 1. — P. 139 -165.

132. Solow R.M. Technical Change and the Aggregate Production Function // *The Review of Economics and Statistics*. — 1957, August. Vol.39, No. 3. — P. 312–320.

133. Владимиров В. А., Воробьев Ю. Л., Малинецкий Г. Г. и др. Управление риском: Риск. Устойчивое развитие. Синергетика. -М.: Наука, 2000. 431 с.

134. Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа. -М.: Мир, 1981. -488 с.

135. Burtsev V. S., Turchin P. V. Evolution of cooperative strategies from first principles//*Nature (Letters to Editor)*. -2006. -№ 440. -P. 1041-1044.

136. Подлазов А. В. Закон Ципфа и модели конкурентного роста. Нелинейность в современном естествознании. URSS, 2013. С. 229-256.

137. Бир С. Мозг фирмы. Изд. 3е. М.: ЛИБРОКОМ, 2009.

138. Антипов В.И., Малинецкий Г.Г., Отоцкий П.Л., Шишов В.В. Расчёт социально-экономических показателей регионов России в период мирового кризиса. Подготовка кадров, методическое, алгоритмическое и программно-технологическое обеспечение. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2009. Препринт № 11.

139. Бек У. Общество риска. На пути к другому модерну / Пер. с нем. Седельника В. и Фёдоровой Н. / Послесл. Филиппова А. М.: ПрогрессТрадиция, 2000.

140. Будущее России в зеркале синергетики // *Будущая Россия* / Ред. Малинецкий Г.Г. М.: КомКнига, 2006.

141. Цетлин М.Л. Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. М.: Наука, 1969.

142. Гельфанд И.М., Розенфельд Б.И., Шифрин М.А. Очерки о совместной работе математиков и врачей. Изд. 2е. М.: Эдиториал УРСС, 2004.

143. Хартманн У. Очарование нанотехнологии. -М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2008. -173 с.
144. Николис Дж. Г., Мартин А. Р., Валлас Б. Дж., Фукс П. А. От нейрона к мозгу/Пер. с англ./Изд. 3, стереот. М.: URSS, 2012. 672 с.
145. Малинецкий Г. Г., Маненков С. К., Митин Н. А., Шишов В. В. Когнитивный вызов и информационные технологии//Вестник РАН, 2011. -Т. 81, № 8. -С. 707-716.
146. Редько В.Г. Эволюция, нейронные сети, интеллект: Модели и концепции эволюционной кибернетики. Изд. 4-е. М.: КомКнига, 2006.
147. Алескеров Ф. Т., Хабина Э. Л., Шварц Д. А. Бинарные отношения, графы и коллективные решения. — М.: ВШЭ, 2006. — 300 с.
148. Gale D., Shapley L. S. College Admissions and the Stability of Marriage // *American Mathematical Monthly*. — 1962. — 69. — P. 9–14.
149. Босс В. Лекции по математике: Вероятность, информация, статистика. Т. 4. М.: Либроком, 2013. 216 с.
150. FIFA // Electronic Arts. URL: <http://www.ea.com/fifa/> (дата обращения 01.11.2013).
151. Исихара Р. Статистическая механика. -М.: Мир, 1973. 472 с.
152. Михайлов А.П. Математическое моделирование власти в иерархических структурах // *Математическое моделирование*. — 1994. — Т.6, №6. — С. 108–138.
153. Дмитриев М.Г., Павлов А.А., Петров А.П. Модель «власть-общество-экономика» для случая слабо коррумпированной дискретной иерархии // *Математическое моделирование*. — 2012. —Т. 24. № 2. — С.120–128.
154. Лефевр В.А. Интенционально-рефлексивная модель агента // *Рефлексивные процессы и управление*. — 2008. — №.1. — С. 69–78.
155. Квасников И. А. Термодинамика и статистическая физика. — М.: Изд-во МГУ, 1991. — 560 с.
156. Шредингер Э. Избранные труды по квантовой механике / Отв. ред. д. ф.-м. н. Л. С. Полак. — Москва : Наука, 1976. — 424 с.
157. Самарский А. А.. Необходимость новой методологии. Математика и методологическое обоснование науки // *Коммунист*. 1989, №1. С. 84-92.
158. Appert C. and Zaleski S. Lattice gas with phase transition // *Physica D* v.47 N1&2 (1991), 85-92.
159. Петров А.П., Маслов А.И., Цаплин Н.А. Моделирование выбора позиций индивидами при информационном противоборстве в социуме // *Математическое моделирование*, 2015. Т.27, №12. С.137-148.
160. Rashevsky N. *Mathematical biophysics: physico-mathematical foundations of biology*. —

Univ. of Chicago, Chicago Press. – 1938.

161. Kadanoff L On two levels // *Physics Today* 39:9 (September 1986), p. 7-9.

162. Vichniac G. Simulating physics with cellular automata // *Physica IOD* (1984), p. 96-115.

163. Беркович С.Я. Клеточные автоматы как модель реальности: поиски новых представлений физических и информационных процессов. — М.: МГУ, 1993. - 112 с.

164. Под ред. Малинецкого Г.Г. и Курдюмова С.П. Новое в синергетике: взгляд в третье тысячелетие. — М.: Наука, 2002. — 478 с.

165. P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld. Self-organized criticality. An explanation of 1/f noise. // *Phys. Rev. Lett.* — 1987. — 59. — P. 381–384.

166. Малинецкий Г. Г., Подлазов А. В. Сравнение двумерных изотропных консервативных саморганизованно-критических моделей типа куча песка//*Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Естественные науки*, 2012. Спец. Выпуск № 2 «Математические модели в технике». С. 119-128.

167. E.Berlekamp, J.Conway and R.Guy. *Winning ways for your mathematical plays*, vol.2. — Academic Press, 1982.

168. Pearson R. An Algorithm for Pseudo Random Number Generation Suitable for Large Scale Integration // *J. Computat. Phys.* 3 (1983), 478-489.

169. Petrov A.P., Lebedev S.A. Online Political Flashmob: the Case of 632305222316434 // *Computational mathematics and information technologies*. — 2019. — No 1. — P. 17–28.

170. Прончева О.Г., Петров А.П. Функция отклика на пропаганду в консолидированных и поляризованных обществах // *Информационные войны* – 2018. – №3 (47). – С. 50-53.

171. Petrov A., Proncheva O. Modeling propaganda battle: decision-making, homophily and echo chambers // *Artificial Intelligence and Natural Language. AINL 2018. Communications in Computer and Information Science*, vol 930. Springer. – P. 197-209.

172. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. — М.: Наука, 2001. — 320с.

173. Михайлов А.П. Моделирование системы «власть-общество». — М.: Физмат-лит, 2006 – 144 с.

174. Петров А.П. О модели «власть-общество» с периодической функцией реакции гражданского общества // *Математическое моделирование*. 2008 — Т.20. №11. — С. 80–88.

175. Дмитриев М.Г., Жукова Г.С., Петров А.П. Асимптотический анализ модели "власть-общество" для случая двух устойчивых распределений власти // *Математическое моделирование*. — 2004. — Т.16, №5. — С.23–34

176. Михайлов А.П., Петров А.П. Поведенческие гипотезы в математическом моделировании социальных процессов // *Социология*. — 2010. — №3. — С. 160–167.

177. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990. — 208 с.
178. Колемаев В.А. Математическая экономика. — М.: ЮНИТИ, 1998. — 240 с.
179. Vabishchevich P. Finite-difference solutions of convection /diffusion problems // 14-th IMACS World Congress Comput. and Appl. Math. — 1994. — V. 2. — P. 976-978.
180. Frisch U., Hasslacher B., Pomeau Y. Lattice-gas automata for Navier-Stokes equation // Phys. Rev. Lett. — 1986. — V. 56. — P. 1505–1508.
181. Appert C., Zalesski S. Lattice gas with a liquid-gas transition // Phys. Rev. Letts. 1990. — V. 64. — P. 1–4.
182. J. Hardy, Y. Pomeau and O. de Pazzis. Time Evolution of a Two-Dimensional Model System. // J. Math. Phys. — Sept.1978. — V.19, №3. — P. 293–297.
183. Вандескрик К. Демографический анализ: пер. с фр. — М.: Акад. проект: Гаудеамус, 2005. — 263 с.
184. Дюркгейм Э. О разделении общественного труда. Метод социологии. — М.: Канон, 1996. — 576 с.
185. Собкин В.С., Равлюк С.Г. Учитель об образовании: опыт социологического исследования профессиональной позиции // Социология образования. Труды по социологии образования. Т IX. Вып. XV. — М.: ЦСО РАО, 2004. — С. 281-338.
186. Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Математические модели биологических процессов. — М.: Изд-во МГУ, 1993 — 302 с.
187. Короновский А.А., Стриханов М.П., Трубецкая Д.И., Храмов А.Е., Цуканова И.В. Применение клеточных автоматов для моделирования динамики профессорско-преподавательского состава высшей школы Российской Федерации // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2001. — Т. 9. № 6. — С. 154–167.
188. Собкин В.С., Равлюк С.Г. Если будущее вызывает тревогу // Газета «Первое сентября» №62 от 06.10.2001.
189. Федеральная служба государственной статистики // Итоги федерального статистического наблюдения в сфере оплаты труда отдельных категорий работников, 2014. URL: http://www.gks.ru/free_doc/new_site/PublishOTKR_6/index.html (дата обращения 22.08.2014).
190. Соколова И.И., Александрова Н.М., Мищенко А.С. и др. Социально-профессиональный портрет педагога: науч. докл. — СПб: Учреждение РАО ИПО, 2009.
191. Капицын А.В. Исследование взаимосвязи между индивидуально-психологическими особенностями учителей средних школ и успешностью их педагогической деятельности // ФЭН-НАУКА. — 2012. — №6. — С. 45–47.

192. Степнова И.В. Моделирование динамики численности студентов на основе метода когорт // Выпускная работа бакалавра 4-го курса очного отделения факультета информационных технологий РГСУ. — М.: РГСУ, 2010.
193. Bianco, La Bella, Agostino (Eds.) Freight Transport Planning and Logistics. Proceedings of an International Seminar on Freight Transport Planning and Logistics. Bressanone, Italy, July 1987. — Springer, 1987.
194. Бутов А.С., Гаскаров Д.В., Егоров А.Н., Крупенина Н.В.. Под ред. Бутова А.С. Транспортные системы. Моделирование и управление. — СПб.: Судостроение, 2001. — 552 с.
195. Попков Ю. С., Посохин М. В., Гутнов А. Э., Шмульян Б. Л. Системный анализ и проблемы развития городов. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983.— 512 с.
196. Лившиц В.В. Математическая модель случайно-детерминированного выбора и ее применение для расчета трудовых корреспонденций. // Автоматизация процессов градостроительного проектирования. Сборник. М.: ЦНИИП градостроительства. — 1973. — С. 39–57.
197. Федеральная служба государственной статистики Российской Федерации. 2010. URL: <http://www.gks.ru/> (дата обращения 12.04.2010).
198. Государственный комитет статистики Украины. 2010. URL: <http://www.ukrstat.gov.ua/> (дата обращения 11.05.2010).
199. Импортеры и экспортеры Украины. 2010. URL: <http://eximbase.com/> (дата обращения 11.05.2010).
200. Официальный сайт ОАО "РЖД". 2010. URL: <http://www.rzd.ru/> (дата обращения 09.04.2010).
201. Официальный сайт украинских железных дорог. 2010. URL: <http://www.uz.gov.ua/> (дата обращения 18.05.2010).
202. Barnett T., Brown, A., Clarke, S. Developing a tennis model that reflects outcomes of tennis matches.— Melbourne: Faculty of Life and Social Sciences, Swinburne University, 2006.
203. O'Malley A. J. Probability Formulas and Statistical Analysis in Tennis // Journal of Quantitative Analysis in Sports. — 2008. — Vol. 4, Issue 2. — P. 1–23.
204. Правила игры в теннис, принятые международной теннисной федерацией. 2014. URL: http://www.tennis-russia.ru/judge/rules_regulations/rules (дата обращения 21.04.2016).
205. Прядеин Р.Б. Моделирование исходов спортивных событий с применением вероятностных методов и методов имитационного моделирования. Диссертация на соискание ученой степени магистра. — НИУ ВШЭ, 2014.
206. Klaassen F. J. G. M., Magnus J. R. Testing some common tennis hypotheses: Four years at

Wimbledon. Preprint of Department of Econometrics, Tilburg University. — 1996.

207. Brimberg J., Hurley W. J., Lior D. U. Allocating energy in a first-to-n match // IMA Journal of Management Mathematics. — 2004. — 15 (1).— P. 25–37.

208. Всероссийская федерация волейбола. Официальные правила волейбола. 2012. URL: <http://www.volley.ru/documents/466/p1/251/> (дата обращения 21.04.2016).

209. Reep C., Benjamin B. Skill and chance in association football // Journal of the Royal Statistical Society, Series A. — 1968. — 131. — P. 581–585.

210. Dixon M.J., Coles S.G. Modelling association football scores and inefficiencies in football betting market // Applied Statistics. — 1997.— 46. — P. 265–280.

211. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. — М.: Наука, 1970. — 272 с.

212. Чемпионаты, турнирные таблицы, результаты матчей // Футбол онлайн, 2013. URL: <http://www.ftables.ru> (дата обращения 11.03.2013).

213. Кайленов А. С. Исследование характеристик формул турниров спортивных соревнований при помощи математического моделирования // Выпускная квалификационная работа бакалавра. — НИУ ВШЭ, 2015.