

JAWOOSH KARRAR SAHIB NASSRULLAH

SYMBOLIC REGRESSION ALGORITHM FOR CONTROL OF NON-HOLONOMIC WHEELED MOBILE ROBOTS

2.3.1. Systems analysis, management and information processing, statistics

Abstract of the dissertation

For the degree of candidate of technical sciences

The work was performed at the Engineering Academy of the Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

Scientific supervisor: Stepanyan Ivan Viktorovich, Doctor of Biological Sciences, PhD (Technical Sciences) Professor of the Department of Mechanics and Control Processes at the RUDN University Academy of Engineering

Official opponents: Diveev Askhat Ibragimovich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Researcher at the Federal State Institution Federal Research Center for Informatics and Management of the Russian Academy of Sciences

Vyacheslav V. Kupriyanov, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Automated Control Systems at the Institute of Computer Science of the National Research Technological University MISIS

Kozov Alexey Vladimirovich, PhD (Technical Sciences), Senior Researcher at the Department "Automated Vehicles" of the Scientific and Educational Center "Robotics" of the Bauman Moscow State Technical University (National Research University)

The dissertation defense will take place on 12/29/2025 at 15:00 a.m. at the meeting of the Dissertation Council of the PDS 2022.016 at the address: 115419, Moscow, Ordzhonikidze str., 3

The dissertation is available in the scientific library of the RUDN University at the address: 117198, Moscow, Miklukho-Maklaya str., 6

The announcement of the defense and the abstract of the dissertation are posted on the websites <http://vak2.ed.gov.ru> / and <https://www.rudn.ru/science/dissovet>

The abstract was sent on 11/27/2025.

Scientific Secretary of the Dissertation Council PDS 2022.016

PhD

O.E. Samusenko

GENERAL CHARACTERISTICS OF THE WORK

Relevance and level of development of the research topic

Contemporary developments in industrial automation have been driven by the integration of intelligent robotic systems that exhibit self-learning behaviors and a high degree of operational autonomy. These advanced robots are designed to function across a broad spectrum of tasks without requiring constant supervision. Specifically, mobile robots with non-holonomic constraints and wheel-driven locomotion are widely utilized in industrial automation, supporting activities such as assembly line processes, warehouse navigation, and facility maintenance.

Numerous studies in the scientific domain focus on the synthesis of control architectures and the optimization of dynamic trajectories. Particular emphasis has been placed on analytical and computational methods for resolving control challenges—areas that have been profoundly shaped by the seminal contributions of renowned scholars, including S. Wolfram, W.R. Ashby, W. McCulloch, W. Pitts, V.G. Boltyanski, R. Bellman, P.K. Anokhin, L.S. Pontryagin, A.I. Diveev, N. Wiener, and A.N. Kolmogorov.

The implementation of optimal control strategies faces a key challenge: the inability to directly apply time-parameterized control functions to actual physical systems. This limitation arises from the open-loop configuration, which offers no correction mechanism in the presence of disturbances, potentially leading to substantial trajectory deviations and failure to meet performance criteria. In mobile robotics, effective control necessitates robust stabilization and high-fidelity trajectory tracking. The stability of the closed-loop system is commonly ensured by stabilizing the state trajectory near an equilibrium point within the state space, which serves as a foundation for robust autonomous operation.

Object of research

The focus of this study is on the maneuvering behavior of a two-robot system consisting of nonholonomic mobile platforms with differential drive actuation.

Subject of research

The mathematical models and algorithmic support of the symbolic regression method, particularly as applied to identifying interpretable control function expressions and their numerical parameter values.

The purpose of the dissertation work

This work seeks to contribute to the field of intelligent control by developing and improving machine learning-based strategies for multi-agent systems, exemplified by a pair of non-holonomic wheeled mobile robots. The pursuit of this goal necessitates addressing the following specific tasks:

1. An investigation into genetic programming methods, evolutionary optimization techniques, and symbolic regression algorithms to advance automated model discovery and control system design.
2. Development of a numerical control approach that guarantees collision avoidance between two mobile robotic agents, as well as between each agent and the obstacles in the workspace.
3. Development of a symbolic regression-based control synthesis method that exploits the small variations principle to ensure stabilization of a robot towards a specified equilibrium point inside the state space.
4. Application of an evolutionary algorithm to dynamically reposition stable equilibrium points within a closed-loop control system that incorporates external feedback.

5. The outcome of the stabilization stage must be mathematically represented through a system of differential equations.

Methodology and research methods

The control object is endowed with a stabilization system that defines its essential dynamic property: a stable point of equilibrium within the state space. Robot control is accomplished by intelligently manipulating this point position, employing a methodological framework of an evolutionary algorithm, symbolic regression, and mathematical modeling through systems of differential equations.

The inner-loop control system, designed to stabilize the system around an operating point of equilibrium, is synthesized at an early stage and forms the cornerstone for the outer-loop control strategy that governs equilibrium point positioning. Such points can be set statically or modified online to accommodate environmental changes.

Through symbolic regression, control functions for mobile robots are automatically synthesized in the form of human-readable mathematical expressions. These formalized algorithms govern system behavior to meet mission objectives and maintain collision-free trajectories. Symbolic regression facilitates the discovery of interpretable control functions by evolving both their functional form and tunable parameters. It follows from the universality of symbolic representations that, in the general case, symbolic regression can generate expressions that approximate the functional form of any neural network to a desired degree of accuracy (A.I. Diveev, E. Yu. Shmalko, 2021).

Scientific novelty of the work

- An enhanced control problem formulation has been developed for nonholonomic mobile robotic systems, which includes additional design requirements to ensure the development of the stabilization system.
- A novel machine learning approach-symbolic regression-has been introduced to facilitate the synthesis of control systems capable of achieving state-space stabilization.
- The new approach synthesizes a dynamical system described by differential equations, leveraging the principle of small variations in the evolutionary processes of a genetic algorithm.
- A new computational solution is contributed to the trajectory optimization problem for paired nonholonomic robots, explicitly accounting for geometric and kinematic constraints imposed by surrounding obstacles.
- The fundamental problem of synthesizing control systems for nonlinear mobile robotic systems with identification of dynamic equations has been solved.

Practical significance of the work

This study presents a synthesized optimal control methodology designed to solve trajectory and stability problems by explicitly controlling the location of the robot's stable point of equilibrium. The resulting methodology introduces a novel control paradigm based on equilibrium-point modulation.

The proposed methodology is specifically designed to address practical engineering challenges by reducing the gap between the theoretical mathematical model of the controlled system and its physical realization. This objective is accomplished through the integration of an inner-loop stabilization within the control architecture. Additionally, symbolic regression techniques exhibit broad applicability in the synthesis of control laws across diverse dynamical systems.

Theoretical significance of the work

An optimal control problem is established under extended constraint conditions, including the stipulation that the generated state-space trajectory must be attractive—that is, it must draw the system state into a given neighborhood. The proposed solution tackles the synthesis of a stabilizing feedback system for nonholonomic wheeled robots by engineering a stable point of equilibrium within the system's state space. And then, the control design is thereby reduced to the optimization of this point's location. The entire suite of computational tools employed is implemented as self-contained, automated numerical procedures.

The degree of reliability of the results

The proposed method's effectiveness is supported by empirical results, including comparative assessments against Cartesian genetic programming (J. F. Miller, P. Thomson, 2000) and parse-matrix evolution (L. Changtong, Zh. Shao-Liang, 2012). This study includes the development of a tailored mathematical model for simulating the dynamics of the Khepera II nonholonomic robot. Computational experiments were conducted to verify the accuracy and consistency of the dissertation's outcomes.

Approbation of research results

The fundamental principles and results were deliberated upon and showcased at many international and Russian scientific conferences:

1. The XIV International Scientific and Practical Conference “Modern strategies and digital transformations of sustainable development of society, education and science”. – Moscow: December 12, 2023.
2. The XXII International Scientific and Practical Conference “Challenges of our time and development strategies of society in the conditions of the new reality”. – Moscow: December 15, 2023.
3. The 3rd International Conference on Engineering and Science, 3-4 May 2023 / Al-SAMAWA / IRAQ.

Furthermore, the principal findings, theoretical contributions, and practical recommendations derived from this dissertation have been disseminated through six peer-reviewed publications: four indexed in Scopus and two published in journals recognized by the Higher Attestation Commission (VAK).

Main provisions to be defended

1. The developed control optimization method consists of two steps, where step one exemplifies stabilization step so that one nonholonomic mobile robot moved from 14 initial points to one terminal point; while step two exemplifies optimization step, where two nonholonomic mobile robots move from one initial point (different points) to a terminal one (also different points).

2. The variational synthesized genetic programming technique (VSGP) matrix consisting of 6 rows and 20 columns is used to define the control function of a nonholonomic mobile robot. The genetic algorithm parameters are: population size of 256, number of generations of 1024, number of crossovers in each generation of 128, variation depth of 10, and mutation probability of 0.75. A total of 30 functions are used, which make up the code space in the first stabilization stage. Two of these functions are binary operations, and 28 are unary.

3. To change the position of the robot's equilibrium point, a particle swarm optimization algorithm is used with control parameters: $\alpha=0.5$, $\beta=0.8$, $\gamma=1.5$, and $\sigma=1$, population size is 3500, number of generations is 150.

MAIN CONTENT OF THE WORK

In Chapter One, this literature review discusses common types of wheeled mobile robots and explores key concepts such as manoeuvrability, stability, and controllability in relation to wheeled mobile robots. The concept of motion modelling for differential drive-wheeled mobile robots encompasses the study of kinematics and the examination of motion constraints, including both holonomic and nonholonomic constraints. The chapter further reviews the key specialized terminologies in the navigation field for wheeled mobile robots. Additionally, it provides an explanation of the various types of motion control. The techniques devised for addressing control issues in mobile robots are categorized into artificial intelligence, traditional, and hybrid techniques. Furthermore, the most recent literature pertaining to this study is also examined utilizing these methodologies.

In Chapter Two, the methodology chapter provides a comprehensive overview of the formal formulations of the problems of machine learning control. Firstly, the formulation of the problem of machine learning can be regarded as the task of discovering an unknown function. Subsequently, the formulations of the problems of control theory are presented, specifically those pertaining to the problems of machine learning control. These include the problem of optimal control, the broader problem of control synthesis, and the problem of optimal control centered around the stabilization system synthesis, known as synthesized optimal control.

The Problem of Synthesized Optimal Control (The Problem Statement of This Study)

Based on the suggested approach, it is necessary to first establish the stability of the control object within the state space before addressing the problem of optimal control. Hence, this approach is referred to as synthesized optimal control. The central concept revolves around finding a control function that ensures the existence of a stable point of equilibrium inside the state space of the differential equations system. The control system comprises parameters that exert an effect on the equilibrium point's position. As a result, the change in the equilibrium point's position controls the object in question.

In this study, equilibrium points are understood not in a mechanical sense, but in a mathematical one: the coordinates of these points are parameters of the control equations and influence the calculated shape of the trajectories.

Contemplate About the Statement of the Problem of Synthesized Optimal Control:

Assuming the control object mathematical model, expressed as differential equations system

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (1)$$

with $\mathbf{x}$ – being a vector representing the state space, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}$ – denotes a vector representing the control, $\mathbf{u} \in \mathbf{U} \in \mathbb{R}^m$, and $\mathbf{U}$ – representing a compact set, $m \leq n$.

Provided the initial condition

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0. \quad (2)$$

Terminal condition is determined by

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^f, \quad (3)$$

where t_f represents the time at which the terminal condition is reached, t_f is not explicitly provided but is bounded

$$t_f \leq t^+, \quad (4)$$

and t^+ is provided.

Given the quality criterion

$$J_{so} = \int_0^{t_f} f_0(x, u) dt \rightarrow \min_{u \in U}. \quad (5)$$

It is crucial to pinpoint a control that matches to the subsequent form:

$$u = g(x^*(t) - x) \in U, \quad (6)$$

where $x^*(t)$ is a time function.

The solution to the problem of synthesized optimal control and the finding of the control function (6) are considered to be performed algorithmically in two steps, which are treated as sequential activities.

First step: Synthesis of Stabilization System

In the first step of stabilization, the problem of control synthesis is addressed in order to establish the presence of a stable point of equilibrium inside the state space. The problem statement can be addressed using numerical solutions utilizing machine learning approaches.

The control object mathematical model (1) is given.

The initial conditions set is provided by

$$X_0 = \{x^{0,1}, \dots, x^{0,L}\}. \quad (7)$$

The terminal position gets provided. Any point in the state space has the potential to serve as the terminal position, enabling the system to achieve stabilization at such point.

$$x(t^*) = x^* \in \mathbb{R}^n, \quad (8)$$

where the value of t^* is not provided, but bounded

$$t^* = \begin{cases} t, & \text{если } t < t^+ \text{ and } \|x^* - x(t, x^0)\| \leq \varepsilon \\ t^+, & \text{иначе} \end{cases} \quad (9)$$

where $x(t, x^0)$ is the system partial solution (1), and ε and t^+ are provided positive numerical values.

It is crucial to pinpoint a control that matches to the subsequent form:

$$u = g(x^* - x), \quad (10)$$

that generally partial solution of the differential equations system

$$\dot{x} = f(x, g(x^* - x)). \quad (11)$$

Second step: Solution of the Problem of Optimal Control

As a second step in synthesized optimal control, following the solution of the problem of control synthesis, the problem of optimal control (1)-(5) is addressed for the mathematical formula (11). This entails the finding of a control function using the subsequent form:

$$\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{h}(t), \quad (12)$$

to minimize the specified criterion (5).

At the second step, it is essential to observe that the dimension of the sought function (12) is equivalent to that of the state space. In the context of this specific scenario, it is possible to search the function as a piecewise constant function,

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{x}^{*,i}, \quad \text{if } (i-1)\Delta \leq t \leq i\Delta, \quad (13)$$

where $\mathbf{x}^{*,i}$ are obtained influential coordinates values of the point of equilibrium, $i=1, \dots, K$, and Δ is a provided time interval,

$$K = \left\lfloor \frac{t^+}{\Delta} \right\rfloor. \quad (14)$$

Variational Genetic Algorithm (VarGA)

The effective solution is sought using a genetic algorithm known as the variational genetic algorithm (VarGA), which operates in the ordered sets space of vectors with small variations to find the proper solution (E. Sofronova, A. Diveev, 2021).

The genetic algorithm, in accordance with the small variations' principle within the basic solution, consists of the following sequential steps:

1. Define the basic solution such that this solution is deemed, based on the researcher's perspective, to be the most proximate to the potential best solution.

$$\mathbf{b}^0 = [b_1^0 \dots b_n^0]^T. \quad (15)$$

2. Generate ordered multisets form consisting of variation vectors as initial population

$$\mathbf{w}^i = (\mathbf{w}^{i,1}, \dots, \mathbf{w}^{i,D}), i = 1, \dots, l, \quad (16)$$

where in this given context, l represents the cardinality of possible solutions within the initial population, whereas D is the total count of variation vectors present in a single set.

All possible solutions within the initial population are derived through the implementation of small variations onto the basic solution

$$\mathbf{b}^i = \mathbf{w}^i \circ \mathbf{b}^0 = \mathbf{w}^{i,D} \circ \mathbf{w}^{i,D-1} \circ \dots \circ \mathbf{w}^{i,1} \circ \mathbf{b}^0, \quad (17)$$

where each potential solution inside the population is an element of the D -neighborhood of the basic solution

$$\mathbf{b}^i \in D(\mathbf{b}^0), i = 1, \dots, l. \quad (18)$$

3. Determine the objective function value for every possible solution within the population

$$F_i = J(\Psi(\mathbf{b}^i)), i = 1, \dots, l, \quad (19)$$

where $\Psi(\mathbf{b})$ represents the function that transforms a non-numerical structure's code into an actual function.

4. The evolution cycle is executed unless the condition of stop is met:

I. Choose two sets of variations vectors at random

$$\mathbf{W}_\gamma = (\mathcal{W}^{\gamma,1}, \dots, \mathcal{W}^{\gamma,D}), \mathbf{W}_\varphi = (\mathcal{W}^{\varphi,1}, \dots, \mathcal{W}^{\varphi,D}). \quad (20)$$

II. Determine the crossover probability based on the objective function values of the chosen vectors

$$P_{rc} = \max \left\{ \frac{F_{j^-}}{F_\gamma}, \frac{F_{j^-}}{F_\varphi} \right\}. \quad (21)$$

If the generator of random number yields a value that is smaller than P_{rc} , then the process of crossover is executed.

Define the crossover point at random.

$$k \in \{1, \dots, D\}. \quad (22)$$

Following the crossover point, swap the variations' vectors in the chosen sets to create two novel sets of variation vectors that signify two novel solutions from the basic solution's D -neighborhood

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{\gamma+1} &= (\mathcal{W}^{\gamma,1}, \dots, \mathcal{W}^{\gamma,k}, \mathcal{W}^{\varphi,k+1}, \dots, \mathcal{W}^{\varphi,D}), \\ \mathbf{W}_{\varphi+1} &= (\mathcal{W}^{\varphi,1}, \dots, \mathcal{W}^{\varphi,k}, \mathcal{W}^{\gamma,k+1}, \dots, \mathcal{W}^{\gamma,D}). \end{aligned} \quad (23)$$

III. Execute the mutation process with a specified probability for the newly discovered possible solutions as sets of variations' vectors (23). Pick a mutation point at random, then create a new variations vector at that position.

IV. The objective function values for the newly discovered possible solutions will be calculated. Based on these function values, the destiny of every novel possible solution will be determined, whether it will be eliminated or added to the population as a replacement for the present worst possible solution.

This chapter further provides an exposition on the synthesized genetic programming technique (SGP), including its encoding process and search algorithm. Moreover, the relationship between this technique and the small variations' principle within the basic solution in order to create an innovative technique known as variational synthesized genetic programming (VSGP) is investigated.

Synthesized Genetic Programming (SGP)

The technique used in this study was created by the researcher. This technique is brand new, being the first instance in which this technique has been applied to solve the problem of control synthesis. Synthesized genetic programming (SGP) eschews the utilization of graphical representations for expressing codes of expressions.

The next mathematical expression is an example of how to encode it manually by synthesized genetic programming (SGP)

$$y = \exp(q_3 x_2^2 + q_1 x_3^2) \sin(q_2 x_1) + \cos(-q_3 x_3 + x_1), \quad (24)$$

where q_1 , q_2 and q_3 exemplify the parameters, x_1 , x_2 and x_3 exemplify variables, and both exemplify arguments of the mathematical expression.

In order to represent a mathematical expression in a coded form, it qualifies as satisfactory to utilize the subsequent sets of arguments and primary functions:

- The arguments set

$$F_0 = \{f_{0,1} = x_1, f_{0,2} = x_2, f_{0,3} = x_3, f_{0,4} = q_1, f_{0,5} = q_2, f_{0,6} = q_3\}, \quad (25)$$

- The functions set that is characterized by one argument

$$F_1 = \{f_{1,1}(z) = z, f_{1,2}(z) = -z, f_{1,3}(z) = z^2, f_{1,4}(z) = \sin(z), f_{1,5}(z) = \cos(z), f_{1,6}(z) = \exp(z)\}, \quad (26)$$

- The functions set that is characterized by two arguments

$$F_2 = \{f_{2,1}(z_1, z_2) = z_1 + z_2, f_{2,2}(z_1, z_2) = z_1 z_2\}, \quad (27)$$

where the first component of the indexes stands for the number of arguments while the second one exemplifies the function number, knowing that the argument of mathematical expression is signified when the first component equals zero.

In general, the mathematical expression's SGP code is a six-row integer matrix. The first row of the matrix denotes the indexes of functions belonging to the functions set that is characterized by two arguments (27). The indexes of functions from the functions set that is characterized by one argument (26) are represented by the second and fourth rows. The third and fifth rows represent the indexes of arguments from the arguments set (25). The sixth row represents the priority, which will thereafter be elucidated to elucidate its role. Within each column of the matrix, the second element (the one-argument function) and the third element (the argument) represent the first argument for the first element of the column (the two-argument function). Additionally, the fourth and fifth elements represent the second argument for the first element of the column. The term of the pivot for each column means either the first argument (the second and third elements) or the second argument (the fourth and fifth elements) of this column. The pivot can be determined by assigning the priority (the sixth element in the column) of 1 or 2 to opt for the desired pivot of the column. Even Nevertheless, in most contexts, its number is 1. It is important to acknowledge that the number of rows in the SGP matrix is contingent upon the number of arguments employed in the available functions. Specifically, when utilizing a three-argument function such as the if function, the number of rows is going to be 8. This is due to each argument being allocated two elements in the column, combined with the first element representing the three-argument function and the final element denoting the priority. After completing the calculation for each column, the result of this column should be appended to the set of arguments (25), progressively increasing the total number of arguments with each calculation.

In order to implement Example (24) by this technique, let us get started by coding the expression $q_3 x_2^2$ as the first column of the SGP matrix. For the first element in this column, determine the index of multiplication function in the functions set that is characterized by two arguments (27); it is the number of

2, $f_{2,2}(z_1, z_2) = z_1 z_2$. For the second element, the function of the parameter q_3 is the identity function, $f_{1,1}(z) = z$, from the functions set that is characterized by one argument (26); the index of this function is 1. For the third element, the location of the parameter q_3 in the arguments set (25) is 6. For the fourth element, the variable x_2 function is the square $f_{1,3}(z) = z^2$, and its index is 3 in the set (26). For the fifth element, the location of the variable x_2 in the arguments set (25) is 2. The sixth element is the priority, and its number is 1. As a result, the code of the expression $q_3 x_2^2$ that represents the first column in the matrix is $[2 \ 1 \ 6 \ 3 \ 2 \ 1]^T$. After calculating this column, it will have been appended to the arguments set (25) as the seventh element, denoted as $(|F_0| + 1 = 6 + 1 = 7)$.

The final code of the SGP matrix, for example (24), can be expressed as:

$$R_{SGP} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 6 & 4 & 7 & 5 & 6 & 11 & 9 & 12 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 8 & 1 & 3 & 1 & 10 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Variational Synthesized Genetic Programming (VSGP)

In order to keep track of a small variation, this technique resembles the Cartesian genetic programming method, wherein a three-element integer vector will do the trick

$$W = [w_1 \ w_2 \ w_3]^T, \quad (29)$$

where w_1 represents the column index inside the matrix, w_2 corresponds to the row index within the column w_1 , and w_3 signifies the updated value of the element. If w_2 equals 1, the subsequent number w_3 must either be zero or modified based on the functions set that is characterized by two arguments (27). If w_2 is equal to either 2 or 4, then w_3 will be modified to either zero or selected from the functions set that is characterized by one argument (26). If w_2 is equal to either 3 or 5, then w_3 can either be set to zero or can only be determined by the combination of the number of arguments (25) and the number of columns minus one. Certain conditions dictate the implementation of small variations to the SGP matrix based on the pivot and priority. These requirements can be elucidated by implementing the following variations to the matrix (28):

$$\begin{aligned} w^1 &= [3 \ 6 \ 2]^T, \\ w^2 &= [5 \ 2 \ 0]^T, \\ w^3 &= [4 \ 1 \ 1]^T, \\ w^4 &= [6 \ 5 \ 0]^T, \\ w^5 &= [3 \ 1 \ 0]^T, \\ w^6 &= [8 \ 2 \ 3]^T, \\ w^7 &= [6 \ 6 \ 2]^T, \end{aligned} \quad (30)$$

The updated matrix of the SGP will look like

$$\mathcal{W}^1 \circ \mathcal{W}^2 \circ \mathcal{W}^3 \circ \mathcal{W}^4 \circ \mathcal{W}^5 \circ \mathcal{W}^6 \circ \mathcal{W}^7 \circ \mathbf{R}_{SGP} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 6 & \mathbf{3} \\ 6 & 4 & 7 & 5 & 6 & 11 & 9 & 12 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 8 & 1 & 3 & \mathbf{0} & 10 & 13 \\ 1 & 1 & \mathbf{2} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

The third and sixth variations $\mathcal{W}^3$ and $\mathcal{W}^6$ can be performed directly.

This new matrix can be expressed mathematically as

$$y = \exp(q_1 x_3^2) \sin(q_2 + x_1) + (-q_3 x_3)^2. \quad (32)$$

In Chapter Three, the results chapter introduces the problem of optimal control concerning two nonholonomic mobile robots. The environment in question encompasses several static phase constraints, as well as dynamic phase constraints arising from the collision between these two robots. The topic of synthesis of a stabilization system, which can have effectively been addressed using a single robot, is tackled using the variational synthesized genetic programming (VSGP) technique. The solution to the problem of control synthesis yields the emergence of a stable point of equilibrium in the space of states.

Mathematical models of two mobile robots (P. Šuster, A. Jadlovská, 2011) are presented:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^j &= 0.5(u_1^j + u_2^j) \cos(x_3^j), \\ \dot{x}_2^j &= 0.5(u_1^j + u_2^j) \sin(x_3^j), \\ \dot{x}_3^j &= 0.5(u_1^j - u_2^j), \end{aligned} \quad (33)$$

where $\mathbf{x}^j = [x_1^j \ x_2^j \ x_3^j]^T$ represents a state vector of robot j , $\mathbf{u}^j = [u_1^j \ u_2^j]^T$ represents a control vector of robot j , $j = 1, 2$.

In the initial step, to solve the control synthesis problem:

Fourteen initial states are provided (7):

$$\begin{aligned} X_0 = \left\{ \mathbf{x}^{0,0} = \begin{bmatrix} -3 & 3.5 & \frac{5\pi}{16} \end{bmatrix}^T, \mathbf{x}^{0,1} = \begin{bmatrix} -3 & -3.5 & \frac{5\pi}{16} \end{bmatrix}^T, \mathbf{x}^{0,2} = \begin{bmatrix} 3 & -3.5 & \frac{5\pi}{16} \end{bmatrix}^T, \mathbf{x}^{0,3} = \begin{bmatrix} 3 & 3.5 & \frac{5\pi}{16} \end{bmatrix}^T, \mathbf{x}^{0,4} = \right. \\ \left. \begin{bmatrix} -3 & 3.5 & -\frac{5\pi}{16} \end{bmatrix}^T, \mathbf{x}^{0,5} = \begin{bmatrix} -3 & -3.5 & -\frac{5\pi}{16} \end{bmatrix}^T, \mathbf{x}^{0,6} = \begin{bmatrix} 3 & -3.5 & -\frac{5\pi}{16} \end{bmatrix}^T, \mathbf{x}^{0,7} = \begin{bmatrix} 3 & 3.5 & -\frac{5\pi}{16} \end{bmatrix}^T, \mathbf{x}^{0,8} = \right. \\ \left. \begin{bmatrix} -3 & 3.5 & 0 \end{bmatrix}^T, \mathbf{x}^{0,9} = \begin{bmatrix} -3 & -3.5 & 0 \end{bmatrix}^T, \mathbf{x}^{0,10} = \begin{bmatrix} 3 & -3.5 & 0 \end{bmatrix}^T, \mathbf{x}^{0,11} = \begin{bmatrix} 3 & 3.5 & 0 \end{bmatrix}^T, \mathbf{x}^{0,12} = \right. \\ \left. \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{5\pi}{16} \end{bmatrix}^T, \mathbf{x}^{0,13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{5\pi}{16} \end{bmatrix}^T \right\} \quad (34) \end{aligned}$$

The terminal states are established as one point (8):

$$\mathbf{x}^* = [x_1^* \ x_2^* \ x_3^*]^T = [0 \ 0 \ 0]^T. \quad (35)$$

The subsequent quality criterion is

$$I_{syn} = \sum_{i=1}^L (t_{f,i} + p_1 \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}(t_{f,i}, \mathbf{x}^{0,i})\|) \rightarrow \min, \quad (36)$$

where $t_{f,i}$ is a period characterized by the attainment of the terminal state (35) starting from the initial states (34), $i = 1, \dots, L$, L represents the total number of initial states, $L = 14$, p_1 represents a weight coefficient, $p_1 = 1$.

The ensuing mathematical expressions for the control functions are constructed

$$\tilde{u}_1 = \left((x_2^f - x_2)(x_1^f - x_1)(q_1 + (x_2^f - x_2)) + q_2(x_3^f - x_3) + \text{sgn}((x_2^f - x_2)(x_1^f - x_1)(q_1 + (x_2^f - x_2)) + q_2(x_3^f - x_3)) \ln(|(x_2^f - x_2)(x_1^f - x_1)(q_1 + (x_2^f - x_2)) + q_2(x_3^f - x_3)| + 1) + \rho(q_2(x_3^f - x_3)) \right) / 2, \quad (37)$$

$$\tilde{u}_2 = (4 * \sin(q_3) * (x_1^f - x_1))^3, \quad (38)$$

$$\rho(\mu) = \begin{cases} 0, & \text{если } |\mu| < \delta \\ \text{sgn}(\mu), & \text{иначе} \end{cases} \quad (39)$$

$q_1=0.23307$, $q_2=6.87832$, $q_3=8.36356$, $\delta=10^{-8}$. The quality criterion for the variational SGP solution (36) is $J_{syn}=1.75102$.

In the second step, the particle swarm optimization (PSO) algorithm (J. Kennedy and R. Eberhart, 1995) is employed to find the stabilization points, resulting in the discovery of three points for every single mobile robot.

The initial states for the two robots are:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^1(0) &= \mathbf{x}^{0,1} = [0 \ 0 \ 0]^T, \\ \mathbf{x}^2(0) &= \mathbf{x}^{0,2} = [10 \ 10 \ 0]^T. \end{aligned} \quad (40)$$

The terminal states are established

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^1(t_f) &= \mathbf{x}^{f,1} = [10 \ 10 \ 0]^T, \\ \mathbf{x}^2(t_f) &= \mathbf{x}^{f,2} = [0 \ 0 \ 0]^T, \end{aligned} \quad (41)$$

where

$$t_f = \begin{cases} t, & \text{если } t \leq t^+ \text{ and } \|x^f - x(t)\| \leq \varepsilon, \\ t^+, & \text{иначе} \end{cases} \quad (42)$$

where $\varepsilon = 0.01$, $t^+ = 2.7$ sec,

$$\|x^f - x(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i^f - x_i(t))^2}. \quad (43)$$

The subsequent quality criterion is applied for solving the problem of optimal control:

$$\begin{aligned} J_{opt} &= t_f + c_1 \sum_{st=1}^5 \sum_{j=1}^2 \int_0^{t_f} \vartheta(r_{st} - \sqrt{(x_1^j - x_{1,st})^2 + (x_2^j - x_{2,st})^2}) \\ &\quad + c_2 \int_0^{t_f} \vartheta\left(r_d - \sqrt{(x_1^1 - x_1^2)^2 + (x_2^1 - x_2^2)^2}\right) + c_3 \sum_{j=1}^2 \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i^{f,j} - x_i^j)^2} \end{aligned} \quad (44)$$

where $c_1 = 2$, $c_2 = 4$, $c_3 = 2.5$, $\vartheta(A)$ represents the Heaviside step function

$$\vartheta(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } A > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (45)$$

where $r_{st}, x_{1,st}, x_{2,st}$ are provided parameters (radius and coordinates of center) of the constraints of static phase, $st = 1, \dots, P_t$, P_t represents the total number of phase constraints, where

$$P_t = 5, r_1 = 2, r_2 = 2, r_3 = 2, r_4 = 2, r_5 = 2, x_{1,1} = 0, x_{1,2} = 5, x_{1,3} = 10, x_{1,4} = 5, x_{1,5} = 5, x_{2,1} = 5, x_{2,2} = 5, x_{2,3} = 5, x_{2,4} = 0, x_{2,5} = 10$$

and r_d the minimal acceptable secure distance between robots, $r_d = 2$.

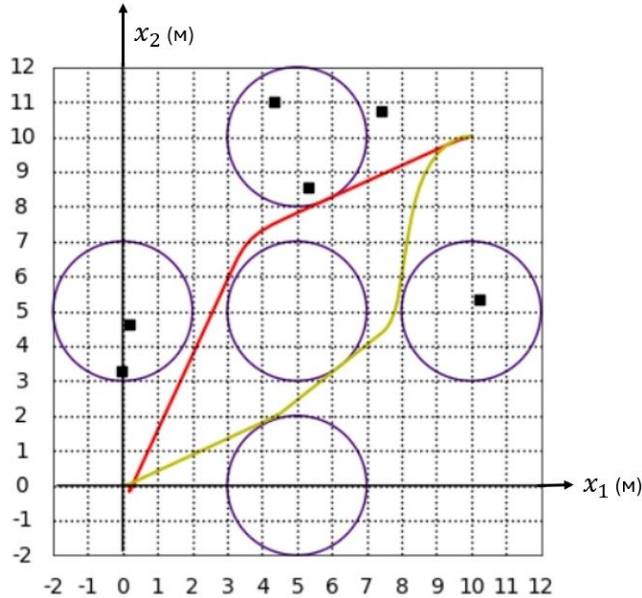
The found three points for each mobile robot have the subsequent coordinates in the state space $\{x_1, x_2, x_3\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{1*,1} &= [-0.0372 \ 3.2964 \ 1.4551]^T, \mathbf{x}^{1*,2} = [5.304 \ 8.5296 \ 0.6911]^T, \mathbf{x}^{1*,3} = \\ &[10.2478 \ 5.3404 \ -0.7197]^T, \mathbf{x}^{2*,1} = [7.4218 \ 10.7499 \ 0.5217]^T, \mathbf{x}^{2*,2} = \\ &[4.3332 \ 11.0171 \ 1.3788]^T, \mathbf{x}^{2*,3} = [0.1775 \ 4.6068 \ -0.518]^T, \end{aligned} \quad (46)$$

where the first three points are for the first robot and the other points for the second one.

The particle swarm optimization (PSO) algorithm is employed for the purpose of finding the points and it is possible to search the control function (the equilibrium points) as a piecewise constant function.

In Figures 1-7, the findings of the simulation are laid out. Figure 1 displays suitable trajectories generated by mobile robots in the $\{x_1, x_2\}$ plane. The red line represents the trajectory of the first robot and the yellow line represents the trajectory of the second robot, while the purple circles indicate the phase constraints. Additionally, the small green squares represent the three points of equilibrium for the first robot, while the black squares represent the three points of equilibrium for the second robot, and both sets match the points that have been discovered (46). As is evident from the observation, the two robots have successfully attained their terminal states without violating phase constraints. The functional value (44) was $J_{opt} = 2.7032$.



Robots' movement speeds in the immediate vicinity of stable equilibrium points should be slower. Therefore, to achieve higher speeds, the controlled object should be positioned not exactly at the stable equilibrium point, but close to it.

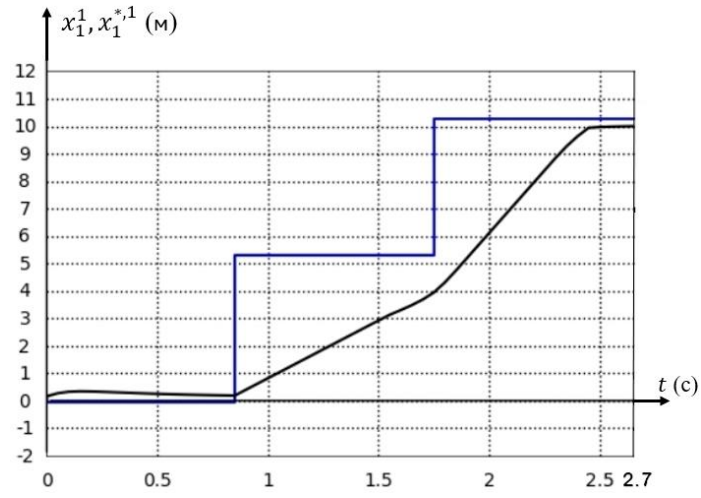


Figure 1. Synthesized optimal control trajectories for robots in the $\{x_1, x_2\}$ plane

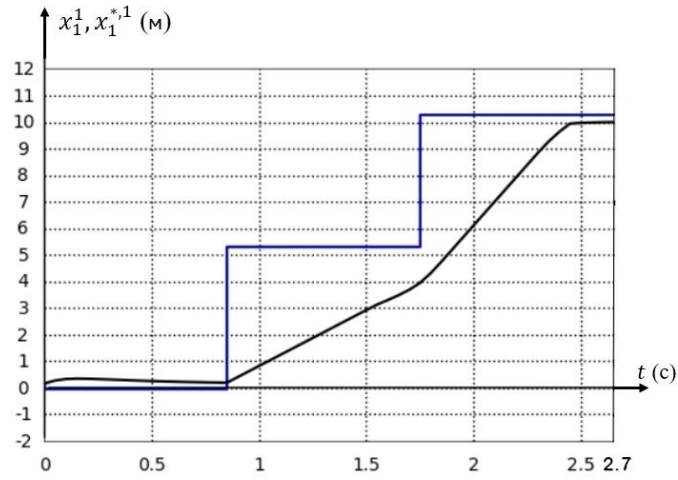


Figure 2. The variable x_1^1 in black and effective control $x_1^{*,1}$ in blue

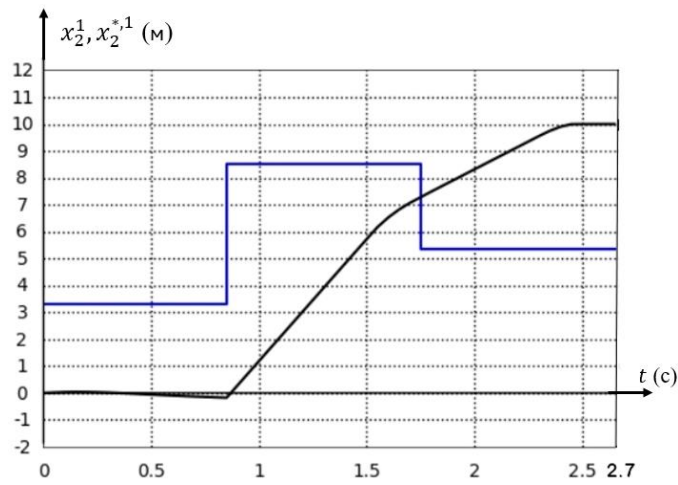


Figure 3. The variable x_2^1 in black and effective control $x_2^{*,1}$ in blue

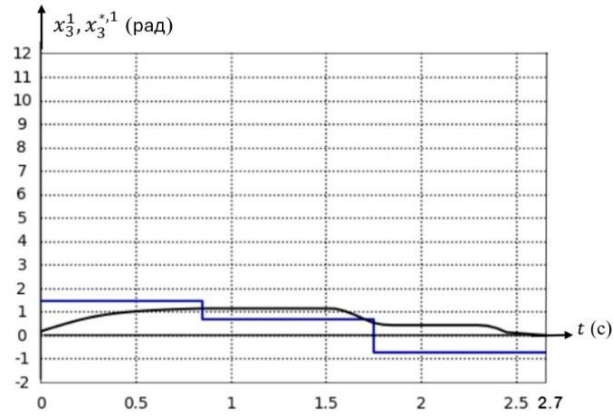


Figure 4. The variable x_3^1 in black and effective control $x_3^{*,1}$ in blue

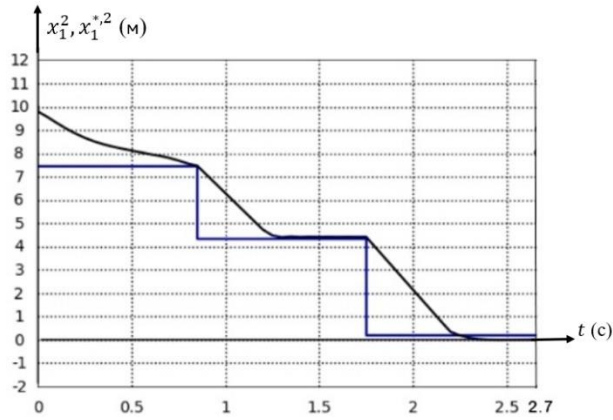


Figure 5. The variable x_1^2 in black and effective control $x_1^{*,2}$ in blue

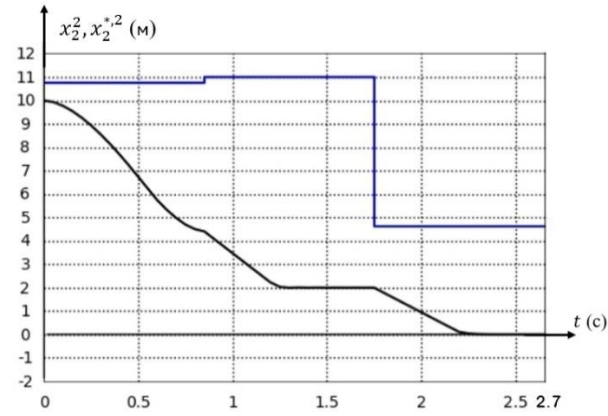


Figure 6. The variable x_2^2 in black and effective control $x_2^{*,2}$ in blue

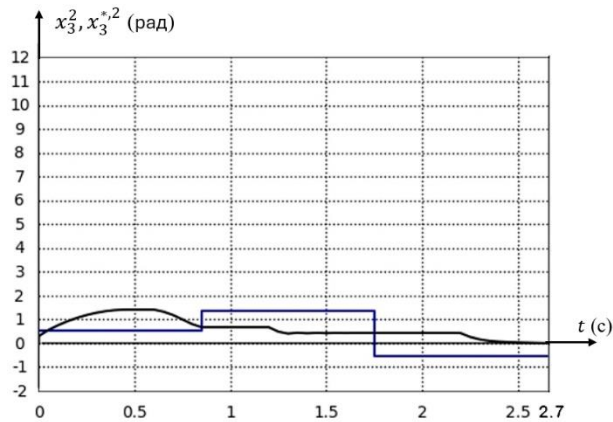


Figure 7. The variable x_3^2 in black and effective control $x_3^{*,2}$ in blue

CONCLUSIONS ON THE WORK

1. It was demonstrated that the symbolic regression method can successfully solve the control synthesis problem without laborious construction of a training set, based only on the criterion for minimizing the quality function.
2. To search more effectively for an intelligent solution of control synthesis, it is proposed to use the principle of small variations in the basic solution.
3. After solution of the control synthesis problem, the system of differential equations with found control functions on the right side always has a stable equilibrium point in the state space.
4. The quality criterion of the synthesis problem includes the time of achievement of the terminal point from a set of initial conditions as well as the accuracy. At the synthesis problem, phase constraints weren't considered, whereas at the search for stabilization points, dynamic and static phase constraints were.
5. With the numerical solution of the optimal control problem by evolutionary algorithm, it was defined that these algorithms can find solutions for complex optimal control problems with static and dynamic phase constraints.

PUBLICATIONS ON THE TOPIC OF THE DISSERTATION

1. **Karrar Sahib Nassrullah**, Ivan Viktorovich Stepanyan, Ahmed Abdul Hussein Ali, Haider Sahib Nasrallah, Neder Jair Mendez Florez. Problem of Control Synthesis of Stabilization System for a Nonholonomic Mobile Robot: An Autonomous Solution via Modified Synthesized Genetic Programming Method, International Journal of Intelligent Engineering and Systems 18, no. 6 (2025): 350-365. DOI: 10.22266/ijies2025.0731.22
2. **Karrar Sahib Nassrullah**, Ivan Viktorovich Stepanyan, Haider Sahib Nasrallah, Neder Jair Mendez Florez, Abdelrrahmane Mohamed Zidoun, Shahad Raouf Mohammed. Unsupervised Machine Learning Control Techniques for Solving the General Synthesis of Control System Problem, International Journal of Intelligent Engineering and Systems 17, no. 3 (2024): 401-416. DOI: 10.22266/ijies2024.0630.32
3. Haider Sahib Nasrallah, Ivan Viktorovich Stepanyan, **Karrar Sahib Nassrullah**, Neder Jair Mendez Florez, Israa M. Abdalameer AL-Khafaji, Abdelrrahmane Mohamed Zidoun, Ravi Sekhar, Pritesh Shah, Sushma Parihar. Elevating Mobile Robotics: Pioneering Applications of Artificial Intelligence and Machine Learning, Revue d'Intelligence Artificielle 38, no. 1 (2024): 351-363. <https://doi.org/10.18280/ria.380137>
4. **Karrar Sahib Nassrullah**, Ivan Viktorovich Stepanyan, Haider Sahib Nasrallah, Neder Jair Mendez Florez. A comparative study for data approximation between two explainable artificial intelligence approaches, AIP Conference Proceedings 3051, no. 1 (2024): 040008-1–040008-11. <https://doi.org/10.1063/5.0192070>
5. **Karrar Sahib Nassrullah**, Haider Chavush Sahib Nasrallah, Flores Mendes Neder Khair. A new method for solving the problem of retraining using symbolic regression used in machine learning to control the movement of robots / Science and Business: Development paths. 2024. 2(152): 65-70.
6. **Karrar Sahib Nassrullah**, Haider Chavush Sahib Nasrallah, Flores Mendes Neder Khair. Research of machine learning methods based on genetic programming and symbolic regression for controlling mobile robots / Science and Business: Ways of development. 2024. 2(152): 65-70.

ABSTRACT**Jawoosh Karrar Sahib Nassrullah****«Symbolic regression algorithm for control of non-holonomic wheeled mobile robots»**

The dissertation is devoted to the construction of a control system for a pair of nonholonomic mobile robots. The implementation of the proposed control requires the creation of a double feedback loop: in the inner contour, the robot stabilizes relative to a given point in the state space (the problem is solved using the numerical method of symbolic regression with the finding of feedback functions); in the outer contour, the task of achieving effective robot control is solved by using an evolutionary algorithm that allows changing the position of stable equilibrium points. The control object reaches a stable equilibrium point in the state space. The found equilibrium points can be refined based on the particle swarm optimization algorithm so that the mobile robot can get from the starting point to the end point with an improved value of the quality criterion and trajectory. The results of the conducted model experiments showed that the robots successfully achieved their final goals without violating phase constraints and avoiding collisions. It is shown that the effective control affects the corresponding components of the vectors representing the state space.

ЖАВУШ КАРРАР САХИБ НАССРУЛЛА

**АЛГОРИТМ СИМВОЛЬНОЙ РЕГРЕССИИ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ
НЕГОЛОНОМНЫМИ МОБИЛЬНЫМИ РОБОТАМИ НА КОЛЁСАХ**

Научная специальность

2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

Автореферат диссертации

на соискание ученой степени кандидата технических наук

Работа выполнена в инженерной академии ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы» (РУДН)

Научный руководитель: Степанян Иван Викторович
доктор биологических наук, профессор кафедры механики и процессов управления инженерной академии РУДН

Официальные оппоненты: Дивеев Асхат Ибрагимович
доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник ФГУ «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук»

Куприянов Вячеслав Васильевич
доктор технических наук, профессор, профессор кафедры автоматизированных систем управления института компьютерных наук ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»

Козов Алексей Владимирович
кандидат технических наук, старший научный сотрудник отдела «Автоматизированные транспортные средства» научно-учебного центра «Робототехника» ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

Защита диссертации состоится 29.12.2025 в 15:00 на заседании диссертационного совета ПДС 2022.016 по адресу: 115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке РУДН по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Объявление о защите и автореферат диссертации размещены на сайтах <http://vak2.ed.gov.ru/> и <https://www.rudn.ru/science/dissovet>

Автореферат разослан 27.11.2025.

Ученый секретарь диссертационного совета ПДС 2022.016
кандидат технических наук

О.Е. Самусенко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы исследования. В современной промышленности наблюдается стремительное развитие самообучающихся роботов и роботизированных систем, обладающих высокой степенью автономности и адаптивности. Эти устройства способны выполнять широкий спектр задач без постоянного контроля со стороны человека. Мобильные неголономные роботы, оснащённые колёсным приводом, демонстрируют разнообразие практических приложений, включая автоматизацию производственных процессов на фабриках и складах, а также выполнение задач по обслуживанию и уборке. Тем не менее, несмотря на значительный потенциал и перспективы их использования, эти системы сталкиваются с рядом ключевых вызовов. Необходимо улучшить алгоритмы навигации, маршрутизации и обхода препятствий, что является критически важным для повышения их эффективности и надёжности. Кроме того, проблема стабилизации остаётся одной из центральных задач управления, связанных с этим типом робототехнических систем, требуя разработки новых подходов и решений для обеспечения устойчивого функционирования в различных условиях эксплуатации.

Рассматриваемый в диссертации мобильный неголономный робот представляет динамическую и нелинейную систему, обладающую способностью к автономной навигации. Диссертационное исследование направлено на разработку и анализ алгоритмов управления парой неголономных мобильных роботов, способных эффективно функционировать в различных средах и выполнять задачи без внешнего вмешательства. Актуальность данной темы обусловлена необходимостью создания интеллектуальных систем, способных адаптироваться к изменяющимся условиям окружающей среды и обеспечивать автономность в выполнении поставленных задач.

В научной литературе широко представлены различные аспекты синтеза систем управления и оптимизации траекторий движения. Особое внимание уделяется методам решения задач управления, которые были глубоко изучены и формализованы в трудах таких выдающихся учёных, как С. Вольфрам, У.Р. Эшби, У. Маккалок, У. Питтс, В.Г. Болтянский, Р. Беллман, П.К. Анохин, Л.С. Понтрягин, А.И. Дивеев, Н. Винер и А.Н. Колмогоров.

Одной из фундаментальных проблем, с которыми сталкивается реализация оптимального управления, является невозможность непосредственного внедрения временных функций управления на реальных объектах. Это обусловлено разомкнутым характером таких систем управления, что делает их уязвимыми к внешним возмущениям, способным существенно исказить траекторию движения объекта и препятствовать достижению желаемых целей, приводя к неудовлетворительным значениям целевых функций. При управлении мобильными роботами особое внимание уделяется задачам стабилизации и отслеживания траекторий. В частности, стабильность объекта управления достигается в точке равновесия в пространстве состояний для обеспечения устойчивого функционирования системы.

Объектом исследования являются манёвры пары неголономных мобильных роботов, оснащённых дифференциальным приводом.

Предметом исследования являются математические модели и алгоритмическое обеспечение метода символьной регрессии, направленного на выявление структурной формы и параметров функции управления.

Целью исследования является разработка и совершенствование методов машинного обучения, ориентированных на управление мультиагентными системами на примере пары

колёсных неголономных мобильных роботов.

Для достижения этой цели решены следующие **задачи**:

1. Исследование методов генетического программирования, эволюционных методов оптимизации и алгоритмов символьной регрессии.
2. Разработка численного подхода к управлению парой мобильных роботов, позволяющего избежать столкновений друг с другом и с препятствиями.
3. Разработка метода символьной регрессии, предназначенного для стабилизации робота относительно определённой точки в пространстве состояний с использованием принципа малых вариаций.
4. Применение эволюционного алгоритма для изменения положения точек устойчивого равновесия в контуре управления с внешней обратной связью.
5. Описание конечного решения стабилизации с помощью системы дифференциальных уравнений.

Методология и метод исследования

Рассматриваемый объект управления оснащён системой стабилизации, что определяет его ключевой атрибут – устойчивую точку равновесия в пространстве состояний. Управление роботом достигается посредством эффективного манипулирования местоположением этой устойчивой точки равновесия, что требует применения методов эволюционного алгоритма, символьной регрессии и моделирования на основе системы дифференциальных уравнений.

Проблема синтеза управления для системы стабилизации (внутренний контур) решается на предварительном этапе, который является основополагающим для последующего управления движением точки равновесия (внешний контур). Эти точки равновесия могут быть установлены заранее или адаптироваться в ответ на изменения в окружающей среде.

Применение методов символьной регрессии позволяет автоматически получать математические выражения, которые описывают функции управления мобильными роботами. Эти выражения формализуют алгоритмы управления, обеспечивающие достижение поставленных целей и предотвращение столкновений с препятствиями. Символьная регрессия представляет собой инструмент для поиска структуры и параметров управляющих функций. Она является обобщением нейронных сетей, поскольку любая нейронная сеть может быть представлена в виде символьной регрессионной модели (А.И. Дивеев, Е. Ю. Шмалько, 2021).

Научная новизна работы

1. Разработана формулировка задачи управления неголономными мобильными роботами с включением дополнительных требований для построения системы стабилизации.
2. Разработан новый метод машинного обучения, а именно метод символьной регрессии для синтеза системы управления со стабилизацией в пространстве состояний.
3. Новый метод представляет собой синтез системы дифференциальных уравнений на основе принципа малых вариаций параметров генетического алгоритма.
4. Получено новое численное решение задачи оптимизации траектории пары неголономных мобильных роботов в условиях различных препятствий.
5. Решена фундаментальная задача синтеза систем управления нелинейных мобильных робототехнических систем с идентификацией уравнений динамики.

Практическая значимость работы. Методология синтезированного оптимального управления, представленная в этом исследовании, является новым подходом к решению задач

оптимального управления, направленным на управление устойчивой точкой равновесия робота. Разработанный подход представляет собой новый вид управления, основанный на изменении положения точки равновесия робота.

Разработанный метод ориентирован на решение прикладных инженерных задач и обеспечивает минимизацию расхождений между математической моделью объекта управления и его реальным воплощением. Это достигается посредством внедрения внутреннего цикла стабилизации в процессе управления. Кроме того, использование методов символьной регрессии для задач синтеза управления имеет универсальную применимость.

Теоретическая значимость работы заключается в формулировке задачи оптимального управления с учётом ряда дополнительных ограничений. В частности, траектория в пространстве состояний должна обладать свойством притяжения в некоторой окрестности. В рамках предложенного подхода решена задача синтеза стабилизирующего управления колёсным неголономным роботом с формированием устойчивого положения равновесия в пространстве состояний. Далее задача управления трансформируется в задачу оптимизации положения этой устойчивой точки равновесия. Все представленные методы расчёта реализованы в виде автоматизированных численных алгоритмов.

Степень достоверности результатов подтверждается результатами экспериментов, сравнением с данными, полученными при применении методов декартова генетического программирования (Дж. Ф. Миллер, П. Томсон, 2000) и эволюции кодирующих матриц (Л. Чангтонг, Ж. Шао-Лян, 2012). В рамках исследования для моделирования динамики и поведения неголономного мобильного робота Khepera II была разработана и использована соответствующая математическая модель. Результаты диссертационной работы были верифицированы посредством проведения серии вычислительных экспериментов.

Апробация работы

Автор принимал непосредственное личное участие в получении основных результатов диссертационной работы. Основные положения и результаты исследования обсуждались и представлялись на различных международных научных конференциях и семинарах: Третья Международная конференция по технике и науке (Эс-Самава, Ирак, 3-4 мая 2023 г.); XIV Международная научно-практическая конференция «Современные стратегии и цифровые трансформации устойчивого развития общества, образования и науки» (Москва: 12 декабря 2023 г.); Вторая Международная научно-практическая конференция «Современные исследования: теория, практика, результаты» (Москва, 29 декабря 2023 г.). Основные результаты, выводы и рекомендации диссертации опубликованы в 6 рецензируемых научных изданиях.

Положения, выносимые на защиту

1. Разработанный метод оптимизации управления состоит из двух основных этапов: первый этап – стабилизация, на котором один неголономный мобильный робот перемещается из 14 начальных точек в одну конечную; второй этап – оптимизация, на котором два неголономных мобильных робота перемещаются из разных начальных точек в разные конечные.

2. Для изменения положения точки равновесия робота используется алгоритм оптимизации роя частиц с управляющими параметрами $\alpha=0.5$, $\beta=0.8$, $\gamma=1.5$ и $\sigma=1$, размер популяции 3500, количество поколений 150.

3. Для определения функции управления неголономным мобильным роботом используется вариационная матрица, состоящая из 6 строк и 20 столбцов. Параметры

генетического алгоритма: размер популяции 256 решений, количество поколений 1024, количество скрещиваний в каждом поколении 128, глубина вариации 10, вероятность мутации 0,75. Общее количество используемых функций 30, они составляют пространство кодов на первом этапе стабилизации, из них две функции являются бинарными операциями, а 28 функций – унарными.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Диссертация состоит из введения, трёх глав, содержащих результаты и выводы, списка литературы и приложений.

Во введении приведена актуальность исследования, научная гипотеза, цели и задачи работы. Раскрывается значимость темы, формулируется цель и задачи исследования. Дается описание рассматриваемых проблем и методологии исследования.

В первой главе анализируется литература о распространённых типах колёсных мобильных роботов и их ключевых понятиях, таких как манёвренность, устойчивость и управляемость. Концепция моделирования движения колёсных мобильных роботов с дифференциальным приводом включает в себя изучение кинематики и анализ ограничений движения, учитывая как голономные, так и неголономные. Далее в главе рассматривается ключевая специализированная терминология в области навигации для колёсных мобильных роботов. Помимо этого, рассматриваются различные типы управления движением. Отмечено, что методики, разработанные для решения проблем управления мобильными роботами, подразделяются на традиционные и гибридные. Анализируются новейшие публикации по теме исследования.

Во второй главе, посвящённой методологии исследования, проведён всесторонний анализ формальных постановок задач синтеза систем управления, в том числе анализ задач идентификации неизвестных функций, а также теоретических аспектов управления, связанных с машинным обучением. В частности, рассмотрены фундаментальные вопросы теории оптимального управления, ориентированные на разработку систем стабилизации мобильных роботов. Исследованные подходы позволяют не только минимизировать целевую функцию, но и гарантировать устойчивость системы к внешним возмущениям и изменениям других параметров.

В предлагаемом подходе, прежде чем приступить к решению задачи оптимального управления, необходимо определить устойчивость объекта управления в пространстве состояний. Основная идея заключается в нахождении функции управления, обеспечивающей существование устойчивой точки равновесия в пространстве состояний системы дифференциальных уравнений.

В данном исследовании точки равновесия понимаются не в механическом смысле, а в математическом: координаты этих точек являются параметрами управляющих уравнений и влияют на расчётную форму траекторий.

Система управления включает параметры, влияющие на положение точки равновесия. В результате управление объектом осуществляется за счёт изменения положения точки равновесия. Таким образом, постановка задачи синтезированного оптимального управления состоит в следующем.

Предполагаемая математическая модель объекта управления, выраженная в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (1)$$

где $\mathbf{x}$ – вектор, представляющий пространство состояний, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}$ – вектор управления,

$u \in U \in \mathbb{R}^m$, и U – компактное множество, $m \leq n$.

Указывается начальное условие:

$$x(0) = x^0. \quad (2)$$

Определяется конечное состояние:

$$x(t_f) = x^f, \quad (3)$$

где t_f представляет собой время, в течение которого достигается конечное состояние, t_f не задаётся точно, но ограничено:

$$t_f \leq t^+, \quad (4)$$

и t^+ определено.

Учитывается критерий качества:

$$J_{so} = \int_0^{t_f} f_0(x, u) dt \rightarrow \min_{u \in U}. \quad (5)$$

Функция управления соответствует следующему выражению:

$$u = g(x^*(t) - x) \in U, \quad (6)$$

где $x^*(t)$ – функция времени.

Решение задачи синтезированного оптимального управления и нахождение управляющей функции (6) выполняются в соответствии с алгоритмом в два этапа, рассматриваемых как последовательные операции.

Первый шаг: синтез системы стабилизации. На первом этапе стабилизации решается задача синтеза управления с целью обеспечения наличия устойчивой точки равновесия в пространстве состояний. Поставленная задача может быть решена численными методами с использованием машинного обучения.

Набор начальных условий:

$$X_0 = \{x^{0,1}, \dots, x^{0,L}\}. \quad (7)$$

Определение заданной конечной позиции. Любая точка в пространстве состояний может выступать в качестве конечной позиции, что позволяет системе достигать устойчивости в этой точке:

$$x(t^*) = x^* \in \mathbb{R}^n, \quad (8)$$

где значение t^* не указано, но ограничено

$$t^* = \begin{cases} t, & \text{если } t < t^+ \text{ and } \|x^* - x(t, x^0)\| \leq \varepsilon \\ t^+, & \text{иначе} \end{cases} \quad (9)$$

$x(t, x^0)$ представляет собой частное решение системы (1), а ε и t^+ – заданные положительные числовые величины.

Функция управления, соответствует следующему выражению:

$$u = g(x^* - x), \quad (10)$$

это, как правило, частичное решение системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x, g(x^* - x)). \quad (11)$$

Второй шаг: решение задачи управления. Вторым этапом после решения задачи синтеза управления является решение задачи оптимального управления (1-5) для математического выражения (11), что предполагает нахождение управляющей функции в следующем виде:

$$x^*(t) = h(t), \quad (12)$$

для того, чтобы минимизировать указанный критерий (5).

На втором этапе важно отметить, что размерность искомой функции (12) совпадает с размерностью пространства состояний. В рамках данного конкретного случая допускается поиск функции в виде кусочно-постоянной функции

$$h(t) = x^{*,i}, \text{ if } (i-1)\Delta \leq t \leq i\Delta, \quad (13)$$

где $x^{*,i}$ представляют собой полученные значения координат точки равновесия, $i=1, \dots, K$, а Δ – заданный временной интервал,

$$K = \lfloor \frac{t^+}{\Delta} \rfloor. \quad (14)$$

Разработка вариационного генетического алгоритма. Эффективное решение находится с помощью генетического алгоритма, который работает в пространстве упорядоченных наборов векторов с малыми вариациями для поиска подходящего решения (Е. Софронова, А. Дивеев, 2021).

Этот алгоритм, работающий в соответствии с принципом малых вариаций базисного решения, включает следующие последовательные шаги:

1. Определение базисного решения происходит так, чтобы данное решение считалось наиболее близким к потенциально лучшему решению:

$$b^0 = [b_1^0 \dots b_n^0]^T. \quad (15)$$

2. Генерирование упорядоченных форм мультимножеств, состоящих из векторов вариаций как начальное множество:

$$w^i = (w^{i,1}, \dots, w^{i,D}), i = 1, \dots, l, \quad (16)$$

где l – последовательность возможных решений в начальном множестве, D – общее количество векторов вариаций в одном наборе.

Все возможные решения в начальном множестве получаются путём применения небольших вариаций к базисному решению:

$$b^i = w^i \circ b^0 = w^{i,D} \circ w^{i,D-1} \circ \dots \circ w^{i,1} \circ b^0, \quad (17)$$

где каждое потенциальное решение внутри множества является элементом D -окрестности базисного решения:

$$b^i \in D(b^0), i = 1, \dots, l. \quad (18)$$

3. Определение значения целевой функции для каждого возможного решения в пределах множества:

$$F_i = J(\Psi(b^i)), i = 1, \dots, l, \quad (19)$$

где $\Psi(b)$ представляет функцию, преобразующую код нечисловой структуры в реальную функцию.

4. Эволюционный цикл выполняется пока не будет достигнуто условие остановки:

I. Случайным образом выбираются два набора векторов вариаций:

$$\mathbf{W}_\gamma = (\mathcal{W}^{\gamma,1}, \dots, \mathcal{W}^{\gamma,D}), \mathbf{W}_\varphi = (\mathcal{W}^{\varphi,1}, \dots, \mathcal{W}^{\varphi,D}). \quad (20)$$

II. На основе значений целевой функции выбранных векторов определяется вероятность пересечения:

$$P_{rc} = \max \left\{ \frac{F_{j_-}}{F_\gamma}, \frac{F_{j_-}}{F_\varphi} \right\}. \quad (21)$$

Если при генерации случайного числа выбрано значение меньше чем P_{rc} , то выполняется процесс пересечения. Случайным образом выбирается точка пересечения:

$$k \in \{1, \dots, D\}. \quad (22)$$

После выбора точки пересечения векторы вариаций в выбранных наборах следует поменять местами, чтобы создать два новых набора векторов вариаций, которые обозначают два новых решения из D -окрестности базисного решения:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{\gamma+1} &= (\mathcal{W}^{\gamma,1}, \dots, \mathcal{W}^{\gamma,k}, \mathcal{W}^{\varphi,k+1}, \dots, \mathcal{W}^{\varphi,D}), \\ \mathbf{W}_{\varphi+1} &= (\mathcal{W}^{\varphi,1}, \dots, \mathcal{W}^{\varphi,k}, \mathcal{W}^{\gamma,k+1}, \dots, \mathcal{W}^{\gamma,D}). \end{aligned} \quad (23)$$

III. Для вновь найденных возможных решений в виде наборов векторов вариаций (23) выполняется процесс мутации с заданной вероятностью. Случайным образом выбирается точка мутации, затем на этой позиции создаётся новый вектор вариации.

IV. Рассчитываются значения целевой функции для вновь обнаруженных возможных решений. На основании этих значений определяется исход каждого нового возможного решения, будет ли оно исключено или добавлено в множество решений в качестве замены худшего решения.

Далее разработан метод кодирования и алгоритм поиска решений, а также исследуется взаимосвязь между ним и принципом малых вариаций. Данный метод применяется для решения проблемы синтеза системы управления.

Следующее математическое выражение является примером того, как закодировать решение с помощью синтезированного генетического программирования:

$$y = \exp(q_3 x_2^2 + q_1 x_3^2) \sin(q_2 x_1) + \cos(-q_3 x_3 + x_1), \quad (24)$$

где q_1 , q_2 и q_3 – параметры решений, x_1 , x_2 и x_3 – примеры переменных, где оба являются аргументами математического выражения.

Для представления выражения в закодированной форме необходимо использовать следующий набор аргументов и функций:

- набор аргументов:

$$\mathbf{F}_0 = \{f_{0,1} = x_1, f_{0,2} = x_2, f_{0,3} = x_3, f_{0,4} = q_1, f_{0,5} = q_2, f_{0,6} = q_3\}, \quad (25)$$

- набор функций, который характеризуется одним аргументом:

$$\mathbf{F}_1 = \{f_{1,1}(z) = z, f_{1,2}(z) = -z, f_{1,3}(z) = z^2, f_{1,4}(z) = \sin(z), f_{1,5}(z) = \cos(z), f_{1,6}(z) = \exp(z)\}, \quad (26)$$

- набор функций, характеризуемый двумя аргументами:

$$F_2 = \{f_{2,1}(z_1, z_2) = z_1 + z_2, f_{2,2}(z_1, z_2) = z_1 z_2\}, \quad (27)$$

где первый компонент индексов обозначает количество аргументов, второй является номером функции.

Таким образом, код математического выражения представляет собой шестистрочную целочисленную матрицу. Первая строка матрицы обозначает индексы функций, которые относятся к набору, характеризуемому двумя аргументами (27). Индексы функций из набора, характеризуемого одним аргументом (26), представлены во второй и четвёртой строках. Третья и пятая строки представляют собой индексы аргументов из множества аргументов (25). В шестой строке указан приоритет. В каждом столбце матрицы второй элемент (одноаргументная функция) и третий элемент (аргумент) представляют собой первый аргумент первого элемента столбца (двухаргументная функция). Кроме того, четвёртый и пятый элементы представляют собой второй аргумент первого элемента столбца.

Термин «опорный элемент» для каждого столбца означает либо первый аргумент (второй и третий элементы), либо второй аргумент (четвёртый и пятый элементы) этого столбца. Опорный элемент можно определить, задав приоритет (шестой элемент в столбце) 1 или 2.

После завершения вычислений для каждого столбца данный результат следует добавить к набору аргументов (25), постепенно увеличивая общее количество аргументов с каждым вычислением.

Для того, чтобы реализовать выражение (24) с помощью этой методики, необходимо начать с кодирования выражения $q_3 x_2^2$ в качестве первого столбца матрицы. Первым элементом столбца является индекс функции умножения в наборе функций, характеризуемого двумя аргументами (27), это число 2: $f_{2,2}(z_1, z_2) = z_1 z_2$. Для второго элемента функция параметра q_3 это идентичная функция $f_{1,1}(z) = z$, из набора функций, характеризуемых одним аргументом (26), индекс этой функции равен 1. Для третьего элемента расположение параметра q_3 в наборе аргументов (25) равно 6. Четвёртым элементом является функция переменной x_2 , а именно возведение в квадрат $f_{1,3}(z) = z^2$, её индекс равен 3 в (26). Для пятого элемента, расположение переменной x_2 в наборе аргументов (25) равно 2. Шестой элемент – это приоритет и он равен 1. Таким образом, код выражения $q_3 x_2^2$, являющийся первым столбцом матрицы, равен $[2 \ 1 \ 6 \ 3 \ 2 \ 1]^T$. После вычисления этого столбца он добавляется к набору аргументов (25) как седьмой элемент, имеющий обозначение $(|F_0| + 1 = 6 + 1 = 7)$.

Итоговый вид матрицы, кодирующей выражение (24), имеет следующий вид:

$$R_{SGP} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 6 & 4 & 7 & 5 & 6 & 11 & 9 & 12 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 8 & 1 & 3 & 1 & 10 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Разработан метод отслеживания небольших изменений в этой матрице, в котором достаточно трехэлементного целочисленного вектора:

$$W = [w_1 \ w_2 \ w_3]^T, \quad (29)$$

где w_1 – индекс столбца, w_2 – индекс строки, w_3 – обновлённое значение элемента. Если $w_2 = 1$,

то последующее число (w_3) либо должно быть нулевым, либо измененным на основе набора функций, характеризуемого двумя аргументами (27). Если $w_2=2$ или $w_2=4$, то w_3 заменяется на 0 или выбирается из набора функций, характеризуемого одним аргументом (26). Если $w_2=3$ или $w_2=5$, то w_3 может быть нулевым или определено комбинацией количества аргументов (25) и количества столбцов минус один. Определённые условия регулируют применение малых вариаций к матрице (28) на основе опорного элемента и приоритета. Эти требования могут быть реализованы путём следующих вариаций:

$$\begin{aligned} w^1 &= [3 \ 6 \ 2]^T, \\ w^2 &= [5 \ 2 \ 0]^T, \\ w^3 &= [4 \ 1 \ 1]^T, \\ w^4 &= [6 \ 5 \ 0]^T, \\ w^5 &= [3 \ 1 \ 0]^T, \\ w^6 &= [8 \ 2 \ 3]^T, \\ w^7 &= [6 \ 6 \ 2]^T, \end{aligned} \quad (30)$$

Матрица (28) после применения изменений:

$$w^1 \circ w^2 \circ w^3 \circ w^4 \circ w^5 \circ w^6 \circ w^7 \circ R_{SGP} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 7 & 5 & 6 & 11 & 9 & 12 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 8 & 1 & 3 & 0 & 10 & 13 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

В итоге третья и шестая вариации w^3 и w^6 могут быть выполнены напрямую.

Новая матрица имеет представление:

$$y = \exp(q_1 x_3^2) \sin(q_2 + x_1) + (-q_3 x_3)^2. \quad (32)$$

В третьей главе, посвящённой результатам исследования, представлена задача оптимального управления двумя неголономными мобильными роботами. Среда моделирования включает ряд статических фазовых ограничений, а также динамические фазовые ограничения, возникающие при столкновении роботов.

Математическая модель двух роботов (П. Шустер, А. Ядловска, 2011):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^j &= 0.5(u_1^j + u_2^j) \cos(x_3^j), \\ \dot{x}_2^j &= 0.5(u_1^j - u_2^j) \sin(x_3^j), \\ \dot{x}_3^j &= 0.5(u_1^j - u_2^j), \end{aligned} \quad (33)$$

где $\mathbf{x}^j = [x_1^j \ x_2^j \ x_3^j]^T$ – вектор состояния робота j , $\mathbf{u}^j = [u_1^j \ u_2^j]^T$ – вектор управления роботом j , $j = 1, 2$.

На начальном этапе необходимо решить задачу синтеза управления:

Задаются четырнадцать начальных состояний (7):

$$\begin{aligned} X_0 = \left\{ \mathbf{x}^{0,0} = \left[-3 \ 3.5 \ \frac{5\pi}{16} \right]^T, \mathbf{x}^{0,1} = \left[-3 \ -3.5 \ \frac{5\pi}{16} \right]^T, \mathbf{x}^{0,2} = \left[3 \ -3.5 \ \frac{5\pi}{16} \right]^T, \mathbf{x}^{0,3} = \left[3 \ 3.5 \ \frac{5\pi}{16} \right]^T, \mathbf{x}^{0,4} = \right. \\ \left[-3 \ 3.5 \ -\frac{5\pi}{16} \right]^T, \mathbf{x}^{0,5} = \left[-3 \ -3.5 \ -\frac{5\pi}{16} \right]^T, \mathbf{x}^{0,6} = \left[3 \ -3.5 \ -\frac{5\pi}{16} \right]^T, \mathbf{x}^{0,7} = \left[3 \ 3.5 \ -\frac{5\pi}{16} \right]^T, \mathbf{x}^{0,8} = \\ \left[-3 \ 3.5 \ 0 \right]^T, \mathbf{x}^{0,9} = \left[-3 \ -3.5 \ 0 \right]^T, \mathbf{x}^{0,10} = \left[3 \ -3.5 \ 0 \right]^T, \mathbf{x}^{0,11} = \left[3 \ 3.5 \ 0 \right]^T, \mathbf{x}^{0,12} = \\ \left. \left[0 \ 0 \ \frac{5\pi}{16} \right]^T, \mathbf{x}^{0,13} = \left[0 \ 0 \ -\frac{5\pi}{16} \right]^T \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

Устанавливается конечная позиция (8):

$$\mathbf{x}^* = [x_1^* \ x_2^* \ x_3^*]^T = [0 \ 0 \ 0]^T. \quad (35)$$

Определяется критерий качества:

$$J_{syn} = \sum_{i=1}^L (t_{f,i} + p_1 \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}(t_{f,i}, \mathbf{x}^{0,i})\|) \rightarrow \min, \quad (36)$$

где $t_{f,i}$ – период, характеризующийся достижением конечного состояния (35), начиная с начальных состояний (34), $i = 1, \dots, L$, L – общее количество начальных состояний, $L = 14$, p_1 – весовой коэффициент, $p_1 = 1$.

Построены следующие математические выражения для функций управления:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 = & \left((x_2^f - x_2)(x_1^f - x_1)(q_1 + (x_2^f - x_2)) + q_2(x_3^f - x_3) + \operatorname{sgn} \left((x_2^f - x_2)(x_1^f - x_1)(q_1 + \right. \right. \\ & \left. \left. (x_2^f - x_2)) + q_2(x_3^f - x_3) \right) \ln \left(\left| (x_2^f - x_2)(x_1^f - x_1)(q_1 + (x_2^f - x_2)) + q_2(x_3^f - x_3) \right| + 1 \right) + \right. \\ & \left. \rho(q_2(x_3^f - x_3)) \right) / 2, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\tilde{u}_2 = (4 * \sin(q_3) * (x_1^f - x_1))^3, \quad (38)$$

$$\rho(\mu) = \begin{cases} 0, & \text{если } |\mu| < \delta \\ \operatorname{sgn}(\mu), & \text{иначе} \end{cases} \quad (39)$$

$q_1=0.23307$, $q_2=6.87832$, $q_3=8.36356$, $\delta=10^{-8}$. Критерий качества составляет (36), $J_{syn}=1.75102$.

Решение задачи синтеза управления приводит к появлению устойчивой точки равновесия в пространстве состояний. На втором этапе, для поиска упомянутых точек используется алгоритм оптимизации роя частиц (Дж. Кеннеди, Р. Эберхарт, 1995), в результате применения которого для каждого мобильного робота определяются три точки.

Начальными состояниями для двух роботов являются:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^1(0) &= \mathbf{x}^{0,1} = [0 \ 0 \ 0]^T, \\ \mathbf{x}^2(0) &= \mathbf{x}^{0,2} = [10 \ 10 \ 0]^T. \end{aligned} \quad (40)$$

Конечные состояния установлены:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^1(t_f) &= \mathbf{x}^{f,1} = [10 \ 10 \ 0]^T, \\ \mathbf{x}^2(t_f) &= \mathbf{x}^{f,2} = [0 \ 0 \ 0]^T, \end{aligned} \quad (41)$$

где

$$t_f = \begin{cases} t, & \text{если } t \leq t^+ \text{ and } \|x^f - x(t)\| \leq \varepsilon \\ t^+, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (42)$$

где $\varepsilon = 0.01$, $t^+ = 2.7$ с,

$$\|x^f - x(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i^f - x_i(t))^2}. \quad (43)$$

Последующий критерий качества применяется для решения задачи оптимального управления:

$$J_{opt} = t_f + c_1 \sum_{st=1}^5 \sum_{j=1}^2 \int_0^{t_f} \vartheta(r_{st} - \sqrt{(x_1^j - x_{1,st})^2 + (x_2^j - x_{2,st})^2}) + c_2 \int_0^{t_f} \vartheta\left(r_d - \sqrt{(x_1^1 - x_1^2)^2 + (x_2^1 - x_2^2)^2}\right) + c_3 \sum_{j=1}^2 \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i^{f,j} - x_i^j)^2} \quad (44)$$

где $c_1 = 2$, $c_2 = 4$, $c_3 = 2.5$, $\vartheta(A)$ — ступенчатая функция Хевисайда:

$$\vartheta(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } A > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (45)$$

где $r_{st}, x_{1,st}, x_{2,st}$ — заданные параметры (радиус и координаты центра) ограничений статической фазы, $st = 1, \dots, P_t$, P_t — общее количество фазовых ограничений, где

$$P_t = 5, r_1 = 2, r_2 = 2, r_3 = 2, r_4 = 2, r_5 = 2, x_{1,1} = 0, x_{1,2} = 5, x_{1,3} = 10, x_{1,4} = 5, x_{1,5} = 5, x_{2,1} = 5, x_{2,2} = 5, x_{2,3} = 5, x_{2,4} = 0, x_{2,5} = 10$$

и r_d

минимально допустимое безопасное расстояние между роботами, $r_d = 2$.

Для каждого мобильного робота на втором этапе определяются три точки. Они имеют следующие координаты в пространстве состояний $\{x_1, x_2, x_3\}$:

$$\begin{aligned} x^{1*,1} &= [-0.0372 \ 3.2964 \ 1.4551]^T, x^{1*,2} = [5.304 \ 8.5296 \ 0.6911]^T, x^{1*,3} = \\ &= [10.2478 \ 5.3404 \ -0.7197]^T, x^{2*,1} = [7.4218 \ 10.7499 \ 0.5217]^T, x^{2*,2} = \\ &= [4.3332 \ 11.0171 \ 1.3788]^T, x^{2*,3} = [0.1775 \ 4.6068 \ -0.518]^T, \end{aligned} \quad (46)$$

где первые три точки относятся к первому роботу, а остальные ко второму. Алгоритм оптимизации роя частиц использовался для нахождения точек равновесия.

На рис. 1-7 представлены результаты компьютерного моделирования. Рис. 1 демонстрирует подходящие траектории, сгенерированные мобильными роботами в плоскости $\{x_1, x_2\}$. Красная линия представляет траекторию первого робота, жёлтая — второго, фиолетовые круги указывают на фазовые ограничения. Зелёные квадраты представляют собой найденные по формуле (46) точки равновесия первого робота, чёрные квадраты — второго. Как видно из наблюдений, оба робота успешно достигли своих конечных состояний, не нарушая фазовых ограничений. Функциональное значение составило (44), $J_{opt} = 2.7032$.

Скорость передвижения роботов в непосредственной близости от точек устойчивого равновесия должны быть ниже. Следовательно, для достижения более высоких скоростей объект управления должен находиться не точно в точке устойчивого равновесия, а рядом с ней.

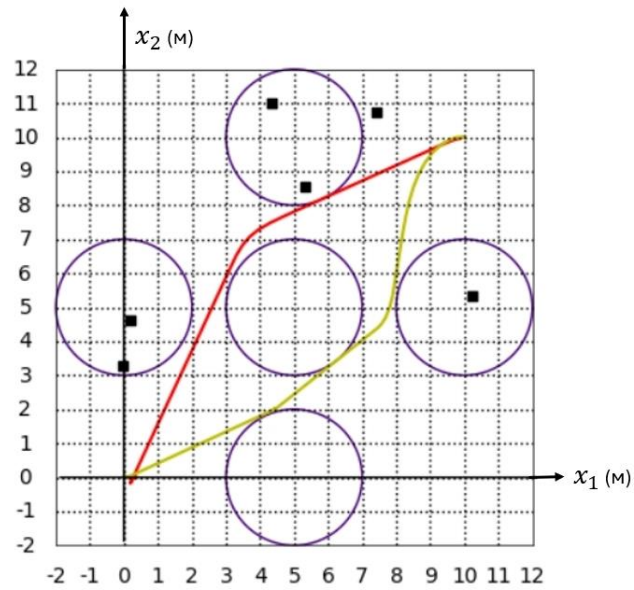


Рис. 1. Найденные управляющие траектории роботов в плоскости $\{x_1, x_2\}$

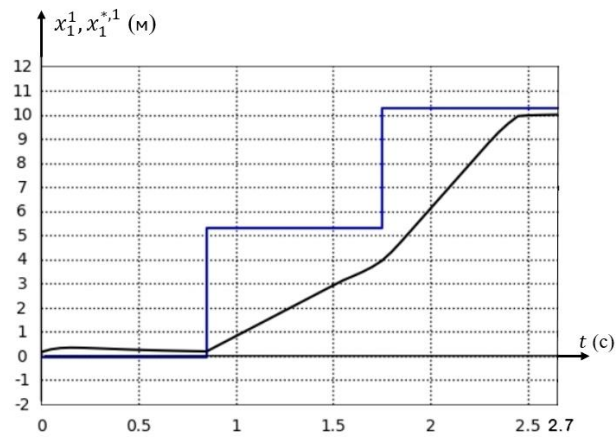


Рис. 2. Переменная x_1^1 (чёрный) и найденные координаты точек равновесия $x_1^{*,1}$ (синий)

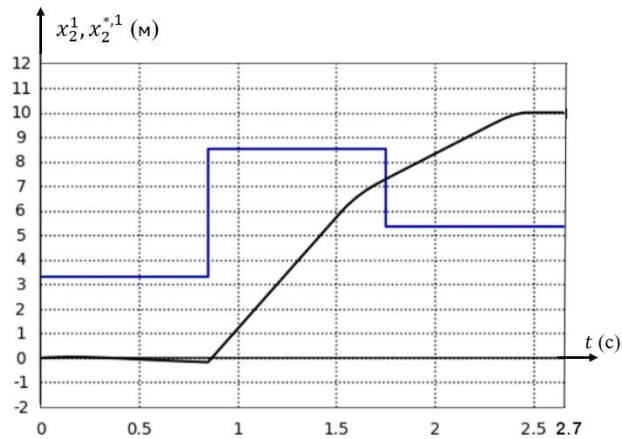


Рис. 3. Переменная x_2^1 (чёрный) и найденные координаты точек равновесия $x_2^{*,1}$ (синий)

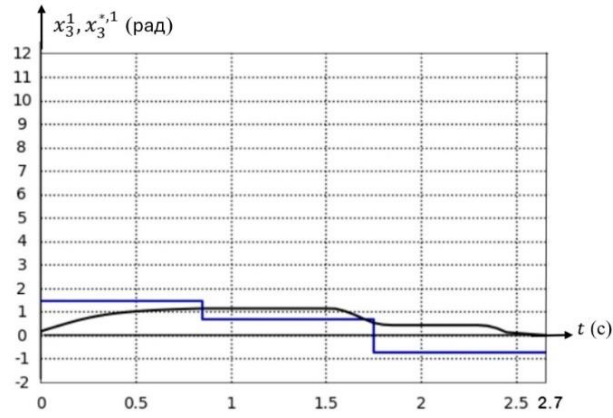


Рис. 4. Переменная x_3^1 (чёрный) и найденные координаты точек равновесия $x_3^{*,1}$ (синий)

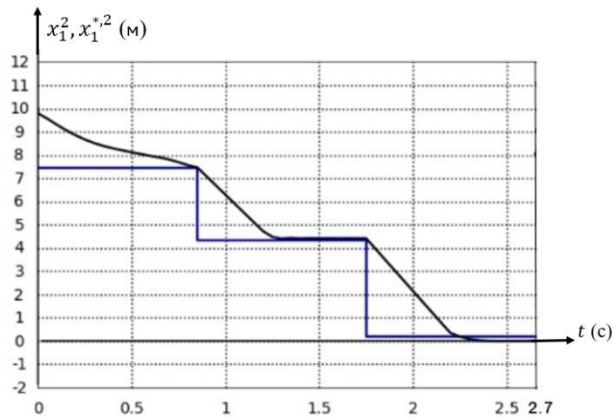


Рис. 5. Переменная x_1^2 (чёрный) и найденные координаты точек равновесия $x_1^{*,2}$ (синий)

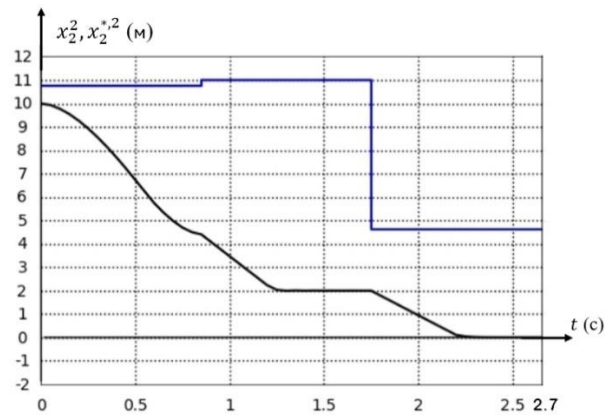


Рис. 6. Переменная x_2^2 (чёрный) и найденные координаты точек равновесия $x_2^{*,2}$ (синий)

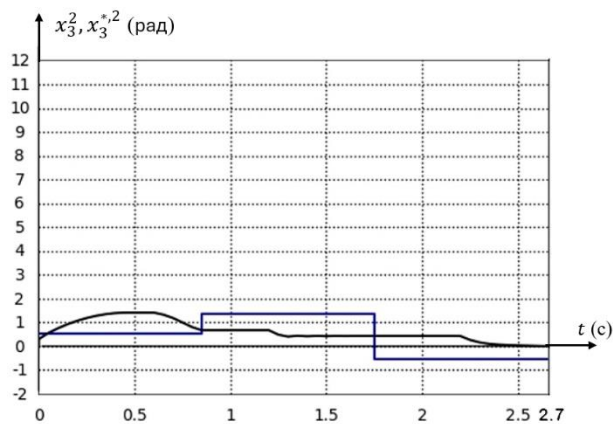


Рис. 7. Переменная x_3^2 (чёрный) и найденные координаты точек равновесия $x_3^{*,2}$ (синий)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты диссертационного исследования:

1. Было показано, что метод символьной регрессии позволяет успешно решать задачу синтеза управления без трудоемкого построения обучающей выборки, основываясь только на критерии минимизации функции качества.
2. Для эффективного поиска интеллектуального решения синтеза управления предлагается использование принципа малых вариаций в базисном решении.
3. После решения задачи синтеза управления система дифференциальных уравнений с найденными управляющими функциями в правой части всегда имеет устойчивую точку равновесия в пространстве состояний.
4. Критерием качества задачи синтеза является время достижения конечной точки из набора начальных условий. В задаче синтеза фазовые ограничения не учитывались, тогда как при поиске точек стабилизации учитывались динамические и статические фазовые ограничения.
5. Численное решение задачи оптимизации управления с использованием эволюционного алгоритма демонстрирует, что эти алгоритмы могут эффективно находить решения для задач оптимизации управления как со статическими, так и с динамическими фазовыми ограничениями.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Nassrullah K.S., Stepanyan I.V., Hussein Ali A.A., Nasrallah H.S. & Mendez Florez N.J. Problem of Control Synthesis of Stabilization System for a Nonholonomic Mobile Robot: An Autonomous Solution via Modified Synthesized Genetic Programming Method, *International Journal of Intelligent Engineering and Systems* 18, no. 6 (2025): 350-365.
2. Nassrullah K.S., Stepanyan I.V., Nasrallah H.S., Florez N.J.M., Zidoun A.M. & Mohammed S.R. Unsupervised Machine Learning Control Techniques for Solving the General Synthesis of Control System Problem, *International Journal of Intelligent Engineering and Systems* 17, no. 3 (2024): 401-416.
3. Nasrallah H.S., Stepanyan I.V., Nassrullah K.S., Mendez Florez N.J., Abdalameer AL-Khafaji I.M., Zidoun A.M., Sekhar R., Shah P. and Parihar, S. Elevating Mobile Robotics: Pioneering Applications of Artificial Intelligence and Machine Learning, *Revue d'Intelligence Artificielle* 38, no. 1 (2024): 351-363.
4. Nassrullah K.S., Stepanyan I.V., Nasrallah H.S. & Florez N.J.M. A comparative study for data approximation between two explainable artificial intelligence approaches, *AIP Conference Proceedings* 3051, no. 1 (2024): 040008-1–040008-11.
5. Каррар Жавуш Сахиб Насрулла, Хайдер Чавуш Сахиб Насралла, Флорес Мендес Недер Хаир. Новый метод решения проблемы переобучения с использованием символической регрессии, применяемой в машинном обучении для управления движением роботов / *Наука и бизнес: пути развития*. 2024. 2(152): 65-70.
6. Каррар Жавуш Сахиб Насрулла, Хайдер Чавуш Сахиб Насралла, Флорес Мендес Недер Хаир. Исследование методов машинного обучения на основе генетического программирования и символьной регрессии для управления мобильными роботами / *Наука и бизнес: пути развития*. 2024. 2(152): 65-70.

АННОТАЦИЯ**Жавуш Каррар Сахиб Нассрулла****«Алгоритм символьной регрессии для управления неголономными мобильными роботами на колёсах»**

Диссертация посвящена построению системы управления парой неголономных мобильных роботов. Выполнение предлагаемого управления требует создания двойной петли обратной связи: во внутреннем контуре робот стабилизируется относительно заданной точки в пространстве состояний (задача решена с помощью численного метода символьной регрессии с нахождением функций обратной связи); во внешнем контуре задача достижения эффективного управления роботами решена путём использования эволюционного алгоритма, позволяющего изменять положение устойчивых точек равновесия. Объект управления достигает устойчивой точки равновесия в пространстве состояний. Найденные точки равновесия могут быть уточнены на основе алгоритма оптимизации роя частиц, чтобы мобильный робот мог добраться из начальной точки в конечную с улучшенным значением критерия качества и траекторией. Результаты проведённых модельных экспериментов показали, что роботы успешно достигли своих конечных целей, не нарушив фазовых ограничений и избежав столкновений. Показано, что эффективное управления влияет на соответствующие компоненты векторов, представляющих пространство состояний.

ABSTRACT**Jawoosh Karrar Sahib Nassrullah****«Symbolic regression algorithm for control of non-holonomic wheeled mobile robots»**

The dissertation is devoted to the construction of a control system for a pair of nonholonomic mobile robots. The implementation of the proposed control requires the creation of a double feedback loop: in the inner contour, the robot stabilizes relative to a given point in the state space (the problem is solved using the numerical method of symbolic regression with the finding of feedback functions); in the outer contour, the task of achieving effective robot control is solved by using an evolutionary algorithm that allows changing the position of stable equilibrium points. The control object reaches a stable equilibrium point in the state space. The found equilibrium points can be refined based on the particle swarm optimization algorithm so that the mobile robot can get from the starting point to the end point with an improved value of the quality criterion and trajectory. The results of the conducted model experiments showed that the robots successfully achieved their final goals without violating phase constraints and avoiding collisions. It is shown that the effective control affects the corresponding components of the vectors representing the state space.