На правах рукописи

Джосеф Дарил Джеймс

Теоремы вложения и теоремы о следах для пространств Никольского-Бесова-Морри

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2025

Работа выполнена в Математическом институте имени академика С.М. Никольского факультета физико-математических и естественных наук Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы».

Научный руководитель: **Буренков Виктор Иванович, д.ф.-м.н.,** профессор, профессор Математического института им. С.М. Никольского Федерального государственого автономного образовательного учреждения высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»,

Официальные оппоненты: **Авсянкин Олег Геннадиевич, д.ф.-м.н.,** доцент, заведующий кафедрой дифференциальных и интегральных уравнений Южного федерального университета.

Бесов Олег Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник отдела теории функций Математического института имени В.А. Стеклова РАН.

Дьяченко Михаил Иванович, д.ф.-м.н., профессор кафедры теории функций и функционального анализа Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Защита состоится 24 июня 2025 г. в 16:00 на заседании диссертационного совета ПДС 0200.005 при Российском университете дружбы народов имени Патриса Лумумбы по адресу: 115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3. С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов) по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо Маклая, д. 6 и на сайте «Диссертационные советы РУДН» в сети интернет (http://rudn.ru/science/dissovet).

Автореферат разослан   мая 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д-р физ.-мат. наук   Савин Антон Юрьевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности.

Диссертация посвящена современному активно развивающемуся направлению в теории функциональных пространств, а именно теории пространств Никольского-Бесова.

В 1951 С. М. Никольский доказал неравенства Бернштейна, неравенство разных метрик и неравенство разных измерений для целых функции экспоненциального типа и для тригонометрических многочленов[1]. Эти неравенства играют важную роль при изучении так называемых пространств Никольского-Бесова.

Пространства Никольского-Бесова $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$, при $\theta = \infty$ были введены С.М. Никольским[2], а при $\theta < \infty$ О.В. Бесовым[3]. Пространства $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ характеризуются параметрами p, θ и r, которые определяют интегрируемость и гладкость функций. Ключевой особенностью пространств $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ является тот факт, что они могут быть определены с помощью нескольких эквивалентных норм [4]. Одна из таких норм определяется с помощью наилучших приближений целыми функциями экспоненциального типа.

Обозначим через $E_\nu(\mathbb{R}^n)$ множество всех целых функций экспоненциального типа ν на $\mathbb{R}^n$, а через $E_\nu(f)_{L_p(\mathbb{R}^n)}$ наилучшее приближение целыми функциями экспоненциального типа ν:

$$E_\nu(f)_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \inf_{Q_\nu \in E_\nu(\mathbb{R}^n)} \|f - Q_\nu\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Пусть $1 \le p, \theta \le \infty,\ r > 0$. Говорят, что функция принадлежит пространству Никольского-Бесова $f \in B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$, если для некоторого $a > 1$

$$\|f\|_{B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{s=0}^{\infty} a^{r\theta s} E^\theta_{a^s}(f)_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right)^{1/\theta} < \infty.$$

(При различных $a > 1$ эти нормы эквивалентны.) Еще одна эквивалентная норма имеет следующий вид:

$$\|f\|_{B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \inf \left(\sum_{s=0}^{\infty} a^{r\theta s} \|Q_{a^s}\|^\theta_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right)^{1/\theta},$$

[1]Никольский, С.М. Некоторые неравенства для целых функций конечной степени многих переменных и их применение//ДАН СССР,-1951 -Т.76,-№ 6. -785–788 с.

[2]Никольский С.М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения -изд. 2, перераб. и доп., Москва: Наука, 1977, 456 с

[3]Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М., Интегральные представления функций и теоремы вложения . -2 изд. -Москва: Наука, 1996, 480 с.

[4]См. например сноску 2.

где $a > 1$ и f представима в виде ряда

$$f = \sum_{s=0}^{\infty} Q_{a^s}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

члены которого целые функции экспоненциального типа a^s, а инфимум берется по всем разложениям (1).

Двумя важными результатами теории пространства Никольского-Бесова являются теорема вложения и теорема о следах.

Теорема вложения разных метрик для пространствах Никольского-Бесова имеет следующий вид: $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n) \to B^{r'}_{q,\theta}(\mathbb{R}^n)$, где

$$1 \le p < q \le \infty,\ 1 \le \theta \le \infty,\ r' = r - n\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big) > 0,$$

Прямая теорема о следах (теорема вложения разных измерений) для пространств Никольского-Бесова устанавливает связь между функцией $f \in B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$, заданной на n-мерном пространстве, и ее следом на m-мерном пространстве $\mathbb{R}^m$, а имена $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n) \to B^{r'}_{p,\theta}(\mathbb{R}^m)$, где

$$1 \le p,\ \theta \le \infty,\ 1 \le m < n,\ r' = r - \frac{n-m}{p} > 0.$$

Теорема вложения разных измерений для пространства $B^r_{p,\theta}$ обратима, то есть справедлива обратная теорема о следах $B^{r'}_{p,\theta}(\mathbb{R}^m) \to B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$. Эти две теоремы дают полное описание пространства следов на $\mathbb{R}^m$ функций из пространства $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$, то есть

$$Tr_{\mathbb{R}^m} B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n) = \{f|_{\mathbb{R}^m} : f \in B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)\} = B^{r'}_{p,\theta}(\mathbb{R}^m).$$

В результате изучения этих пространств О.В. Бесовым было доказано, что пространства Никольского-Бесова являются пространствами следов для пространств Соболева $W^l_p(\mathbb{R}^n)$, то есть если f принадлежит пространству Соболева $W^l_p(\mathbb{R}^n)$, то существует след g, принадлежащий $B^{l-\frac{n-m}{p}}_{p,p}(\mathbb{R}^m)$, а также обратная теорема о следах (теорема о продолжении), утверждающая, что если g принадлежит $B^{l-\frac{n-m}{p}}_{p,p}(\mathbb{R}^m)$, то существует функция f из $W^l_p(\mathbb{R}^n)$, такая, что $f|_{\mathbb{R}^m} = g$.

Аналогичные результаты справедливы и для периодических пространств Никольского-Бесова, изучаемых с помощью приближений тригонометрическими многочленами.

В настоящее время во многих статьях рассматриваются пространства, получаемые при замене базовых лебеговых пространств $L_p(\mathbb{R}^n)$ в определении пространств Никольского-Бесова, на другие пространства.

В диссертации лебеговы пространства заменены на пространства Морри и развит не рассматривавшийся ранее подход к изучению получающихся пространств Никольского-Бесова-Морри, основанный на теории приближения целыми функциями экспоненциального типа или, в периодическом случае, тригонометрическими многочленами.

Пространство $M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, называемое теперь пространством Морри, впервые было рассмотрено Чарльзом Морри[5] в связи с исследованием регулярности решений уравнений в частных производных. Функция принадлежит пространству Морри, если она принадлежит пространству $L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{r>0} r^{-\lambda}\|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty,$$

при $0 < p \leq \infty$ и $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$.

Предположение $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$ связано с тем, что при $\lambda < 0$ и при $\lambda > \frac{n}{p}$ эти пространства тривиальны, то есть состоят только из функций, эквивалентых нулю на $\mathbb{R}^n$. Очевидно, что $M_p^0(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$ кроме того, $M_p^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n) = L_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Интерес к этим пространствам возрос, когда он установил следующую теперь хорошо известную лемму.

Лемма Морри. *Пусть функция $u \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $\nabla u \in M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, где $\frac{n}{p} - 1 < \lambda < \frac{n}{p}$. Тогда функция u эквивалентна функции $\tilde{u} \in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ с показателем $\alpha = \lambda - \frac{n}{p} + 1$, где $C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ пространство Гёльдера.*

Данная работа посвящена исследованию интегральных неравенств в пространствах Морри для целых функций экспоненциального типа и тригонометрических многочленов, их приложениям к пространству Никольского-Бесова.

Цель работы

Целью настоящей диссертации является изучение пространств Никольского-Бесова-Морри, основанное на теории приближения целыми функциями экспоненциального типа или, в периодическом случае, тригонометрическими многочленами.

При таком подходе требуется сначала доказать ряд интегральных неравенств для целых функций экспоненциального типа и тригонометрических многочленов в пространствах Морри, а именно проводится доказательство аналогов неравенств Бернштейна, неравенства разных метрик и неравенства разных измерений для пространств Морри (гл. 1), аналогов неравенств Бернштейна, неравенства разных метрик и неравенства разных измерений для периодических пространств Морри (гл. 2).

На основе результатов первых двух глав в третьей и четвертой главах доказаны теоремы вложения и теоремы о следах для пространств

[5] Morrey, C.B. On the solutions of quasi-linear elliptic partial di erential equations / C.B. Morrey // Transactions of the American Mathematical Society. –1938. –vol. 43, –N. 1. –P 126-166

Никольского-Бесова-Морри и, соответственно, для периодических пространств Никольского-Бесова-Морри.

Научная новизна

В данной работе

1) получены интегральные неравенства для целых функций экспоненциального типа и тригонометрических многочленов для пространств Морри, включая аналоги неравенств Бернштейна, неравенства разных метрик и неравенства разных измерений.

2) на основе применения доказанных неравенств установлены теоремы вложения и теоремы о следах для пространств Никольского-Бесова-Морри и их периодических аналогов.

Все эти результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая ценности

Полученные результаты могут быть использованы в теории функциональных пространств и ее приложениях, в частности, к задачам теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Методология и методы исследования

Исследования основываются на общих методах функционального анализа и на методах, используемых в теории приближений с помощью целых функций экспоненциального типа и их периодических аналогов тригонометрических многочленов. Эти методы надлежащим образом модифицируются и развиваются так, чтобы их можно было применить к доказательству в главах 1 и 2 неравенств для пространств Морри, а также к доказательству в главах 3 и 4 теорем вложения и теорем о следах для пространств Никольского-Бесова-Морри.

Положения, выносимые на защиту

1. Установлены неравенства Бернштейна в пространствах Морри для целых функций экспоненциального типа и тригонометрических многочленов.
2. Установлены неравенства разных метрик в пространствах Морри для целых функций экспоненциального типа и тригонометрических многочленов.
3. Установлены неравенства разных измерений в пространствах Морри для целых функций экспоненциального типа и тригонометрических многочленов.

4. Установлены теоремы вложения для пространств Никольского-Бесова-Морри и их периодические аналоги.
5. Установлены теоремы о следах для пространств Никольского-Бесова-Морри и их периодические аналоги.

Степень достоверности

Достоверность полученних результатов обеспечивается строгостью проведенных доказательств, выступлениями на научных семинарах, конференциях и школах, а также имеющимися публикациями в рецензируемых изданиях, которые индексируются международными базами данных.

Апробация результатов

Результаты, полученные в рамках работы над диссертацией, неоднократно излагались на научном семинаре Математического института РУДН по функциональному анализу и его приложениям под руководством профессоров В. И. Буренкова и М.Л. Гольдмана; на научном семинаре Математического института РУДН по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям под руководством профессора А.Л. Скубачевского; на научном семинаре по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики в Математическом институте РАН им. В.А. Стеклова (семинар Никольского, руководитель член-корреспондент РАН О.В. Бесов); на научно-исследовательском семинаре по математическому анализу в МГУ им. М. В. Ломоносова, факультет ВМК, под руководством профессоров Г.Г. Брайчева, И.В. Тихонова и В.Б. Шерстюкова; на семинаре «Задачи дифференциальных уравнений, анализа и управления: теория и приложения» МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет под руководством профессоров А.В. Горшкова, М.И. Зеликина, В.Ю. Протасова, В.М. Тихомирова и А.В. Фурсикова; на научном семинаре кафедры «Дифференциальных и интегральных уравнений ЮФУ» под руководством доцента О.Г. Авсянкина.

Полученные результаты представлялись и обсуждались на следующих научных конференциях: Воронежская Зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (28 января 2023 г.), конференция «Владикавказской молодежной математической школы» (22-25 мая 2023 г.), конференция по теории функций многих действительных переменных, посвященная 90-летию со дня рождения чл.- корр. РАН О. В. Бесова, в Математическом институте им. В.А Стеклова (29 мая 2023 г.).

Публикции и личный вклад автора.

Из совместных работ в диссертацию вошли результаты, полученные автором самостоятельно. Статья [4] опубликована единолично. Статьи [1], [2] и [3] опубликованы в соавторстве с В.И. Буренковым.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация состоит из введения, четырех глав, списка обозначений и списка литературы.

Во **введении** обосновывается актуальность работы, проводится обзор работ, посвященных теме диссертации, и анализ основных результатов, выносимых на защиту.

Глава 1 состоит из четырех параграфов.

В **параграфе 1.1** даются необходимые обозначения и определения.

Определение 1. *Пусть* $0 < p \leq \infty$ *и* $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, *тогда* $f \in M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, *если*

$$f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n) \text{ и } \|f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{r>0} r^{-\lambda}\|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty.$$

В **параграфе 1.2** получено неравенство Бернштейна для целых функций экспоненциального типа ν для пространств Морри.

Теорема 1. *Пусть* $Z(\mathbb{R}^n)$ *– нормированное пространство функций* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, *причем норма* $\|\cdot\|_{Z(\mathbb{R}^n)}$ *инвариантна относительно сдвига: для любой функции* $f \in Z(\mathbb{R}^n)$

$$\|f(x+h)\|_{Z(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{Z(\mathbb{R}^n)} \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда для любой функции $g \in E_\nu(\mathbb{R}^n) \cap Z(\mathbb{R}^n)$

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial x_j}\right\|_{Z(\mathbb{R}^n)} \leq \nu\|g(x)\|_{Z(\mathbb{R}^n)},\ j = 1, \ldots, n.$$

Следствие 1. *Пусть* $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, *тогда* $\forall g \in E_\nu(\mathbb{R}^n) \cap M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial x_j}\right\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \leq \nu\|g\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Если $0 < \lambda < \frac{n}{p}$, то

$$L_p(\mathbb{R}^n) \not\subset M_p^\lambda(\mathbb{R}^n) \not\subset L_p(\mathbb{R}^n),$$

поэтому наряду с пространствами $M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$ полезно рассмотрение пространств

$$\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n) = M_p^\lambda(\mathbb{R}^n) \bigcap L_p(\mathbb{R}^n)$$

.

Неравенство в следствии 1 также имеет место, если заменить $M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$ на $\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$.

В **параграфе 1.3** даются необходимые определения и получены неравенства разных метрик для целых функций экспоненциального типа ν для пространств Морри.

Определение 2. *Пусть функции $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, тогда сверткой называется функция $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, определенная равенством*

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t-\tau)g(\tau)d\tau,\ t \in \mathbb{R}^n.$$

Лемма 1. *Пусть $1 \le p \le q \le \infty$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, $f \in L_{q'}(\mathbb{R}^n)$ и $g \in \mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^n)$. Тогда для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$*

$$|(f * g)(x) - (f * g)(y)| \le M\|f\|_{L_{q'}(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}|x-y|,$$

где $M = 2^n n\nu^{1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$.

Определение 3. *Преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ задаётся следующей формулой:*

$$(Ff)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\xi\cdot x}dx,\ \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где $\xi \cdot x = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n$.

Определение 4. *Если $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, где $1 < p \le 2$, то преобразование Фурье задается равенством*

$$(Ff)(\xi) = \lim_{r\to\infty}\big(F(f\chi_{B(0,r)})\big)(\xi) \text{ в } L_{p'}(\mathbb{R}^n),$$

где $p' = \frac{p}{p-1}$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$. (Это равенство справедливо и при p=1 для преобразования Фурье Ff, задаваемого равенством (2).)

Замечание 1. *Пусть сначала $\Delta_\nu = \{|x_j| < \nu,\ j = 1, \dots, n\}$. Напомним, что для $\varphi, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$*

$$(F(\varphi * g))(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}(F\varphi)(\xi)(Fg)(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Из (3) сразу следует, что если $(F\varphi)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ для любого $\xi \in \operatorname{supp} Fg$, то $F(\varphi * g) = Fg$ и

$$g(x) = (\varphi * g)(x) \tag{4}$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. Если $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n), g \in \mathfrak{M}_{\nu,1}(\mathbb{R}^n)$ и $(F\varphi)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ для любых $\xi \in \Delta_\nu$, то обе функции g и, согласно лемме 1 с $f = \varphi$, $p = 1$, $q = \infty$, свертка $\varphi * g$ непрерывны на $\mathbb{R}^n$, поэтому равенство (4) имеет место для любых $x \in \mathbb{R}^n$.

Определение 5. *Пусть $1 \le p \le \infty$, $\nu > 0$. Будем говорить, что $\varphi \in J_{\nu,p}(\mathbb{R}^n)$, если $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$ и преобразование Фурье $F\varphi$, понимаемое, вообще говоря, в смысле теории обобщенных функций из пространства $S'(\mathbb{R}^n)$, равно $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ на Δ_ν.*

Теорема 2. *Пусть $1 \le p < \infty$, $\varphi \in J_{\nu,p'}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^n)$. Тогда равенство (4) справедливо для всех $x \in \mathbb{R}^n$.*

Теорема 3. *Пусть* $1 \le p \le q \le \infty, \quad 1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}, \quad 0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$, *тогда*

$$\|g\|_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}(\mathbb{R}^n)} \le c\nu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|g\|^{\frac{p}{q}}_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \|g\|^{1-\frac{p}{q}}_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

для любых $\nu > 0$ *и* $g \in E_\nu(\mathbb{R}^n) \cap \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, *где*

$$c = c(n,p,q) = \inf_{\psi \in J_{1,p'}(\mathbb{R}^n)} \|\psi\|_{L_r(\mathbb{R}^n)},$$

в предположении, что $c < \infty$.

Следствие 2. *В предположениях теоремы* 3

$$\|g\|_{\widehat{M}_q^{\frac{p\lambda}{q}}(\mathbb{R}^n)} \le c\nu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|g\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}$$

для любых $\nu > 0$ *и* $g \in E_\nu(\mathbb{R}^n) \cap \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$.

Следствие 3. *Если, в дополнение к предположениям теоремы* 3,

$$1 \le p \le \min\{2, q\} \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \ge \frac{1}{2} \Longleftrightarrow q \ge \frac{2p}{2-p},$$

то

$$\|g\|_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}(\mathbb{R}^n)} \le \left(\frac{(r')^{\frac{1}{r'}}}{r^{\frac{1}{r}}} \right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\nu}{\pi} \right)^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|g\|^{\frac{p}{q}}_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \|g\|^{1-\frac{p}{q}}_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

и

$$\|g\|_{\widehat{M}_q^{\frac{p\lambda}{q}}(\mathbb{R}^n)} \le \left(\frac{(r')^{\frac{1}{r'}}}{r^{\frac{1}{r}}} \right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\nu}{\pi} \right)^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|g\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)},$$

в частности, при $q = \infty$, *для любых* $1 \le p \le 2$ *и* $g \in \mathfrak{M}_{p,\nu}(\mathbb{R}^n)$

$$\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \le \left(\frac{p^{\frac{1}{p}}}{(p')^{\frac{1}{p'}}} \right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\nu}{\pi} \right)^{\frac{n}{p}} \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

а при $p = 2$ *и* $p = 1$

$$\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \le \left(\frac{\nu}{\pi} \right)^{\frac{n}{2}} \|g\|_{L_2(\mathbb{R}^n)},$$

$$\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \le \left(\frac{\nu}{\pi} \right)^{n} \|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}.$$

Замечание 2. (*Неулучшаемость показателя* $\frac{p}{q}\lambda$ *в неравенстве разных метрик.*) *Предположим, что для некоторых* $\mu \ge 0$ *и* $c > 0$, *для любых* $\nu > 0$ *и* $g \in E_\nu(\mathbb{R}^n) \cap \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$ *выполнятся неравенство*

$$\|g\|_{M_q^\mu(\mathbb{R}^n)} \le c\nu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|g\|^{\frac{p}{q}}_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \|g\|^{1-\frac{p}{q}}_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Тогда $\mu = \frac{\lambda p}{q}$.

В **параграфе 1.4** получены неравенства разных измерений для целых функций экспоненциального типа ν для пространств Морри.

Определение 6. *Пусть*

$$0 < p_1, p_2 \leq \infty, \quad m_1, m_2 \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \lambda_1 \leq \frac{m_1}{p_1}, \quad 0 \leq \lambda_2 \leq \frac{m_2}{p_2}.$$

Определим пространство

$$M_{p_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1}) \times M_{p_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})$$

со смешанной квазинормой как множество всех измеримых на $\mathbb{R}^{m_1+m_2}$ *функций* f*, для которых*

$$\|f\|_{M_{p_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1}) \times M_{p_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})} = \| \|f(u_1, u_2)\|_{M_{p_1,u_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})} \|_{M_{p_2,u_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})} < \infty.$$

Аналогично определяются пространства

$$\widehat{M}_{p_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1}) \times \widehat{M}_{p_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2}).$$

Теорема 4. *Пусть* $1 \leq p < \infty,\ m, n \in \mathbb{N},\ m < n,\ 0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$*, тогда*

$$\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-m}) \times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} \leq 2^{n-m} \nu^{\frac{n-m}{p}} \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)},$$

в частности, если $x = (u, v),\ u = (x_1 \ldots x_m),\ v = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$*, то*

$$\|g(u, 0)\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} \leq 2^{n-m} \nu^{\frac{n-m}{p}} \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}$$

для любых $g \in E_\nu(\mathbb{R}^{n-m}) \cap (L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m))$*, и существует такое* $c = c(m, n, \lambda) > 0$*, что*

$$\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} \leq c \nu^{\frac{n-m}{p}} \max\{1, \nu^\lambda\} \|g\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)},$$

в частности,

$$\|g(u, 0)\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} \leq c \nu^{\frac{n-m}{p}} \max\{1, \nu^\lambda\} \|g\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}$$

для любых $\nu > 0$ *и* $g \in E_\nu(\mathbb{R}^n) \cap \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$*.*

Теорема 5. *Пусть* $1 \leq p < \infty,\ m, n \in \mathbb{N},\ m < n,\ 0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$*, тогда существует* $c = c(m, n) > 0$ *и для любой функции* $g \in E_\nu(\mathbb{R}^m) \cap M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)$ *существует функция* $G \in E_\nu(\mathbb{R}^n) \cap M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$ *такая, что* $G(u, 0) = g(u)$ *для любых* $u \in \mathbb{R}^m$*,*

$$\|G\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} \leq c \nu^{-\frac{n-m}{p}} \|g\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}$$

для любых $g \in M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)$ *и*

$$\|G\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \leq c\nu^{-\frac{n-m}{p}}\|g\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}$$

для любых $g \in \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)$.

Основные результаты первой главы опубликованы в работах [1, 2] из списка публикаций автора по теме диссертации.

Глава 2 состоит из четырех параграфов.

В **параграфе 2.1** даются необходимые обозначения и определения.

Определение 7. *Пусть* $0 < p \leq \infty$ *и* $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, *тогда функция* $f \in (M_p^\lambda)^*$, *если она имеет период* 2π, *измерима по лебегу на* $\mathbb{R}^n$ *и*

$$\|f\|^*_{M_p^\lambda} = \sup_{x \in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\leq\pi} r^{-\lambda}\|f\|_{L_p(Q(x,r))} < \infty.$$

В **параграфе 2.2** получено неравенство Бернштейна для тригонометрических многочленов для периодических пространств Морри.

Теорема 6. *Пусть* Z^*-*нормированное пространство периодических функций периода* 2π *по каждой переменной, причем норма* $\|\cdot\|^*_Z$ *инвариантна относительно сдвига, т.е. для любой функции* $f \in Z^*$

$$\|f(x+h)\|^*_Z = \|f\|^*_Z \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда для любых тригонометрических многочленов $T_\mu \in Z^*$ *порядка* $\mu \in \mathbb{N}$ *по каждой переменной*

$$\left\|\frac{\partial T_\mu}{\partial x_j}\right\|^*_Z \leq \mu\|T_\mu\|^*_Z,\ j = 1, \ldots, n.$$

Следствие 4. *Пусть* $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, $T_\mu \in (M_p^\lambda)^*$, *тогда имеет место неравенство*

$$\left\|\frac{\partial T_\mu}{\partial x_j}\right\|^*_{M_p^\lambda} \leq \mu\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

В **параграфе 2.3** даются необходимые определения и получены неравенства разных метрик для тригонометрических многочленов для периодических пространств Морри с помощью эквивалентных дискретных норм и с помощью представления таких многочленов в виде сверток с некоторым ядром.

Теорема 7. *Пусть* $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, $T_\mu \in \mathfrak{M}^*_\mu$. *Тогда*

$$\|T_\mu\|^*_{M_q^{\lambda - n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}} \leq (1+\pi)^n \mu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda}.$$

Лемма 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{N}, \varphi \in L_1(Q(0,\pi))$ – 2π-периодическая функция по каждой переменной. Для того, чтобы для любого тригонометрического многочлена T_μ порядка, не превышающего μ по каждой переменной, выполнялось равенство*

$$T_\mu = \varphi * T_\mu, \tag{5}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$c_k(\varphi) = (2\pi)^{-n} \ \forall k \in \mathbb{Z}^n : |k_j| \le \mu, \ j = 1, \dots, n.$$

Замечание 3. *Если φ – тригонометрический многочлен порядка μ по каждой переменной, то равенство (5) выполняется для любых тригонометрических многочленов T_μ порядка, не превышающего μ по каждой переменной тогда и только тогда, когда*

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\substack{|k_j| \le \mu \\ j=1,\dots,n}} e^{ik\cdot x} = \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{j=1}^{n} \sum_{|k_j| \le \mu} e^{ik_j x_j} = \frac{1}{\pi^n} \prod_{j=1}^{n} D_\mu(x_j) = \prod_{j=1}^{n} \widetilde{D}_\mu(x_j).$$

Определение 8. *Пусть μ, $\nu \in \mathbb{N}$ и $\nu > \mu$. Ядро Валле Пуссена определяется следующим образом [6]:*

$$\mathfrak{V}_{\mu,\nu}(x) = (\nu - \mu)^{-1} \sum_{l=\mu}^{\nu-1} D_l(x),$$

в частности,

$$\mathfrak{V}_\mu(x) = \mathfrak{V}_{\mu,2\mu}(x), \quad \mu \ge 1, \quad \mathfrak{V}_0(x) = 1.$$

Положим

$$\widetilde{\mathfrak{V}}_{\mu,\nu}(x) = \frac{1}{\pi}\mathfrak{V}_{\mu,\nu}(x), \quad \widetilde{D}_{\mu,\nu}(x) = \frac{1}{\pi} D_{\mu,\nu}(x),$$

тогда

$$\widetilde{\mathfrak{V}}_{\mu,\nu}(x) = \widetilde{D}_\mu(x) + \frac{1}{\nu-\mu} \sum_{l=\mu+1}^{\nu-1} \widetilde{D}_{\mu,\nu}(x).$$

Теорема 8. *Пусть $1 \le r, p < q \le \infty$, $n, \mu \in \mathbb{N}$, $0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$, $1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$.*

$$\|T_\mu\|^*_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}} \le c(\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda})^{\frac{p}{q}} (\|T_\mu\|^*_{L_p})^{1-\frac{p}{q}} \le c\pi^{\lambda(1-\frac{p}{q})} \|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda}$$

для любого $T_\mu \in (M_p^\lambda)^*$, где

$$c = c(\mu, r) = \inf_{\varphi \in J_\mu^*} \|\varphi\|^*_{L_r}.$$

[6] Temlyakov, V. Multivariate approximation / V. Temlyakov. Cambridge : Cambridge University Press, 2018. Vol. 32 of Cambridge Monographs in Applied and Computational Mathematics. P. 550.

Следствие 5. *Пусть* $1 \le p \le q \le \infty,\ n, \mu \in \mathbb{N},\ 0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$. *Если* $\varphi = \widetilde{\mathfrak{V}}_\mu(x),\ T_\mu \in (M_p^\lambda)^*$, *то*

$$\|T_\mu\|^*_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}} \le 3^n \mu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda})^{\frac{p}{q}}(\|T_\mu\|^*_{L_p})^{1-\frac{p}{q}}$$

$$\le 3^n \pi^{\lambda(1-\frac{p}{q})}\mu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda}.$$

Следствие 6. *Пусть* $1 \le p \le q \le \infty,\ n, \mu \in \mathbb{N},\ n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}) \le \lambda \le \frac{n}{p}$. *Если* $T_\mu \in (M_p^\lambda)^*$, *то*

$$\|T_\mu\|^*_{M_q^{\lambda-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}} \le \pi^{\frac{\lambda p}{q}-\lambda+n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|T_\mu\|^*_{M_q^{\frac{\lambda p}{q}}} \le 3^n \pi^{\frac{n}{p}(1-\frac{p}{q})}\mu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda}.$$

Следствие 7. *Если* $1 \le p \le 2,\ q \ge \frac{2p}{2-p}$, *то для любого* $T_\mu \in (M_p^\lambda)^*$

$$\|T_\mu\|^*_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}} \le \left(\frac{2\mu+1}{2\pi}\right)^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda})^{\frac{p}{q}}(\|T_\mu\|^*_{L_p})^{1-\frac{p}{q}},$$

в частности, для $0 \le \lambda \le \frac{n}{2}$

$$\|T_\mu\|^*_{LM_2^{\frac{\lambda}{2}}} \le \left(\frac{2\mu+1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}(\|T_\mu\|^*_{LM_1^\lambda}\|T_\mu\|^*_{L_1})^{\frac{1}{2}},$$

и

$$\|T_\mu\|^*_{L_\infty} \le \left(\frac{2\mu+1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\|T_\mu\|^*_{L_2}.$$

В последнем неравенстве постояная точная, равенство достигается для $T_\mu(x) = \prod_{l=1}^n \tilde{D}_\mu(x_l)$.

В **параграфе 2.4** даются необходимые обозначения и определения и получены неравенства разных измерений для тригонометрических многочленов для периодических пространств Морри.

Определение 9. *Пусть*

$$0 < p_1, p_2 \le \infty,\ m_1, m_2 \in\ \mathbb{N},\ 0 \le \lambda_1 \le \frac{m_1}{p_1},\ 0 \le \lambda_2 \le \frac{m_2}{p_2}.$$

Определим пространство

$$(M_{p_1}^{\lambda_1})^*(\mathbb{R})^{m_1} \times (M_{p_2}^{\lambda_2})^*(\mathbb{R}^{m_2})$$

со смешанной квазинормой как множество всех измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}^{m_1+m_2}$ *функций* f, *для которых*

$$\|T_\mu\|^*_{M_{p_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})\times M_{p_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})} = \|\|T_\mu(u_1,u_2)\|^*_{M^{\lambda_1}_{p_1,u_1}}\|^*_{M^{\lambda_2}_{p_2,u_2}}$$

$$= \sup_{y\in Q(0,\pi)(\mathbb{R}^{m_2})}\ \sup_{0<\rho\le\pi} \rho^{-\lambda_2}\|\sup_{x\in Q(0,\pi)(\mathbb{R}^{m_1})}\ \sup_{0<r\le\pi} r^{-\lambda_1}$$

$$\|T_\mu(u_1,u_2)\|_{L_{p_1,u_1}(Q(x,r))}\|_{L_{p_2,u_2}(Q(x,r))} < \infty.$$

Теорема 9. *Пусть* $1 \le p < \infty,\ m, n \in \mathbb{N},\ m < n,\ 0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$, *тогда*

$$\|T_\mu\|^*_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-m})\times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} \le 3^{n-m}\mu^{\frac{n-m}{p}}\|T_\mu\|^*_{L_p(\mathbb{R}^{n-m})\times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}.$$

Теорема 10. *Пусть* $1 \le p < \infty,\ 1 \le \theta \le \infty,\ \mu, m, n \in \mathbb{N},\ m < n,\ 0 \le \lambda \le \frac{m}{p}$, *тогда для любого многочлена* $\mathfrak{T}_\mu \in (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^m)$ *существует многочлен* $T_\mu \in (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n)$ *такой что* $T_\mu(u, 0) = \mathfrak{T}_\mu(u)$ *для любых* $u \in \mathbb{R}^m$ *и*

$$\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \le c\mu^{-\frac{n-m}{p}}\|\mathfrak{T}_\mu\|^*_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)},$$

где $c > 0$ *не зависит от ти.*

Основные результаты второй главы опубликованы в работах [3, 4] из списка публикаций автора по теме диссертации.

Глава 3 состоит из четырех параграфов.

В **параграфе 3.1** даются необходимые обозначения и определения.

Определение 10. *Пусть* $1 \le p, \theta \le \infty,\ r > 0,\ 0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$. *Будем говорить, что функция* f *принадлежит пространству Никольского-Бесова-Морри если для некоторого* $a > 1$

$$\|f\|_{B_\theta^r(M_p^\lambda(\mathbb{R}^n))} = \inf\left(\sum_{s=0}^{\infty} a^{r\theta s}\|Q_{a^s}\|^\theta_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}\right)^{1/\theta} < \infty$$

где f *представима в виде ряда*

$$f = \sum_{s=0}^{\infty} Q_{a^s}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

члены которого целые функции экспоненциального типа a^s, *то есть* $Q_{a^s} \in E_{a^s}(\mathbb{R}^n) \cap M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, *а инфимум берется по всем разложениям* (6).

В **параграфе 3.2** доказана теорема вложения для пространств Никольского-Бесова-Морри.

Теорема 11. *Пусть* $1 \le p < q \le \infty,\ 1 \le \theta \le \infty,\ r > 0,\ 0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$ *и*

$$r' = r - n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) > 0.$$

Тогда

$$B_\theta^r(\widehat{M_p^\lambda}(\mathbb{R}^n)) \to B_\theta^{r'}(\widehat{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}}(\mathbb{R}^n)).$$

В **параграфе 3.3** доказана прямая теорема о следах для пространств Никольского-Бесова-Морри.

Теорема 12. *Пусть* $1 \le p, \theta \le \infty,\ 1 \le m < n,\ 0 \le \lambda \le \frac{n}{p},\ r' = r - \frac{n-m}{p} > 0.$

Тогда имеет место вложение

$$B_\theta^r(L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)) \to B_\theta^{r'}(L_\infty(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m))$$

в частности,

$$B_\theta^r(L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)) \to B_\theta^{r'}(\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m))$$

В **параграфе 3.4** доказана обратная теорема о следах для пространств Никольского-Бесова-Морри.

Теорема 13. *Пусть* $1 \le p, \theta \le \infty,\ 1 \le m < n,\ 0 \le \lambda \le \frac{n}{p},\ r' = r - \frac{n-m}{p} > 0.$

Тогда имеет место вложение

$$B_\theta^{r'}(\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)) \to B_\theta^r(L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)).$$

Глава 4 состоит из четырех параграфов.

В **параграфе 4.1** даются необходимые обозначения и определения.

Определение 11. *Пусть* $1 \le p, \theta \le \infty,\ r > 0,\ 0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$. *Будем говорить, что функция* f *принадлежит периодическому пространству Никольского-Бесова-Морри* $B_\theta^r((M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n))$, *если* f *—* 2π*-периодическая измеримая функция, для которой*

$$\|f\|^*_{B_\theta^r(M_p^\lambda)} = \inf \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{r\theta k} (\|T_{2^k}\|^*_{M_p^\lambda})^\theta \right)^{1/\theta} < \infty,$$

где f *представима в виде ряда*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} T_{2^k}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

члены которого тригонометрические многочлены порядка не выше 2^k *по каждой переменной, а инфимум берется по всем разложениям* (7).

В **параграфе 4.2** доказана теорема вложения для периодических пространств Никольского-Бесова-Морри.

Теорема 14. *Пусть* $1 \le p, \theta \le q \le \infty,\ 0 \le \lambda \le \frac{n}{p},\ r' = r - \frac{n-m}{p} > 0.$ *Тогда*

$$B_\theta^r((M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n)) \to B_\theta^{r'}((M_q^{p\lambda/q})^*(\mathbb{R}^n)).$$

В **параграфе 4.3** доказана прямая теорема о следах для периодических пространств Никольского-Бесова-Морри.

Теорема 15. *Пусть* $1 \le p, \theta \le \infty,\ 1 \le m < n,\ 0 \le \lambda \le \frac{n}{p},\ r' = r - \frac{n-m}{p} > 0.$ *Тогда имеет место вложение*

$$B_\theta^r((L_p)^*(\mathbb{R}^{n-m}) \times (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^m)) \to B_\theta^{r'}((L_\infty)^*(\mathbb{R}^{n-m}) \times (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^m))$$

в частности,

$$B_\theta^r((L_p)^*(\mathbb{R}^{n-m}) \times (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^m)) \to B_\theta^{r'}((M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^m)).$$

В **параграфе 4.4** доказана обратная теорема о следах для периодических пространств Никольского-Бесова-Морри.

Теорема 16. *Пусть* $1 \le p < \infty, \ 1 \le m < n,$ *и* $r' = r - \frac{n-m}{p} > 0.$ *Тогда*

$$B_\theta^{r'}((M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^m)) \to B_\theta^r((L_p)^*(\mathbb{R}^{n-m}) \times (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^m)).$$

Заключение

Основные результаты диссертации заключаются в следующем.
1. Доказано неравенство Бернштейна для целых функций экспоненциального типа для пространств Морри.
2. Доказано неравенство разных метрик для целых функций экспоненциального типа для пространств Морри.
3. Доказано неравенство разных измерений для целых функций экспоненциального типа для пространств Морри.
4. Доказано неравенство Бернштейна для тригонометрических многочленов для периодических пространств Морри.
5. Доказано неравенство разных метрик для тригонометрических многочленов для периодических пространств Морри.
6. Доказано неравенство разных измерений для тригонометрических многочленов для периодических пространств Морри.
7. Доказана теорема вложения для пространств Никольского-Бесова-Морри.
8. Доказана прямая теорема о следах для пространств Никольского-Бесова-Морри.
9. Доказана обратная теорема о следах для пространств Никольского-Бесова-Морри.
10. Доказана теорема вложения для периодических пространств Никольского-Бесова-Морри.
11. Доказана прямая теорема о следах для периодических пространств Никольского-Бесова-Морри.
12. Доказана обратная теорема о следах для периодических пространств Никольского-Бесова-Морри.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору В.И. Буренкову за постановку задачи и полезные советы.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Основные результаты работы представлены в следующих публикациях.

1. Burenkov V.I., Joseph D.J. Inequalities for entire functions of exponential type in Morrey spaces/ Eurasian Math. J.-2022 -vol 13. -N 3.-P 92–99.

2. Буренков В.И., Джосеф Д.Д. Интегральные неравенства для целых функций экспоненциального типа в пространствах Морри/Труды МИАН.-2023. -№ 323.-87–106 с.
3. Burenkov V.I., Joseph D.J. Inequalities for trigonometric polynomials in periodic Morrey spaces/ Eurasian Math. J.-2024. -vol 15. -N 2 .-P 92–100.
4. Джосеф Д.Д. Интегральные неравенства для тригонометрических многочленов в периодических пространствах Морри/ Современная математика. Фундаментальные направления. -2024. - Т 70. -№ 4. -561-574 с.

Джосеф Дарил Джеймс

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ О СЛЕДАХ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ НИКОЛЬСКОГО-БЕСОВА-МОРРИ

Аннотация.

Известно несколько эквивалентных подходов к доказательству теорем вложения и теорем о следах для пространств Никольского-Бесова. В последние десятилетия наблюдается интерес к изучению более общих пространств, полученных путем замены базовых пространств Лебега $L_p(\mathbb{R}^n)$ некоторыми другими пространствами. В частности, несколько подходов использовались для изучения пространств Никольского-Бесова-Морри, в этом случае пространства $L_p(\mathbb{R}^n)$ заменяются пространствами Морри. Мы развиваем не исследованный ранее подход, основанный на теории приближения целыми функциями экспоненциального типа и тригонометрическими полиномами. В диссертации мы сначала устанавливаем несколько неравенств (Бернштейна, разных метрик, разных измерений) для целых функций экспоненциального типа и их периодических аналогов для тригонометрических многочленов в пространствах Морри. Затем, с их помощью, доказываем теорему вложения, прямую теорему о следах и обратную теорему о следах как для периодических, так и для непериодических пространств Никольского-Бесова-Морри.

Joseph Daryl James

EMBEDDING THEOREMS AND TRACE THEOREMS FOR NIKOL'SKII-BESOV-MORREY SPACES

Abstract.

Several equivalent approaches are known for proving embedding theorems and trace theorems for Nikolskii-Besov spaces. In recent decades, there has been growing interest in studying more general spaces obtained by replacing the basic Lebesgue spaces $L_p(\mathbb{R}^n)$ with other function spaces. In particular, several approaches have been used to study Nikolskii-Besov-Morrey spaces, where the $L_p(\mathbb{R}^n)$ spaces are replaced by Morrey spaces. We develop a previously unexplored approach based on the theory of approximation by entire functions of exponential type and trigonometric polynomials. In this dissertation, we first establish several inequalities (Bernstein, different metrics, different dimensions) for entire functions of exponential type and their periodic analogs for trigonometric polynomials in Morrey spaces. Then, using these inequalities, we prove embedding theorems, a direct trace theorem, and an inverse trace theorem for both periodic and non-periodic Nikolskii-Besov-Morrey spaces.