На правах рукописи

Павлов Александр Егорович

ГАМИЛЬТОНОВА ДИНАМИКА ГРАВИТАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Специальность 1.3.3 Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2023

Работа выполнена на кафедре сопротивления материалов и деталей машин Института механики и энергетики ФГБОУ ВО “Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К.А. Тимирязева”

Научный консультант **Гайдар Сергей Михайлович,**
доктор технических наук, профессор
РГАУ – МСХА, зав. лабораторией

Официальные оппоненты:

Иващук Владимир Дмитриевич,
доктор физико-математических наук, профессор, руководитель центра гравитации и фудаментальной метрологии ВНИИМС

Кириллов Александр Альбертович,
доктор физико - математических наук, профессор МГТУ, научный сотрудник гравитационно-волновой лаборатории

Арбузова Елена Владимировна,
доктор физико-математических наук, профессор университета "Дубна"

Червон Сергей Викторович,
доктор физико - математических наук, профессор УлГПУ, зав. лабораторией гравитации, космологии, астрофизики

Защита состоится “20” апреля 2023 года в “15.30” часов на заседании диссертационного совета ПДС 0200.007 при Российском университете дружбы народов по адресу: 115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3. С диссертацией можно ознакомиться в УНИБЦ (Научная библиотека) Российского университета дружбы народов по адресу: 115419, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д.6.
Автореферат разослан 2023 года

Учёный секретарь диссертационного совета
ПДС 0200.007
кандидат физико-математических наук С.А. Будочкина

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

В XXI веке интерес научного сообщества к фундаментальной науке подтверждается последними наградами за открытия в области макромира и микромира.

- В 2011 году Нобелевская премия присуждена

  “за открытие ускоренного расширения Вселенной посредством наблюдения дальних сверхновых.”

- В 2013 году Нобелевская премия присуждена

  “за теоретическое открытие механизма, объясняющего происхождение масс субатомных частиц.”

- В 2017 году Нобелевская премия присуждена

  “за решающий вклад в детектор LIGO и наблюдение гравитационных волн.”

- В 2020 году Нобелевская премия присуждена

  “за открытие того, что образование чёрных дыр с необходимостью следует из общей теории относительности.”

Кризис стандартной космологии даёт нам повод для переосмысления положений, на которых она основывается. Общая Теория Относительности должна быть пересмотрена на космологических масштабах, иначе придётся объяснять, что такое тёмная энергия и тёмная материя, из которых, в основном, состоит Вселенная. В создавшейся критической ситуации новые наблюдательные данные являются вызовом теоретической космологии. Этот вызов рассматривается как возможность построить космологическую модель, объясняющую всю совокупность доступных нам современных наблюдательных фактов, опираясь на фундаментальные принципы относительности и симметрии.

Степень разработанности темы

Изложенные в настоящей диссертации исследования по динамике гравитации Эйнштейна, математическим вопросам калибровочных полей проводились в течение достаточно длительного времени под руководством и в сотрудничестве со специалистами. Исследования по функциональным формам Картана и гравитационным моделям с динамической материей проводились в сотрудничестве с профессором Д. Е. Бурланковым (Нижегородский университет, физический факультет). Изучение когомологий Де Рама, алгебр Каца – Муди, обобщённых цепочек Тоды, современных методов теоретической физики велось под руководством профессора А. А. Белавина (Институт теоретической физики имени Л. Д. Ландау, г. Черноголовка).

Конформная гравитация, квантовые конденсаты, современная интерпретация диаграммы Хаббла исследовались в группе теоретиков под руководством профессора В. Н. Первушина (ОИЯИ, г. Дубна).

Цели и задачи

Целью данной работы является анализ задач Общей Теории Относительности с учётом современных потребностей интерпретации наблюдательных данных о Вселенной. Для достижения этой цели были поставлены задачи построения гамильтоновых потоков гравитационного поля во внутреннем глобальном времени и во внешнем глобальном времени; исследования гамильтоновой классической динамики и квантовой динамики космологических моделей.

Научная новизна

1. Впервые исследована двумерная гравитационная модель построением вариационного комплекса Де Рама. Показано, что обобщённая группа когомологий Де Рама тривиальна. На физическом языке это означает, то функционал действия не задаёт динамики.

2. Введено глобальное внутреннее время и соответствующий гамильтониан гравитационного поля. Проведена процедура гамильтоновой редукции фазового пространства Тейхмюллера. Впервые получена нелинейная пуассонова структура фазового пространства и построены гамильтоновы уравнения динамики гравитационного поля во внутреннем глобальном времени.

3. Доказана теорема о производной неявно заданной функции в банаховом пространстве и впервые построены гамильтоновы уравнения динамики гравитационного поля во внешнем глобальном времени.

4. Впервые получены точные решения уравнения Фридмана для классической космологии и конформной космологии в мероморфных функциях Вейерштрасса и Якоби. Вычислены характеристики космологической динамики. Проведён сравнительный анализ подходов. Кривые Хаббла экстраполированы для больших значений красных смещений.

5. Впервые вычислены показатели Ковалевской миксмастерных моделей и получена обобщённая формула Адлера – Ван Мёрбеке, применимая для псевдоевклидовых цепочек Тоды. Впервые показано, что миксмастерные модели ассоциируются с алгебрами Борхердса. Доказано, что многомерная миксмастерная модель Луи Виттена отвечает лоренцевой алгебре Каца – Муди, что говорит о её регулярном поведении.

6. Предложен механизм конформного нарушения симметрии в Стандартной модели элементарных частиц без введения феноменологического потенциала Хиггса. Вычислены казимировские квантовые конденсаты бозонного и фермионного массивных полей в замкнутой вселенной Фридмана. Впервые получены уравнения состояния казимировского вакуума бозонного и фермионного массивных полей в замкнутой вселенной Фридмана.

Теоретическая и практическая значимость

Теоретическая ценность работы заключается в исследовании гравитационных задач методами современной математики. Функции Вейерштрасса, бесконечномерные алгебры Каца – Муди, конформная геометрия, пространство Тейхмюллера конформных структур, когомология Де Рама функциональных пространств, аналитические функции комплексного времени являются неотъемлемой частью математического аппарата исследования гравитации Эйнштейна.

Практическая значимость работы заключается в поиске интерпретации новых данных о Вселенной, полученных современными коллаборациями, с помощью расширения группы симметрии теории без введения экзотических состояний материи; в обосновании механизма конформного нарушения симметрии без введения феноменологического потенциала Хиггса Стандартной модели элементарных частиц.

Методы исследования

Поставленные задачи решались современными математическими методами, принятыми для исследования классической Геометродинамики, использовались разделы математики, разработанные для описания квантовых полей в искривлённых пространствах.

Положения, выносимые на защиту

1. Исследована двумерная гравитационная модель. Построен вариационный комплекс Де Рама. Показано, что обобщённая группа когомологий Де Рама тривиальна. Функционал действия не задаёт динамики.

2. Введено глобальное внутреннее время и гамильтониан гравитационного поля. Проведена процедура гамильтоновой редукции фазового пространства Тейхмюллера. Построены гамильтоновы уравнения динамики гравитационного поля во внутреннем глобальном времени.

3. Введено глобальное внешнее время гравитационного поля и соответствующий гамильтониан. Построены гамильтоновы уравнения динамики гравитационного поля во внешнем глобальном времени.

4. Получены точные решения уравнения Фридмана для классической космологии и конформной космологии в классе мероморфных функций. Вычислены характеристики космологической динамики. Проведён сравнительный анализ подходов.

5. Вычислены показатели Ковалевской миксмастерной космологической модели Мизнера. Получена обобщённая формула Адлера – Ван Мёрбеке. Доказано, что многомерная миксмастерная модель отвечает лоренцевой алгебре Каца – Муди, что говорит о её регулярном поведении.

6. Предложен механизм конформного нарушения симметрии в Стандартной модели элементарных частиц без введения феноменологического потенциала Хиггса. В такой конструкции конденсат топ - кварка заменил тахионный массовый член в потенциале Хиггса.

7. Вычислены казимировские конформные квантовые конденсаты бозонного и фермионного массивных полей в замкнутой вселенной Фридмана. Найдены уравнения состояния казимировского вакуума бозонного и фермионного массивных полей в замкнутой вселенной Фридмана.

Достоверность результатов

Достоверность полученных результатов основывается на применении математического аппарата Общей Теории Относительности и квантовой теории поля, корректном использовании математических методов, а также на согласованности результатов, полученных в диссертации, с известными результатами, принятыми в научном сообществе.

Апробация

Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях:

• 1-я и 2-я Российские Университетско – академические научно - практические конференции, Удмуртский государственный университет, Ижевск, 1993, 1995.

• Международная конференция "Геометризация физики – III", Казанский государственный университет, Казань, 1997.

• I-я, II-я Российские школы – семинары "Современные проблемы теории гравитации и космологии" – GRACOS, Татарский государственный гуманитарно – педагогический университет, Яльчик – Казань, 2007, 2009.

• XXI-я, XXII-я международные балдинские конференции по физике высоких энергий, Обьединённый институт ядерных исследований, Дубна, 2012, 2014.

• Международная научная конференция "Фридмановские чтения", Пермский государственный университет, Пермь, 2013.

• 15-я Российская гравитационная конференция, Казанский федеральный университет, Казань, 2014.

• Международная конференция "Физические интерпретации теории относительности" PIRT – 2015, 2017, Московский государственный технический университет, Москва, 2015, 2017.

• XII-th International Conference on Gravitation, Astrophysics and Cosmology, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, 2015.

• XXIV-th International Colloquium "Integrable Systems and Quantum Symmetries", Chech Technical University, Prague, Czech Republic, 2016.

• 59-я Всероссийская научная конференция, посвящённая юбилею МФТИ, Московский физико - технический институт, Долгопрудный, 2016.

• 2-я Международная зимняя школа-семинар по гравитации, космологии и астрофизике "Петровские чтения – 2016", Казанский федеральный университет, Казань, 2016.

• Международная научная конференция, посвящённая 130-летию Н. И. Вавилова, РГАУ - МСХА, 2017.

• XIV-я международная конференция "Финслеровы обобщения теории относительности" (FERT-2018), Российский университет дружбы народов, Москва, 2018.

• 10-th Alexander Friedmann International Seminar on Gravitation and Cosmology, St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, 2019.

• 4-th Symposium on the Casimir Effect, St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, 2019.

• 3-rd Symposium of the BRICS Association on Gravity, Astrophysics and Cosmology, Kazan Federal University, Kazan, 2019.

• XVI-я Международная конференция “Финслеровы обобщения теории относительности” (FERT-2020), Российский университет дружбы народов, Москва, 2020.

• LVII Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. Российский университет дружбы народов, Москва, 2021.

• XVII-я Международная конференция “Финслеровы обобщения теории относительности” (FERT-2021), Российский университет дружбы народов, Москва, 2021.

Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 66 печатных изданиях, 25 из которых изданы в работах, рекомендованных ВАК. В наукометрическую базу цитирований SCOPUS входят 21 статья, 3 из которых входят в WoS. В тезисах докладов международных конференций и препринтах издана 41 работа.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из Введения, пяти глав, Заключения. Полный объём диссертации составляет 209 страниц с 19 рисунками. Список литературы содержит 207 наименований.

II. ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе вводятся основные понятия и обозначения геометрии вложенных гиперповерхностей, которые понадобятся для дальнейшего изложения материала диссертации. Лагранжева формулировка теории гравитации является ковариантной. Для анализа динамики гравитационного поля требуется перейти к гамильтоновой формулировке, поэтому следует провести процедуру (3+1) - разбиения пространства - времени, основываясь на теоремах Вайнгартена, Гаусса, Кодацци, Риччи. Динамика пространства описывается его геометрическими характеристиками. Для выявления физических переменных следует воспользоваться теоремами конформной геометрии гиперповерхностей, ввести понятия конформной метрики, конформной связности. Конформный поперечно-бесследовый метод, применённый к тензорам, заданным на искривлённых гиперповерхностях, позволяет выделить динамические поперечные компоненты гравитационного поля.

Изучена динамическая полевая система со связями, лагранжиан которой представляет собой гауссову кривизну двумерного пространства – времени в n-й степени. Метрику пространства-времени возьмём в форме Арновитта — Дезера — Мизнера[1]:

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2 & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma^2 \end{pmatrix}, \qquad \sqrt{g} = \alpha\gamma, \tag{1}$$

[1] *Arnowitt R., Deser S., Misner Ch.*. The dynamics of General Relativity. In: “Gravitation: An Introduction to Current Research”, ed. L. Witten. Wiley. 1962. P. 227.

где метрические функции $\alpha(t,x)$ и $\beta(t,x)$ имеют смысл множителей Лагранжа. Поскольку задача представляет собой динамическую систему с высшими производными, для перехода к гамильтоновой форме применён обобщённый метод Остроградского. Удобно ввести, помимо обобщённых координат (α,β,γ), новую переменную

$$u := \frac{\beta' - \dot\gamma}{\alpha}. \tag{2}$$

Действие в обобщённых координатах (α,β,γ,u) принимает следующую форму

$$S = \frac{1}{2}\int_{t,x} (\alpha\gamma)^{1-n}\left[\dot u - \left(\frac{\beta u + \alpha'}{\gamma}\right)'\right]^n. \tag{3}$$

Гамильтонов формализм определён с помощью пуассоновой структуры $\hat J$, заданной на функциональном фазовом пространстве. Выпишем ненулевые скобки:

$$\{\gamma(t,x), \pi_\gamma(t',x')\} = \delta(t-t')\delta(x-x'),$$
$$\{u(t,x), \pi_u(t',x')\} = \delta(t-t')\delta(x-x').$$

Тем самым определяем Геометродинамику на фазовом пространстве Уилера — ДеВитта[2]. Далее конструируем на основе связей функционалы

$$\begin{aligned}\Phi[\phi] &= \int_{t,x}\left(\frac{1}{2n-1}\left(\frac{2}{n}\right)^{n/(n-1)}\pi_u^{(2n-1)/(n-1)}\right.\\ &+ \left.\left(\frac{\pi_u'}{\gamma}\right)^2 + \pi_\gamma^2 - c(t)\right)\phi(t,x),\end{aligned}$$
$$\Xi[\xi] = \int_{t,x}(u\pi_u' + \gamma\pi_\gamma')\chi(t,x)$$

и вычисляем их скобки Пуассона

$$\{\Phi,\Xi\} = \int_{t,x;t',x'}\frac{\delta\Phi}{\delta z}\hat J\frac{\delta\Phi}{\delta z}. \tag{4}$$

В результате получаем

$$\{\Phi[\phi],\Xi[\xi]\} = \Phi[(\phi\chi)'] + \int c(t)\phi(t,x).$$

Таким образом, дифференциальные связи формируют замкнутую алгебру. Можем выразить переменные π_γ и u из связей как

$$\pi_\gamma^2 = c(t) - \frac{1}{2n-1}\left(\frac{2}{n}\right)^{n/(n-1)}\pi_u^{(2n-1)/(n-1)} - \left(\frac{\pi_u'}{\gamma}\right)^2,$$
$$u = -\gamma\left(\frac{\pi_\gamma'}{\pi_u'}\right).$$

[2] *Hanson H., Regge T., Teitelboim C.* Constrained Hamiltonian Systems. Roma: Academia Nazionale dei Linvei. 1976.

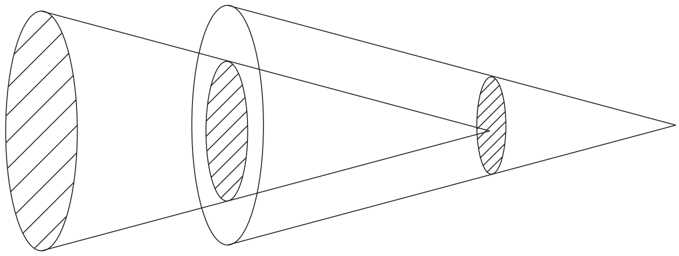

Рис. 1: Вариационный дифференциал δ определяет отображение пространств функциональных форм.

Для исследования задачи оказывается эффективным математический аппарат теории вариационных комплексов, являющийся обобщением дифференциальных комплексов Де Рама[3]. Вариационный дифференциал определяет точный комплекс на пространстве функциональных форм. Пусть $\boldsymbol{\omega}^k = \int_x \hat{\boldsymbol{\omega}}^k$ – функциональная $k-$форма, соответствующая вертикальной $k-$форме $\hat{\boldsymbol{\omega}}^k$. Вариационный дифференциал формы $\boldsymbol{\omega}^k$ есть функционал $(k+1)$-формы, соответствующей вертикальному дифференциалу формы $\hat{\boldsymbol{\omega}}^k$. Основные свойства следуют из свойств вертикальных дифференциалов, и таким образом мы получаем вариационный комплекс. Вариационный дифференциал определяет точный комплекс

$$0 \xrightarrow{\boldsymbol{\delta}} \Lambda^0_* \xrightarrow{\boldsymbol{\delta}} \Lambda^1_* \xrightarrow{\boldsymbol{\delta}} \Lambda^2_* \xrightarrow{\boldsymbol{\delta}} \Lambda^3_* \xrightarrow{\boldsymbol{\delta}} \cdots \tag{5}$$

на пространстве функциональных форм на M (см. Рис. 1).

Особый интерес в задачах теоретической физики представляют функциональные формы $\boldsymbol{\omega}^0, \boldsymbol{\omega}^1, \boldsymbol{\omega}^2$. В рассматриваемой нами задаче, после разрешения связей, мы получаем функциональную 1–форму как обобщение дифференциальной картановской формы для динамических систем

$$\boldsymbol{\omega}^1 = \int_{t,x} \left[\pi_\gamma \left(t, \pi_u, \left(\frac{\pi_u'}{\gamma} \right) \right) \mathbf{d}\gamma - u \left(t, \pi_u, \left(\frac{\pi_u'}{\gamma} \right), \left(\frac{\pi_u'}{\gamma} \right)' \right) \mathbf{d}\pi_u \right]. \tag{6}$$

Уравнения движения получаются как условие замкнутости 1-формы: $\boldsymbol{\delta\omega}^1 = 0$. Но, как мы покажем ниже, существует такая 0-форма $\boldsymbol{\omega}^0$

$$\boldsymbol{\omega}^0 = \int_{t,x} \hat{\boldsymbol{\omega}}^0(t, \gamma, \pi_u) \tag{7}$$

что $\boldsymbol{\delta\omega}^0 = \boldsymbol{\omega}^1$, то есть $\boldsymbol{\omega}^1$ является не только замкнутой формой, она является *точной формой*. Таким образом мы получили обобщённый вариационный комплекс Де Рама

$$0 \xrightarrow{\boldsymbol{\delta}} \Lambda^0_* \xrightarrow{\boldsymbol{\delta}} \Lambda^1_* \xrightarrow{\boldsymbol{\delta}} 0, \tag{8}$$

поскольку оператор вариационного дифференциала $\boldsymbol{\delta}$ нильпотентен: $\boldsymbol{\delta}^2 = 0$.

[3] *Olver P.* Applications of Lie Groups to Differential Equations. Berlin: Springer, 1986.

Показано, что функциональная форма $\boldsymbol{\omega}^1$, обобщение дифференциальной формы Картана, является не только замкнутой формой, она оказывается точной. Тем самым доказано, что обобщённая группа когомологий Де Рама тривиальна. С физической точки зрения получается, что функционал действия не задаёт какой-либо динамической задачи.

Во второй главе вводятся понятия Геометродинамики: внутреннее время и внешнее время. Геометродинамика есть теория пространства и времени по своей сущности. Пространственная метрика несёт информацию о внутреннем времени. Внутреннее время в космологических моделях строится из внутренних характеристик самого пространства. Внутреннее время должно быть скаляром относительно диффеоморфизмов изменения координат пространства. Переход к конформным переменным Дирака означает переход к физическим переменным. Эйнштейновская теория гравитации была представлена в гамильтоновой форме более полувека назад. Поль Дирак заявил, что четырёхмерная симметрия не является фундаментальным свойством физического мира[4]. Вместо пространственно-временных преобразований следуют канонические преобразования фазового пространства переменных. АДМ формализм был разработан Ричардом Арновиттом, Стенли Дезером и Чарлзом Мизнером в 1959 году. В АДМ формализме пространство-время с интервалом расслаивается на семейство пространственно-подобных гиперповерхностей Σ_t, нумеруемых временной координатой t, с координатами на каждом слое (x^1, x^2, x^3). Проблема Коши в ОТО успешно была решена в конформных переменных, поскольку они являются физическими. Внутреннее локальное время в Геометродинамике вводится с помощью обобщённого отображения Дирака. Добавляя в теорию фоновую метрику, получаем локальное время как скалярное поле.

Глобальное внешнее время можно ввести при условии существования слоения постоянной средней кривизны каждой гиперповерхности. Объём гиперповерхности приобретает смысл гамильтониана, а канонически сопряжённой характеристикой становится так называемое время Йорка[5]. Экспериментально фиксируемое красное смещение галактик тому подтверждение. Времени как такового, в отличие от пространства, не существует в Природе. Не некоторое абстрактное время является мерой происходящих изменений, а, наоборот, изменчивость процессов является мерилом времени.

Вариационный функционал в единицах ADM

$$S_{\mathrm{ADM}} = \int\limits_{t_I}^{t_0} \mathrm{d}t \int\limits_{\Sigma_t} \mathrm{d}^3x \left(\pi^{ij} \frac{\mathrm{d}\gamma_{ij}}{\mathrm{d}t} - N\mathcal{H}_\perp - N^i \mathcal{H}_i \right). \tag{9}$$

Супергамильтониан гравитационного поля есть функционал

$$\int\limits_{\Sigma_t} \mathrm{d}^3x \left(N\mathcal{H}_\perp + N^i \mathcal{H}_i \right), \tag{10}$$

[4] *Dirac P. A. M.* The theory of gravitation in Hamiltonian form // Proc. Roy. Soc. London A. 1958. V. 246. P. 333.

[5] *York J. W.* Role of conformal three-geometry in dynamics of gravitation // Phys. Rev. Lett. 1972. V. 28. P. 1082.

где N и N^i являются множителями Лагранжа, $\mathcal{H}_\perp$ и $\mathcal{H}_i$ имеют смысл связей.

$$\mathcal{H}_\perp := \sqrt{\gamma}\left(K_{ij}K^{ij} - K^2\right) - \sqrt{\gamma}R = G_{ijkl}\pi^{ij}\pi^{kl} - \sqrt{\gamma}R(\gamma_{ij}) \tag{11}$$

называется гамильтоновой связью, где

$$G_{ijkl} := \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}(\gamma_{ik}\gamma_{jl} + \gamma_{il}\gamma_{jk} - \gamma_{ij}\gamma_{kl})$$

– суперметрика 6D - гиперболического суперпространства Уилера – ДеВитта (WDW). Импульсные связи

$$\mathcal{H}^i := 2\sqrt{\gamma}\nabla_j\left(K^{ij} - \gamma^{ij}K\right) = -2\nabla_j\pi^{ij} \tag{12}$$

накладывают ограничения на возможные данные $\gamma_{ij}(\mathbf{x},t), \pi^{ij}(\mathbf{x},t)$ на пространственно-подобных гиперповерхностях Σ_t.

Скобка Пуассона представляет собой билинейную операцию на двух функционалах $F[\gamma_{ij},\pi^{ij}]$, $G[\gamma_{ij},\pi^{ij}]$

$$\{F,G\} = \int\limits_{\Sigma_t} \mathrm{d}^3x \left(\frac{\delta F}{\delta\gamma_{ij}(t,\mathbf{x})}\frac{\delta G}{\delta\pi^{ij}(t,\mathbf{x})} - \frac{\delta G}{\delta\gamma_{ij}(t,\mathbf{x})}\frac{\delta F}{\delta\pi^{ij}(t,\mathbf{x})}\right). \tag{13}$$

Определим унимодулярные конформные переменные Дирака[6] $(\tilde{\gamma}_{ij},\tilde{\pi}^{ij})$ следующим образом

$$\tilde{\gamma}_{ij} := \frac{\gamma_{ij}}{\sqrt[3]{\gamma/f}}, \qquad \tilde{\pi}^{ij} := \sqrt[3]{\frac{\gamma}{f}}\left(\pi^{ij} - \frac{1}{3}\pi\gamma^{ij}\right), \tag{14}$$

где, дополнительно к детерминанту метрики пространства γ, добавим детерминант фоновой метрики f.

Добавим к унимодулярным конформным переменным (14) каноническую пару: *локальное внутреннее время* D и плотность гамильтониана π следующим образом:

$$D := -\frac{2}{3}\ln\sqrt{\frac{\gamma}{f}}, \qquad \pi := 2K\sqrt{\gamma}. \tag{15}$$

Формулы (14) и (15) задают мастабированное отображение Дирака

$$(\gamma_{ij},\pi^{ij}) \mapsto (D,\pi;\tilde{\gamma}_{ij},\tilde{\pi}^{ij}). \tag{16}$$

Риманово суперпространство метрик (^3M) задано на компактном хаусдорфовом пространстве Σ_t. Обозначим множество, точки которого представляют все возможные римановы метрики, как $\mathrm{Riem}(^3M)$. Так как одна и та же риманова метрика может быть задана в разных координатных системах, отождествим все точки, связанные координатными преобразованиями группы диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}(^3M)$. Множество, получаемое из некоторой рассматриваемой точки координатными преобразованиями

[6] *Dirac P. A. M.* Fixation of coordinates in the Hamiltonian theory of gravitation // Phys. Rev. 1959. V. 114. P. 924.

группы, называется её орбитой. Суперпространство Уилера — ДеВитта определяется следующим образом[7]:

$$\mathfrak{G}(^3M) := \mathrm{Riem}(^3M)/\mathrm{Diff}(^3M).$$

Факторизуя $\mathfrak{G}(^3M)$ с помощью группы конформных преобразований $\mathrm{Conf}(^3M)$ метрик гиперповерхности, мы получим пространство Тейхмюллера конформных структур[8]

$$\tilde{\mathfrak{G}}(^3M) := \mathfrak{G}(^3M)/\mathrm{Conf}(^3M).$$

ADM функционал (9) в переменных (16) принимает вид

$$S_{\mathrm{ADM}} = \int\limits_{t_I}^{t_0} \mathrm{d}t \int\limits_{\Sigma_t} \mathrm{d}^3x \left[\tilde{\pi}^{ij}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\gamma}_{ij} - \pi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}D - N\tilde{\mathcal{H}}_\perp - N^i\tilde{\mathcal{H}}_i\right]. \tag{17}$$

Теперь мы можем определить глобальное время

$$T(t) := \langle D\rangle(t) = -\frac{2}{3}\langle \ln\sqrt{\gamma/f}\rangle \tag{18}$$

как среднее значение поля по гиперповерхности Σ_t в каждый момент времени t. Коммутатор глобального времени $T(t)$ с интегральной характеристикой $P(t)$ поля $\pi(x)$

$$P(t) := \int\limits_{\Sigma_t} \mathrm{d}^3x\, \pi^{ij}(x)\gamma_{ij}(x) \tag{19}$$

равен минус единице, значит, они составляют глобальную каноническую пару.

Выразим нулевую моду поля $\pi(x)$, представляя его в виде суммы

$$\pi(x) = \sqrt{\gamma}(x)\langle\pi\rangle + \bar{\pi}(x), \tag{20}$$

где среднее значение $\pi(x)$ по гиперповерхности Σ_t

$$\langle\pi\rangle := \frac{\int_{\Sigma_t} \mathrm{d}^3y\pi(y)}{\int_{\Sigma_t} \mathrm{d}^3y\sqrt{\gamma}(y)}. \tag{21}$$

Второй член в (20) есть остаток поля $\pi(x)$ с нулевым средним по гиперповерхности Σ_t. Таким образом, фазовое пространство Γ_D отображается на фазовое пространство $\bar{\Gamma}$ после выделения глобальных переменных T и P:

$$(D, \pi; \tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\pi}^{ij}) \mapsto (T, P; \bar{D}, \bar{\pi}; \tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\pi}^{ij}).$$

Скобки Пуассона переменных $(T, P, \bar{D}, \bar{\pi})$ нелинейные.

---

[7] *Wheeler J. A.* Superspace and the Nature of Quantum Geometrodynamics. In: “Battelle Rencontres: 1967 Lectures in Mathematics and Physics”, eds. C. M. DeWitt, and J. A. Wheeler. Benjamin, New York. 1968. P. 242.

[8] *Fischer A. E., Moncrief V.* Hamiltonian reduction of Einstein’s equations of general relativity // Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 1997. V. 57. P. 142.

Наконец, мы можем выполнить редукцию фазового пространства $\bar{\Gamma}$ на фазовое пространство $\widetilde{\Gamma}_D$ коразмерности 2 и процедуру депараметризации

$$(T, P; \bar{D}, \bar{\pi}; \tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\pi}^{ij}) \mapsto (\bar{D}, \bar{\pi}; \tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\pi}^{ij}).$$

Таким образом получается редуцированное фазовое пространство как кокасательное расслоение. Гамильтониан явно зависит от глобального времени T.

Далее, при изучении динамики гравитационного поля, выберем полугеодезическое слоение, игнорируя действие генераторов диффеоморфизмов. Получим гамильтонову систему на контактном многообразии с глобальным внутренним временем T без связей. Энергия вселенной не сохраняется и экспоненциально растёт во времени T. Гамильтонов поток генерируется гамильтонианом на квадратичной алгебре Ли – Пуассона генераторов $(\tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\pi}^{ij})$.

Время Йорка определяется как четыре третьих следа тензора внешней кривизны гиперповерхности. Гамильтонова же плотность есть мера объёма гиперповерхности. Проблема состоит в том, что в общем случае она не может быть выражена в явном виде из гамильтоновой связи (эллиптического дифференциального уравнения Лихнеровича – Йорка). Добавим к конформным переменным Дирака каноническую пару

$$\tau := \frac{2}{3}\frac{\pi}{\sqrt{\gamma}} = \frac{4}{3}K, \qquad \mathcal{H} := \sqrt{\gamma} \tag{22}$$

вместо канонически сопряжённых переменных (D, π).

Введём глобальное внешнее время как среднее по гиперповерхности двух третьих плотности импульса поля.

$$T := \frac{2}{3}\langle\pi\rangle = \frac{2}{3}\frac{\int_{\Sigma_t} \mathrm{d}^3x\, \pi(x)}{\int_{\Sigma_t} \mathrm{d}^3x\, \sqrt{\gamma}(x)} \tag{23}$$

и канонически сопряжённый гамильтониан

$$H := \int\limits_{\Sigma_t} \mathrm{d}^3x\, \sqrt{\gamma}(x) \equiv V_t. \tag{24}$$

Гамильтонианом является объём гиперповерхности V_t, коммутатор переменных T и H равен минус единице.

Джеймс Йорк предложил условие постоянной средней кривизны (CMC) для фиксации пространственно-временного слоения. Поэтому, локальное время τ (22) становится глобальным T (23). Последний член в конформных импульсных связях обращается в нуль. Гамильтониан

$$H := \int\limits_{\Sigma_T} \mathrm{d}^3x\, \mathcal{H}[\tilde{\pi}^{ij}, \tilde{\gamma}_{ij}; T) \tag{25}$$

генерирует динамику гравитационного поля. Хотя гамильтониан не может быть представлен в явном виде, тем не менее нам удастся вычислить его производные по конформным переменным. Это достигается обобщением теоремы о производной неявно заданной функции из математического анализа на функциональный анализ.

Вариация функционала конформной гамильтоновой связи

$$\tilde{H}_{\perp} := \int\limits_{\Sigma_t} \mathrm{d}^3x\, \tilde{\mathcal{H}}_{\perp}[\tilde{\pi}^{ij}, \tilde{\gamma}_{ij}; \mathcal{H}, T) \tag{26}$$

на слое T равна нулю: $\delta\tilde{H}_{\perp} = 0$:

$$\int\limits_{\Sigma_T} \mathrm{d}^3x \left(\frac{\delta\tilde{H}_{\perp}}{\delta\mathcal{H}}\delta\mathcal{H} + \frac{\delta\tilde{H}_{\perp}}{\delta\tilde{\pi}^{ij}}\delta\tilde{\pi}^{ij} + \frac{\delta\tilde{H}_{\perp}}{\delta\tilde{\gamma}_{ij}}\delta\tilde{\gamma}_{ij} \right) = 0. \tag{27}$$

Из условия независимости вариаций получаем выражения для искомых производных

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\tilde{\pi}^{ij}} = -\frac{\delta\tilde{H}_{\perp}/\delta\tilde{\pi}^{ij}}{\delta\tilde{H}_{\perp}/\delta\mathcal{H}}, \qquad \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\tilde{\gamma}_{ij}} = -\frac{\delta\tilde{H}_{\perp}/\delta\tilde{\gamma}_{ij}}{\delta\tilde{H}_{\perp}/\delta\mathcal{H}}. \tag{28}$$

Гамильтониан H (25) генерирует фазовый поток в фазовом пространстве $\Gamma[\tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\pi}^{ij}]$ на скобках Пуассона.

Для космологического сценария $\sqrt{\gamma} \sim a^3$, где a есть глобальный масштабный фактор, скаляр внешней кривизны равен

$$K = -\frac{1}{2N}\gamma^{ij}\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial t} = -\frac{3}{N}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = -\frac{3}{Na}\left(\frac{a'}{a}\right),$$

где точка обозначает производную по координатному времени, а штрих производную по конформному времени. В калибровке Йорка

$$T = \frac{4}{3}K = -\frac{4}{N}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right).$$

Следовательно, внешнее время пропорционально параметру Хаббла.

В третьей главе рассматриваются интерпретации современной диаграммы Хаббла. В стандартной ΛCDM космологии уравнение Фридмана в конформном времени представляется первым интегралом

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}a^2\rho - k. \tag{29}$$

Здесь $a(\eta)$ – масштабный фактор, штрих обозначает производную по конформному времени η, G – постоянная Ньютона, ρ – плотность материальных источников, k – постоянная пространственной кривизны. Величина $\mathcal{H} \equiv a'/a$ представляет собой конформный параметр Хаббла, определяющий скорость расширения Вселенной. Её современное значение H_0 называется константой Хаббла. Уравнение непрерывности в конформном времени

$$\rho' = -3(\rho + P)\left(\frac{a'}{a}\right) \tag{30}$$

с уравнением состояния $P = w\rho$, связывающим давление P и плотность ρ, даёт зависимость плотности материальных источников от масштабного фактора

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w)}. \tag{31}$$

Здесь, ρ_0 и a_0 – современные значения соответствующих характеристик.

- Для межгалактической пыли $w = 0$, $P = 0$, тогда $\rho = \rho_0 \left(a_0/a\right)^3$.
- Для радиации $w = 1/3$, $P = \rho/3$, тогда $\rho = \rho_0 \left(a_0/a\right)^4$.
- Для вакуума Де Ситтера $w = -1$, $P = -\rho$, значит $\rho = \rho_0$.

Принимая во внимание плотность вакуума, нерелятивистскую материю и релятивистскую материю с соответствующими космологическими параметрами Ω_Λ, $\Omega_{\rm M}$, $\Omega_{\rm rad}$, получаем сумму их вкладов

$$\rho = \frac{3H_0^2}{8\pi G}\left[\Omega_\Lambda + \Omega_{\rm M}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{\rm rad}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4\right]. \tag{32}$$

Космологические параметры связаны:

$$\Omega_\Lambda + \Omega_{\rm M} + \Omega_{\rm rad} + \Omega_{\rm curv} = 1, \tag{33}$$

где вклад от кривизны пространства задаётся параметром

$$\Omega_{\rm curv} \equiv -\frac{k}{a_0^2 H_0^2}. \tag{34}$$

Подставляя (32), (33), (34) в правую часть уравнения Фридмана в конформном времени (29), получаем

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{{\rm d}x}{{\rm d}\eta}\right)^2 = \left(\frac{H_0 a_0}{c}\right)^2\left[\Omega_\Lambda x^2 + \Omega_{\rm curv} + \frac{\Omega_{\rm M}}{x} + \frac{\Omega_{\rm rad}}{x^2}\right]. \tag{35}$$

Здесь переменная x определяется отношением масштабного фактора $a(\eta)$ к его современному значению a_0:

$$x \equiv \frac{a(\eta)}{a_0} = \frac{1}{1+z}, \tag{36}$$

z – красное смещение спектральных линий,

$$H_0 = h\cdot 10^5 m/s/Mpc, \quad h = 0.72 \pm 0.08 \tag{37}$$

– значение постоянной Хаббла.

Из дифференциального уравнения (35) следует формула для конформного времени как функции масштабного фактора:

$$\eta(x) = \frac{c}{H_0 a_0\sqrt{\Omega_\Lambda}}\int\limits_0^x \frac{{\rm d}x}{\sqrt{x^4 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4}} \equiv \frac{c}{H_0 a_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} I(x). \tag{38}$$

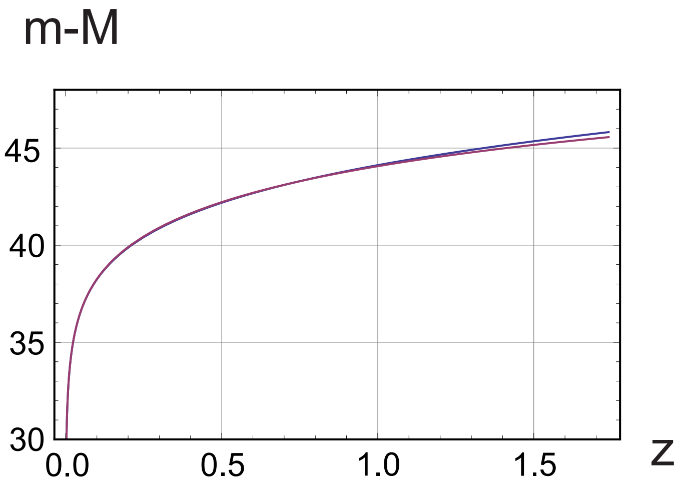

Рис. 2: Кривые Хаббла для двух космологических моделей: эффективная звёздная величина – красное смещение.

Здесь введены следующие обозначения

$$6a_2 \equiv \left(\frac{\Omega_{\rm curv}}{\Omega_\Lambda}\right), \quad 4a_3 \equiv \left(\frac{\Omega_{\rm M}}{\Omega_\Lambda}\right), \quad a_4 \equiv \left(\frac{\Omega_{\rm rad}}{\Omega_\Lambda}\right).$$

Заметим, что можно рассмотреть подкоренное выражение в общем виде

$$P(x) = x^4 + 4A_1x^3 + 6A_2x^2 + 4A_3x + A_4. \tag{39}$$

Второй член $4A_1x^3$ отвечает вкладу доменных стенок. В этом случае

• $w = -2/3$, $P = -(2/3)\rho$, и зависимость плотности от масштаба принимает вид: $\rho = \rho_0(a_0/a)$.

Функции Вейерштрасса и Якоби, традиционно применяемые в классической механике и астрономии, находят своё естественное приложение и в теоретической космологии. Соотношения: конформный возраст – красное смещение, и эффективная звёздная величина – красное смещение, являющиеся базисными формулами в наблюдательной космологии, выражаются явно через мероморфные функции. Вместо интегральных формул, которые традиционно используются в космологии, мы применяем формулы, выражающиеся с помощью высших трансцендентных функций, которые удобны в использовании, поскольку встроены в компьютерный пакет MATHEMATICA. Две астрономические коллаборации The Supernova Cosmology Project и High-z Supernova Search Team представили данные по большим красным смещениям[9].

При конформном отображении компоненты пространственной метрики и якобиан преобразуются по формулам

$$\gamma_{ij} = \Psi^4\bar{\gamma}_{ij}, \qquad \sqrt{\gamma} = \Psi^6\sqrt{\bar{\gamma}}. \tag{40}$$

[9] *Riess A. G.* Nobel Lecture: My path to the accelerating Universe // Rev. Mod. Phys. 2012. V. 84. P. 1165.

Компоненты тензора внешней кривизны

$$K_{ij} = \Psi^{-2} A_{ij} + \frac{1}{3}\Psi^4 \bar{\gamma}_{ij} K, \tag{41}$$

где A_{ij} – компоненты бесследовой части тензора K_{ij}, и K – след тензора. Определения (40), (41) избыточны. Они инвариантны относительно конформных преобразований

$$\begin{array}{rcl} \bar{\gamma}_{ij} & \longrightarrow & \xi^4 \bar{\gamma}_{ij}, \\ \Psi & \longrightarrow & \xi^{-1}\Psi, \\ A_{ij} & \longrightarrow & \xi^{-2} A_{ij}, \\ K & \longrightarrow & K, \end{array}$$

для любого поля ξ. Скаляр Риччи преобразуется как

$$R = \Psi^{-4}\left(\bar{R} - 8\frac{\bar{\triangle}\Psi}{\Psi}\right), \tag{42}$$

где лапласиан $\bar{\triangle}$ определён относительно конформной метрики. Конформная гамильтонова связь

$$\tilde{\mathcal{H}}_\perp = \frac{1}{2}\bar{\gamma} A^{ij} A_{ij} - \frac{1}{3}\bar{\gamma}\Psi^{12} K^2 - \frac{1}{2}\bar{\gamma}\Psi^8 \bar{R} + 4\bar{\gamma}\Psi^7 \bar{\triangle}\Psi + (8\pi G)\bar{\gamma}\Psi^{12}\rho = 0 \tag{43}$$

инвариантна относительно отображения (40). Кривые, полученные на основе двух подходов, показаны на Рис. 2. Незначительное различие между кривыми проявляется на ранней и поздней стадиях развития Вселенной.

Подходы классической и конформной космологий демонстрируют фитирование диаграммы Хаббла с одинаковой точностью[10]. Интерпретация с позиций конформной космологии предпочтительней, поскольку объясняет экспериментальные данные без Λ-члена. Вселенная статична в конформной космологии, что согласуется с концепцией Эйнштейна. В классической же космологии для согласования приходится добавлять в уравнения Λ-член.

В четвёртой главе изучаются скрытые симметрии миксмастерной модели. Миксмастерная космологическая модель Мизнера рассматривается как псевдоевклидова обобщённая цепочка Тоды[11]. Супергамильтониан $\mathcal{H}_\perp$ таких структур имеет вид:

$$\mathcal{H}_\perp = \frac{1}{2}\langle \mathbf{p}, \mathbf{p}\rangle + \sum_{i=1}^{N} g_i e^{(\mathbf{a}_i, \mathbf{q})}, \tag{44}$$

где введено скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$, g_i – некоторые вещественные коэффициенты, $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{a}_i$ – вещественные “корневые” векторы. Показано, что миксмастерная космологическая модель также принадлежит к динамическим системам

[10] Проблемы калибровочных теорий. К 60-летию со дня рождения В. Н. Первушина. Под ред. Б. М. Барбашова, В. В. Нестеренко. Д2-2–4-66. Дубна. ОИЯИ. 2004.

[11] *Misner C. W.* Quantum cosmology. I // Phys. Rev. 1969. V. 186. P. 1319.

Эйлера—Пуанкаре на некоторой разрешимой алгебре Ли. Это сразу даёт возможность использовать для анализа подход Харуо Иошиды[12]. В итоге, получаем формулу для нахождения показателей Ковалевской ρ:

$$\rho = 2 - 2\frac{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle}{\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j \rangle}, \quad i \neq j, \quad \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j \rangle \neq 0. \tag{45}$$

Она является обобщением формулы Адлера – ван Мёрбеке[13], полученной для евклидовых цепочек.

Применим разработанный метод к анализу интегрируемости миксмастерной модели, “корневые” векторы которой имеют вид:

$$\mathbf{a}_1(4,-8,0), \qquad \mathbf{a}_2(4,4,4\sqrt{3}), \qquad \mathbf{a}_3(4,4,-4\sqrt{3}),$$

$$\mathbf{a}_4(4,4,0), \qquad \mathbf{a}_5(4,-2,2\sqrt{3}), \qquad \mathbf{a}_6(4,-2,-2\sqrt{3}).$$

Матрица Грама $\hat{G}$, составленная из скалярных произведений векторов в пространстве Минковского, приобретает вид:

$$\hat{G} \equiv \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle = 24 \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{46}$$

Три “корневых” вектора располагаются вне светового конуса $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ (пространственно-подобные), остальные три $(\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6)$ – изотропные, то есть лежат на световом конусе. Матрица Грама (46) вырождена и имеет ранг $\mathrm{rank} = 3$. Модель ассоциируется с алгеброй Борхердса[14].

Заметим, что корни разбиваются на тройки

$$(\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3), \qquad (\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2), \qquad (\mathbf{a}_6, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3).$$

Векторы в каждой тройке лежат в соответствующей плоскости. Изотропные векторы являются линейной комбинацией пространственно-подобных векторов:

$$\mathbf{a}_4 = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3), \quad \mathbf{a}_5 = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2), \quad \mathbf{a}_6 = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3).$$

Рассмотрим систему трёх векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Они образуют систему простых корней

$$\Pi(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \in \Delta_0. \tag{47}$$

Матрицу Картана $\hat{A}'$ строим с помощью системы простых корней (47)

$$\hat{A}' \equiv \frac{2\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle}{\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j \rangle} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}. \tag{48}$$

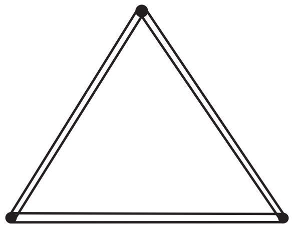

Рис. 3: Диаграмма Дынкина, отвечающая миксмастерной модели. Имеются три узла и соединяющие их, согласно правилам построения, линии.

После отбрасывания трёх изотропных векторов строится диаграмма Дынкина, отвечающая системе простых корней матрицы Картана ранга три. Соответствующая диаграмма Дынкина показана на Рис.3. Алгебра ассоциирована с гиперболической алгеброй Каца — Муди[15], что говорит о хаотическом поведении модели вблизи сингулярности[16].

Рассмотрим теперь многомерную космологическую модель миксмастерного типа Луи Виттена[17]. Она представляет собой пространственно однородную вакуумную модель вселенной с геометрией $R^1 \times S^3 \times S^3 \times S^3$. Метрика пространства-времени определяется интервалом

$$\mathbf{ds}^2 = -N^2 \mathbf{d}t^2 + e^{2\alpha} \sum_{i=1}^{9} e^{2\beta_{ij}} \boldsymbol{\sigma}^i \boldsymbol{\sigma}^j, \tag{49}$$

где дифференциальные формы удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}^1 = \boldsymbol{\sigma}^2 \wedge \boldsymbol{\sigma}^3, \qquad \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}^4 = \boldsymbol{\sigma}^5 \wedge \boldsymbol{\sigma}^6, \qquad \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}^7 = \boldsymbol{\sigma}^8 \wedge \boldsymbol{\sigma}^9$$

с циклической перестановкой. Генераторы пространственной симметрии модели формируют алгебру Ли, представляющую собой прямую сумму полупростых алгебр

$$so(3) \oplus so(3) \oplus so(3).$$

Семейство трёхмерных сфер представляет собой орбиты соответствующих групп симметрии. Здесь, N, α и β_{ij} – функции только координатного времени t. Диаго-

[12] *Yoshida H.* Necessary condition for the existence of algebraic first integrals // Celestial Mechanics. 1983. V. 31. P. 363.

[13] *Adler M., Moerbeke P. van.* Kowalewski's asymptotic method, Kac – Moody Lie algebras and regularization // Commun. Math. Phys. 1982. V. 83. P. 83.

[14] *Borcherds R.*, Generalized Kac – Moody algebras // J. of Algebra. 1988. V. 115. P. 501.

[15] Kac V. Infinite Dimensional Lie Algebras. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[16] *Belinski V., Henneaux M.* The Cosmological Singularity. Cambridge: Cambridge University Press, 2018.

[17] *Stuckey W. M., Witten L., Stewart B.* Dynamics of the mixmaster-type vacuum universe with geometry $R \times S^3 \times S^3 \times S^3$ // Gen. Rel. and Grav. 1990. V. 22. P. 1321.

нальная матрица $(\beta)_{ij}$ состоит из элементов

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \frac{2\theta}{\sqrt{3}} + \beta_+ + \sqrt{3}\beta_-, \\ \beta_{22} &= \frac{2\theta}{\sqrt{3}} + \beta_+ - \sqrt{3}\beta_-, \\ \beta_{33} &= \frac{2\theta}{\sqrt{3}} - 2\beta_+; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{44} &= -\frac{\theta}{\sqrt{3}} - \eta + \psi_+ + \sqrt{3}\psi_-, \\ \beta_{55} &= -\frac{\theta}{\sqrt{3}} - \eta + \psi_+ - \sqrt{3}\psi_-, \\ \beta_{66} &= -\frac{\theta}{\sqrt{3}} - \eta - 2\psi_+; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{77} &= -\frac{\theta}{\sqrt{3}} + \eta + \varphi_+ + \sqrt{3}\varphi_-, \\ \beta_{88} &= -\frac{\theta}{\sqrt{3}} + \eta + \varphi_+ - \sqrt{3}\varphi_-, \\ \beta_{99} &= -\frac{\theta}{\sqrt{3}} + \eta - 2\varphi_+. \end{aligned}$$

Супергамильтониан определяется в координатах Мизнера

$$\mathbf{q}(\alpha, \beta_\pm, \theta, \psi_\pm, \eta, \varphi_\pm)$$

следующим образом:

$$\mathcal{H}_\perp = -\frac{p_\alpha^2}{24} + \sum_{j=1}^{8} \frac{p_j^2}{2} + \frac{e^{16\alpha}}{2}\left[e^{-4\theta/\sqrt{3}}g(\beta) + e^{2\theta/\sqrt{3}}\left(e^{2\eta}g(\psi) + e^{-2\eta}g(\varphi)\right)\right], \tag{50}$$

где $g(x)$ есть функция

$$\begin{aligned} g(x) &\equiv e^{4x_+ + 4\sqrt{3}x_-} + e^{4x_+ - 4\sqrt{3}x_-} + e^{-8x_+} \\ &- 2e^{4x_+} - 2e^{2x_+ + 2\sqrt{3}x_-} - 2e^{2x_+ - 2\sqrt{3}x_-}. \end{aligned} \tag{51}$$

Потенциал супергамильтониана (50) представляется в виде суммы трёх членов

$$U = \frac{1}{2}e^{16\alpha - 4\theta/\sqrt{3}}g(\beta) + \frac{1}{2}e^{16\alpha + 2\theta/\sqrt{3} + 2\eta}g(\psi) + \frac{1}{2}e^{16\alpha + 2\theta/\sqrt{3} - 2\eta}g(\varphi). \tag{52}$$

Сконструируем 9-мерную блочного типа матрицу Грама скалярных произведений пространственно-подобных векторов $\mathbf{a}_i$ с метрикой Уилера – ДеВитта

$$\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle \equiv G_{\mu\nu} a_i^\mu a_j^\nu = 24 \begin{pmatrix} A_1 & -I & -I \\ -I & A_1 & -I \\ -I & -I & A_1 \end{pmatrix}. \tag{53}$$

Матрица Грама (53) состоит из блоков $\hat{A}_1$ и вырожденных матриц $\hat{I}$

$$\hat{A}_1 := \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \hat{I} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{54}$$

Матрица $\hat{A}_1$ соответствует картановской матрице миксмастерной космологической модели. Матрица Картана $\hat{A}$ представляется как произведение блочной диагональной матрицы на симметрическую матрицу

$$\frac{2\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j\rangle}{\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j\rangle} = \begin{pmatrix} A_1 & -I & -I \\ -I & A_1 & -I \\ -I & -I & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & I/2 & I/2 \\ I/2 & E & I/2 \\ I/2 & I/2 & E \end{pmatrix}, \tag{55}$$

где $\hat{E}$ – единичная трёхмерная матрица. Детерминант матрицы $\hat{A}$ отрицательный

$$\det(\hat{A}) = \left(\det \hat{A}_1\right)^3 = (-32)^3.$$

Он представляет собой произведение детерминантов блочных матриц и единичной. Собственные значения матрицы $\hat{A}$ следующие:

$$(-8, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 1, 1).$$

Таким образом, в силу существования одного отрицательного значения, матрица Картана $\hat{A}$ является лоренцевой. В то же время, она не является гиперболической, поскольку миноры её диагональных элементов не равны нулю: $M_{ii} = -12288$. Миноры диагональных элементов s-го порядка ($s = 2, \ldots, 7$) равны нулю или отрицательные: $M_{ii}^{(2)} = (0, 3)$, $M_{ii}^{(3)} = (-32, -8, 0)$, $M_{ii}^{(4)} = (-112, -64, -48)$, $M_{ii}^{(5)} = (-384, -256)$, $M_{ii}^{(6)} = (-1280, -1024)$, $M_{ii}^{(7)} = (-4096)$. Следовательно, мы доказали, что миксмастерного типа вселенная ассоциирована с лоренцевой алгеброй Каца – Муди.

Диаграмма Дынкина соответствует 9-мерной матрице Картана. Доказано, что соответствующая алгебра ассоциирована с лоренцевой алгеброй Каца – Муди, что говорит о регулярном поведении миксмастерной модели.

В пятой главе исследуются квантовые поля в конформной космологии. В данном разделе предложен механизм радиационного нарушения конформной симметрии в Стандартной модели элементарных частиц. Рассмотрим конформно-инвариантный лагранжиан взаимодействия хиггсовского поля

$$L_{int} = -\frac{\lambda^2}{2}\left(\Phi^\dagger \Phi\right)^2 - \mathrm{y}_t \Phi \bar{t} t, \tag{56}$$

где оставлены только наиболее интенсивные члены взаимодействия: самодействие и юкавское взаимодействие с топ – кварком. Заметим, что из Стандартной модели отброшен член с тахионной массой. В дальнейшем будем полагать, что группа $O(4)$ симметрии спонтанно нарушена до $O(3)$. Вакуумное среднее с последующей ренормировкой фермионных операторов в (56) ведёт к потенциалу

$$V(h) = \frac{\lambda^2}{8} h^4 + \frac{\mathrm{y}_t}{\sqrt{2}} \langle \bar{t} t\rangle h. \tag{57}$$

Условие экстремума потенциала

$$\frac{\mathrm{d}V(h)}{\mathrm{d}h}\Big|_{h=v} = 0$$

даёт соотношение

$$v^3\frac{\lambda^2}{2} = -\frac{\mathrm{y}_t}{\sqrt{2}}\langle\bar{t}t\rangle. \tag{58}$$

Нетривиальное решение условия минимума приводит к стандартному разложению $h = v+H$, где H описывает возмущения (ненулевые гармоники) с условием $\int \mathrm{d}^3xH = 0$. Юкавская константа связи для топ – кварка $\mathrm{y} \approx 0.99$ известна из экспериментально установленного значения массы кварка $m_t = v\mathrm{y}_t/\sqrt{2} \simeq 173.2$ ГэВ. Таким образом, спонтанное нарушение симметрии приводит к минимуму потенциальной энергии, что есть следствие ненулевого вакуумного среднего v и массы бозона Хиггса. Подстановка $h = v + H$ в потенциал (57) даёт

$$V_{\mathrm{cond}}(h) = V_{\mathrm{cond}}(v) + \frac{m_H^2}{2}H^2 + \frac{\lambda^2 v}{2}H^3 + \frac{\lambda^2}{8}H^4, \tag{59}$$

что определяет массу скалярной частицы

$$m_H^2 \equiv \frac{3\lambda^2}{2}v^2. \tag{60}$$

Подчеркнём, что полученная формула (60) отличается от ($m_H = \lambda v$) Стандартной модели с потенциалом Хиггса[18].

Из уравнений (58) и (60) можно выразить квадрат массы скалярной частицы через конденсат топ – кварка

$$m_H^2 = -\frac{3\mathrm{y}_t\langle\bar{t}t\rangle}{v\sqrt{2}}. \tag{61}$$

Для получения $m_H = 125$ ГэВ требуется, чтобы

$$\langle\bar{t}t\rangle \approx -\left(122\mathrm{GeV}\right)^3. \tag{62}$$

Такое значение конденсата топ – кварка не противоречит низкоэнергетической КХД феноменологии. В итоге, хотя изначально, в классическом лагранжиане не было члена с массой скалярного поля, он появился после проведения процедур квантования и ренормировки.

В такой конструкции конденсат топ – кварка заменил тахионный массовый член в потенциале Хиггса. Механизм позволяет установить соотношение между конденсатами и массами, включая массу бозона Хиггса. Таким образом мы предложили простой бутстрап между полем Хиггса и полем топ – кварка. Заметим, что бозон Хиггса рассматривается как элементарная частица, без введения дополнительных взаимодействий за рамками Стандартной модели. После спонтанного нарушения симметрии, на древесном уровне лагранжиана отличие от потенциала Хиггса Стандартной модели проявляется только в значении константы самодействия. Эти тонкие различия можно выявить только с помощью новых данных, установление которых предполагается в ходе проведения экспериментов на обновлённом Суперколлайдере.

[18] *Higgs P. W.* Broken symmetries and the mass of gauge bosons // Phys. Rev. Lett. 1964. V. 13. P. 508.

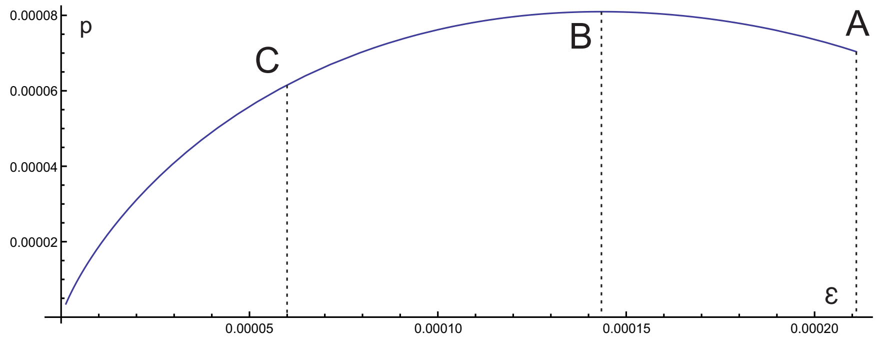

Рис. 4: Уравнение состояния массивного скалярного вакуумного поля для каждого момента ma.

Вычислены топологические казимировские квантовые конденсаты бозонного и биспинорного массивных полей. Переход к конформным переменным позволил избежать нефизическую сингулярность, возникающую при $a = 0$. Перенормировки формально расходящихся рядов с помощью применения формулы Абеля – Плана[19] приводят к конечным физическим результатам. Для вселенной Эйнштейна фоновым пространством является касательное плоское пространство.

Систему уравнений $\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}(ma)$, $\tilde{p} = \tilde{p}(ma)$ можно рассматривать как параметрическое представление уравнения состояния вакуума $p = p(\epsilon)$. Явная зависимость $p = p(\epsilon)$ показана на Рис. 4. В безмассовом пределе $(ma = 0)$ уравнение состояния становится ультрарелятивистским (Рис. 4, точка A). Условие энергодоминантности $(\epsilon \geq p)$ реализуется на кривой ABC (Рис. 4). Вакуум виртуальных частиц в случае $p = \epsilon$ $(ma \approx 0.59)$ отвечает сверхжёсткому состоянию материи (Рис. 4, точка С). Таким образом, имеем уравнение состояния $p = w\epsilon$ с $1/3 \leq w \leq 1$ (Рис. 4, кривая ABC). С дальнейшим ростом массы ma, условие энергодоминантности нарушается (левее точки C на Рис. 4). Для классической материи выполнение условия энергодоминантности требует, чтобы скорость звука не превышала скорости света. В соответствующей квантовой теории при нарушении условия будут рождаться частицы. В пределе $ma \gg 1$ плотность казимировской энергии, так же как и давление, экспоненциально уменьшаются.

Для масивного биспинорного поля явная зависимость $p = p(\epsilon)$ для каждого момента ma как уравнение казимировского вакуума показана на Рис. 5. В безмассовом пределе $(ma = 0)$ уравнение состояния ультрарелятивистское (Рис. 5, точка A). В области ABC (Рис. 5) условие энергодоминантности выполняется. Вакуум виртуальных фермионов в случае $p = \epsilon$ $(ma \approx 0.55)$ отвечает сверхжёсткому уравнению состояния (Рис. 5, точка С). Уравнение состояния $p = w\epsilon$ с $1/3 \leq w \leq 1$ представлено кривой ABC на Рис. 5. С ростом массы ma, условие энергодоминантности, выполняющееся для реальных частиц, нарушается (левее точки C на Рис. 5). В этой области происходит рождение частиц из вакуума. В пределе $ma \gg 1$ казимировская плотность энергии, так же как и давление, экспоненциально мала. В Заключении

[19] *Мостепаненко В. М., Трунов Н. Н.* Эффект Казимира и его Приложения. М.: Энергоатомиздат, 1990.

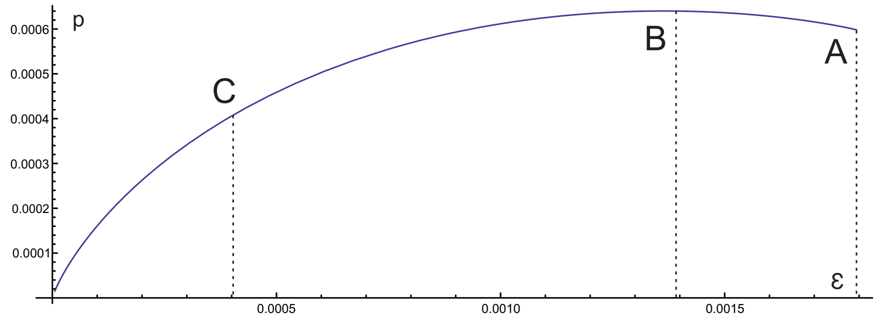

Рис. 5: Уравнение состояния массивного биспинорного поля вакуума для каждого момента ma.

сформулированы основные результаты диссертации.

III. ОСНОВНЫЕ ИТОГИ ИССЛЕДОВАНИЯ

1. Исследована двумерная гравитационная модель. Построен вариационный комплекс Де Рама. Показано, что обобщённая группа когомологий Де Рама тривиальна. На физическом языке это означает, что функционал действия не задаёт динамики.

2. Введено глобальное внутреннее время и гамильтониан гравитационного поля. Проведена процедура гамильтоновой редукции фазового пространства Тейхмюллера.

3. Получена нелинейная пуассонова структура редуцированного фазового пространства гравитационного поля. Построены гамильтоновы уравнения динамики гравитационного поля во внутреннем глобальном времени.

4. Введено глобальное внешнее время гравитационного поля и соответствующий гамильтониан. Построены гамильтоновы уравнения динамики гравитационного поля во внешнем глобальном времени.

5. Получены точные решения уравнения Фридмана для классической космологии и конформной космологии в классе мероморфных функций. Вычислены характеристики космологической динамики. Проведён сравнительный анализ подходов.

6. Вычислены показатели Ковалевской миксмастерной космологической модели Мизнера. Получена обобщённая формула Адлера – Ван Мёрбеке.

7. Доказано, что многомерная миксмастерная модель отвечает лоренцевой алгебре Каца – Муди, что говорит о её регулярном поведении. Построены диаграммы Дынкина, отвечающие матрицам Картана.

8. Предложен механизм конформного нарушения симметрии в Стандартной модели элементарных частиц без введения феноменологического потенциала Хиггса.

В такой конструкции конденсат топ - кварка заменил тахионный массовый член в потенциале Хиггса.

9. Вычислены казимировские конформные квантовые конденсаты бозонного и фермионного массивных полей в замкнутой вселенной Фридмана. Переход к конформным переменным позволил избежать нефизическую сингулярность.

10. Найдены уравнения состояния казимировского вакуума бозонного и фермионного массивных полей в замкнутой вселенной Фридмана. Перенормировка формально расходящихся рядов выполнена применением формулы Абеля – Плана из теории аналитических функций.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в журналах Scopus, WoS

1. *Burlankov D. E., Pavlov A. E.* Variational forms and two-dimensional R^2-gravity // International Journal of Modern Physics. – 1989. – Vol. A4. – P. 5177 – 5183.

2. *Pavlov A. E.* A quantized open homogeneous isotropic cosmological model // Physics Letters. – 1992. – Vol. A165. – P. 211 – 214.

3. *Pavlov A. E.* A quantized flat homogeneous isotropic cosmological model // Physics Letters. – 1992. – Vol. A165. – P. 215 – 216.

4. *Pavlov A. E.* Selfdual Yang-Mills fields in an Einstein Universe // International Journal of Theoretical Physics. – 1992. – Vol. 31. – P. 2061 – 2063.

5. *Pavlov A. E.* A quantum theory of a Friedmann field // International Journal of Theoretical Physics. – 1995. – Vol. 34. – P. 961 – 968.

6. *Pavlov A. E.* Dynamics of a compact hyperbolic cosmological model with dust–like matter and radiation // International Journal of Theoretical Physics. – 1996. – Vol. 35. – P. 2169 – 2190.

7. *Pavlov A. E.* Two–dimensional R^n–gravitation // International Journal of Theoretical Physics. – 1997. – Vol. 36. – P. 2107 – 2113.

8. *Pervushin V., Arbuzov A., Barbashov B., Borowiec A., Cherny A., Dorokhov A., Nazmitdinov R., Pavlov A., Shilin V., Zakharov A.* Condensate mechanism of conformal symmetry breaking // XXI International Baldin Seminar on High Energy Physics Problems. – JINR. – Dubna. – 2012. – P. 5.

9. *Pervushin V., Arbuzov A., Cherny A., Nazmitdinov R., Pavlov A., Pichugin K., Zakharov A.* Origin of masses in the Early Universe // XXII International Baldin Seminar on High Energy Physics Problems. – JINR. – Dubna. – 2014. – P. 5.

10. *Arbuzov A. B., Nazmitdinov R. G., Pavlov A. E., Pervushin V. N., Zakharov A. F.* Radiative breaking of conformal symmetry in the Standard Model // EuroPhysics Letters. – 2016. – Vol. 113. – P. 31001 – 31005.

11. *Pavlov A. E.* Mixmaster model associated to a Borcherds algebra // Gravitation and Cosmology. – 2017. – Vol. – 27. – P. 20 – 27.

12. *Arbuzov A. B., Cherny A. Yu., Cirilo-Lombardo D. J., Nazmitdinov R. G., Nguyen Suan Han, Pavlov A. E., Pervushin V. N., Zakharov A. F.* Von Neumann's quantization of General Relativity // Physics of Atomic Nuclei. – 2017. – Vol. 80. – No. 3. – P. 491 – 504.

13. *Pavlov A. E.* Intrinsic time in Wheeler – DeWitt conformal superspace // Gravitation and Cosmology. – 2017. – Vol. 23. – P. 208 – 218.

14. *Arbuzov A. B., Pavlov A. E.* Static Casimir condensate of conformal scalar field in Friedmann universe // Modern Physics Letters. – 2018. – Vol. A33, No. 28. – P. 1850162-1 – 1850162-7.

15. *Pavlov A. E.* Hidden symmetries in a mixmaster-type universe // Gravitation and Cosmology. – 2019. – Vol. 25. – No. 1. – P. 18 – 23.

16. *Arbuzov A. B., Pavlov A. E.* Reduced conformal geometrodynamics // International Journal of Modern Physics. – 2020. – Vol. A35 – P. 2040023-1 – 2040023-5.

17. *Pavlov A. E.* EoS of Casimir vacuum of massive fields in Friedmann universe // Modern Physics Letters. – 2020. – Vol. A35. – No. 33. – P. 2050271-1 – 2050271-7.

18. *Pavlov A. E.* Hamiltonian equations of reduced conformal geometro- dynamics in extrinsic time // Gravitation and Cosmology. – 2020. – Vol. 26. – No. 3 – P. 208 – 211.

19. *Pavlov A. E.* Friedmann cosmology in elliptic functions // Gravitation and Cosmology. – 2021. – Vol. 27. – No. 4 – P. 403 – 408.

20. *Arbuzov A. B., Gaidar S. M., Pavlov A. E.* Static Casimir condensate of the bispinor field in the Friedmann universe // JETP Letters. – 2022. – Vol. 115. No. 7 - 8. – P. 377 – 379.

21. *Pavlov A. E., Gaidar S. M.* Exact solutions of cosmological equations in Legendre elliptic integrals // Gravitation and Cosmology. – 2022. – Vol. 28. – No. 2 – P. 403 – 408.

Публикации в журналах перечня ВАК

1. *Павлов А. Е.* Проблема энергии в космологических моделях // Вестник Удмуртского Университета. – 1993. – Т. 1. – С. 143 – 144.

2. *Павлов А. Е.* Динамика гиперболической космологической модели // Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. – НИЦПВ. – Москва. – 1995. – 80 С.

3. *Pavlov A. E.* The mixmaster cosmological model as a pseudo – Euclidean generalized Toda chain // Regular and Chaotic Dynamics. – 1996. – Vol. 1. – P. 112 – 120.

4. *Pavlov A. E.* Two approaches to interpretation of Hubble diagram // RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics. – 2017. – Vol. 25. – No. 4. – P. 390 – 400.

ПАВЛОВ Александр Егорович
Гамильтонова динамика гравитационных систем

Диссертационное исследование посвящено исследованию гравитационных систем методами гамильтоновой динамики. Построен вариационный комплекс Де Рама двумерной гравитационной модели. Проведена процедура гамильтоновой редукции фазового пространства Тейхмюллера. Получена нелинейная пуассонова структура фазового пространства. Построены гамильтоновы уравнения динамики гравитационного поля. Получены точные решения уравнения Фридмана для классической космологии и конформной космологии. Кривые Хаббла экстраполированы для больших значений красных смещений. Вычислены показатели Ковалевской миксмастерной модели Мизнера. Получена обобщённая формула Адлера – Ван Мёрбеке. Доказано, что многомерная миксмастерная модель Луи Виттена отвечает лоренцевой алгебре Каца – Муди. Вычислены казимировские квантовые конденсаты бозонного и фермионного массивных полей в замкнутой вселенной Фридмана. Найдены уравнения состояния казимировского вакуума бозонного и фермионного массивных полей.

PAVLOV Alexander Egorovich
Hamiltonian dynamics of gravitational systems

The dissertation research is devoted to the study of gravitational systems by methods of Hamiltonian dynamics. The De Rham variational complex of a two-dimensional gravity model is constructed. The procedure of Hamiltonian reduction of the Teichmüller phase space is carried out. A nonlinear Poisson structure of the phase space is obtained. Hamiltonian equations for the dynamics of the gravitational field are constructed. Exact solutions of the Friedmann equation are obtained for classical cosmology and conformal cosmology. Hubble curves are extrapolated for large redshift values. The indices of the Kovalevskaya mixmaster model of Misner are calculated. The generalized Adler – Van Moerbecke formula is obtained. It is proved that Louis Witten's multidimensional mixmaster model corresponds to the Lorentzian Kac – Moody algebra. The Casimir quantum condensates of bosonic and fermionic massive fields in the Friedmann closed universe are calculated. The equations of state of the Casimir vacuum of bosonic and fermionic massive fields are found.