Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Российский университет дружбы народов имени
Патриса Лумумбы»

На правах рукописи

Иванов Никита Олегович

РЕГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор
Скубачевский Александр Леонидович

Москва — 2023

Оглавление

Стр.

Введение

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

В настоящей работе изучаются краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений второго порядка на интервале конечной длины. В уравнениях подобного типа присутствуют не только дифференциальные операторы, но и операторы сдвига, которые могут отображать точки границы интервала внутрь этого интервала.

Современной теории функционально-дифференциальных уравнений, которая началась с работ А. Д. Мышкиса [26; 27], посвящен целый ряд трудов, среди которых широко известны работы Л. Э. Эльсгольца [62], Н. Н. Красовского [17], Ю. С. Осипова [31], Р. Беллмана и К. Кука [4], Л. Э. Эльсгольца, С. Б. Норкина [61], Г. А. Каменского и А. Д. Мышкиса [13], А. Г. Каменского [12], Дж. Хейла [58], Г. А. Каменского, А. Д. Мышкиса и А. Л. Скубачевского [14], Г. А. Каменского и А. Л. Скубачевского [15], и др. Интерес к таким уравнениям связан со многими важными приложениями: в теории систем управления с последействием [1; 2; 17; 18; 20; 31; 47], в теории многослойных пластин и оболочек [30; 71; 72; 76], в теории диффузионных процессов [45; 65; 76] и др.

Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения рассматривались в работах Ф. Хартмана и Г. Стампакья [66], А. Б. Антоневича [3], В. С. Рабиновича [34] и др.

А. Л. Скубачевским созданы основы теории краевых задач для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений, содержащих сдвиги аргумента, которые могут отображать точки границы внутрь области [40–44; 46; 48; 75]. Было показано, что краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений могут обладать принципиально новыми свойствами в отличие от эллиптических дифференциальных уравнений. К примеру, при наличии сдвигов аргументов в старших производных, отображающих точки границы внутрь области, возникают негладкие решения даже для случая бесконечно дифференцируемой правой части. Однако, гладкость таких решений может сохраняться в подобластях.

В работах А. Л. Скубачевского показано, что краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений тесно связаны с нелокальными краевыми задачами для эллиптических дифференциальных уравнений [5; 63; 64].

Ученики А. Л. Скубачевского продолжили исследование краевых задач для дифференциально-разностных уравнений. Так, краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений изучались в работах [28; 29; 53; 54; 59; 60; 69; 70], краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов рассматривались в [10; 11], а для дифференциально-разностных уравнений с вырождением в работах [32; 33]; краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с аффинными преобразованиям аргументов и растяжениями-сжатиями изучались в работах [35–37; 73; 74]. Кроме того, вторая и третья краевые задачи для параболического дифференциально-разностного уравнения исследовались в работах [38; 39], а смешанные задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений второго порядка со сдвигами по пространственным переменным в старших производных рассматривались в [21; 22; 67].

В работе [68] исследовались эллиптические функционально-дифференциальные уравнения с преобразованиями переменных, отображающими область в себя. Статьи [24; 25] посвящены краевым задачам для эллиптических дифференциально-разностных уравнений в полупространстве. Нелинейные эллиптические функционально-дифференциальные уравнения изучались в работах [55–57]. В работах [6; 7], используя методы спектральной теории, исследуются эволюционные функционально-дифференциальные уравнения с запаздыванием по времени.

В данной диссертации основное место уделяется исследованию гладкости обобщенных решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами на конечном интервале.

Обобщенные решения первой краевой задачи для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа на конечном интервале $Q = (0,d)$ впервые рассматривались в работах [12; 13]. В работах [14; 76] рассматривалась первая краевая задача для дифференциально-разностного уравнения с постоянными коэффициентами на конечном интервале. Используя теорему об изоморфизме пространства Соболева $\mathring{W}_2^1(Q)$ и подпространства $W_2^1(Q)$, состоящего из функций, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям, исходная краевая задача для дифференциально-разностного уравнения была сведена к нелокальной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения. Такой подход позволил в явном виде получить условия ортогональности правой части уравнения конечному числу линейно независимых функций в $L_2(Q)$, обеспечивающие гладкость обобщенного решения на всем интервале. Гладкость обобщенных решений на всем интервале конечной длины в случае первой краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами ранее не рассматривался.

В работах [29; 69] для первой и второй краевых задач исследован вопрос о том, при каких условиях на коэффициенты дифференциально-разностного уравнения гладкость обобщенных решений сохраняется на всем интервале для любой правой части. Обобщенные решения третьей краевой задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений рассматривались в работах [59; 60; 70].

Вопрос о нахождении условий на правую часть уравнения, обеспечивающих гладкость обобщенных решений второй краевой задачи и краевой задачи со смешанными граничными условиями для дифференциально-разностного уравнения на конечном интервале ранее не изучался.

Цели и задачи работы

Цель работы заключается в исследовании обобщенных решений первой и второй краевых задач, а также краевой задачи со смешанными граничными условиями для дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами на интервале конечной длины. Одним из принципиальных свойств краевых задач для дифференциально-разностных уравнений является наличие негладких решений. Гладкость обобщенных решений таких задач может нарушаться на сдвигах концов интервала внутрь интервала даже при условии бесконечно дифференцируемой правой части дифференциально-разностного уравнения и сохраняться лишь на подынтервалах, образующихся выбрасыванием орбит концов рассматриваемого интервала, порожденных группой целочисленных сдвигов. Важной частью диссертационного исследования является получение условий на правую часть дифференциально-разностного уравнения, гарантирующих гладкость обобщенных решений краевых задач на всем интервале.

Научная новизна

В работе получены новые результаты о гладкости обобщенных решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами, рассматриваемых на конечном интервале.

Для первой и второй краевых задач, а также краевой задачи со смешанными граничными условиями получены условия на правую часть дифференциально-разностного уравнения, обеспечивающие гладкость обобщенных решений на всем интервале.

Теоретическая и практическая значимость работы

Работа носит теоретический характер, а ее результаты оказывают влияние на развитие общей теории нелокальных краевых задач, а также могут быть использованы для анализа результатов численного моделирования решений подобных задач.

Методология и методы исследования

Изучение краевых задач для дифференциально-разностных уравнений основано на комбинации методов исследования дифференциальных уравнений, свойствах разностных операторов и теории пространств Соболева.

Для исследования гладкости обобщенных решений первой краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с постоянными коэффициентами был разработан метод сведения дифференциально-разностного уравнения с постоянными коэффициентами и однородными условиями Дирихле к обыкновенному дифференциальному уравнению с многоточечными краевыми условиями [14; 76]. Однако, указанный подход невозможен в случае дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами, так как разностный оператор с переменными коэффициентами и однородными условиями Дирихле не коммутирует с оператором дифференцирования первого порядка.

Для преодоления подобных трудностей при изучении краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами был разработан более универсальный метод, основанный на представлении первых производных решения на концах интервала Q в виде линейных ограниченных функционалов в пространстве Лебега $L_2(Q)$, зависящих от правых частей дифференциально-разностного уравнения.

Впервые данный подход был разработан в работах [49, §5], [51, §4] при исследовании гладкости обобщенных решений второй краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами. Необходимость использования данного подхода была обусловлена невозможностью сведения дифференциально-разностного уравнения с условиями второго рода, в отличие от условий первого рода, к обыкновенному дифференциальному уравнению с нелокальными условиями [21; 22].

Положения, выносимые на защиту:

1. Доказаны теоремы о гладкости обобщенных решений первой краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами на конечном интервале.
2. Доказаны теоремы о гладкости обобщенных решений второй краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами на конечном интервале.
3. Доказаны теоремы о гладкости обобщенных решений краевой задачи со смешанными граничными условиями для дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами на конечном интервале.

Содержание работы

Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 113 страниц, включая 2 рисунка. Список литературы содержит 76 наименований.

Глава 1 состоит из 6 параграфов и посвящена исследованию разрешимости первой краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами на конечном интервале, а также исследованию гладкости обобщенных решений. Основные результаты параграфов 1.3, 1.4, 1.5 и 1.6 опубликованы в работе [52].

Параграф 1.1 носит вспомогательный характер, а определения и обозначения, содержащиеся в нем, используются во всей диссертационной работе. В данном параграфе приводятся свойства разностного оператора на конечном интервале $Q = (0,d)$, где $d = N + \theta$, $N \in \mathbb{N}$, $0 < \theta \leqslant 1$. Вводится разбиение интервала на классы подынтервалов, зависящие от значения θ. Так, если $\theta = 1$, то мы исследуем один класс непересекающихся подынтервалов $Q_{1k} = (k-1,k)$, $k = 1,\dots,N+1$, если же $0 < \theta < 1$, то мы рассматриваем два класса непересекающихся подынтервалов $Q_{1k} = (k-1,k-1+\theta)$, $k = 1,\dots,N+1$, и $Q_{2k} = (k-1+\theta,k)$, $k = 1,\dots,N$. Вводятся ассоциированные с разностным оператором матрицы R_s ($s = 1$, если $\theta = 1$, и $s = 1,2$, если $0 < \theta < 1$), составленные из его коэффициентов, а через $G_j^1 = G_j^1(x)$ ($G_j^2 = G_j^2(x)$), $j = 1,\dots,N+1$, вводятся j-ые столбцы матрицы порядка $N \times (N+1)$, полученной из матрицы R_1 вычеркиванием первой (последней) строки. Приводятся основные свойства разностных операторов в пространстве $L_2(Q)$ и в пространствах Соболева, которые необходимы для формулировки результатов о разрешимости и гладкости обобщенных решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений. Кроме того, в данном параграфе вводится условие сильной эллиптичности дифференциально-разностного уравнения в виде неравенства

$$Re(R_sY,Y)_{\mathbb{C}^{N(s)}} \geqslant c\|Y\|^2_{\mathbb{C}^{N(s)}} \tag{1}$$

для всех $x \in \overline{Q}_{s1}$, s и $Y \in \mathbb{C}^{N(s)}$, где $s = 1$, если $\theta = 1$, и $s = 1, 2$, если $0 < \theta < 1$; $c > 0$ не зависит от x и Y. Данное условие используется во всех основных результатах о разрешимости и гладкости обобщенных решений краевых задач, приведенных в диссертационной работе.

Параграф 1.2 посвящен изложению некоторых определений и результатов из вариационной теории краевых задач, которые понадобятся для исследования разрешимости первой и второй краевых задач для дифференциально-разностного уравнения.

Параграф 1.3 посвящен постановке первой краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения, а также исследованию ее разрешимости. А именно, рассматривается задача

$$-(R_Qu')' = f(x), \quad x \in Q, \tag{2}$$

$$u(0) = u(d) = 0, \tag{3}$$

где $Q = (0,d)$, $d = N + \theta$, $N \in \mathbb{N}$, $0 < \theta \leqslant 1$, $f \in L_2(Q)$ – комплекснозначная функция.

В данном параграфе вводится пространство Соболева $\mathring{W}^1_2(Q)$, состоящее из функций из пространства $W^1_2(Q)$ таких, что $u(0) = u(d) = 0$, а также формулируются эквивалентные определения обобщенного решения задачи (2), (3). Определяя полуторалинейную форму $b_R(u,v)$, приводится доказательство следующей теоремы.

Теорема 1.3.1. *Пусть выполнено условие сильной эллиптичности* (1). *Тогда для любой функции $f \in L_2(Q)$ существует единственное обобщенное решение $u \in \mathring{W}^1_2(Q)$ задачи* (2), (3), *при этом имеет место оценка*

$$\|u\|_{W^1_2(Q)} \leqslant c\|f\|_{L_2(Q)},$$

где $c > 0$ – постоянная, не зависящая от f.

В параграфе 1.4 доказывается следующая теорема о гладкости обобщенных решений первой краевой задачи на подынтервалах.

Теорема 1.4.1. *Пусть уравнение* (2) *удовлетворяет условию сильной эллиптичности* (1), *и пусть* $u \in \mathring{W}_2^1(0,d)$ – *обобщенное решение задачи* (2), (3). *Тогда* $u \in W_2^2(Q_{sk})$, $s = 1$, $k = 1,\ldots,N+1$, *если* $\theta = 1$, *и* $s = 1,2$, $k = 1,\ldots,N(s)$, *если* $0 < \theta < 1$, *при этом*

$$\|u\|_{W_2^2(Q_{sk})} \leqslant c\|f\|_{L_2(0,d)},$$

где $c > 0$ *не зависит от* f.

Параграфы 1.5 и 1.6 посвящены исследованию гладкости обобщенных решений первой краевой задачи на всем интервале Q. Для доказательства основных результатов о гладкости вводится ограниченный оператор $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ с областью определения $D(A_R^0) = \big\{u \in W_2^2(0,d) : R_Q u' \in W_2^1(0,d), u(0) = u(d) = 0\big\}$.

Предполагая в случае $\theta = 1$, что $G_1^1(0) \neq 0$ или $G_{N+1}^2(1) \neq 0$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{N} |a_{-k}(k)| \neq 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{N} |a_k(N+1-k)| \neq 0, \tag{4}$$

доказывается следующая теорема о гладкости обобщенного решения задачи (2), (3) на конечном интервале $Q = (0,d)$.

Теорема 1.5.1. *Пусть* $\theta = 1$, *и пусть выполнены условия* (1) *и* (4).

Если столбцы $G_1^1(0)$ *и* $G_{N+1}^2(1)$ *линейно независимы, то ограниченный оператор* $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов и* $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$, $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

Если столбцы $G_1^1(0)$ *и* $G_{N+1}^2(1)$ *линейно зависимы, то ограниченный оператор* $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов и* $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$, $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

Если же $0 < \theta < 1$, то, предполагая, что $G_1^1(0) \neq 0$ или $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{N} |a_{-k}(k)| \neq 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{N} |a_k(N+\theta-k)| \neq 0, \tag{5}$$

доказывается следующая теорема о гладкости обобщенного решения задачи (2), (3) на конечном интервале $Q = (0,d)$.

Теорема 1.6.1. *Пусть* $0 < \theta < 1$, *и пусть выполнены условия* (1) *и* (5).

Если $G_1^1(0) \neq 0$ *и* $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$, *то ограниченный оператор* $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов и* $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$, $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

Если $G_1^1(0) = 0$ *или* $G_{N+1}^2(\theta) = 0$, *то ограниченный оператор* $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов и* $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$, $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

В конце параграфов приведены иллюстрирующие примеры.

Глава 2 состоит из 4 параграфов и посвящена исследованию разрешимости второй краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентам на конечном интервале, а также гладкости обобщенных решений. Основные результаты этой главы опубликованы в работах [49–51].

Параграф 2.1 посвящен постановке второй краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения, а также исследованию ее разрешимости. Рассматривается задача

$$-(R_Q u')' = f(x), \quad x \in Q, \tag{6}$$

$$(R_Q u')(0) = (R_Q u')(d) = 0, \tag{7}$$

где $Q = (0,d)$, $d = N + \theta$, $N \in \mathbb{N}$, $0 < \theta \leqslant 1$, $f \in L_2(Q)$ – комплекснозначная функция. В пространстве $W_2^1(Q) \times W_2^1(Q)$ вводится полуторалинейная форма $b_R(u,v)$ по формуле

$$b_R(u,v) = (R_Q u', v')_{L_2(Q)},$$

которую в силу параграфа 1.2 (см. Гл. 1) можно представить в виде

$$b_R(u,v) = \langle A_R u, v \rangle, \quad u,v \in W_2^1(Q),$$

где $A_R : W_2^1(Q) \to (W_2^1(Q))'$ – линейный ограниченный оператор. Определяя обобщенное решение задачи (6), (7), приводится доказательство следующей теоремы.

Теорема 2.1.1. *Если уравнение* (6) *удовлетворяет условию сильной эллиптичности* (1), *то вторая краевая задача* (6), (7) *разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\int_0^d f(x)dx = 0,$$

при этом существует единственное обобщенное решение $u \in W_2^1(Q)$ *задачи* (6), (7), *удовлетворяющее условию*

$$\int_0^d u(x)dx = 0.$$

Параграф 2.2 посвящен доказательству теоремы о гладкости обобщенных решений второй краевой задачи на подынтервалах.

Теорема 2.2.1. *Пусть выполняется условие сильной эллиптичности* (1), $u \in W_2^1(0,d)$ *– решение операторного уравнения* $(A_R + \lambda_0 I)u = f$ *с* $Re\lambda_0 > 0$ *и* $f \in L_2(0,d)$*. Тогда* $u \in W_2^2(Q_{sk})$, $s = 1$, $k = 1,\dots,N+1$, *если* $\theta = 1$, *и* $s = 1,2$, $k = 1,\dots,N(s)$, *если* $0 < \theta < 1$*. При этом справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_2^2(Q_{sk})} \leqslant c\|f\|_{L_2(0,d)},$$

где $c > 0$ не зависит от f.

В параграфе 2.3 исследуется гладкость обобщенных решений второй краевой задачи (6), (7) на всем интервале $Q = (0,d)$ при $\theta = 1$. Для формулировки основных результатов вводится блочная матрица $\mathbf{R}_1$ порядка $(N+2)\times(2N+2)$ вида

$$\mathbf{R}_1 = \left(\widetilde{R}_1 | \widetilde{R}_2\right),$$

где $\widetilde{R}_1$, $\widetilde{R}_2$ – матрицы порядка $(N+2)\times(N+1)$, которые имеют вид

$$\widetilde{R}_1 = \begin{pmatrix} R_1(0) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ R_1(1) \end{pmatrix},$$

при этом 0 обозначает нулевую строку длины $N+1$. Также через $\mathbf{R}_1^1$ ($\mathbf{R}_1^2$) определяется матрица порядка $(N+2)\times(2N+1)$, полученная из матрицы $\mathbf{R}_1$ вычеркиванием первого (последнего) столбца соответственно, а через $\mathbf{R}_1^0$ матрица порядка $(N+2)\times 2N$, полученная из $\mathbf{R}_1$ вычеркиванием первого и последнего столбцов.

Предполагая, что выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{N} (|a_k(0)| + |a_{-k}(N+1)|) \neq 0, \tag{8}$$

доказывается вспомогательная лемма.

Лемма 2.3.1. *Пусть выполнены условия* (1) *и* (8)*. Тогда* $rank\boldsymbol{R}_1 = N+2$ *и* $rank\boldsymbol{R}_1^0 \geqslant N+1$.

Рассматривая систему уравнений

$$\mathbf{R}_1^0\Phi^0 = -\varphi_0 H_1 + \psi_{N+1} H_2, \tag{9}$$

где $\Phi^0 := (\varphi_1,\dots,\varphi_N,-\psi_1,\dots,-\psi_N)^T$, $H_1 := (a_0(0),a_{-1}(1),\dots,a_{-N}(N),0)^T$, $H_2 := (0,a_N(1),\dots,a_1(N),a_0(N+1))^T$, приводится доказательство следующей леммы.

Лемма 2.3.2. *Пусть выполнены условия* (1) *и* (8). *Пусть, кроме того,* $rank\boldsymbol{R}_1^0 = N+1$, *при этом* $rank\boldsymbol{R}_1^1 = rank\boldsymbol{R}_1^2 = N+2$. *Тогда система уравнений* (9) *совместна тогда и только тогда, когда справедливо равенство* $\varphi_0 = \alpha_H \psi_{N+1}$, *где* $0 \neq \alpha_H \in \mathbb{C}$.

Предполагая, что $G_1^1(0) \neq 0$ и $G_{N+1}^2(1) \neq 0$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{N} |a_{-k}(k)| \neq 0, \quad \sum_{k=1}^{N} |a_k(N+1-k)| \neq 0, \tag{10}$$

а также, что в случае линейной зависимости столбцов $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ существует такое $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$, что

$$G_{N+1}^2(1) = \alpha G_1^1(0),$$

и определяя ограниченный оператор $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ с областью определения

$$D(A_R^0) = \left\{ u \in W_2^2(0,d) : R_Q u' \in W_2^1(0,d), (R_Q u')(0) = (R_Q u')(d) = 0 \right\},$$

доказываются следующие теоремы.

Теорема 2.3.1. *Пусть выполнены условия* (1) *и* (8), *а* $\theta = 1$. *Предположим, что столбцы* $G_1^1(0)$ *и* $G_{N+1}^2(1)$ *линейно независимы. Тогда оператор* $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $1 \in \mathcal{N}(A_R^0)$ *и* $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 1$. *Если к тому же* $rank\boldsymbol{R}_1^0 = rank\boldsymbol{R}_1^1 = rank\boldsymbol{R}_1^2$, *то* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 3$; *если же* $rank\boldsymbol{R}_1^0 < max\left\{rank\boldsymbol{R}_1^1, rank\boldsymbol{R}_1^2\right\}$, *то* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

Теорема 2.3.2 *Пусть выполнены условия* (1), (8) *и* (10), *а* $\theta = 1$. *Предположим, что столбцы* $G_1^1(0)$ *и* $G_{N+1}^2(1)$ *линейно зависимы. Тогда оператор* $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $1 \in \mathcal{N}(A_R^0)$ *и* $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 1$, *при этом справедливы следующие утверждения:*

1. *Если* $rank\boldsymbol{R}_1^0 = rank\boldsymbol{R}_1^1$ *или* $rank\boldsymbol{R}_1^0 = rank\boldsymbol{R}_1^2$, *то* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 2$.
2. *Если* $rank\boldsymbol{R}_1^0 = N+1$, $rank\boldsymbol{R}_1^1 = rank\boldsymbol{R}_1^2 = N+2$ *и* $\alpha \neq \alpha_H$, *то* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 2$.
3. *Если* $rank\boldsymbol{R}_1^0 = N+1$, $rank\boldsymbol{R}_1^1 = rank\boldsymbol{R}_1^2 = N+2$ *и* $\alpha = \alpha_H$, *то* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

Параграф 2.3 также содержит иллюстрирующие примеры.

Параграф 2.4 посвящен исследованию гладкости обобщенных решений второй краевой задачи (6), (7) на всем интервале $Q = (0,d)$ при $0 < \theta < 1$.

Для формулировки результата вводятся блочные матрицы $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ порядка $(N+1)\times(2N+1)$ вида

$$\mathbf{R}_1 = \left(\widetilde{R}_1^1|\widetilde{R}_1^2\right),$$

$$\mathbf{R}_2 = \left(\widetilde{R}_2^1|\widetilde{R}_2^2\right),$$

где $\widetilde{R}_1^1$, $\widetilde{R}_1^2$ – матрицы порядка $(N+1)\times(N+1)$ и $(N+1)\times N$ соответственно, которые имеют вид

$$\widetilde{R}_1^1 = R_1(0), \quad \widetilde{R}_2^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ R_2(1) \end{pmatrix},$$

а $\widetilde{R}_2^1$, $\widetilde{R}_2^2$ – матрицы порядка $(N+1)\times N$ и $(N+1)\times(N+1)$ соответственно, вида

$$\widetilde{R}_1^2 = \begin{pmatrix} R_2(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{R}_2^2 = R_1(\theta),$$

при этом 0 обозначает нулевую строку длины N. Через $\mathbf{R}_1^1$ вводится матрица порядка $(N+1)\times 2N$, полученная из матрицы $\mathbf{R}_1$ вычеркиванием первого столбца, а через $\mathbf{R}_2^2$ матрица порядка $(N+1)\times 2N$, полученная из матрицы $\mathbf{R}_2$ вычеркиванием последнего столбца.

Предполагая, что

$$\sum_{k=1}^{N} |a_k(0)| \neq 0, \quad \sum_{k=1}^{N} |a_{-k}(N+\theta)| \neq 0, \tag{11}$$

приводится доказательство леммы.

Лемма 2.4.1. *Пусть выполнены условия* (1) *и* (11). *Тогда* $rank\boldsymbol{R}_1 = rank\boldsymbol{R}_2 = N+1$.

Предполагая также, что $G_1^1(0) \neq 0$ и $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{N} |a_{-k}(k)| \neq 0, \quad \sum_{k=1}^{N} |a_k(N-k+\theta)| \neq 0, \tag{12}$$

и используя введенный в параграфе 2.3 ограниченный оператор A_R^0, приводится доказательство следующей теоремы.

Теорема 2.4.1. *Пусть выполнены условия* (1), (11) *и* (12), *а* $0<\theta<1$. *Тогда оператор* $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $1 \in \mathcal{N}(A_R^0)$, $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 1$ *и* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 3$.

После теоремы приводится иллюстрирующий пример.

Глава 3 состоит из 4 параграфов и посвящена исследованию разрешимости краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентам на конечном интервале со смешанными граничными условиями, а также гладкости обобщенных решений такой задачи. Основные результаты данной главы содержатся в статье [9].

Параграф 3.1 посвящен постановке краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения со смешанными граничными условиями, а также исследованию ее разрешимости. Рассматривается задача

$$-\left(R_Q u'\right)' = f(x), \quad x \in Q, \tag{13}$$

$$u(0) = 0, \tag{14}$$

$$(R_Q u')(d) = 0. \tag{15}$$

где $Q = (0,d)$, $d = N + \theta$, $N \in \mathbb{N}$, $0 < \theta \leqslant 1$, $f \in L_2(Q)$ – комплекснозначная функция. В параграфе вводится пространство Соболева $\mathring{W}^1_{2,0}(Q)$, состоящее из функций, принадлежащих пространству $W^1_2(Q)$ таких, что $u(0) = 0$. Также в параграфе даются эквивалентные определения обобщенного решения задачи (13)–(15) и приводится формулировка теоремы о разрешимости краевой задачи.

Теорема 3.1.1. *Пусть выполняется условие* (1)*. Тогда для любой функции $f \in L_2(Q)$ существует единственное обобщенное решение $u \in W^1_{2,0}(Q)$ задачи* (13)–(15)*, при этом имеет место оценка*

$$\|u\|_{W^1_2(Q)} \leqslant c\|f\|_{L_2(Q)},$$

где $c > 0$ – постоянная, не зависящая от f.

В параграфе 3.2 исследуется вопрос о гладкости обобщенного решения задачи (13)–(15) на подынтервалах, в связи с чем формулируется следующая теорема.

Теорема 3.2.1. *Пусть выполнено условие сильной эллиптичности* (1)*. Если $u \in W^1_{2,0}(0,d)$ – обобщенное решение задачи* (13)–(15)*, тогда $u \in W^2_2(Q_{sk})$, $s = 1$, $k = 1,\ldots,N+1$, если $\theta = 1$, и $s = 1,2$, $k = 1,\ldots,N(s)$, если $0 < \theta < 1$; при этом*

$$\|u\|_{W^2_2(Q_{sk})} \leqslant c\|f\|_{L_2(0,d)},$$

где $c > 0$ не зависит от f.

В параграфе 3.3 исследуется вопрос о гладкости обобщенных решений краевой задачи (13)–(15) на всем интервале $Q = (0,d)$ при $\theta = 1$. Для формулировки основных результатов вводится блочная матрица $\mathbf{R}_1$ порядка $(N+1) \times (2N+2)$ вида

$$\mathbf{R}_1 = \left(\widetilde{R}_1 | \widetilde{R}_2\right),$$

где $\widetilde{R}_1$, $\widetilde{R}_2$ — матрицы порядка $(N+1) \times (N+1)$, которые имеют вид

$$\widetilde{R}_1 = \begin{pmatrix} a_{-1}(1) & a_0(1) & \dots & a_{N-2}(1) & a_{N-1}(1) \\ a_{-2}(2) & a_{-1}(2) & \dots & a_{N-3}(2) & a_{N-2}(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-N}(N) & a_{-N+1}(N) & \dots & a_{-1}(N) & a_0(N) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{R}_2 = R_1(1).$$

Через $\mathbf{R}_1^1$ ($\mathbf{R}_1^2$) вводится матрица порядка $(N+1) \times (2N+1)$, полученная из матрицы $\mathbf{R}_1$ вычеркиванием первого (последнего) столбца соответственно, а через $\mathbf{R}_1^0$ матрица порядка $(N+1) \times 2N$, полученная из $\mathbf{R}_1$ вычеркиванием первого и последнего столбцов. Доказывается следующая вспомогательная лемма.

Лемма 3.3.1. *Пусть выполнено условие сильной эллиптичности* (1). *Тогда $rank \boldsymbol{R}_1 = rank \boldsymbol{R}_1^1 = N + 1$ и $rank \boldsymbol{R}_1^0 = rank \boldsymbol{R}_1^2 \geqslant N$.*

Рассматривая ограниченный оператор $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ с областью определения

$$D(A_R^0) = \left\{u \in W_2^2(0,d) : R_Q u' \in W_2^1(0,d), u(0) = (R_Q u')(d) = 0\right\},$$

и, предполагая, что $G_1^1(0) \neq 0$ или $G_{N+1}^2(1) \neq 0$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{N} |a_{-k}(k)| \neq 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{N} |a_k(N+1-k)| \neq 0, \tag{16}$$

приводится доказательство следующей теоремы о гладкости обобщенного решения задачи (13)–(15) на всем интервале $Q = (0,d)$ при $\theta = 1$.

Теорема 3.3.1. *Пусть $\theta = 1$, и пусть выполнены условия* (1) *и* (16).

1. Если столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно независимы, то оператор $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ фредгольмов и $dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$. Если к тому *же* $rank\boldsymbol{R}_1^0 = rank\boldsymbol{R}_1^1 = rank\boldsymbol{R}_1^2 = N+1$, *то* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 2$; *если же* $rank\boldsymbol{R}_1^0 = rank\boldsymbol{R}_1^2 = N$, *то* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

2. Если $\alpha_1 G_1^1(0) + \alpha_2 G_{N+1}^2(1) = 0$ *и при этом* $\alpha_i \neq 0$, $i = 1{,}2$, *т. е.* $G_1^1(0) \neq 0$ *и* $G_{N+1}^2(1) \neq 0$, *то оператор* $A_R^0 : W_2^2(0{,}d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0{,}d)$ *фредгольмов,* $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$, *а* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

3. Если $\alpha_1 G_1^1(0) + \alpha_2 G_{N+1}^2(1) = 0$ *и при этом либо* $rank\boldsymbol{R}_1^0 = rank\boldsymbol{R}_1^1 = N+1$ *и* $G_1^1(0) = 0$ *или* $G_{N+1}^2(1) = 0$, *либо* $rank\boldsymbol{R}_1^0 = rank\boldsymbol{R}_1^2 = N$ *и* $G_{N+1}^2(1) = 0$, *то оператор* $A_R^0 : W_2^2(0{,}d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0{,}d)$ *фредгольмов,* $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$, *а* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

4. Если $G_1^1(0) = 0$ *и* $rank\boldsymbol{R}_1^0 = rank\boldsymbol{R}_1^2 = N$, *то оператор* $A_R^0 : W_2^2(0{,}d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0{,}d)$ *фредгольмов,* $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$, *а* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 0$.

После теоремы приводятся иллюстрирующие примеры.

В параграфе 3.4 изложены результаты о гладкости обобщенных решений краевой задачи (13)–(15) на всем интервале $Q = (0{,}d)$ при $0 < \theta < 1$. Для формулировки основного результата вводится матрица $\mathbf{R}_1$ порядка $N \times (2N+1)$ вида

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} a_{-1}(1) & \dots & a_{N-1}(1) & a_0(1) & \dots & a_{N-1}(1) \\ a_{-2}(2) & \dots & a_{N-2}(2) & a_{-1}(2) & \dots & a_{N-2}(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-N}(N) & \dots & a_0(N) & a_{-N+1}(N) & \dots & a_0(N) \end{pmatrix}$$

и матрица $\mathbf{R}_2$ порядка $(N+1) \times (2N+1)$ вида

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} a_0(\theta) & \dots & a_{N-1}(\theta) & a_0(\theta) & \dots & a_N(\theta) \\ a_{-1}(1+\theta) & \dots & a_{N-2}(1+\theta) & a_{-1}(1+\theta) & \dots & a_{N-1}(1+\theta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-N+1}(N-1+\theta) & \dots & a_0(N-1+\theta) & a_{-N+1}(N-1+\theta) & \dots & a_1(N-1+\theta) \\ 0 & \dots & 0 & a_{-N}(N+\theta) & \dots & a_0(N+\theta) \end{pmatrix}.$$

Через $\mathbf{R}_1^1$ определяется матрица порядка $N \times 2N$, полученная из матрицы $\mathbf{R}_1$ вычеркиванием первого столбца, а через $\mathbf{R}_2^2$ матрица порядка $(N+1) \times 2N$, полученная из матрицы $\mathbf{R}_2$ вычеркиванием последнего столбца. Приводится вспомогательная лемма о рангах введенных матриц.

Лемма 3.4.1. *Пусть выполнено условие* (1). *Тогда* $rank\boldsymbol{R}_1 = rank\boldsymbol{R}_1^1 = N+1$ *и* $rank\boldsymbol{R}_1^0 = rank\boldsymbol{R}_1^2 \geqslant N$.

Предполагая, что $G_1^1(0) \neq 0$ или $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{N} |a_{-k}(k)| \neq 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{N} |a_k(N-k+\theta)| \neq 0, \tag{17}$$

и используя введенный в параграфе 3.3 ограниченный оператор A_R^0, приводится доказательство следующей теоремы.

Теорема 3.4.1. *Пусть* $0 < \theta < 1$, *и пусть выполнены условия* (1) *и* (17).

1. Если $G_1^1(0) \neq 0$, $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$ *и* $rank\boldsymbol{R}_2^2 = rank\boldsymbol{R}_2 = N+1$, *то оператор* $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$ *и* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

2. Если $G_1^1(0) \neq 0$, $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$ *и* $rank\boldsymbol{R}_2^2 = N$, *то оператор* $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$ *и* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

3. Если $G_{N+1}^2(\theta) = 0$ *или* $G_1^1(0) = 0$ *и* $rank\boldsymbol{R}_2^2 = rank\boldsymbol{R}_2 = N+1$, *то оператор* $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$ *и* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

4. Если $G_1^1(0) = 0$ *и* $rank\boldsymbol{R}_2^2 = N$, *то оператор* $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$ *и* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 0$.

После теоремы приводятся иллюстрирующие примеры.

Степень достоверности полученных в диссертации результатов обеспечивается строгостью доказательств, имеющимися публикациями в рецензируемых изданиях, которые индексируются в международных базах данных, а также выступлениями на семинарах, конференциях и школах.

Апробация результатов

Результаты, представленные в диссертационной работе, были доложены в Российском университете дружбы народов имени Патриса Лумумбы на семинаре по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям под руководством А. Л. Скубачевского, на семинаре “Кинетические и нелинейные уравнения математической физики” под руководством С. Б. Куксина, А. Л. Пятницкого, А. Л. Скубачевского, в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова на научном семинаре кафедры теории динамических систем под руководством О. Н. Агеева, Е. А. Асташова, И. А. Богаевского, А. А. Давыдова, М. Е. Липатова, на научном семинаре “Функционально-дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения и их приложения” под руководством А. С. Шамаева, Н. А. Раутиан, в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН на научном семинаре “Избранные вопросы математического анализа” под руководством Г. В. Демиденко, на XXVII Международной конференции “Математика. Экономика. Образование”. XI Международный симпозиум “Ряды Фурье и их приложения” (Новороссийск, 2021); на Международной конференции “XXXII Крымская Осенняя

Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам" (Алушта, 2021); на Международной конференции "The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations" (Москва, 2022); на Международной школе-семинаре "The 7th International Conference "Nonlinear Analysis and Extremal Problems" (Иркутск, 2022); на Международной конференции "Уфимская осенняя математическая школа" (Уфа, 2022); на Воронежской весенней математической школе "Современные методы теории краевых задач". "Понтрягинские чтения — XXXIV" (Воронеж, 2023).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [9; 49–52] из списка литературы, а также в следующих тезисах конференций.

1. Скубачевский А. Л., Иванов Н. О. Гладкость обобщенных решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа. Материалы XXVII Международная конференция "Математика. Экономика. Образование". XI Международный симпозиум "Ряды Фурье и их приложения", Ростов н/Д, 2021, стр. 45.
2. Скубачевский А. Л., Иванов Н. О. Гладкость обобщенных решений 2-й краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа. Сборник материалов международной конференции КРОМШ 2021 "XXXII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам". Симферополь, издательство и типография ООО "ПОЛИПРИНТ", 2021. – стр. 82.
3. Ivanov N. O. Smoothness of generalized solutions of the second boundary-value problem for differential-difference equations on an interval of non-integer length. The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations (DFDE-2022). Astracts. Moscow, Russia, 2022, p. 53.
4. Ivanov N. O. On generalized solutions of the second boundary value problem for differential-difference equations with variable coefficients. Proceedings of the 7th International Conference on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2022). Irkutsk : ISDCT SB RAS, 2022, p. 44.
5. Иванов Н. О., Скубачевский А. Л. Гладкость обобщенных решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа» (г.

Уфа, 28 сентября – 1 октября 2022 г.). Том 2 / отв. редактор З.Ю. Фазуллин. - Уфа: РИЦ БашГУ, 2022, стр. 187–189

6. Иванов Н. О. Гладкость обобщенных решений первой краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами. Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXXIV: Материалы международной Воронежской весенней математической школы, посвященной 115–летию со дня рождения академика Л. С. Понтрягина. (3–9 мая 2023 г.) Воронежский государственный университет; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН; НОМЦ СОГУ им. К. Л. Хетагурова; АО «Концерн «Созвездие». – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2023, стр. 186–187.

Глава 1. Первая краевая задача для дифференциально-разностного уравнения на конечном интервале

Глава посвящена исследованию разрешимости первой краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения на интервале конечной длины, а также гладкости обобщенных решений такой задачи. В главе содержится ряд определений и вспомогательных результатов, которые будут использованы в диссертационной работе. В параграфе 1.1 формулируются основные свойства разностных операторов на конечном интервале $Q = (0,d)$. Доказательства этих свойств содержатся в [76]. В параграфе 1.2 излагаются некоторые известные результаты из вариационной теории абстрактных краевых задач, необходимые в диссертационной работе. В параграфе 1.3 формулируется первая краевая задача для дифференциально-разностного уравнения и исследуется вопрос существования обобщенного решения задачи. Параграфы 1.4, 1.5 и 1.6 посвящены вопросам гладкости обобщенных решений такой задачи. Основные результаты параграфов 1.3, 1.4, 1.5 и 1.6 опубликованы в работе [52].

1.1 Свойства разностных операторов на конечном интервале Q

Рассмотрим уравнение

$$-(R_Q u')' = f(x), \qquad x \in Q, \tag{1.1}$$

где $f \in L_2(Q)$ – комплекснозначная функция, $Q = (0,d)$, $d = N + \theta$, $N \in \mathbb{N}$, $0 < \theta \leqslant 1$. Оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ задан формулой

$$R_Q = P_Q R I_Q,$$

где операторы $R : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, $I_Q : L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R})$ и $P_Q : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(Q)$ определены следующим образом:

$$(Ru)(x) = \sum_{j=-N}^{N} a_j(x) u(x + j),$$

$$(I_Q u)(x) = u(x), \qquad x \in Q, \qquad (I_Q u)(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus Q, \tag{1.2}$$

$$(P_Q u)(x) = u(x), \qquad x \in Q. \tag{1.3}$$

Здесь $a_j(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ – комплекснозначные функции. Сдвиги аргументов $x \mapsto x+j$ оператора R могут отображать точки интервала Q в $\mathbb{R}\setminus Q$. С учетом этих отображений краевые условия для уравнения (1.1) следует задавать не только на границе Q, но и на множестве $\mathbb{R}\setminus Q$. Для рассмотрения однородных краевых условий вводится оператор I_Q, который является оператором продолжения нулем функции из $L_2(Q)$ в $\mathbb{R}\setminus Q$. Для изучения дифференциально-разностного уравнения не на всем множестве $\mathbb{R}$, а только на интервале Q, вводится оператор P_Q, являющийся оператором сужения функции из $L_2(\mathbb{R})$ на Q.

Лемма 1.1.1. *$I_Q^* = P_Q$, $P_Q^* = I_Q$, т. е. для всех $u \in L_2(Q)$, $v \in L_2(\mathbb{R})$ имеем*

$$(I_Q u,v)_{L_2(\mathbb{R})} = (u, P_Q v)_{L_2(Q)}.$$

Доказательство следует из (1.2), (1.3).

Лемма 1.1.2. *Операторы $R : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ ограниченные;*

$$(R^*u)(x) = \sum_{j=-N}^{N} \overline{a_j(x-j)}u(x-j), \qquad R_Q^* = P_Q R^* I_Q.$$

Доказательство следует из леммы 1.1.1.

Лемма 1.1.3. *Если оператор $R : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ самосопряженный, то самосопряженным является и оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$.*

Доказательство следует из лемм 1.1.1 и 1.1.2.

Рассмотрим разбиение интервала $Q = (0,d)$ на подынтервалы, которые образуются из этого интервала выбрасыванием орбит его концов, порождаемых группой целочисленных сдвигов. Другими словами, указанные подынтервалы являются связными компонентами множества $(0,d) \setminus (\{j\}_1^N \cup \{d-j\}_1^N)$. В зависимости от значения θ получим один или два класса непересекающихся подынтервалов. Если $\theta = 1$, то получим один класс непересекающихся подынтервалов

$$Q_{1k} = (k-1,k), \qquad k = 1,...,N+1.$$

Если же $0 < \theta < 1$, то мы рассматриваем два класса непересекающихся подынтервалов

$$Q_{1k} = (k-1,k-1+\theta), \qquad k = 1,...,N+1,$$
$$Q_{2k} = (k-1+\theta,k), \qquad k = 1,...,N.$$

Отметим, что все подынтервалы одного класса получаются друг из друга сдвигом на некоторое целое число.

Пример 1.1.1. Пусть $d = 2$. Тогда $N = 1$, $\theta = 1$. Получим один класс подынтервалов $Q_{11} = (0{,}1)$ и $Q_{12} = (1{,}2)$ (Рис. 1.1.).

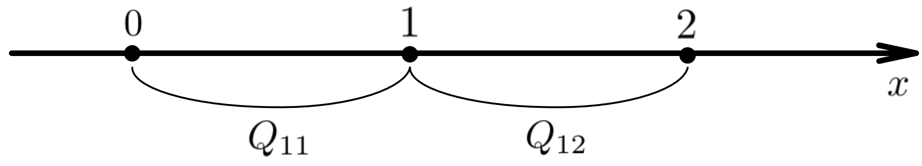

Рисунок 1.1 — $\theta = 1$

Пример 1.1.2. Пусть $d = e$. Тогда $N = 2$, $\theta = e - 2$. Получим два класса подынтервалов $Q_{11} = (0{,}e - 2)$, $Q_{12} = (1{,}e - 1)$, $Q_{13} = (2, e)$ и $Q_{21} = (e - 2{,}1)$, $Q_{22} = (e - 1{,}2)$ (Рис. 1.2.).

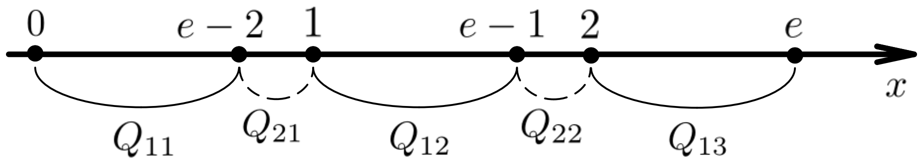

Рисунок 1.2 — $\theta = e - 2$

Через s обозначим номер класса подынтервалов. Тогда $s = 1$, если $\theta = 1$, и $s = 1{,}2$, если $0 < \theta < 1$. Обозначим также $N(s) := N + 1$, если $s = 1$, и $N(s) := N$, если $s = 2$.

Через $L_2\left(\bigcup\limits_k Q_{sk}\right)$ обозначим подпространство функций из $L_2\left(Q\right)$ равных нулю вне $\bigcup\limits_k Q_{sk}$, $s = 1$, $k = 1,\ldots,N+1$, если $\theta = 1$, и $s = 1{,}2$, $k = 1,\ldots,N(s)$, если $0 < \theta < 1$. Очевидно, $L_2\left(\bigcup\limits_k Q_{1k}\right) = L_2(Q)$, если $\theta = 1$.

Обозначим через $P_s : L_2\left(Q\right) \to L_2\left(\bigcup\limits_k Q_{sk}\right)$ оператор ортогонального проектирования функций на $L_2\left(\bigcup\limits_k Q_{sk}\right)$ в пространстве $L_2(Q)$.

Очевидно,

$$L_2\left(Q\right) = \bigoplus_s L_2\left(\bigcup_k Q_{sk}\right).$$

Замечание 1.1.1. Заметим, что при $\theta = 1$ оператор $P_1 : L_2(Q) \to L_2\left(\bigcup_k Q_{1k}\right)$ является единичным оператором, где $Q_{1k} = (k-1,k)$ при $k = 1,...,N+1$.

Из определений введенных операторов и подынтервалов вытекает следующая лемма.

Лемма 1.1.4. *Пространство функций* $L_2\left(\bigcup_k Q_{sk}\right)$ *есть инвариантное подпространство оператора* R_Q.

Построим изоморфизм гильбертовых пространств

$$U_s : L_2\left(\bigcup_k Q_{sk}\right) \to L_2^{N(s)}(Q_{s1}),$$

определив вектор-функцию $(U_s u)(x)$ по формуле

$$(U_s u)_k(x) = u(x+k-1),\ x \in Q_{sk},\ k = 1,...,N(s), \tag{1.4}$$

$$L_2^{N(s)}(Q_{s1}) = \prod_{k=1}^{N} L_2(Q_{s1}).$$

Обозначим через $R_s = R_s(x)$, $x \in \overline{Q}_{s1}$, матрицу порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами

$$r_{ij}^s(x) = a_{j-i}(x+i-1), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad i,j = 1,...,N(s). \tag{1.5}$$

Таким образом, матрица $R_1 = R_1(x)$ имеет вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0(x) & a_1(x) & \dots & a_N(x) \\ a_{-1}(x+1) & a_0(x+1) & \dots & a_{N-1}(x+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-N}(x+N) & a_{-N+1}(x+N) & \dots & a_0(x+N) \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

а матрица $R_2 = R_2(x)$ вид

$$R_2 = \begin{pmatrix} a_0(x) & a_1(x) & \dots & a_{N-1}(x) \\ a_{-1}(x+1) & a_0(x+1) & \dots & a_{N-2}(x+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-N+1}(x+N-1) & a_{-N+2}(x+N-1) & \dots & a_0(x+N-1) \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, матрица R_2 может быть получена из матрицы R_1 вычеркиванием последней строки и последнего столбца. В дальнейшем будем рассматривать матрицы $R_1(x)$ при $x \in \overline{Q}_{11}$, а $R_2(x)$ при $x \in \overline{Q}_{21}$.

Через $G_j^1 = G_j^1(x)$ ($G_j^2 = G_j^2(x)$), $j = 1,\dots,N+1$, обозначим j-й столбец матрицы порядка $N \times (N+1)$, полученной из матрицы R_1 вычеркиванием первой (последней) строки.

Замечание 1.1.2. Введенные матрицы R_1 и R_2, а также столбы G_j^1 и G_j^2, $j = 1,\dots,N+1$, понадобятся для исследования гладкости обобщенных решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами.

Лемма 1.1.5. *Оператор $R_{Qs} = U_s R_Q U_s^{-1} : L_2^{N(s)}(Q_{s1}) \to L_2^{N(s)}(Q_{s1})$ является оператором умножения на квадратную матрицу $R_s(x)$.*

Доказательство. Пусть $V \in L_2^{N(s)}(Q_{s1})$. Положим $u = U_s^{-1}V \in L_2\left(\bigcup\limits_k Q_{sk}\right)$. В силу (1.4) и (1.5) получим

$$(R_{Qs}V)_i(x) = \left(U_s R_Q U_s^{-1} V\right)_i(x) = (U_s R_Q u)_i(x) =$$
$$= \sum_{j=-i+1}^{N(s)-i} a_j(x+i-1)u(x+i-1+j) =$$
$$= \sum_{k=1}^{N(s)} a_{k-i}(x+i-1)u(x+k-1) = \sum_{k=1}^{N(s)} r_{ik}^s(x)V_k(x), \qquad x \in Q_{s1}.$$

□

Пусть $A : H \to H$ – ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Назовем оператор A положительным (неотрицательным), если $(Ax,x) > 0$ ($(Ax,x) \geqslant 0$) для всех $x \in H$, $x \neq 0$. Назовем оператор A положительно определенным, если $(Ax,x) > c_0(x,x)$ для всех $x \in H$. В случае оператора умножения на эрмитову матрицу в конечномерном пространстве понятия положительного и положительно определенного операторов совпадают.

Лемма 1.1.6. *Оператор $R_Q + R_Q^* : L_2(Q) \to L_2(Q)$ является положительно определенным тогда и только тогда, когда матрицы $R_s(x) + R_s^*(x)$ положительно определены для всех $x \in \overline{Q}_{s1}$, $s = 1$, если $\theta = 1$, и $s = 1,2$, если $0 < \theta < 1$; $R_s^*(x)$ – эрмитово сопряженные матрицы к $R_s(x)$.*

Определение 1.1.1. Будем говорить, что дифференциально-разностное уравнение (1.1) удовлетворяет условию сильной эллиптичности, если матрицы $R_s(x) + R_s^*(x)$ положительно определены для всех $x \in \overline{Q}_{s1}$, $s = 1$, если $\theta = 1$, и $s = 1{,}2$, если $0 < \theta < 1$.

Замечание 1.1.3. Для доказательства основных результатов нам понадобится эквивалентная определению 1.1.1 формулировка условия сильной эллиптичности в виде выполнения неравенства

$$Re(R_sY{,}Y) \geqslant c_1\|Y\|^2 \tag{1.6}$$

для всех $x \in \overline{Q}_{s1}$, s и $Y \in \mathbb{C}^{N(s)}$, где $s = 1$, если $\theta = 1$, и $s = 1, 2$, если $0 < \theta < 1$; $c_1 > 0$ не зависит от x и Y, $(\cdot{,}\cdot)$ и $\|\cdot, \cdot\|$ – скалярное произведение и норма в $\mathbb{C}^{N(s)}$ соответственно.

Пусть $W_2^k(Q)$ – пространство Соболева комплекснозначных функций из $L_2(Q)$, имеющих все обобщенные производные вплоть до k-го порядка из $L_2(Q)$. Скалярное произведение для $u{,}v \in W_2^k(Q)$ вводится по формуле

$$(u{,}v)_{W_2^k(Q)} = \sum_{i=0}^{k} \int\limits_Q u^{(i)}\overline{v^{(i)}}dx.$$

Лемма 1.1.7. *Пусть $detR_1(x) \neq 0$ при $x \in \overline{Q}_{11}$, если $\theta = 1$, и $detR_s(x) \neq 0$ при $x \in \overline{Q}_{s1}$, $s = 1{,}2$, если $0 < \theta < 1$. Тогда оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ имеет ограниченный обратный. Пусть, кроме того, $u \in W_2^k(Q_{sj})$, $s = 1$, $j = 1{,}...{,}N + 1$, если $\theta = 1$, и $s = 1{,}2$, $j = 1{,}...{,}N(s)$, если $0 < \theta < 1$. Тогда $R_Q^{-1}u \in W_2^k(Q_{si})$ и*

$$\|R_Q^{-1}u\|_{W_2^k(Q_{si})} \leqslant c_2 \sum_{j=1}^{N(s)} \|u\|_{W_2^k(Q_{sj})}, \tag{1.7}$$

где $c_2 > 0$ не зависит от u.

Доказательство. Очевидно, $(U_sP_su)_j \in W_2^k(Q_{s1})$, $j = 1, \ldots, N(s)$, т. е. $(R_s(x)(R_s^{-1}(x)U_sP_su))_j \in W_2^k(Q_{s1})$, $j = 1, \ldots, N(s)$, $x \in \overline{Q}_{s1}$. Следовательно, $(R_s^{-1}(x)U_sP_su)_i \in W_2^k(Q_{s1})$, $i = 1, \ldots, N(s)$, $x \in \overline{Q}_{s1}$. Таким образом, $R_Q^{-1}u \in W_2^k(Q_{si})$, $i = 1, \ldots, N(s)$, и выполнено неравенство (1.7). $\square$

1.2 Некоторые сведения из вариационной теории краевых задач

Для исследования первой и второй краевых задач, а также краевой задачи со смешанными граничными условиями нам понадобятся известные определения и результаты, содержащиеся в [23, гл. 2, §9]. Однако, для удобства читателя приведем их.

Пусть V и H – гильбертовы пространства, причем V непрерывно и плотно вложено в H. Пространство H совпадает со своим антидвойственным, и, если V' антидвойственно к V, то, поскольку V плотно в H, можно отождествить H с подпространством пространства V'. Таким образом, $V \subset H \subset V'$.

Обозначим через $(\cdot,\cdot)$ скалярное произведение в H, а через $|\cdot|$ норму в H. Если $f \in V'$, а $v \in V$, то действие антилинейного функционала f на v мы обозначим через $\langle f,v\rangle$. В случае $f \in H$, $v \in V$ мы имеем $\langle f,v\rangle = (f,v)$.

Обозначим через $(\cdot,\cdot)_V$ и $\|\cdot\|_V$ скалярное произведение в пространстве V и норму в V соответственно.

Пусть $b(u,v)$ – полуторалинейная непрерывная форма в $V \times V$.

Определение 1.2.1. Полуторалинейная непрерывная форма $b(u,v)$ в $V \times V$ называется V – эллиптической, если

$$Re\ b(u,u) \geqslant \alpha \|u\|_V^2$$

для любого $u \in V$, где $\alpha > 0$ не зависит от u.

Рассмотрим следующую задачу: найти элемент $u \in V$ такой, что

$$b(u,v) = \langle f,v\rangle \tag{1.8}$$

для любого $v \in V$, где $f \in V'$.

В силу непрерывности полуторалинейной формы $b(u,v)$ в $V \times V$ мы можем представить ее в виде

$$b(u,v) = \langle Au,v\rangle\,, \qquad u,v \in V, \tag{1.9}$$

где $A : V \to V'$ – линейный ограниченный оператор. Тогда задача нахождения решения $u \in V$, удовлетворяющего тождеству (1.8), эквивалентна линейному операторному уравнению вида

$$Au = f. \tag{1.10}$$

Замечание 1.2.1. Отметим, что в случае краевых задач для сильно эллиптических дифференциальных уравнений абстрактные задачи (1.8) и (1.10) служат эквивалентными определениями обобщенных решений.

Лемма 1.2.1. *Пусть полуторалинейная форма* $b(u,v)$ *является* V – *эллиптической. Тогда для любого* $f \in V'$ *существует единственное решение* $u \in V$ *тождества* (1.8), *при этом*

$$\|u\|_V \leqslant c_3 \|f\|_{V'},$$

где $c_3 > 0$ *не зависит от* f.

Наряду с задачей о нахождении решения тождества (1.8) рассмотрим следующую задачу: найти элемент $u \in V$ такой, что

$$b(u,v) + \lambda(u,v) = \langle f,v \rangle \tag{1.11}$$

для любого $v \in V$, где $\lambda \in \mathbb{C}$ задано.

Определение 1.2.2. Полуторалинейная непрерывная форма $b(u,v)$ в $V \times V$ называется V – коэрцитивной, если существуют константы $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ и $\alpha > 0$ такие, что

$$Re\ b(u,u) + \lambda_0 |u|^2 \geqslant \alpha \|u\|_V^2 \tag{1.12}$$

для любого $u \in V$.

Из леммы 1.2.1 вытекает

Следствие 1.2.1. *Пусть полуторалинейная форма* $b(u,v)$ *является* V – *коэрцитивной. Тогда при* $\lambda \in \mathbb{C}$ *таком, что* $Re\lambda \geqslant \lambda_0$ *для любого* $f \in V'$ *существует единственное решение* $u \in V$ *тождества* (1.11), *при этом*

$$\|u\|_V \leqslant c_\lambda \|f\|_{V'},$$

где $c_\lambda > 0$ *не зависит от* f.

Замечание 1.2.2. Эквивалентное изложение абстрактного подхода к исследованию краевых задач для сильно эллиптических дифференциальных уравнений можно найти также в [16, гл.VI].

1.3 Постановка первой краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения и ее разрешимость

Рассмотрим уравнение в дивергентном виде

$$-\left(R_Q u'\right)' = f(x), \qquad x \in Q, \tag{1.13}$$

с краевыми условиями

$$u(0) = u(d) = 0, \tag{1.14}$$

где $Q = (0,d)$, $d = N + \theta$, $N \in \mathbb{N}$, $0 < \theta \leqslant 1$, $f \in L_2(Q)$ – комплекснозначная функция.

Замечание 1.3.1. Далее будем предполагать, что уравнение (1.13) удовлетворяет условию сильной эллиптичности, т. е. выполнено неравенство (1.6).

Замечание 1.3.2. По своим свойствам и методам исследования краевые задачи для обыкновенных функционально-дифференциальных уравнений находятся значительно ближе к краевым задачам для эллиптических дифференциальных уравнений, чем к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [76]). Например, если R_Q – оператор умножения на вещественную гладкую функцию $k(x) \neq 0$, то уравнение (1.13) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение, соответствующий дифференциальный оператор будет самосопряженным, а его спектр – вещественным, дискретным и полуограниченным. Если же коэффициенты оператора R_Q – вещественные числа, а матрицы R_s $(s = 1,2)$ симметричные, невырожденные, но не знакоопределенные, то соответствующий дифференциально-разностный оператор в уравнении (1.13) будет самосопряженным, а его спектр вещественным и дискретным, но не будет полуограниченным (см. пример 23.2 в [76]). Таким образом, термин "сильно эллиптическое дифференциально-разностное уравнение" представляется оправданным.

Замечание 1.3.3. Заметим, что в случае дифференциально-разностных уравнений с постоянными коэффициентами исследование задачи (1.13), (1.14) аналогично исследованию следующей задачи (см. [76])

$$-\left(R_Q u\right)'' = f(x), \qquad x \in Q,$$

$$u(0) = u(d) = 0.$$

С другой стороны, в случае задачи (1.13), (1.14) для дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами, рассматриваемого в настоящей работе, данное утверждение является неверным. В работе [76] использовалось сведение дифференциально-разностного уравнения с постоянными коэффициентами и однородными условиями Дирихле к обыкновенному дифференциальному уравнению с многоточечными краевыми условиями. Однако, в силу того, что разностный оператор с переменными коэффициентами и однородными условиями Дирихле не коммутирует с оператором дифференцирования первого порядка, то в случае дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами такой подход невозможен.

Определение 1.3.1. Краевую задачу (1.13), (1.14) будем называть первой краевой задачей для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения.

Обозначим через $\mathring{W}_2^1(Q)$ множество функций из $W_2^1(Q)$ таких, что $u(0) = u(d) = 0$, т. е.

$$\mathring{W}_2^1(Q) = \{u \in W_2^1(Q) : u(0) = u(d) = 0\}.$$

Введем в $\mathring{W}_2^1(Q) \times \mathring{W}_2^1(Q)$ полуторалинейную форму $b_R(u,v)$ по формуле

$$b_R(u,v) = (R_Q u', v')_{L_2(Q)}.$$

Лемма 1.3.1. *Существует постоянная $c_4 > 0$ такая, что выполнено неравенство*

$$|b_R(u,v)| \leqslant c_4 \|u\|_{W_2^1(Q)} \|v\|_{W_2^1(Q)}, \qquad u,v \in \mathring{W}_2^1(Q), \tag{1.15}$$

где $c_4 > 0$ не зависит от u и v. При этом для каждого $c_5 \geqslant 0$ существует $c_6 > 0$ такое, что для любой функции $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$ выполнено неравенство типа Гординга

$$Re\ b_R(u,u) + c_5 \|u\|^2_{L_2(Q)} \geqslant c_6 \|u\|^2_{W_2^1(Q)}. \tag{1.16}$$

Доказательство. В силу ограниченности оператора $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ (лемма 1.1.2) и неравенства Коши – Буняковского получим неравенство (1.15). Покажем, что для $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$ выполняется оценка

$$Re\,(R_Q u', u')_{L_2(Q)} \geqslant c_7 \|u'\|^2_{L_2(Q)}.$$

Используя введенный по формуле (1.4) изоморфизм U_s и неравенство (1.6), получим

$$Re\,(R_Q u',u')_{L_2(Q)} = Re \sum_s \Big(R_s (U_s P_s u)',(U_s P_s u)' \Big)_{L_2^N(Q_{s1})} \geqslant$$
$$\geqslant c_7 \sum_s \Big((U_s P_s u)',(U_s P_s u)' \Big)_{L_2^N(Q_{s1})} = c_7 \|u'\|^2_{L_2(Q)}. \qquad (1.17)$$

Из (1.17) следует неравенство (1.16). □

Замечание 1.3.4. Из неравенства (1.17) следует, что

$$Re\; b_R(u,u) \geqslant c_7 \|u'\|^2_{L_2(Q)}, \qquad u \in \mathring{W}_2^1(Q).$$

Дадим эквивалентные определения обобщенного решения задачи (1.13), (1.14).

Определение 1.3.2. Функция $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$ является обобщенным решением задачи (1.13), (1.14), если для всех $v \in \mathring{W}_2^1(Q)$ выполнено интегральное тождество

$$(R_Q u',v')_{L_2(Q)} = (f,v)_{L_2(Q)}. \qquad (1.18)$$

Определение 1.3.3. Функцию $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$ будем называть обобщенным решением задачи (1.13), (1.14), если для всех $v \in \mathring{W}_2^1(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$b_R(u,v) = (f,v)_{L_2(Q)}. \qquad (1.19)$$

Из параграфа 1.2 следует, что форму $b_R(u,v)$ можно представить в виде

$$b_R(u,v) = \langle A_R u,v \rangle\,, \qquad u,v \in \mathring{W}_2^1(Q), \qquad (1.20)$$

где $A_R : \mathring{W}_2^1(Q) \to (\mathring{W}_2^1(Q))'$ – линейный ограниченный оператор. Таким образом, можно дать следующее определение обобщенного решения задачи (1.13), (1.14), эквивалентное определению 1.3.3.

Определение 1.3.4. Функцию $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$ будем называть обобщенным решением задачи (1.13), (1.14), если

$$A_R u = f. \qquad (1.21)$$

Введем неограниченный оператор $\mathcal{A}_R : L_2(Q) \supset D(\mathcal{A}_R) \to L_2(Q)$, действующий по формуле

$$\mathcal{A}_R u = A_R u, \qquad u \in D(\mathcal{A}_R),$$

где

$$D(\mathcal{A}_R) = \left\{ u \in \mathring{W}_2^1(Q) : A_R u \in L_2(Q) \right\}.$$

Лемма 1.3.2. *В пространстве $\mathring{W}_2^1(Q)$ можно ввести эквивалентное скалярное произведение по формуле*

$$(u,v)'_{\mathring{W}_2^1(Q)} = \frac{1}{2} \left(\left(R_Q + R_Q^* \right) u', v' \right)_{L_2(Q)} + c_5 (u,v)_{L_2(Q)}, \tag{1.22}$$

где $c_5 \geqslant 0$ – постоянная из (1.16).

Доказательство. Рассмотрим правую часть (1.22). Она представляет собой непрерывную эрмитову полуторалинейную форму на $\mathring{W}_2^1(Q)$ и

$$\begin{gathered} \frac{1}{2} \left(\left(R_Q + R_Q^* \right) u', u' \right)_{L_2(Q)} + c_5 (u,u)_{L_2(Q)} = \\ \frac{1}{2} \left(b_R(u,u) + \overline{b_R(u,u)} \right) + c_5 (u,u)_{L_2(Q)} = \\ Re\ b_R(u,u) + c_5 \|u\|^2_{L_2(Q)} \geqslant c_6 \|u\|^2_{W_2^1(Q)}, \end{gathered}$$

в силу (1.16), где $\overline{b_R(v,u)}$ – сопряженная к $b_R(u,v)$ форма, $u,v \in \mathring{W}_2^1(Q)$. □

Замечание 1.3.5. Заметим, что в общем случае при определении эквивалентного скалярного произведения в соответствующих пространствах Соболева для первой краевой задачи, а также для краевой задачи со смешанными граничными условиями (на одном конце интервала условие первого рода, а на другом конце – условие второго рода) можно полагать в (1.22) $c_5 = 0$. С другой стороны, при исследовании второй краевой задачи возможно лишь $c_5 > 0$.

Теорема 1.3.1. *Пусть выполнено условие сильной эллиптичности* (1.6). *Тогда для любой функции $f \in L_2(Q)$ существует единственное обобщенное решение $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$ задачи* (1.13), (1.14), *при этом имеет место оценка*

$$\|u\|_{W_2^1(Q)} \leqslant c_8 \|f\|_{L_2(Q)}, \tag{1.23}$$

где $c_8 > 0$ – постоянная, не зависящая от f.

Доказательство теоремы содержится в [76], но для полноты изложения приведем его.

Доказательство. 1. Заметим вначале, что из леммы 1.3.2 в силу замечания 1.3.5 следует, что формула

$$(u,v)'_{\mathring{W}_2^1(Q)} = \frac{1}{2}\left(\left(R_Q + R_Q^*\right)u', v'\right)_{L_2(Q)} = \frac{1}{2}\left(b_R(u,v) + \overline{b_R(v,u)}\right) \tag{1.24}$$

задает в пространстве $\mathring{W}_2^1(Q)$ эквивалентное скалярное произведение.

2. Покажем, что существует (единственный) линейный ограниченный оператор $B : \mathring{W}_2^1(Q) \to \mathring{W}_2^1(Q)$, что

$$(u,Bv)'_{\mathring{W}_2^1(Q)} = \frac{1}{2i}\left(\left(R_Q - R_Q^*\right)u', v'\right)_{L_2(Q)} = \frac{1}{2i}\left(b_R(u,v) - \overline{b_R(v,u)}\right) \tag{1.25}$$

для всех $u,v \in \mathring{W}_2^1(Q)$. При этом оператор B является самосопряженным и $(Bu,v)'_{\mathring{W}_2^1(Q)} = (u,Bv)'_{\mathring{W}_2^1(Q)}$.

Действительно, при фиксированной функции $v \in \mathring{W}_2^1(Q)$ правая часть (1.25) является непрерывным линейным функционалом относительно функции u на $\mathring{W}_2^1(Q)$. Используя ограниченность операторов R_Q и R_Q^*, неравенство Коши – Буняковского, а также определенное по формуле (1.24) эквивалентное скалярное произведение в $\mathring{W}_2^1(Q)$, получим для любых $u,v \in \mathring{W}_2^1(Q)$

$$\left|\frac{1}{2i}\left(\left(R_Q - R_Q^*\right)u', v'\right)_{L_2(Q)}\right| = \left|\frac{1}{2i}\left(b_R(u,v) - \overline{b_R(v,u)}\right)\right| \leqslant c_9\|u\|'_{\mathring{W}_2^1(Q)}\|v\|'_{\mathring{W}_2^1(Q)},$$

где c_9 не зависит от u и v. Согласно теореме Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве, существует единственный элемент $Bv \in \mathring{W}_2^1(Q)$ такой, что (1.25) справедливо при всех $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$. Таким образом, соответствие $v \mapsto Bv$ определяет линейный ограниченный оператор $B : \mathring{W}_2^1(Q) \to \mathring{W}_2^1(Q)$.

Далее, для $u,v \in \mathring{W}_2^1(Q)$ имеем

$$(v,Bu)'_{\mathring{W}_2^1(Q)} = \frac{1}{2i}\left(\left(R_Q - R_Q^*\right)v', u'\right)_{L_2(Q)} = \frac{1}{2i}\left(b_R(v,u) - \overline{b_R(u,v)}\right),$$

следовательно, для $u,v \in \mathring{W}_2^1(Q)$

$$\begin{aligned}(Bu,v)'_{\mathring{W}_2^1(Q)} &= \overline{(v,Bu)'}_{\mathring{W}_2^1(Q)} = -\frac{1}{2i}\left(\left(R_Q^* - R_Q\right)u', v'\right)_{L_2(Q)} = \\ &= -\frac{1}{2i}\left(\overline{b_R(v,u)} - b_R(u,v)\right) = \frac{1}{2i}\left(b_R(u,v) - \overline{b_R(v,u)}\right) = \\ &= \frac{1}{2i}\left(\left(R_Q - R_Q^*\right)u', v'\right)_{L_2(Q)} = (u,Bv)'_{\mathring{W}_2^1(Q)}.\end{aligned} \tag{1.26}$$

3. Рассмотрим правую часть интегрального тождества (1.19), которая является непрерывным антилинейным функционалом относительно v на пространстве $\mathring{W}_2^1(Q)$. Следовательно, в силу теоремы Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве существует такой ограниченный линейный оператор $L : L_2(Q) \to \mathring{W}_2^1(Q)$, что

$$(f,v)_{L_2(Q)} = (Lf,v)'_{\mathring{W}_2^1(Q)}, \qquad f \in L_2(Q), \qquad v \in \mathring{W}_2^1(Q). \tag{1.27}$$

4. Рассмотрим операторное уравнение

$$\mathcal{A}_R u = f, \qquad u \in \mathring{W}_2^1(Q).$$

В силу (1.19)

$$\frac{1}{2}\left(b_R(u,v) + \overline{b_R(v,u)}\right) + i\frac{1}{2i}\left(b_R(u,v) - \overline{b_R(v,u)}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left(R_Q + R_Q^*\right)u', v'\right)_{L_2(Q)} + i\frac{1}{2i}\left(\left(R_Q - R_Q^*\right)u', v'\right)_{L_2(Q)} = (f,v)_{L_2(Q)}$$

для всех $v \in \mathring{W}_2^1(Q)$. Последнее в силу (1.24), (1.25) и (1.27) можно представить в виде

$$(u,v)'_{\mathring{W}_2^1(Q)} + i(Bu,v)'_{\mathring{W}_2^1(Q)} = (Lf,v)'_{\mathring{W}_2^1(Q)}, \qquad u,v \in \mathring{W}_2^1(Q). \tag{1.28}$$

Таким образом, исходное уравнение эквивалентно тождеству (1.28), которое можно переписать в пространстве $\mathring{W}_2^1(Q)$ в виде

$$(I + iB)u = Lf.$$

Так как оператор iB кососимметрический, то существует ограниченный обратный оператор $(I+iB)^{-1} : \mathring{W}_2^1(Q) \to \mathring{W}_2^1(Q)$. Следовательно, для любой функции $f \in L_2(Q)$ существует единственное обобщенное решение $u = (I + iB)^{-1}Lf$ задачи (1.13), (1.14), при этом имеет место оценка (1.23). $\square$

Напомним, что оператор $\mathcal{A}_R$ называется фредгольмовым, если он замкнут, имеет замкнутый в $L_2(Q)$ образ $\mathcal{R}(\mathcal{A}_R)$, а его ядро $\mathcal{N}(\mathcal{A}_R)$ и коядро $\mathcal{R}(\mathcal{A}_R)^\perp$ конечномерны, при этом по определению $ind\mathcal{A}_R = dim\mathcal{N}(\mathcal{A}_R) - codim\mathcal{R}(\mathcal{A}_R)$.

Следствие 1.3.1. *Пусть уравнение* (1.13) *удовлетворяет условию сильной эллиптичности. Тогда оператор* $\mathcal{A}_R$ *фредгольмов,* $ind\mathcal{A}_R = 0$ *и* $dim\mathcal{N}(\mathcal{A}_R) = 0$.

1.4 Гладкость обобщенных решений первой краевой задачи на подынтервалах

В отличие от краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений гладкость обобщенных решений краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений может нарушаться на границах подынтервалов Q_{sk} и сохраняется лишь внутри этих подынтервалов.

Рассмотрим вначале гладкость обобщенных решений задачи (1.13), (1.14) на подынтервалах. В этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 1.4.1. *Пусть уравнение* (1.13) *удовлетворяет условию сильной эллиптичности* (1.6), *и пусть* $u \in \mathring{W}_2^1(0,d)$ *– обобщенное решение задачи* (1.13), (1.14). *Тогда* $u \in W_2^2(Q_{sk})$, $s = 1$, $k = 1,\dots,N+1$, *если* $\theta = 1$, *и* $s = 1,2$, $k = 1,\dots,N(s)$, *если* $0 < \theta < 1$, *при этом*

$$\|u\|_{W_2^2(Q_{sk})} \leqslant c_{10}\|f\|_{L_2(0,d)}, \tag{1.29}$$

где $c_{10} > 0$ *не зависит от* f.

Доказательство. Зафиксируем число s. Предположим в интегральном тождестве (1.18), что $v \in C_0^\infty(\bigcup\limits_k Q_{sk})$, а также, что $v(x) = 0$ при $x \notin \bigcup\limits_k Q_{sk}$ в случае $0 < \theta < 1$. Из (1.4) и леммы 1.1.5 вытекает, что

$$\int\limits_{Q_{s1}} (R_sU_sP_su', U_sv')\,dx = \int\limits_{Q_{s1}} (U_sP_sf, U_sv)\,dx,$$

где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{C}^{N(s)}$, $C_0^\infty(\bigcup\limits_k Q_{sk}) = \{v \in C^\infty(0,d) : v(x) = 0$ при $x \in (0,d) \setminus \bigcup\limits_k Q_{sk}\}$. Тогда вектор-функция

$$U_sP_su \in W_2^{1,N(s)}(Q_{s1}) = \prod_{j=1}^{N(s)} W_2^1(Q_{s1})$$

является обобщенным решением системы $N(s)$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-\left(R_sU_sP_su'\right)'(x) = \left(U_sP_sf\right)(x), \qquad x \in Q_{s1}.$$

Поскольку $U_sP_sf \in L_2^{N(s)}(Q_{s1})$, то $R_sU_sP_su' \in W_2^{1,N(s)}(Q_{s1})$. По условию элементы матрицы $R_s(x)$ – бесконечно дифференцируемые функции, а

$det R_s(x) \neq 0$, $x \in \overline{Q}_{s1}$, в силу (1.6). Таким образом, $U_sP_su' \in W_2^{1,N(s)}(Q_{s1})$ и $U_sP_su \in W_2^{2,N(s)}(Q_{s1})$, т. е. $u \in W_2^2(Q_{sk})$, $k = 1,\ldots,N(s)$. □

Следствие 1.4.1. *Пусть выполняется неравенство* (1.6)*, а* $u \in \mathring{W}_2^1(0,d)$ *– обобщенное решение задачи* (1.13)*,* (1.14)*, где* $f \in L_2(0,d)$*. Тогда уравнение* (1.13) *удовлетворяется почти всюду на* $Q = (0,d)$*.*

Доказательство. Полагая в интегральном тождестве (1.18) $v \in C_0^\infty(0,d)$ и используя определение обобщенной производной в пространстве распределений $D'(0,d)$, получим

$$\langle -(R_Qu')',v\rangle = (f,v)_{L_2(0,d)}.$$

Поскольку $f \in L_2(0,d)$, а $v \in C_0^\infty(0,d)$ – произвольная функция, имеем

$$-(R_Qu')'(x) = f(x)$$

почти всюду на $(0,d)$ и $(R_Qu')' \in L_2(0,d)$, т. е. $R_Qu' \in W_2^1(0,d)$. □

Замечание 1.4.1. В силу теоремы 1.4.1 и следствия 1.4.1 область определения оператора $\mathcal{A}_R$ примет вид

$$D(\mathcal{A}_R) = \Big\{u \in \mathring{W}_2^1(0,d) : R_Qu' \in W_2^1(0,d), u \in W_2^2(Q_{sk}), s = 1, k = 1,\ldots,N+1, \text{ если } \theta = 1, \text{ и } s = 1,2, k = 1,\ldots,N(s), \text{ если } 0 < \theta < 1\Big\}. \quad (1.30)$$

1.5 Гладкость обобщенных решений первой краевой задачи на всем интервале Q при $\theta = 1$

Для формулировки результатов о гладкости обобщенного решения задачи (1.13), (1.14) на всем интервале $Q = (0,d)$ при $\theta = 1$ вначале докажем вспомогательные результаты.

Будем предполагать, что выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{N} |a_{-k}(k)| \neq 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{N} |a_k(N+1-k)| \neq 0. \quad (1.31)$$

Замечание 1.5.1. Из условия (1.31) вытекает, что $G_1^1(0) \neq 0$ или $G_{N+1}^2(1) \neq 0$.

Введем ограниченный оператор $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ с областью определения

$$D(A_R^0) = \left\{u \in W_2^2(0,d) : R_Q u' \in W_2^1(0,d), u(0) = u(d) = 0\right\},$$

действующий по формуле $A_R^0 u = \mathcal{A}_R u$ при $u \in D(A_R^0)$. Из (1.30) следует, что

$$D(A_R^0) = D(\mathcal{A}_R) \cap W_2^2(0,d). \tag{1.32}$$

Рассмотрим задачу (1.13), (1.14). В силу теоремы 1.3.1 операторное уравнение

$$\mathcal{A}_R u = f$$

имеет единственное решение u_f при любой правой части $f \in L_2(0,d)$. Из (1.32) следует, что $u_f \in D(A_R^0)$ в том и только том случае, когда

$$u_f \in W_2^2(0,d). \tag{1.33}$$

Лемма 1.5.1. *Пусть $\theta = 1$, и пусть выполнены условия* (1.6) *и* (1.31).

Если столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно независимы, то обобщенное решение u задачи (1.13), (1.14) *принадлежит пространству $W_2^2(0,d)$ тогда и только тогда, когда $u'(0+0) = u'(N+1-0) = 0$.*

Если же существуют такие $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, что $\alpha_1 G_1^1(0) + \alpha_2 G_{N+1}^2(1) = 0$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, т. е. столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно зависимы, то $u \in W_2^2(0,d)$ тогда и только тогда, когда $\alpha_2 u'(0+0) + \alpha_1 u'(N+1-0) = 0$.

Доказательство. 1. Рассмотрим случай, когда столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно независимы. В силу определения $D(\mathcal{A}_R)$, теоремы 1.4.1 и вложения $W_2^2(Q_{1k}) \subset C^1(\overline{Q}_{1k})$, $k = 1, \dots N+1$, на концах подынтервалов Q_{1k} определены значения $u'(x)$. Тогда можно переписать условие $u \in W_2^2(0,d)$ в виде

$$u'(k+0) = u'(k-0), \qquad k = 1, \dots, N. \tag{1.34}$$

С другой стороны, $u \in D(\mathcal{A}_R)$, следовательно,

$$(R_Q u')(k+0) = (R_Q u')(k-0), \qquad k = 1,...,N. \tag{1.35}$$

В силу (1.4), (1.5) и леммы 1.1.5 равенства (1.35) можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^{N} (-r_{i,j}^1(1)\psi_j + r_{i+1,j+1}^1(0)\varphi_j) = -r_{i+1,1}^1(0)\varphi_0 + r_{i,N+1}^1(1)\psi_{N+1}, \qquad i = 1,...,N, \tag{1.36}$$

где

$$\varphi_j = (U_1 u')_{j+1}(0+0), \qquad j = 0, \dots, N,$$
$$\psi_j = (U_1 u')_j(1-0), \qquad j = 1, \dots, N+1.$$

Так как $r^1_{i,j}(1) = r^1_{i+1,j+1}(0)$ в силу (1.5), то при выполнении (1.34) из (1.36) следует

$$\varphi_0 G^1_1(0) - \psi_{N+1} G^2_{N+1}(1) = 0. \tag{1.37}$$

В силу линейной независимости столбцов $G^1_1(0)$ и $G^2_{N+1}(1)$ мы получаем

$$u'(0+0) = \varphi_0 = 0, \tag{1.38}$$

$$u'(N+1-0) = \psi_{N+1} = 0. \tag{1.39}$$

Таким образом, из условия $u \in W^2_2(0,d)$ вытекают равенства (1.38) и (1.39). Обратно, из (1.36), (1.38), (1.39) и условия (1.6), обеспечивающего невырожденность матрицы $R_2(1)$, вытекают равенства (1.34), т. е. принадлежность решения u пространству $W^2_2(0,d)$.

2. Пусть теперь столбцы $G^1_1(0)$ и $G^2_{N+1}(1)$ линейно зависимы. В этом случае существуют такие $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, что $\alpha_1 G^1_1(0) + \alpha_2 G^2_{N+1}(1) = 0$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$. В силу (1.31), не ограничивая общности, мы можем предположить, что $G^2_{N+1}(1) \neq 0$. Тогда $\alpha_1 \neq 0$ и

$$G^1_1(0) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} G^2_{N+1}(1).$$

Следовательно, в силу (1.37) имеем

$$\Big(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\varphi_0 - \psi_{N+1}\Big) G^2_{N+1}(1) = 0,$$

т. е.

$$\alpha_2 \varphi_0 + \alpha_1 \psi_{N+1} = \alpha_2 u'(0+0) + \alpha_1 u'(N+1-0) = 0.$$

$\square$

Теорема 1.5.1. *Пусть $\theta = 1$, и пусть выполнены условия (1.6) и (1.31).*

Если столбцы $G^1_1(0)$ и $G^2_{N+1}(1)$ линейно независимы, то ограниченный оператор $A^0_R : W^2_2(0,d) \supset D(A^0_R) \to L_2(0,d)$ фредгольмов и $dim\mathcal{N}(A^0_R) = 0$, $codim\mathcal{R}(A^0_R) = 2$.

Если столбцы $G^1_1(0)$ и $G^2_{N+1}(1)$ линейно зависимы, то ограниченный оператор $A^0_R : W^2_2(0,d) \supset D(A^0_R) \to L_2(0,d)$ фредгольмов и $dim\mathcal{N}(A^0_R) = 0$, $codim\mathcal{R}(A^0_R) = 1$.

Доказательство. 1. В силу теоремы 1.3.1 уравнение (1.13) имеет единственное решение для любой $f \in L_2(0,d)$, т. е. $\mathcal{N}(\mathcal{A}_R) = \{0\}$. По определению оператор A_R^0 является сужением оператора $\mathcal{A}_R$ на $W_2^2(0,d)$. Поэтому $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$.

2. Предположим, что столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно независимы. Докажем, что оператор A_R^0 фредгольмов и $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 2$. В силу леммы 1.5.1 решение u_f операторного уравнения (1.13) принадлежит области определения $D(A_R^0) = D(\mathcal{A}_R) \cap W_2^2(0,d)$ тогда и только тогда, когда

$$u_f'(0+0) = 0, \tag{1.40}$$

$$u_f'(N+1-0) = 0. \tag{1.41}$$

Из неравенства (1.29) и вложения $W_2^2(Q_{1k}) \subset C^1(\overline{Q}_{1k})$ следует, что $u_f'(0+0)$ и $u_f'(N+1-0)$ являются линейными ограниченными функционалами на пространстве $L_2(0,d)$. Тогда в силу теоремы Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве существуют единственным образом определенные функции $g_1, g_2 \in L_2(0,d)$ такие, что

$$\begin{gathered} u_f'(0+0) = (f,g_1)_{L_2(0,d)}, \\ u_f'(N+1-0) = (f,g_2)_{L_2(0,d)}. \end{gathered}$$

Таким образом, равенства (1.40), (1.41) можно переписать в виде

$$(f,g_i)_{L_2(0,d)} = 0, \qquad i = 1,2.$$

Докажем, что функции g_1, g_2 линейно независимы. Пусть $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 = 0$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, т. е. $\alpha_1(f, g_1)_{L_2(0,d)} + \alpha_2(f, g_2)_{L_2(0,d)} = 0$ для любого $f \in L_2(0,d)$. Докажем, что тогда $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Для того чтобы установить справедливость последних равенств, достаточно показать, что существуют функции $f_1, f_2 \in L_2(0,d)$, обладающие свойством

$$(f_j,g_i)_{L_2(0,d)} = \delta_{ij}, \qquad i,j = 1,2,$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Не ограничивая общности, докажем, например, что существует функция $f_1 \in L_2(0,d)$ такая, что

$$\begin{gathered} (f_1,g_1)_{L_2(0,d)} = 1, \\ (f_1,g_2)_{L_2(0,d)} = 0. \end{gathered}$$

Другими словами, нужно построить функцию f_1, для которой

$$u'_{f_1}(0+0) := \widetilde{\varphi}_0 = 1, \qquad u'_{f_1}(N+1-0) := \widetilde{\psi}_{N+1} = 0. \tag{1.42}$$

Положим в (1.36)

$$\begin{aligned}&\varphi_0 = \widetilde{\varphi}_0 = 1,\\&\psi_1 = \psi_2 = \cdots = \psi_{N+1} = \widetilde{\psi}_{N+1} = 0.\end{aligned}$$

Тогда система уравнений (1.36) примет вид

$$\sum_{j=1}^{N} r^1_{i,j}(1)\varphi_j = -r^1_{i+1,1}(0). \tag{1.43}$$

В силу условия (1.6) определитель системы уравнений (1.43) не равен нулю. Поэтому существует единственное решение системы уравнений (1.43) $(\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$. Обозначим это решение через $(\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_N)$.

Остается доказать, что существует функция $f_1 \in L_2(0,d)$ такая, что решение u_{f_1} уравнения (1.13) удовлетворяет условиям (1.42) и

$$u'_{f_1}(j+0) = \widetilde{\varphi}_j, \qquad u'_{f_1}(j-0) = 0, \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Введем функцию

$$v(x) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{N} (x-j)\widetilde{\varphi}_j \xi(x-j), & x \in \displaystyle\bigcup_{j=0}^{N} \Big(j, j+\frac{1}{2}\Big),\\ 0, & x \in \displaystyle\bigcup_{j=1}^{N+1} \Big(j-\frac{1}{2}, j\Big),\end{cases}$$

где $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ – вещественнозначная функция, $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$, $\xi(x) = 1$, $x \in \left[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right]$, $supp\,\xi \subset \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, $\widetilde{\varphi}_0 = 1$, $\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_N$ удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (1.43).

По построению $v \in D(\mathcal{A}_R)$. Положим $f_1 := \mathcal{A}_R v$. Тогда, полагая $u_{f_1} := v$, получим равенства (1.42).

Таким образом, мы доказали, что в случае линейно независимых столбцов $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ оператор A_R^0 фредгольмов и $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

3. Предположим теперь, что столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно зависимы, т. е. существуют $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, такие, что $\alpha_1 G_1^1(0) + \alpha_2 G_{N+1}^2(1) = 0$. Докажем, что оператор A_R^0 фредгольмов и $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

В силу леммы 1.5.1 решение u_f операторного уравнения (1.13) принадлежит $D(A_R^0)$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha_2 u_f'(0+0) + \alpha_1 u_f'(N+1-0) = 0. \tag{1.44}$$

Поскольку $u_f'(0+0)$ и $u_f'(N+1-0)$ являются линейными ограниченными функционалами на пространстве $L_2(0,d)$, в силу теоремы Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве существует единственная функция $g \in L_2(0,d)$ такая, что

$$\alpha_2 u_f'(0+0) + \alpha_1 u_f'(N+1-0) = (f,g)_{L_2(0,d)}.$$

Таким образом, равенство (1.44) можно переписать в виде

$$(f,g)_{L_2(0,d)} = 0.$$

Остается доказать, что существует функция $f_0 \in L_2(0,d)$, удовлетворяющая равенству

$$(f_0,g)_{L_2(0,d)} = 1. \tag{1.45}$$

Не ограничивая общности, предположим, что $\alpha_1 \neq 0$. В силу (1.45) достаточно построить функцию $f_2 \in L_2(0,d)$, для которой выполняются равенства

$$u_{f_2}'(0+0) := \widetilde{\varphi}_0 = 0, \qquad u_{f_2}'(N+1-0) := \widetilde{\psi}_{N+1} = \frac{1}{\alpha_1}. \tag{1.46}$$

Положим в (1.36)

$$\begin{aligned}
&\varphi_0 = \widetilde{\varphi}_0 = 0,\\
&\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_N = 0,\\
&\psi_{N+1} = \widetilde{\psi}_{N+1} = \frac{1}{\alpha_1}.
\end{aligned}$$

Тогда система уравнений (1.36) примет вид

$$\sum_{j=1}^{N} r_{i,j}^1(1)\psi_j = -\frac{r_{i,N+1}^1(1)}{\alpha_1}. \tag{1.47}$$

В силу условия (1.6) определитель системы уравнений (1.47) не равен нулю. Поэтому в силу (1.31) существует единственное нетривиальное решение системы уравнений (1.47) $(\psi_1, \ldots, \psi_N)$. Обозначим это решение через $(\widetilde{\psi}_1, \ldots, \widetilde{\psi}_N)$.

Введем функцию

$$v(x) := \begin{cases} 0, & x \in \bigcup\limits_{j=0}^{N} \Big(j, j + \dfrac{1}{2}\Big), \\ \sum\limits_{j=1}^{N+1} (x - j)\widetilde{\psi}_j \xi(x - j), & x \in \bigcup\limits_{j=1}^{N+1} \Big(j - \dfrac{1}{2}, j\Big), \end{cases}$$

где $\widetilde{\psi}_{N+1} = \frac{1}{\alpha_1}$, $\widetilde{\psi}_1, \ldots, \widetilde{\psi}_N$ удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (1.47).

По построению $v \in D(\mathcal{A}_R)$. Положим $f_2 := \mathcal{A}_R v$. Тогда, полагая $u_{f_2} := v$, получим равенства (1.46).

Таким образом, мы доказали, что в случае линейно зависимых столбцов $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ оператор A_R^0 фредгольмов и $codim \mathcal{R}(A_R^0) = 1$. $\square$

Пример 1.5.1. Рассмотрим оператор $R_Q : L_2(0,3) \to L_2(0,3)$, где $Q = (0,3)$, $(Ru)(x) = a_0 u(x) + (e^{x+1} - 1)u(x+1) + e^{x-1}u(x-1)$, $a_0 \in \mathbb{R}$. Тогда $N = 2$, $\theta = 1$, а матрица $R_1(x)$ примет вид

$$R_1(x) = \begin{pmatrix} a_0 & e^{x+1} - 1 & 0 \\ e^x & a_0 & e^{x+2} - 1 \\ 0 & e^{x+1} & a_0 \end{pmatrix}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Предположим, что коэффициент $a_0 > 0$ удовлетворяет условиям

$$a_0 > 0, \qquad a_0^2 > \frac{(e^3 + e^2 - 1)^2 + (e^2 + e - 1)^2}{4}.$$

Тогда, матрица $R_1(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, удовлетворяет условию (1.6). Заметим, что столбцы

$$G_1^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad G_3^2(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^3 - 1 \end{pmatrix}$$

линейно независимы, а условие (1.31), очевидно, выполнено.

Таким образом, в силу первой части теоремы 1.5.1 оператор $A_R^0 : W_2^2(0,3) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,3)$ фредгольмов, $dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$, при этом $codim \mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

Пример 1.5.2. Рассмотрим оператор $R_Q : L_2(0,3) \to L_2(0,3)$, где $Q = (0,3)$, $(Ru)(x) = a_0 u(x) + (1 - e^{x-2})u(x+1) + u(x-1) + u(x+2)$, $a_0 \in \mathbb{R}$. Тогда $N = 2$,

$\theta = 1$, а матрица $R_1(x)$ имеет вид

$$R_1(x) = \begin{pmatrix} a_0 & 1 - e^{x-2} & 1 \\ 1 & a_0 & 1 - e^{x-1} \\ 0 & 1 & a_0 \end{pmatrix}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Нетрудно заметить, что условие (1.31) выполнено, а столбцы

$$G_1^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad G_3^2(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

линейно зависимы.

Будем предполагать, что коэффициент $a_0 > 0$ удовлетворяет неравенству

$$4a_0^3 - a_0(2 + (2 - e^{-1})^2) + (2 - e^{-1}) > 0.$$

Тогда матрица $R_1(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, удовлетворяет условию (1.6).

Следовательно, в силу второй части теоремы 1.5.1 оператор $A_R^0 : W_2^2(0{,}3) \supset D(A_R^0) \to L_2(0{,}3)$ фредгольмов, $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$ и $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

1.6 Гладкость обобщенных решений первой краевой задачи на всем интервале Q при $0 < \theta < 1$

Будем теперь предполагать, что выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{N} |a_{-k}(k)| \neq 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{N} |a_k(N + \theta - k)| \neq 0. \tag{1.48}$$

Замечание 1.6.1. Из условия (1.48) вытекает, что $G_1^1(0) \neq 0$ или $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$.

Обратимся к введенному в параграфе 1.5 оператору A_R^0. Из (1.32) следует, что обобщенное решение u_f задачи (1.13), (1.14) принадлежит $D(A_R^0)$ в том и только том случае, когда $u_f \in W_2^2(0{,}d)$.

Лемма 1.6.1. *Пусть* $0 < \theta < 1$, *и пусть выполнены условия* (1.6) *и* (1.48).

Если $G_1^1(0) \neq 0$ *и* $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$, *то обобщенное решение и задачи* (1.13), (1.14) *принадлежит пространству* $W_2^2(0{,}d)$ *тогда и только тогда, когда* $u'(0+0) = u'(N+\theta-0) = 0$.

Если $G_1^1(0) = 0$ *или* $G_{N+1}^2(\theta) = 0$, *то обобщенное решение и задачи* (1.13), (1.14) *принадлежит пространству* $W_2^2(0{,}d)$ *тогда и только тогда, когда* $u'(0+0) = 0$ *в случае* $G_1^1(0) \neq 0$ *и* $u'(N+\theta-0) = 0$ *в случае* $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$.

Доказательство. Аналогично части 1 доказательства леммы 1.5.1 можно переписать условие (1.33) в виде

$$u'(k+0) = u'(k-0), \qquad k = 1,\ldots,N, \tag{1.49}$$

$$u'(k-1+\theta+0) = u'(k-1+\theta-0), \qquad k = 1,\ldots,N. \tag{1.50}$$

С другой стороны, $u \in D(\mathcal{A}_R)$. Тогда из (1.30) следует

$$(R_Q u')(k+0) = (R_Q u')(k-0), \qquad k = 1,\ldots,N, \tag{1.51}$$

$$(R_Q u')(k-1+\theta+0) = (R_Q u')(k-1+\theta-0), \qquad k = 1,\ldots,N. \tag{1.52}$$

Рассмотрим, например, соотношения (1.52). В силу (1.4), (1.5) и леммы 1.1.5 эти соотношения можно представить в виде

$$\sum_{j=1}^{N} r^1_{i,j}(\theta)(\varphi_{2,j} - \psi_{2,j}) = r^1_{i,N+1}(\theta)\psi_{2,N+1}, \qquad i = 1,\ldots,N. \tag{1.53}$$

где

$$\varphi_{2,j} = (U_2 P_2 u')_j(\theta+0), \qquad j = 1,\ldots,N,$$
$$\psi_{2,j} = (U_1 P_1 u')_j(\theta-0), \qquad j = 1,\ldots,N+1.$$

Поскольку $det R_2(\theta) \neq 0$ (см. (1.6)), то при условии выполнения равенств (1.50) система (1.53) имеет единственное решение $\varphi_{2,j} - \psi_{2,j} = 0$, $j = 1,\ldots,N$, если

$$\psi_{2,N+1} G^2_{N+1}(\theta) = 0.$$

Пусть, например, выполнено второе из условий (1.48). Тогда $G^2_{N+1}(\theta) \neq 0$. Следовательно,

$$u'(N+\theta-0) = \psi_{2,N+1} = 0.$$

Аналогичным образом доказывается, что при условии выполнения (1.49) вытекающая из равенств (1.51) система

$$r^1_{i+1,1}(0)\varphi_{1,0} = \sum_{j=1}^{N}(r^2_{i,j}(1)\psi_{1,j} - r^1_{i+1,j+1}(0)\varphi_{1,j}), \qquad i = 1,\ldots,N,$$

имеет единственное решение $\psi_{1,j} - \varphi_{1,j} = 0$, $j = 1,\ldots,N$, если $G^1_1(0) \neq 0$ и

$$u'(0+0) = \varphi_{1,0} = 0,$$

где

$$\varphi_{1,j} = (U_1 P_1 v')_{j+1}(0+0), \qquad j = 0, \dots, N,$$
$$\psi_{1,j} = (U_2 P_2 v')_j(1-0), \qquad j = 1, \dots, N.$$

$\square$

Теорема 1.6.1. *Пусть* $0 < \theta < 1$, *и пусть выполнены условия* (1.6) *и* (1.48).

Если $G_1^1(0) \neq 0$ *и* $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$, *то ограниченный оператор* $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов и* $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$, $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

Если $G_1^1(0) = 0$ *или* $G_{N+1}^2(\theta) = 0$, *то ограниченный оператор* $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов и* $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$, $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

Доказательство. 1. Аналогично доказательству теоремы 1.5.1 легко показать, что $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$.

2. Предположим, что $G_1^1(0) \neq 0$ и $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$. В силу леммы 1.6.1 решение u_f операторного уравнения (1.13) принадлежит пространству $W_2^2(0,d)$ тогда и только тогда, когда

$$u_f'(0+0) = 0, \tag{1.54}$$

$$u_f'(N+\theta-0) = 0. \tag{1.55}$$

Из неравенства (1.29) и вложения $W_2^2(Q_{sk}) \subset C^1(\overline{Q}_{sk})$ следует, что $u_f'(0+0)$ и $u_f'(N+\theta-0)$ являются линейными ограниченными функционалами на пространстве $L_2(0,d)$. Тогда в силу теоремы Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве существуют единственным образом определенные функции $g_1, g_2 \in L_2(0,d)$ такие, что

$$u_f'(0+0) = (f,g_1)_{L_2(0,d)},$$
$$u_f'(N+\theta-0) = (f,g_2)_{L_2(0,d)}.$$

Таким образом, равенства (1.54), (1.55) можно переписать в виде

$$(f,g_i)_{L_2(0,d)} = 0, \qquad i = 1,2.$$

Остается доказать, что функции g_1, g_2 линейно независимы. Для этого достаточно построить функции $f_1, f_2 \in L_2(0,d)$, для которых

$$(f_j,g_i)_{L_2(0,d)} = \delta_{ij}, \qquad i,j = 1,2.$$

Докажем, например, существование функции $f_2 \in L_2(0,d)$ такой, что

$$(f_2,g_1)_{L_2(0,d)} = 0,$$
$$(f_2,g_2)_{L_2(0,d)} = 1.$$

Другими словами, достаточно построить функцию f_2, удовлетворяющую равенствам

$$u'_{f_2}(0+0) := \widetilde{\varphi}_{1,0} = 0, \qquad u'_{f_2}(N+\theta-0) := \widetilde{\psi}_{2,N+1} = 1. \tag{1.56}$$

В силу (1.4), (1.5) и леммы 1.1.5 соотношения (1.51), (1.52) можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^{N} r^1_{i,j}(1)(\varphi_{1,j} - \psi_{1,j}) = -r^1_{i+1,1}(0)\varphi_{1,0}, \qquad i = 1,\ldots,N, \tag{1.57}$$

$$\sum_{j=1}^{N} r^1_{i,j}(\theta)(\varphi_{2,j} - \psi_{2,j}) = r^1_{i,N+1}(\theta)\psi_{2,N+1}, \qquad i = 1,\ldots,N, \tag{1.58}$$

соответственно.

Здесь

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,j} &= (U_1P_1u'_{f_2})_j(0+0), \qquad && j = 0,\ldots,N,\\
\psi_{1,j} &= (U_2P_2u'_{f_2})_j(1-0), && j = 1,\ldots,N,\\
\varphi_{2,j} &= (U_2P_2u'_{f_2})_j(\theta+0), && j = 1,\ldots,N,\\
\psi_{2,j} &= (U_1P_1u'_{f_2})_j(\theta-0), && j = 1,\ldots,N+1.
\end{aligned}$$

Положим в (1.58)

$$\varphi_{2,1},\ldots,\varphi_{2,N} = 0,$$
$$\psi_{2,N+1} = \widetilde{\psi}_{2,N+1} = 1.$$

Тогда система уравнений (1.58) примет вид

$$-\sum_{j=1}^{N} r^1_{i,j}(\theta)\psi_{2,j} = r^1_{i,N+1}(\theta). \tag{1.59}$$

В силу условия (1.6) определитель системы уравнений (1.59) отличен от нуля. Поэтому в силу (1.48) существует единственное нетривиальное решение системы уравнений (1.59) $(\psi_{2,1},\ldots,\psi_{2,N})$. Обозначим это решение через $(\widetilde{\psi}_{2,1},\ldots,\widetilde{\psi}_{2,N})$.

Остается построить функцию $f_2 \in L_2(0,d)$ такую, что решение u_{f_2} уравнения (1.13) удовлетворяет условиям (1.56), при этом

$$u'_{f_2}(\theta + j - 1 + 0) = 0, \qquad u'_{f_2}(\theta + j - 1 - 0) = \widetilde{\psi}_{2,j}, \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Полагая $x' = \theta + j - 1$, введем функцию

$$v(x) := \begin{cases} 0, & x \in (0,d) \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{N} \Big(x' - \sigma, x'\Big), \\ \sum\limits_{j=1}^{N+1} (x - x')\widetilde{\psi}_{2,j}\eta(x - x'), & x \in \bigcup\limits_{j=1}^{N} \Big(x' - \sigma, x'\Big). \end{cases}$$

Здесь $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ – вещественнозначная функция, $0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1$, $\eta(x) = 1$, $x \in \left[-\frac{\sigma}{3}, \frac{\sigma}{3}\right]$, $supp\, \eta \subset \left[-\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}\right]$, $\widetilde{\psi}_{2,N+1} = 1$, $\widetilde{\psi}_{2,1}, \ldots, \widetilde{\psi}_{2,N}$ удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (1.59), $0 < 2\sigma < min\{\theta, 1 - \theta\}$.

Очевидно, в этом случае числа

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_{1,j} &= 0, \qquad j = 0, \ldots, N, \\ \widetilde{\psi}_{1,j} &= 0, \qquad j = 1, \ldots, N, \end{aligned}$$

удовлетворяют системе уравнений (1.57).

Таким образом, по построению $v \in D(\mathcal{A}_R)$. Положим $f_2 := \mathcal{A}_R v$. Тогда, полагая $u_{f_2} := v$, получим равенства

$$(f_2, g_i)_{L_2(0,d)} = \delta_{i,2}, \qquad i = 1,2.$$

Аналогично можно построить функцию $f_1 \in L_2(0,d)$ такую, что

$$(f_1, g_i)_{L_2(0,d)} = \delta_{i,1}, \qquad i = 1,2.$$

Таким образом, оператор A_R^0 фредгольмов и $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

3. Если $G_1^1(0) = 0$ или $G_{N+1}^2(\theta) = 0$, доказательство того, что оператор A_R^0 фредгольмов и $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$, проводится так же, как в части 2. Отличие заключается лишь в том, что в случае $G_1^1(0) \neq 0$, $G_{N+1}^2(\theta) = 0$ рассматривается система уравнений (1.57), а в случае $G_1^1(0) = 0$, $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$ рассматривается система уравнений (1.58), а не две системы (1.57), (1.58) одновременно. □

Пример 1.6.1. Рассмотрим оператор $R_Q : L_2(0, \frac{11}{4}) \to L_2(0,\frac{11}{4})$, где $Q = (0, \frac{11}{4})$, $(Ru)(x) = a_0 u(x) + e^{x-1}u(x + 1) + e^{x-2}u(x - 1)$, $a_0 \in \mathbb{R}$. Следовательно, $N = 2$,

$\theta = \frac{3}{4}$, при этом

$$R_1(x) = \begin{pmatrix} a_0 & e^{x-1} & 0 \\ e^{x-1} & a_0 & e^x \\ 0 & e^x & a_0 \end{pmatrix}, \qquad x \in \left[0, \frac{3}{4}\right],$$

$$R_2(x) = \begin{pmatrix} a_0 & e^{x-1} \\ e^{x-1} & a_0 \end{pmatrix}, \qquad x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right].$$

Матрицы $R_1(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}$ и $R_2(x)$ при $\frac{3}{4} \leqslant x \leqslant 1$ удовлетворяют условию (1.6) при

$$a_0 > 0, \qquad a_0^2 > e^{-\frac{1}{2}} + e^{\frac{3}{2}}. \tag{1.60}$$

Будем предполагать, что условие (1.60) выполнено.

Очевидно, столбцы

$$G_1^1(0) = \begin{pmatrix} e^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad G_3^2(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\frac{3}{4}} \end{pmatrix}$$

ненулевые, т. е. выполнено условие (1.48).

Таким образом, в силу теоремы 1.6.1 оператор $A_R^0 : W_2^2(0, \frac{11}{4}) \supset D(A_R^0) \to L_2(0, \frac{11}{4})$ фредгольмов, $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$ и $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

Глава 2. Вторая краевая задача для дифференциально-разностного уравнения на конечном интервале

Настоящая глава посвящена исследованию разрешимости и гладкости обобщенных решений второй краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами на конечном интервале. Обозначения и свойства разностных операторов на интервале Q в данной главе аналогичны Главе 1. Параграф 2.1 посвящен постановке второй краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения и вопросу существования обобщенного решения. В параграфе 2.2 исследуется гладкость обобщенных решений на подынтервалах. Параграфы 2.3 и 2.4 посвящены исследованию гладкости обобщенного решения на всем интервале Q. Основные результаты этой главы опубликованы в работах [49–51].

2.1 Постановка второй краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения и ее разрешимость

Рассмотрим уравнение

$$-\left(R_Q u'\right)' = f(x), \qquad x \in Q, \tag{2.1}$$

с краевыми условиями

$$(R_Q u')(0) = (R_Q u')(d) = 0, \tag{2.2}$$

где $Q = (0,d)$, $d = N + \theta$, $N \in \mathbb{N}$, $0 < \theta \leqslant 1$, $f \in L_2(Q)$ – комплекснозначная функция.

Как и в Главе 1, будем предполагать, что дифференциально-разностное уравнение (2.1) удовлетворяет условию

$$Re(R_s Y,Y)_{\mathbb{C}^{N(s)}} \geqslant c_1 \|Y\|^2_{\mathbb{C}^{N(s)}} \tag{2.3}$$

для всех $x \in \overline{Q}_{s1}$, s и $Y \in \mathbb{C}^{N(s)}$, где $s = 1$, если $\theta = 1$, и $s = 1, 2$, если $0 < \theta < 1$; $c_1 > 0$ не зависит от x и Y.

Определение 2.1.1. Краевую задачу (2.1), (2.2) будем называть второй краевой задачей для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения.

Введем в $W_2^1(Q) \times W_2^1(Q)$ полуторалинейную форму $b_R(u,v)$ по формуле

$$b_R(u,v) = (R_Q u', v')_{L_2(Q)}.$$

Лемма 2.1.1. *Существует постоянная $c_2 > 0$ такая, что выполнено неравенство*

$$|b_R(u,v)| \leqslant c_2 \|u\|_{W_2^1(Q)} \|v\|_{W_2^1(Q)}, \qquad u,v \in W_2^1(Q),$$

где $c_2 > 0$ не зависит от u и v. При этом для каждого $c_4 > 0$ существует $c_3 > 0$ такое, что для любой функции $u \in W_2^1(Q)$ выполнено неравенство типа Гординга

$$Re\ b_R(u,u) + c_4 \|u\|^2_{L_2(Q)} \geqslant c_3 \|u\|^2_{W_2^1(Q)}.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.3.1.

В силу леммы 2.1.1 полуторалинейная форма $b_R(u,v)$, $u,v \in W_2^1(Q)$, является $W_2^1(Q)$ – коэрцитивной, при этом для любого $\lambda_0 > 0$ существует $\alpha > 0$ такое, что неравенство (1.12) выполняется при всех $u \in W_2^1(Q)$.

Дадим теперь определение обобщенного решения задачи (2.1), (2.2), предполагая, что $f \in L_2(Q)$.

Определение 2.1.2. Функцию $u \in W_2^1(Q)$ будем называть обобщенным решением задачи (2.1), (2.2), если для всех $v \in W_2^1(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$b_R(u,v) = (f,v)_{L_2(Q)}. \tag{2.4}$$

Из параграфа 1.2 (см. Гл. 1) следует, что форму $b_R(u,v)$ можно представить в виде

$$b_R(u,v) = \langle A_R u, v \rangle, \qquad u,v \in W_2^1(Q), \tag{2.5}$$

где $A_R : W_2^1(Q) \to (W_2^1(Q))'$ – линейный ограниченный оператор. Таким образом, можно дать следующее определение обобщенного решения задачи (2.1), (2.2), эквивалентное определению 2.1.2.

Определение 2.1.3. Функцию $u \in W_2^1(Q)$ будем называть обобщенным решением задачи (2.1), (2.2), если

$$A_R u = f. \tag{2.6}$$

Теорема 2.1.1. *Если уравнение* (2.1) *удовлетворяет условию сильной эллиптичности* (2.3), *то вторая краевая задача* (2.1), (2.2) *разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\int_0^d f(x)dx = 0,$$

при этом существует единственное обобщенное решение $u \in W_2^1(Q)$ *задачи* (2.1), (2.2), *удовлетворяющее условию*

$$\int_0^d u(x)dx = 0.$$

Доказательство. 1. Рассмотрим операторное уравнение

$$(A_R + \lambda_0 I)u = f, \tag{2.7}$$

где $Re\ \lambda_0 > 0$.

Введем неограниченный оператор $\mathcal{A}_R : L_2(Q) \supset D(\mathcal{A}_R) \to L_2(Q)$ с областью определения

$$D(\mathcal{A}_R) = \left\{ u \in W_2^1(Q) : A_R u \in L_2(Q) \right\},$$

действующий по формуле

$$\mathcal{A}_R u = A_R u, \qquad u \in D(\mathcal{A}_R).$$

В силу $W_2^1(Q)$ – коэрцитивности формы $b_R(u,v)$, следствия 1.2.1 и непрерывности вложения $L_2(Q)$ в $\left(W_2^1(Q)\right)'$ существует ограниченный обратный оператор $(\mathcal{A}_R + \lambda_0 I)^{-1} : L_2(Q) \to L_2(Q)$, при этом

$$\|u\|_{W_2^1(Q)} \leqslant c_5 \|f\|_{L_2(Q)}. \tag{2.8}$$

Таким образом, спектр оператора $\mathcal{A}_R$ принадлежит множеству $Re\lambda \geqslant 0$. Кроме того, в силу компактности вложения $W_2^1(Q)$ в $L_2(Q)$ и оценки (2.8) оператор $(\mathcal{A}_R + \lambda_0 I)^{-1} : L_2(Q) \to L_2(Q)$ компактный. Поэтому в силу теоремы 6.29 из [16, гл. III, §6] спектр $\sigma(\mathcal{A}_R)$ состоит из изолированных собственных значений конечной кратности, а оператор $R(\lambda, \mathcal{A}_R) : L_2(Q) \to L_2(Q)$ компактный при $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_R)$.

2. Определим сопряженную форму

$$b_R^*(u,v) = \overline{b_R(v,u)}, \qquad u,v \in W_2^1(Q).$$

Аналогично (2.5) мы получаем

$$b_R^*(u,v) = \left\langle \widetilde{A}_R u, v \right\rangle, \qquad u,v \in W_2^1(Q), \tag{2.9}$$

где $\widetilde{A}_R : W_2^1(Q) \to \big(W_2^1(Q)\big)'$ – линейный ограниченный оператор.

Введем неограниченный оператор $\widetilde{\mathcal{A}}_R : L_2(Q) \supset D(\widetilde{\mathcal{A}}_R) \to L_2(Q)$ с областью определения

$$D(\widetilde{\mathcal{A}}_R) = \left\{ u \in W_2^1(Q) : \widetilde{A}_R u \in L_2(Q) \right\},$$

действующий по формуле

$$\widetilde{\mathcal{A}}_R u = \widetilde{A}_R u, \qquad u \in D(\widetilde{\mathcal{A}}_R).$$

Из определений операторов $\mathcal{A}_R$ и $\widetilde{\mathcal{A}}_R$ следует, что

$$(\mathcal{A}_R u, v)_{L_2(Q)} = b_R(u,v) = \overline{b_R^*(v,u)} = \left(u, \widetilde{\mathcal{A}}_R v\right)_{L_2(Q)}, \qquad u \in D(\mathcal{A}_R), v \in D(\widetilde{\mathcal{A}}_R).$$

Следовательно, $\widetilde{\mathcal{A}}_R \subset \mathcal{A}_R^*$ и $\mathcal{A}_R \subset \left(\widetilde{\mathcal{A}}_R\right)^*$.

Аналогично части 1 доказательства можно показать, что спектр $\sigma(\widetilde{\mathcal{A}}_R)$ состоит из изолированных собственных значений конечной кратности. Таким образом, из леммы 13 из [8, гл. XIV, §6] следует, что $\widetilde{\mathcal{A}}_R = \mathcal{A}_R^*$.

3. Докажем, что оператор $\mathcal{A}_R$ фредгольмов и $ind\mathcal{A}_R = 0$. Пусть $Re\,\lambda_0 < 0$. Тогда $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A}_R)$. Как показано выше, оператор $(\mathcal{A}_R - \lambda_0 I)^{-1} : L_2(Q) \to L_2(Q)$ – компактный. Поэтому оператор $\mathcal{A}_R(\mathcal{A}_R - \lambda_0 I)^{-1} = I + \lambda_0(\mathcal{A}_R - \lambda_0 I)^{-1}$ является каноническим фредгольмовым оператором с нулевым индексом. Следовательно, оператор $\mathcal{A}_R$ фредгольмов и $ind\mathcal{A}_R = 0$.

4. Если $v \in \mathcal{N}(\mathcal{A}_R)$ и $w \in \mathcal{N}(\mathcal{A}_R^*)$, то в силу (1.17) при $u \in W_2^1(Q)$, (2.5) и (2.9) $v'(x) = w'(x) = 0$ почти всюду на Q. Следовательно, $v(x) \equiv const$ и $w(x) \equiv const$ почти всюду на Q. Для существования решения задачи (2.1), (2.2) необходимо и достаточно, чтобы $(f,w)_{L_2(Q)} = 0$, при этом существует единственное обобщенное решение $u \in W_2^1(Q)$ задачи (2.1), (2.2), удовлетворяющее условию $\int\limits_0^d u(x)dx = 0$. □

Из доказательства теоремы 2.1.1 вытекает

Следствие 2.1.1. *Пусть уравнение* (2.1) *удовлетворяет условию сильной эллиптичности. Тогда оператор* $\mathcal{A}_R$ *фредгольмов,* $ind\mathcal{A}_R = 0$, $dim\mathcal{N}(\mathcal{A}_R) = 1$ *и* $1 \in \mathcal{N}(\mathcal{A}_R)$.

2.2 Гладкость обобщенных решений второй краевой задачи на подынтервалах

Докажем, что гладкость обобщенных решений задачи (2.1), (2.2) сохраняется на подынтервалах Q_{sk}, $s = 1$, $k = 1,...,N+1$, если $\theta = 1$, и $s = 1,2$, $k = 1,...,N(s)$, если $0 < \theta < 1$.

Доказательство следующей теоремы строится аналогичным образом, что и доказательство теоремы 1.4.1 для случая первой краевой задачи. Однако, для полноты исследования краевой задачи (2.1), (2.2) приведем это доказательство.

Теорема 2.2.1. *Пусть выполняется условие сильной эллиптичности* (2.3), $u \in W_2^1(0,d)$ *– решение операторного уравнения* (2.7) *с* $Re\,\lambda_0 > 0$ *и* $f \in L_2(0,d)$. *Тогда* $u \in W_2^2(Q_{sk})$, $s = 1$, $k = 1,...,N+1$, *если* $\theta = 1$, *и* $s = 1,2$, $k = 1,...,N(s)$, *если* $0 < \theta < 1$. *При этом справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_2^2(Q_{sk})} \leqslant c_9 \|f\|_{L_2(0,d)}, \tag{2.10}$$

где $c_9 > 0$ *не зависит от* f.

Доказательство. Подставляя $b_R(u,v) = (R_Q u', v')_{L_2(0,d)}$ в интегральное тождество

$$b_R(u,v) + \lambda_0 (u,v)_{L_2(0,d)} = (f,v)_{L_2(0,d)},$$

получим

$$\int\limits_0^d R_Q u' \overline{v}' dx = \int\limits_0^d f_0 \overline{v} dx, \tag{2.11}$$

где $f_0 = f - \lambda_0 u$.

В силу (2.8)

$$\|f_0\|_{L_2(0,d)} \leqslant c_6 \|f\|_{L_2(0,d)}. \tag{2.12}$$

Пусть s – фиксированное число. В интегральном тождестве (2.11) предположим, что $v \in C_0^\infty(\bigcup\limits_k Q_{sk})$, а в случае $0 < \theta < 1$ положим дополнительно, что

$v(x) = 0$ при $x \notin \bigcup\limits_k Q_{sk}$. Из (1.4) и леммы 1.1.5 вытекает, что

$$\int\limits_{Q_{s1}} (R_s U_s P_s u', U_s v')\,dx = \int\limits_{Q_{s1}} (U_s P_s f_0, U_s v)\,dx,$$

где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{C}^{N(s)}$. Следовательно, вектор-функция $U_s P_s u \in W_2^{1,N(s)}(Q_{s1})$ является обобщенным решением системы $N(s)$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-\left(R_s U_s P_s u'\right)'(x) = \left(U_s P_s f_0\right)(x), \qquad x \in Q_{s1}, \tag{2.13}$$

где $W_2^{1,N(s)}(Q_{s1}) = \prod\limits_{j=1}^{N(s)} W_2^1(Q_{s1})$.

Поскольку $U_s P_s f_0 \in L_2^{N(s)}(Q_{s1})$, то $R_s U_s P_s u' \in W_2^{1,N(s)}(Q_{s1})$. Из неравенства (2.3) следует, что $det R_s(x) \neq 0$, $x \in \overline{Q}_{s1}$, при этом по условию элементы матрицы $R_s(x)$ – бесконечно дифференцируемые функции. Таким образом, $U_s P_s u' \in W_2^{1,N(s)}(Q_{s1})$ и $U_s P_s u \in W_2^{2,N(s)}(Q_{s1})$, т. е. $u \in W_2^2(Q_{sk})$, $k = 1,\ldots,N(s)$.

Применяя формулу Лейбница к левой части равенства (2.13), имеем

$$R_s(x) U_s P_s u''(x) = F(x), \qquad x \in Q_{s1}, \tag{2.14}$$

где $F(x) = U_s P_s f_0(x) - R_s'(x) U_s P_s u'(x) \in L_2^{N(s)}(Q_{s1})$.

Из неравенств (2.12) и (2.8) следует, что

$$\|F\|_{L_2^{N(s)}(Q_{s1})} \leqslant c_7 \|f\|_{L_2(0,d)}. \tag{2.15}$$

Поскольку $det R_s(x) \neq 0$, $x \in \overline{Q}_{s1}$, из (2.14) и (2.15) следует, что

$$\|u''\|_{L_2(Q_{sk})} \leqslant c_8 \|f\|_{L_2(0,d)}. \tag{2.16}$$

Наконец, из неравенств (2.16) и (2.8) вытекает оценка (2.10). □

Замечание 2.2.1. Из теоремы 2.2.1 следует, что обобщенное решение $u(x)$ задачи (2.1), (2.2) также обладает соответствующей гладкостью на подынтервалах Q_{sk}. Однако, поскольку в силу теоремы 2.1.1 это решение не является единственным, то оценка (2.10) уже не имеет места. Таким образом, мы получаем следующий результат.

Следствие 2.2.1. *Пусть выполняется условие сильной эллиптичности* (2.3), *а* $u \in W_2^1(0,d)$ *– решение операторного уравнения* (2.6), *т. е. функция* u

является обобщенным решением задачи (2.1), (2.2), *где* $f \in L_2(0,d)$. *Тогда* $u \in W_2^2(Q_{sk})$, $s = 1$, $k = 1,\ldots,N+1$, *если* $\theta = 1$, *и* $s = 1,2$, $k = 1,\ldots,N(s)$, *если* $0 < \theta < 1$.

Докажем теперь, что, если $u(x)$ – обобщенное решение задачи (2.1), (2.2), то уравнение (2.1) выполняется почти всюду на $Q = (0,d)$, и справедливы краевые условия (2.2).

Следствие 2.2.2. *Пусть имеет место неравенство* (2.3), *а* $u \in W_2^1(0,d)$ – *обобщенное решение задачи* (2.1), (2.2), *где* $f \in L_2(0,d)$. *Тогда* $R_Q u' \in W_2^1(0,d)$, *уравнение* (2.1) *удовлетворяется почти всюду на* $(0,d)$, *при этом выполняются краевые условия* (2.2).

Доказательство. 1. Полагая, что в интегральном тождестве (2.4) $v \in C_0^\infty(0,d)$, и используя определение обобщенной производной в пространстве распределений $D'(0,d)$, получим

$$\langle -(R_Q u')', v \rangle = (f,v)_{L_2(0,d)}.$$

Поскольку $f \in L_2(0,d)$, а $v \in C_0^\infty(0,d)$ – произвольная функция, имеем

$$-(R_Q u')'(x) = f(x) \tag{2.17}$$

почти всюду на $(0,d)$ и $(R_Q u')' \in L_2(0,d)$, т. е.

$$R_Q u' \in W_2^1(0,d). \tag{2.18}$$

2. Положим теперь, что в интегральном тождестве (2.4) $v \in W_2^1(0,d)$ – произвольная функция. Из (2.18) следует, что $R_Q u' \in C[0,d]$. Тогда, интегрируя по частям левую часть равенства (2.4), получим

$$-\int\limits_0^d (R_Q u')' \overline{v} dx + (R_Q v')(d)\overline{v}(d) - (R_Q v')(0)\overline{v}(0) = \int\limits_0^d f \overline{v} dx.$$

Отсюда и из (2.17) вытекает равенство

$$(R_Q u')(d)\overline{v}(d) - (R_Q u')(0)\overline{v}(0) = 0. \tag{2.19}$$

Поскольку $v \in W_2^1(0,d)$ – произвольная функция, тождество (2.19) влечет за собой выполнение равенств

$$(R_Q u')(0) = (R_Q u')(d) = 0.$$

$\square$

Замечание 2.2.2. Из следствий 2.2.1, 2.2.2 вытекает, что

$$
\begin{aligned}
D(\mathcal{A}_R) = \{&u \in W_2^1(0,d) : R_Q u' \in W_2^1(0,d), (R_Q u')(0) = (R_Q u')(d) = 0,\\
&u \in W_2^2(Q_{sk}), s = 1, k = 1, \dots, N+1, \text{ если } \theta = 1,\\
&\text{и } s = 1,2, k = 1, \dots, N(s), \text{ если } 0 < \theta < 1\}.
\end{aligned} \tag{2.20}
$$

2.3 Гладкость обобщенных решений второй краевой задачи на всем интервале Q при $\theta = 1$

Для формулировки результата о гладкости обобщенных решений второй краевой задачи (2.1), (2.2) докажем вначале вспомогательные результаты, а перед этим введем некоторые обозначения.

Рассмотрим блочную матрицу $\mathbf{R}_1$ порядка $(N+2) \times (2N+2)$ вида

$$
\mathbf{R}_1 = \left(\widetilde{R}_1 | \widetilde{R}_2\right),
$$

где $\widetilde{R}_1$, $\widetilde{R}_2$ – матрицы порядка $(N+2) \times (N+1)$, которые имеют вид

$$
\widetilde{R}_1 = \begin{pmatrix} R_1(0) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ R_1(1) \end{pmatrix},
$$

при этом 0 обозначает нулевую строку длины $N+1$.

Другими словами,

$$
\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix}
a_0(0) & \dots & a_N(0) & 0 & \dots & 0 \\
a_{-1}(1) & \dots & a_{N-1}(1) & a_0(1) & \dots & a_N(1) \\
a_{-2}(2) & \dots & a_{N-2}(2) & a_{-1}(2) & \dots & a_{N-1}(2) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{-N}(N) & \dots & a_0(N) & a_{-N+1}(N) & \dots & a_1(N) \\
0 & \dots & 0 & a_{-N}(N+1) & \dots & a_0(N+1)
\end{pmatrix}.
$$

Обозначим через $\mathbf{R}_1^1$ ($\mathbf{R}_1^2$) матрицу порядка $(N+2) \times (2N+1)$, полученную из матрицы $\mathbf{R}_1$ вычеркиванием первого (последнего) столбца соответственно, а через $\mathbf{R}_1^0$ матрицу порядка $(N+2) \times 2N$, полученную из $\mathbf{R}_1$ вычеркиванием первого и последнего столбцов.

Замечание 2.3.1. Первые $N+1$ столбцов матрицы $\mathbf{R}_1$ используются для описания линейных комбинаций правых производных решения в точках $0,1,\ldots,N$, а последние $N+1$ столбцов матрицы $\mathbf{R}_1$ – для описания линейных комбинаций левых производных решения в точках $1,2,\ldots,N+1$.

Первая строка матрицы $\mathbf{R}_1$ задает линейную комбинацию значений правых производных в точках $0,1,\ldots,N$, соответствующую краевому условию $(R_Q u')(0) = 0$, а последняя строка этой матрицы задает линейную комбинацию значений левых производных в точках $1,2,\ldots,N+1$, соответствующую краевому условию $(R_Q u')(d) = 0$ (см. (2.43)).

Строки матрицы $\mathbf{R}_1$ с номерами $2,\ldots,N$ задают равенства $(R_Q u')(k+0) = (R_Q u')(k-0)$, $k=1,\ldots,N$, вытекающие из уравнения (2.1) и условия $f \in L_2(0,d)$ (см. (2.36)).

Матрицы $\mathbf{R}_1^1$, $\mathbf{R}_1^2$ и $\mathbf{R}_1^0$ используются для подсчета числа линейно независимых функций, которым должна быть ортогональна правая часть уравнения (2.1), чтобы обеспечить выполнение равенств $u'(k+0) = u'(k-0)$, $k=1,\ldots,N$, т. е. гладкость обобщенных решений на всем интервале.

Будем предполагать далее, что выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{N} (|a_k(0)| + |a_{-k}(N+1)|) \neq 0. \tag{2.21}$$

Замечание 2.3.2. Из условий (2.3), (2.21) следует, что рассматриваемое дифференциально-разностное уравнение (2.1) является уравнением нейтрального типа в точке $x=0+0$ или в точке $x=N+1-0$.

Действительно, из (2.3) следует, что

$$a_0(0) \neq 0, \tag{2.22}$$

$$a_0(N+1) \neq 0. \tag{2.23}$$

Из (2.21) следует существование числа m, $1 \leqslant m \leqslant N$, такого, что либо

$$a_m(0) \neq 0, \tag{2.24}$$

либо

$$a_{-m}(N+1) \neq 0. \tag{2.25}$$

Пусть, например, выполнено неравенство (2.24). Обозначим через M, $m \leqslant M \leqslant N$, наибольшее число такое, что $a_M(0) \neq 0$. Тогда в точке $x = 0+0$ уравнение (2.1) с точностью до производных первого порядка примет вид

$$a_M(0)u''(x+M) + \cdots + a_0(0)u''(x) + \cdots = f(x). \tag{2.26}$$

Сделаем замену переменных $x + M = y$. Тогда уравнение (2.26) примет канонический вид в точке $y = M + 0$

$$a_M(0)u''(y) + \cdots + a_0(0)u''(y-M) + \cdots = f(y-M).$$

Поскольку $a_M(0) \neq 0$ и в силу (2.22) $a_0(0) \neq 0$, то уравнение (2.26) имеет нейтральный тип в точке $x = 0+0$ (см. [61, гл. II]). В силу теоремы 2.2.1 $u \in W_2^2(Q_{1k})$, $k = 1,...,N+1$. Поскольку мы рассматриваем уравнение (2.1) в достаточно малой правой полуокрестности точки $x = 0$, наши рассуждения являются обоснованными.

В случае выполнения неравенства (2.25) аналогично можно показать, что уравнение (2.1) имеет нейтральный тип в точке $x = N+1-0$.

Лемма 2.3.1. *Пусть выполнены условия* (2.3) *и* (2.21). *Тогда* $rank\boldsymbol{R}_1 = N+2$ *и* $rank\boldsymbol{R}_1^0 \geqslant N+1$.

Доказательство. 1. Докажем, что $rank\mathbf{R}_1 = N+2$. Рассмотрим минор M_{N+2} порядка $N+2$ матрицы $\mathbf{R}_1$, составленный из первого столбца этой матрицы, а также $(N+2)$-го, $\ldots$, $(2N+2)$-го столбцов. В силу условия (2.3) $M_{N+2} = a_0(0)detR_1(1) \neq 0$. Следовательно, $rank\mathbf{R}_1 = N+2$.

2. Докажем теперь справедливость неравенства $rank\mathbf{R}_1^0 \geqslant N+1$. В силу условия (2.21) либо выполняется неравенство (2.24), либо справедливо неравенство (2.25). Кроме того, в силу (2.3) $detR_2(1) \neq 0$. Тогда $(N+1)$-ая строка матрицы порядка $(N+1) \times N$, полученной из матрицы $R_1(1)$ вычеркиванием последнего столбца, равна нетривиальной линейной комбинации строк матрицы $R_2(1)$ порядка $N \times N$. С другой стороны, $(N+2)$-ая строка матрицы порядка $(N+2) \times N$, полученная из матрицы $\widetilde{R}_1$ вычеркиванием первого столбца, является нулевой. Следовательно, она равна тривиальной линейной комбинации строк матрицы $R_2(1)$. Таким образом, $(N+2)$-ая строка матрицы $\mathbf{R}_1^0$ не может быть равна линейной комбинации второй, третьей, $\ldots$, $(N+1)$-ой строк этой матрицы. Это означает, что $rank\mathbf{R}_1^0 \geqslant N+1$. $\square$

Рассмотрим матричное уравнение

$$\mathbf{R}_1\Phi = 0, \tag{2.27}$$

где $\Phi := (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_N, -\psi_1, -\psi_2, \ldots, -\psi_{N+1})^T$.

Обозначим

$$H_1 := (a_0(0), a_{-1}(1), \ldots, a_{-N}(N), 0)^T,$$
$$H_2 := (0, a_N(1), \ldots, a_1(N), a_0(N+1))^T.$$

Перенося в уравнении (2.27) члены $\varphi_0 H_1$ и $-\psi_{N+1}H_2$ в правую часть, получим

$$\mathbf{R}_1^0\Phi^0 = -\varphi_0 H_1 + \psi_{N+1}H_2, \tag{2.28}$$

где $\Phi^0 := (\varphi_1, \ldots, \varphi_N, -\psi_1, \ldots, -\psi_N)^T$.

В формулировке следующего вспомогательного результата мы будем предполагать, что $rank\mathbf{R}_1^0 = N+1$, при этом $rank\mathbf{R}_1^1 = rank\mathbf{R}_1^2 = N+2$. Обозначим через $P_{\mathbf{R}_1^0}$ оператор ортогонального проектирования в $\mathbb{C}^{N+2}$ на $\mathcal{R}(\mathbf{R}_1^0)$, т. е. на образ оператора умножения на матрицу $\mathbf{R}_1^0$. В силу условия $rank\mathbf{R}_1^0 = N+1$ коразмерность $\mathcal{R}(\mathbf{R}_1^0)$ равна 1. Поэтому ненулевые векторы $(I - P_{\mathbf{R}_1^0})H_1$ и $(I - P_{\mathbf{R}_1^0})H_2$ линейно зависимы. Таким образом, существует число $0 \neq \alpha_H \in \mathbb{C}$ такое, что

$$(I - P_{\mathbf{R}_1^0})H_2 = \alpha_H (I - P_{\mathbf{R}_1^0})H_1, \tag{2.29}$$

при этом в силу (2.3) $a_0(0) \neq 0$ и $a_0(N+1) \neq 0$. Следовательно, векторы H_1 и H_2 линейно независимы.

В силу теоремы Кронекера – Капелли система уравнений (2.28) совместна тогда и только тогда, когда

$$\varphi_0 = \alpha_H \psi_{N+1}, \tag{2.30}$$

поскольку это равенство эквивалентно тому, что $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^e = N+1$, где $\mathbf{R}_1^e$ – расширенная матрица системы (2.28).

Итак, мы получили следующий результат.

Лемма 2.3.2. *Пусть выполнены условия* (2.3) *и* (2.21). *Пусть, кроме того,* $rank\boldsymbol{R}_1^0 = N+1$, *при этом* $rank\boldsymbol{R}_1^1 = rank\boldsymbol{R}_1^2 = N+2$. *Тогда система уравнений* (2.28) *совместна тогда и только тогда, когда справедливо равенство* (2.30).

Докажем теперь, что в случае ортогональности правой части уравнения (2.1) в пространстве $L_2(0,d)$ конечному числу некоторых линейно независимых функций существует обобщенное решение задачи (2.1), (2.2), принадлежащее пространству $W_2^2(0,d)$, т. е. обладающее соответствующей гладкостью.

Предположим, что выполняются следующее условие

$$\sum_{k=1}^{N} |a_{-k}(k)| \neq 0, \qquad \sum_{k=1}^{N} |a_k(N+1-k)| \neq 0. \tag{2.31}$$

Замечание 2.3.3. Если коэффициенты $a_k(x)$ не зависят от x, то условие (2.21) следует из условия (2.31).

Замечание 2.3.4. Из условия (2.31) следует, что $G_1^1(0) \neq 0$ и $G_{N+1}^2(1) \neq 0$.

Пусть $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ – ограниченный оператор с областью определения

$$D(A_R^0) = \left\{ u \in W_2^2(0,d) : R_Q u' \in W_2^1(0,d), (R_Q u')(0) = (R_Q u')(d) = 0 \right\},$$

действующий по формуле $A_R^0 u = A_R u$, $u \in D(A_R^0)$. Из (2.20) получим

$$D(A_R^0) = D(\mathcal{A}_R) \cap W_2^2(0,d). \tag{2.32}$$

Теорема 2.3.1. *Пусть выполнены условия* (2.3) *и* (2.21), *а* $\theta = 1$. *Предположим, что столбцы* $G_1^1(0)$ *и* $G_{N+1}^2(1)$ *линейно независимы. Тогда оператор* $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $1 \in \mathcal{N}(A_R^0)$ *и* $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 1$. *Если к тому же* $rank\boldsymbol{R}_1^0 = rank\boldsymbol{R}_1^1 = rank\boldsymbol{R}_1^2$, *то* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 3$; *если же* $rank\boldsymbol{R}_1^0 < max\left\{rank\boldsymbol{R}_1^1, rank\boldsymbol{R}_1^2\right\}$, *то* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

Доказательство. 1. Очевидно, функция $u(x) \equiv 1$ принадлежит $D(A_R^0)$. В силу следствия 2.1.1 $1 \in \mathcal{N}(\mathcal{A}_R)$ и $dim\mathcal{N}(\mathcal{A}_R) = 1$. Таким образом, поскольку $D(A_R^0) \subset D(\mathcal{A}_R)$, мы заключаем, что пространство $\mathcal{N}(A_R^0)$ одномерно и состоит из констант.

2. Из части 1 доказательства теоремы 2.1.1 следует, что операторное уравнение

$$(\mathcal{A}_R + \lambda_0 I)u = f \qquad (Re\ \lambda_0 > 0) \tag{2.33}$$

имеет единственное решение $u_f \in D(\mathcal{A}_R)$ для любого $f \in L_2(0,d)$. В силу (2.32) это решение u_f принадлежит $D(A_R^0)$ тогда и только тогда, когда

$$u_f \in W_2^2(0,d). \tag{2.34}$$

Таким образом, $\mathcal{N}(A_R^0 + \lambda_0 I) = \{0\}$, а условие принадлежности правой части уравнения (2.33) образу $\mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I)$ выражается соотношением (2.34). Перепишем это соотношение в виде условий ортогональности правой части уравнения (2.33) некоторым функциям из $L_2(0,d)$.

По условию $\theta = 1$. Тогда $d = N + 1$ и разбиение интервала $(0,d)$ состоит из одного семейства подынтервалов

$$Q_{1k} = (k-1,k), \qquad k = 1,\dots,N+1.$$

В силу (2.20) и теоремы вложения $u_f \in W_2^2(Q_{1k}) \subset C^1(\overline{Q}_{1k})$, $k = 1,...,N+1$. Поэтому определены значения производной $u_f'(x)$ на концах подынтервалов Q_{1k}. Обозначим

$$\varphi_k = (U_1 u_f')_{k+1}(0+0), \qquad k = 0,\dots,N,$$
$$\psi_k = (U_1 u_f')_k(1-0), \qquad k = 1,\dots,N+1.$$

Условие (2.34) можно переписать в виде

$$u_f'(k+0) = u_f'(k-0), \qquad k = 1,...,N,$$

т. е.

$$\varphi_k = \psi_k, \qquad k = 1,...,N. \tag{2.35}$$

С другой стороны, поскольку $u \in D(\mathcal{A}_R)$, из (2.20) следует, что

$$(R_Q u_f')(k+0) = (R_Q u_f')(k-0), \qquad k = 1,...,N. \tag{2.36}$$

В силу равенств (1.4) и леммы 1.1.5 соотношения (2.36) примут вид

$$\sum_{j=1}^{N+1} r_{i+1,j}^1(0)\varphi_{j-1} = \sum_{j=1}^{N+1} r_{i,j}^1(1)\psi_j, \qquad i = 1,...,N. \tag{2.37}$$

Из равенств (1.5) следует, что $r_{i,j}^1(1) = r_{i+1,j+1}^1(0)$. Равенства (2.37) можно переписать следующим образом:

$$r_{i+1,1}^1(0)\varphi_0 - r_{i,N+1}^1(1)\psi_{N+1} = \sum_{j=1}^{N}(r_{i,j}^1(1)\psi_j - r_{i+1,j+1}^1(0))\varphi_j =$$
$$= \sum_{j=1}^{N} r_{i,j}^1(1)(\psi_j - \varphi_j), \qquad i = 1,...,N. \tag{2.38}$$

Если выполняются равенства (2.35), из (2.38) следует, что

$$\varphi_0 G_1^1(0) - \psi_{N+1} G_{N+1}^2(1) = 0. \tag{2.39}$$

По условию столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно независимы. Следовательно,

$$\varphi_0 = u_f'(0+0) = 0, \tag{2.40}$$

$$\psi_{N+1} = u_f'(N+1-0) = 0. \tag{2.41}$$

Таким образом, из условия (2.34) вытекает справедливость равенств (2.40), (2.41). С другой стороны, из равенств (2.40), (2.41), равенств (2.38) и невырожденности матрицы $R_2(1)$ (см. (2.3)) следуют равенства (2.35), т. е. условие (2.34).

В силу теоремы вложения $W_2^2(\overline{Q}_{1k}) \subset C^1(\overline{Q}_{1k})$, $k = 1,N+1$. Таким образом, из неравенства (2.10) следует, что $u_f'(0+0)$ и $u_f'(N+1-0)$ являются линейными ограниченными функционалами, зависящими от $f \in L_2(0,d)$. По теореме Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве существуют определенные единственным образом функции $g_1, g_2 \in L_2(0,d)$ такие, что

$$\begin{aligned} u_f'(0+0) &= (f,g_1)_{L_2(0,d)}, \\ u_f'(N+1-0) &= (f,g_2)_{L_2(0,d)}. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Следовательно, равенства (2.40), (2.41) примут вид

$$(f,g_i)_{L_2(0,d)} = 0, \qquad i = 1,2.$$

3. Исследуем теперь, при каких условиях функции g_1, g_2 линейно независимы (т. е. $codim\mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 2$) и при каких условиях эти функции линейно зависимы, но $|g_1(x)| + |g_2(x)| \neq 0$ на множестве положительной меры (т. е. $codim\mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 1$).

Для этого вначале перепишем равенства

$$(R_Q u')(0) = (R_Q u')(d) = 0 \tag{2.43}$$

в виде

$$\sum_{j=1}^{N+1} r_{1,j}^1(0)\varphi_{j-1} = 0, \tag{2.44}$$

$$\sum_{j=1}^{N+1} r^1_{N+1,j}(1)\psi_j = 0. \tag{2.45}$$

В силу (2.20) функция $u \in W_2^1(0,d)$ такая, что $u \in W_2^2(Q_{1k})$, $k = 1,\ldots,N+1$, принадлежит $D(\mathcal{A}_R)$ тогда и только тогда, когда выполняются равенства (2.37), (2.44) и (2.45), которые можно переписать в виде матричного уравнения (2.27).

3а. Рассмотрим случай $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^1 = rank\mathbf{R}_1^2$. Докажем, что функции g_1 и g_2 линейно независимы. Для этого достаточно показать, что существуют функции $f_1, f_2 \in L_2(0,d)$, обладающие свойством

$$(f_j,g_i)_{L_2(0,d)} = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Докажем, например, существование функции $f_1 \in L_2(0,d)$ такой, что

$$(f_1,g_1)_{L_2(0,d)} = 1,$$
$$(f_1,g_2)_{L_2(0,d)} = 0.$$

Другими словами, нужно построить функцию $f_1 \in L_2(0,d)$, для которой

$$u'_{f_1}(0+0) := \widetilde{\varphi}_0 = 1, \qquad u'_{f_1}(N+1-0) := \widetilde{\psi}_{N+1} = 0. \tag{2.46}$$

Введем $2N$-мерный вектор $\Phi^0 := (\varphi_1,\ldots,\varphi_N,-\psi_1,\ldots,-\psi_N)^T$ с неизвестными координатами. Полагая в (2.28)

$$\varphi_0 = \widetilde{\varphi}_0 = 1,$$
$$\psi_{N+1} = \widetilde{\psi}_{N+1} = 0,$$

получим

$$\mathbf{R}_1^0\Phi^0 = -H_1, \tag{2.47}$$

где $H_1 = (a_0(0), a_{-1}(1), \ldots, a_{-N}(N), 0)^T$. Из условия $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^2$ и теоремы Кронекера – Капелли следует, что система уравнений (2.47) разрешима. Обозначим через $\widetilde{\Phi}^0 := (\widetilde{\varphi}_1,\ldots,\widetilde{\varphi}_N,-\widetilde{\psi}_1,\ldots,-\widetilde{\psi}_N)^T$ решение системы (2.47).

Докажем, что существует функция $f_1 \in L_2(0,d)$ такая, что решение уравнения (2.33) u_{f_1} удовлетворяет условию (2.46) и

$$u'_{f_1}(j+0) = \widetilde{\varphi}_j, \qquad u'_{f_1}(j-0) = \widetilde{\psi}_j, \qquad j = 1,\ldots,N.$$

Введем функцию

$$v(x) := \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{N}(x-j)\widetilde{\varphi}_j\xi(x-j), & x \in \bigcup\limits_{j=0}^{N}(j,j+\frac{1}{2}), \\ \sum\limits_{j=1}^{N+1}(x-j)\widetilde{\psi}_j\xi(x-j), & x \in \bigcup\limits_{j=1}^{N+1}(j-\frac{1}{2},j), \end{cases}$$

где $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ – вещественнозначная функция, $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$, $\xi(x) = 1$, $x \in \left[-\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right]$, $supp\ \xi \subset \left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$, $\widetilde{\varphi}_0 = 1$, $\widetilde{\psi}_{N+1} = 0$, а числа $\widetilde{\varphi}_1,\ldots,\widetilde{\varphi}_N,\widetilde{\psi}_1,\ldots,\widetilde{\psi}_N$ удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (2.47). По построению $v \in D(\mathcal{A}_R)$. Положим $f_1 := (\mathcal{A}_R+\lambda_0 I)v$. Тогда, полагая $u_{f_1} := v$, получим равенства (2.46).

Аналогично, используя условие $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^1$, можно построить функцию $f_2 \in L_2(0,d)$, для которой

$$u'_{f_2}(0+0) = 0,$$
$$u'_{f_2}(N+1-0) = 1.$$

Таким образом, мы доказали, что в случае $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^1 = rank\mathbf{R}_1^2$ оператор $A_R^0+\lambda_0 I$ фредгольмов, $dim\mathcal{N}(A_R^0+\lambda_0 I) = 0$ и $codim\mathcal{R}(A_R^0+\lambda_0 I) = 2$.

3b. Заметим, что в силу леммы 2.3.1 помимо изученного в пункте 3a случая возможен лишь случай $rank\mathbf{R}_1^0 = N+1 < max\left\{rank\mathbf{R}_1^1, rank\mathbf{R}_1^2\right\} = N+2$.

Пусть вначале $rank\mathbf{R}_1^0 = N+1$, при этом либо $rank\mathbf{R}_1^1 = N+2$, $rank\mathbf{R}_1^2 = N+1$, либо $rank\mathbf{R}_1^1 = N+1$, $rank\mathbf{R}_1^2 = N+2$. Не ограничивая общности, будем предполагать, что $rank\mathbf{R}_1^2 = N+2$, $rank\mathbf{R}_1^1 = N+1$. Тогда в силу теоремы Кронекера – Капелли система линейных алгебраических уравнений (2.28) несовместна, если для некоторого $f_1 \in L_2(0,d)$ выполняются равенства $u'_{f_1}(0+0) = (f_1,g_1) \neq 0$, т. е. для указанного $f_1 \in L_2(0,d)$ и $Re\ \lambda_0 > 0$ уравнение (2.33) не имеет решения $u_{f_1} \in D(\mathcal{A}_R)$ такого, что $u'_{f_1}(0+0) \neq 0$. Таким образом, для $Re\ \lambda_0 > 0$ и всех $f \in L_2(0,d)$ мы имеем

$$(f,g_1)_{L_2(0,d)} = u'_f(0+0) = 0,$$

т. е. $g_1 = 0$. С другой стороны, $rank\mathbf{R}_1^1 = N+1 = rank\mathbf{R}_1^0$. Поэтому в силу теоремы Кронекера – Капелли система уравнений (2.28) совместна для любых $f \in L_2(0,d)$. Аналогично части 3a доказательства можно показать, что существует функция $f_2 \in L_2(0,d)$ такая, что

$$(f_2,g_2)_{L_2(0,d)} = u'_{f_2}(N+1-0) = \widetilde{\psi}_{N+1} = 1,$$

т. е. $g_2 \neq 0$. Таким образом, оператор $A_R^0+\lambda_0 I$ фредгольмов, $dim\mathcal{N}(A_R^0+\lambda_0 I) = 0$ и $codim\mathcal{R}(A_R^0+\lambda_0 I) = 1$.

Аналогичным образом рассматривается случай $rank\mathbf{R}_1^2 = N+1$, $rank\mathbf{R}_1^1 = N+2$.

3c. Пусть теперь $rank\mathbf{R}_1^0 = N+1$, при этом $rank\mathbf{R}_1^1 = rank\mathbf{R}_1^2 = N+2$. В силу леммы 2.3.2 система уравнений (2.28) совместна для любой $f \in L_2(0,d)$ тогда и только тогда, когда справедливо равенство (2.30). Аналогично части 3a доказательства можно показать, что существует функция $f_2 \in L_2(0,d)$ такая, что $u'_{f_2}(N+1-0) = (f_2,g_2)_{L_2(0,d)} = 1$. Таким образом, уравнение (2.33) разрешимо тогда и только тогда, когда $g_1 = \alpha_H g_2 \neq 0$. При этом $u_f \in W_2^2(0,d)$ в том и только в том случае, когда $(f,g_2)_{L_2(0,d)} = 0$. Следовательно, оператор $A_R^0+\lambda_0 I$ фредгольмов, $dim\mathcal{N}(A_R^0+\lambda_0 I) = 0$ и $codim\mathcal{R}(A_R^0+\lambda_0 I) = 1$.

4. Остается доказать фредгольмовость оператора A_R^0 и свойства его индекса. Действительно, $A_R^0 = A_R^0+\lambda_0 I - \lambda_0 I$. Таким образом, оператор A_R^0 является суммой фредгольмова оператора $A_R^0+\lambda_0 I : W_2^2(0,d) \to L_2(0,d)$ и компактного оператора $-\lambda_0 I : W_2^2(0,d) \to L_2(0,d)$. Поэтому, в силу теоремы 16.4 из [19] оператор $A_R^0 : W_2^2(0,d) \to L_2(0,d)$ является фредгольмовым и $indA_R^0 = ind(A_R^0+\lambda_0 I)$.

С другой стороны, в силу пункта 1 доказательства пространство $\mathcal{N}(A_R^0)$ одномерно и состоит из констант. Поэтому $codim\mathcal{R}(A_R^0) = codim\mathcal{R}(A_R^0+\lambda_0 I)+1$. Следовательно, если $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^1 = rank\mathbf{R}_1^2$, то $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 3$, а если $rank\mathbf{R}_1^0 < max\left\{rank\mathbf{R}_1^1, rank\mathbf{R}_1^2\right\}$, то $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 2$. □

Пример 2.3.1. Рассмотрим оператор $R_Q : L_2(0,3) \to L_2(0,3)$, где $Q = (0,3)$, $(Ru)(x) = a_0 u(x) + a_1 u(x+1) + a_{-1} u(x-1) + a_2 u(x+2) + a_{-2} u(x-2)$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2$. Тогда $N = 2$, $\theta = 1$, а матрица R_1 имеет вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_{-1} & a_0 & a_1 \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$G_1^1(0) = \begin{pmatrix} a_{-1} \\ a_{-2} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad G_3^2(1) = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{R}_1$ определяется по формуле

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_{-1} & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_{-2} & a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

Будем предполагать, что оператор R_Q удовлетворяет условию (2.3), а столбцы $G_1^1(0)$ и $G_3^2(1)$ линейно независимы. Докажем, что тогда

$$rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^1 = rank\mathbf{R}_1^2 = 4. \tag{2.48}$$

Заметим, что, поскольку коэффициенты a_i постоянные, из линейной независимости столбцов $G_1^1(0)$ и $G_3^2(1)$ следует выполнение условия (2.21).

Очевидно,

$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_0 & a_1 \\ a_{-1} & a_0 & a_{-1} & a_0 \\ 0 & 0 & a_{-2} & a_{-1} \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{R}_1^1(\mathbf{R}_1^2)$ порядка 4×5 получается из матрицы $\mathbf{R}_1$ вычеркиванием первого (последнего) столбца. Поэтому для доказательства равенств (2.48) достаточно показать, что

$$det\mathbf{R}_1^0 \neq 0.$$

Действительно,

$$det\mathbf{R}_1^0 = (a_1a_{-1} - a_0^2)(a_1a_{-1} - a_2a_{-2}) = -det\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_{-1} & a_0 \end{pmatrix} det\begin{pmatrix} a_{-1} & a_2 \\ a_{-2} & a_1 \end{pmatrix}.$$

Из условия (2.3) следует, что матрица

$$\begin{pmatrix} 2a_0 & a_1 + a_{-1} \\ a_1 + a_{-1} & 2a_0 \end{pmatrix}.$$

положительно определена. Поэтому

$$det\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_{-1} & a_0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

С другой стороны,

$$det\begin{pmatrix} a_{-1} & a_2 \\ a_{-2} & a_1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

поскольку столбцы этой матрицы $G_1^1(0) = (a_{-1}, a_{-2})^T$ и $G_3^2(1) = (a_2, a_1)^T$ по условию линейно независимы.

Таким образом, в силу теоремы 2.3.1 оператор $A_R^0 : W_2^2(0{,}3) \supset D(A_R^0) \to L_2(0{,}3)$ фредгольмов, $1 \in \mathcal{N}(A_R^0)$ и $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 1$, при этом $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 3$. Следовательно, $indA_R^0 = -2$.

Пример 2.3.2. Рассмотрим оператор $R_Q : L_2(0{,}3) \to L_2(0{,}3)$, где $Q = (0{,}3)$, $(Ru)(x) = 10u(x) + 2u(x+1) + u(x-1) + (1 + \frac{3}{5}e^x(x-1))u(x-2) + 5e^{x-3}u(x+2)$. Тогда $N = 2$, $\theta = 1$, а матрица R_1 имеет вид

$$R_1(x) = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 + \frac{3}{5}e^x(x-1) \\ 1 & 10 & 2 \\ 5e^{x-1} & 1 & 10 \end{pmatrix}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Очевидно, условия (2.3), (2.21) и (2.31) выполнены, а столбцы

$$G_1^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{e} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad G_3^2(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Матрица $\mathbf{R}_1$ имеет вид

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 10 & 2 & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 2 & 10 & 2 & 1 \\ \frac{5}{e} & 1 & 10 & 1 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 10 \end{pmatrix},$$

а матрица $\mathbf{R}_1^0$ вид

$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 10 & 2 \\ 1 & 10 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $rank\mathbf{R}_1^1 = rank\mathbf{R}_1^2 = 4$, а $rank\mathbf{R}_1^0 = 3$, так как вторая строка матрицы $rank\mathbf{R}_1^0$ является линейной комбинацией первой и последней строк этой матрицы.

Таким образом, в силу теоремы 2.3.1 оператор $A_R^0 : W_2^2(0{,}3) \supset D(A_R^0) \to L_2(0{,}3)$ фредгольмов, $1 \in \mathcal{N}(A_R^0)$ и $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 1$, при этом $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

Далее в этом параграфе мы будем предполагать, что столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно зависимы. В силу условия (2.31) $G_1^1(0) \neq 0$, $G_{N+1}^2(1) \neq 0$ и существует такое $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$, что

$$G^2_{N+1}(1) = \alpha G^1_1(0). \tag{2.49}$$

Теорема 2.3.2. *Пусть выполнены условия* (2.3), (2.21) *и* (2.31), *а* $\theta = 1$. *Предположим, что столбцы* $G^1_1(0)$ *и* $G^2_{N+1}(1)$ *линейно зависимы. Тогда оператор* $A^0_R : W^2_2(0,d) \supset D(A^0_R) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $1 \in \mathcal{N}(A^0_R)$ *и* $dim\mathcal{N}(A^0_R) = 1$, *при этом справедливы следующие утверждения:*

1. *Если* $rank\boldsymbol{R}^0_1 = rank\boldsymbol{R}^1_1$ *или* $rank\boldsymbol{R}^0_1 = rank\boldsymbol{R}^2_1$, *то* $codim\mathcal{R}(A^0_R) = 2$.
2. *Если* $rank\boldsymbol{R}^0_1 = N+1$, $rank\boldsymbol{R}^1_1 = rank\boldsymbol{R}^2_1 = N+2$ *и* $\alpha \neq \alpha_H$ *(см.* (2.30)*), то* $codim\mathcal{R}(A^0_R) = 2$.
3. *Если* $rank\boldsymbol{R}^0_1 = N+1$, $rank\boldsymbol{R}^1_1 = rank\boldsymbol{R}^2_1 = N+2$ *и* $\alpha = \alpha_H$ *(см.* (2.30)*), то* $codim\mathcal{R}(A^0_R) = 1$.

Доказательство. 1. Аналогично части 1 доказательства теоремы 2.3.1 мы заключаем, что пространство $\mathcal{N}(A^0_R)$ одномерно и состоит из констант.

2. Из части 1 доказательства теоремы 2.1.1 следует также, что операторное уравнение (2.33) имеет единственное решение $u_f \in D(\mathcal{A}_R)$ для любого $f \in L_2(0,d)$. В силу (2.32) это решение u_f принадлежит $D(A^0_R)$ тогда и только тогда, когда

$$u_f \in W^2_2(0,d). \tag{2.50}$$

Таким образом, $\mathcal{N}(A^0_R + \lambda_0 I) = \{0\}$, а условие принадлежности правой части уравнения

$$(\mathcal{A}_R + \lambda_0 I)u = f \tag{2.51}$$

образу $\mathcal{R}(A^0_R + \lambda_0 I)$ выражается соотношением (2.50). Перепишем это соотношение в виде условий ортогональности правой части уравнения (2.51) некоторым функциям из $L_2(0,d)$.

Сохраняя обозначения, введенные в доказательстве теоремы 2.3.1, для любого решения $u_f \in D(\mathcal{A}_R)$ уравнения (2.51) получим следующие равенства (см. (2.38)):

$$r^1_{i+1,1}(0)\varphi_0 - r^1_{i,N+1}(1)\psi_{N+1} = \sum_{j=1}^{N}(r^1_{i,j}(1)\psi_j - r^1_{i+1,j+1}(0))\varphi_j =$$
$$= \sum_{j=1}^{N} r^1_{i,j}(1)(\psi_j - \varphi_j), \qquad i = 1,...,N. \tag{2.52}$$

Если выполняются равенства (2.35), из (2.52) следует, что

$$\varphi_0 G_1^1(0) - \psi_{N+1} G_{N+1}^2(1) = 0. \tag{2.53}$$

В силу (2.31) и (2.49) $G_1^1(0) \neq 0$, $G_{N+1}^2(1) \neq 0$ и существует такое $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$, что $G_{N+1}^2(1) = \alpha G_1^1(0)$. Таким образом, из (2.53) получим

$$(\varphi_0 - \alpha\psi_{N+1}) G_1^1(0) = 0,$$

т. е.

$$\varphi_0 = \alpha\psi_{N+1}. \tag{2.54}$$

Другими словами, из условий (2.31) и (2.49) следует, что для получения решения уравнения (2.51), удовлетворяющего условию гладкости (2.50), правая часть уравнения (2.51) должна удовлетворять равенству

$$(f,g)_{L_2(0,d)} = 0, \tag{2.55}$$

где $g = g_1 - \alpha g_2$, а функции g_1 и g_2 определяются равенствами

$$\begin{aligned} (f,g_1)_{L_2(0,d)} &= u_f'(0+0) = \varphi_0, \\ (f,g_2)_{L_2(0,d)} &= u_f'(N+1-0) = \psi_{N+1}. \end{aligned}$$

Обратно, пусть выполняется равенство (2.55). Тогда $\varphi_0 - \alpha\psi_{N+1} = 0$, т. е.

$$\varphi_0 G_1^1(0) = \alpha\psi_{N+1} G_1^1(0) = \psi_{N+1} G_{N+1}^2(1).$$

Следовательно, справедливо равенство (2.53). Отсюда и из (2.52) в силу невырожденности матрицы $R_2(1)$ следует (2.35). Таким образом, если столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно зависимы, то соотношение (2.50) выполняется тогда и только тогда, когда функция f ортогональна в $L_2(0,d)$ функции $g = g_1 - \alpha g_2 \in L_2(0,d)$.

3. Рассмотрим вопрос о том, когда $g \neq 0$. Из доказательства теоремы 2.3.1 следует, что условия (2.36), (2.43) можно переписать в виде матричного уравнения (2.27).

3a. Рассмотрим случай, когда $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^1$ или $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^2$. Не ограничивая общности, будем предполагать, что $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^2$. Докажем, что $g \neq 0$.

Для этого достаточно доказать существование функции $f_0 \in L_2(0,d)$ такой, что

$$\begin{aligned} (f_0,g_1)_{L_2(0,d)} &= 1, \\ (f_0,g_2)_{L_2(0,d)} &= 0, \end{aligned}$$

т. е. $(f_0,g)_{L_2(0,d)} = 1$. Другими словами, достаточно построить функцию $f_0 \in L_2(0,d)$, для которой

$$u'_{f_0}(0+0) := \widetilde{\varphi}_0 = 1, \qquad u'_{f_0}(N+1-0) := \widetilde{\psi}_{N+1} = 0. \tag{2.56}$$

Введем $2N$ - мерный вектор $\Phi^0 := (\varphi_1, \dots, \varphi_N, -\psi_1, \dots, -\psi_N)^T$ с неизвестными координатами. Обозначим $H_1 := (a_0(0), a_{-1}(1), \dots, a_{-N}(N), 0)^T$. Полагая в (2.28)

$$\varphi_0 = \widetilde{\varphi}_0 = 1,$$
$$\psi_{N+1} = \widetilde{\psi}_{N+1} = 0,$$

получим

$$\mathbf{R}_1^0 \Phi^0 = -H_1. \tag{2.57}$$

Из условия $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^2$ и теоремы Кронекера – Капелли следует, что система уравнений (2.57) разрешима. Обозначим через $\widetilde{\Phi}^0 := (\widetilde{\varphi}_1, \dots, \widetilde{\varphi}_N, -\widetilde{\psi}_1, \dots, -\widetilde{\psi}_N)^T$ решение системы (2.57).

Докажем, что существует функция $f_0 \in L_2(0,d)$ такая, что при $f = f_0$ решение уравнения (2.51) u_{f_0} удовлетворяет условию (2.56) и

$$u'_{f_0}(j+0) = \widetilde{\varphi}_j, \qquad u'_{f_0}(j-0) = \widetilde{\psi}_j, \qquad j = 1, \dots, N.$$

Введем функцию

$$v(x) := \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{N} (x-j)\widetilde{\varphi}_j \xi(x-j), & x \in \bigcup\limits_{j=0}^{N} (j, j+\frac{1}{2}), \\ \sum\limits_{j=1}^{N+1} (x-j)\widetilde{\psi}_j \xi(x-j), & x \in \bigcup\limits_{j=1}^{N+1} (j-\frac{1}{2}, j), \end{cases}$$

где $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ – вещественнозначная функция, $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$, $\xi(x) = 1$, $x \in \left[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right]$, $supp\ \xi \subset \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, $\widetilde{\varphi}_0 = 1$, $\widetilde{\psi}_{N+1} = 0$, а числа $\widetilde{\varphi}_1, \dots, \widetilde{\varphi}_N$, $\widetilde{\psi}_1, \dots, \widetilde{\psi}_N$ удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (2.57).

По построению $v \in D(\mathcal{A}_R)$. Положим $f_0 := (\mathcal{A}_R + \lambda_0 I)v$. Полагая $u_{f_0} := v$, получим равенства (2.56). Таким образом, мы доказали, что в случае $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^2$ выполняется соотношение $g \neq 0$. Следовательно, оператор $A_R^0 + \lambda_0 I$ фредгольмов, $dim\mathcal{N}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 0$ и $codim\mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 1$.

3b. Пусть теперь $rank\mathbf{R}_1^0 = N+1$ и при этом $rank\mathbf{R}_1^1 = rank\mathbf{R}_1^2 = N+2$. В силу леммы 2.3.2 система уравнений (2.28) совместна для любой $f \in L_2(0,d)$

тогда и только тогда, когда справедливо равенство (2.30). С другой стороны, $u_f \in W_2^2(0,d)$ в том и только в том случае, когда выполняется равенство (2.54).

Рассмотрим вначале случай $\alpha \neq \alpha_H$. В силу (2.42) условие (2.54) можно записать в виде

$$(f,g)_{L_2(0,d)} = \varphi_0 - \alpha\psi_{N+1} = u_f'(0+0) - \alpha u_f'(N+1-0) = 0.$$

Докажем, что $g \neq 0$. Для этого достаточно доказать существование функции $f_1 \in L_2(0,d)$ такой, что

$$(f_1,g_1)_{L_2(0,d)} = \alpha_H,$$
$$(f_1,g_2)_{L_2(0,d)} = 1.$$

Другими словами, достаточно построить функцию $f_1 \in L_2(0,d)$, для которой

$$u_{f_1}'(0+0) := \widetilde{\varphi}_0 = \alpha_H, \qquad u_{f_1}'(N+1-0) := \widetilde{\psi}_{N+1} = 1. \tag{2.58}$$

В этом случае

$$\begin{aligned}(f_1,g)_{L_2(0,d)} &= (f_1,g_1 - \alpha g_2)_{L_2(0,d)} = \\ &= (f_1,g_1 - \alpha_H g_2)_{L_2(0,d)} + (f_1,(\alpha_H - \alpha)g_2)_{L_2(0,d)} = \\ &= (\alpha_H - \alpha)(f_1,g_2)_{L_2(0,d)} = \alpha_H - \alpha \neq 0.\end{aligned}$$

Введем $2N$ - мерный вектор $\Phi^0 := (\varphi_1, \ldots, \varphi_N, -\psi_1, \ldots, -\psi_N)^T$ с неизвестными координатами. Полагая в (2.28)

$$\varphi_0 = \widetilde{\varphi}_0 = \alpha_H,$$
$$\psi_{N+1} = \widetilde{\psi}_{N+1} = 1,$$

получим

$$\mathbf{R}_1^0\Phi^0 = -\alpha_H H_1 + H_2. \tag{2.59}$$

Из условия (2.30) и леммы 2.3.2 следует, что система уравнений (2.59) разрешима. Обозначим через $\widetilde{\Phi}^0 := (\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_N, -\widetilde{\psi}_1, \ldots, -\widetilde{\psi}_N)^T$ решение системы (2.59).

Аналогично части 3а можно доказать существование функции $f_1 \in L_2(0,d)$ такой, что при $f = f_1$ решение уравнения (2.51) u_{f_1} удовлетворяет условию (2.58) и

$$u_{f_1}'(j+0) = \widetilde{\varphi}_j, \qquad u_{f_1}'(j-0) = \widetilde{\psi}_j, \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Следовательно, $g \neq 0$. Таким образом оператор $A_R^0 + \lambda_0 I$ фредгольмов, $dim\mathcal{N}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 0$ и $codim\mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 1$.

Рассмотрим наконец случай $\alpha = \alpha_H$. В этом случае для любой $f \in L_2(0,d)$ решение уравнения (2.51) u_f удовлетворяет системе уравнений (2.28). Поэтому в силу леммы 2.3.2 и равенства $\alpha = \alpha_H$ справедливо равенство (2.54), которое гарантирует, что $u_f \in W_2^2(0,d)$ для любых $f \in L_2(0,d)$. Таким образом, оператор $A_R^0 + \lambda_0 I$ имеет ограниченный обратный $(A_R^0 + \lambda_0 I)^{-1} : L_2(0,d) \to D(A_R^0)$. Следовательно, $dim\mathcal{N}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 0$ и $\mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I) = L_2(0,d)$.

4. Доказательство свойств оператора A_R^0 следует из теоремы 16.4 из [19] и следствия 2.1.1. $\square$

2.4 Гладкость обобщенных решений второй краевой задачи на всем интервале Q при $0 < \theta < 1$

Рассмотрим теперь блочные матрицы $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ порядка $(N+1) \times (2N+1)$ вида

$$\mathbf{R}_1 = \left(\widetilde{R}_1^1 | \widetilde{R}_1^2\right), \qquad \mathbf{R}_2 = \left(\widetilde{R}_2^1 | \widetilde{R}_2^2\right),$$

где $\widetilde{R}_1^1$, $\widetilde{R}_1^2$ – матрицы порядка $(N+1) \times (N+1)$ и $(N+1) \times N$ соответственно, которые имеют вид

$$\widetilde{R}_1^1 = R_1(0), \qquad \widetilde{R}_2^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ R_2(1) \end{pmatrix},$$

а $\widetilde{R}_2^1$, $\widetilde{R}_2^2$ – матрицы порядка $(N+1) \times N$ и $(N+1) \times (N+1)$ соответственно, вида

$$\widetilde{R}_1^2 = \begin{pmatrix} R_2(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{R}_2^2 = R_1(\theta),$$

при этом 0 обозначает нулевую строку длины N.

Другими словами,

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} a_0(0) & \dots & a_N(0) & 0 & \dots & 0 \\ a_{-1}(1) & \dots & a_{N-1}(1) & a_0(1) & \dots & a_{N-1}(1) \\ a_{-2}(2) & \dots & a_{N-2}(2) & a_{-1}(2) & \dots & a_{N-2}(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-N}(N) & \dots & a_0(N) & a_{-N+1}(N) & \dots & a_0(N) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} a_0(\theta) & \dots & a_{N-1}(\theta) & a_0(\theta) & \dots & a_N(\theta) \\ a_{-1}(\theta+1) & \dots & a_{N-2}(\theta+1) & a_{-1}(\theta+1) & \dots & a_{N-1}(\theta+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{-N+1}(\theta+N-1) & \dots & a_0(\theta+N-1) & a_{-N+1}(\theta+N-1) & \dots & a_1(\theta+N-1) \\ 0 & \dots & 0 & a_{-N}(\theta+N) & \dots & a_0(\theta+N) \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\mathbf{R}_1^1$ матрицу порядка $(N+1)\times 2N$, полученную из матрицы $\mathbf{R}_1$ вычеркиванием первого столбца, а через $\mathbf{R}_2^2$ матрицу порядка $(N+1)\times 2N$, полученную из матрицы $\mathbf{R}_2$ вычеркиванием последнего столбца.

Замечание 2.4.1. Первые $N+1$ столбцов матрицы $\mathbf{R}_1$ используются для описания линейных комбинаций правых производных решения в точках $0,1,\dots,N$, а последние N столбцов матрицы $\mathbf{R}_1$ – для описания линейных комбинаций левых производных решения в точках $1,2,\dots,N$. В случае матрицы $\mathbf{R}_2$ первые N столбцов необходимы для описания линейных комбинаций правых производных решения в точках $k-1+\theta$, $k=1,\dots,N$, а последние $N+1$ столбцов для описания линейных комбинаций левых производных решения в точках $k-1+\theta$, $k=1,\dots,N+1$.

Первая строка матрицы $\mathbf{R}_1$ задает линейную комбинацию значений правых производных в точках $0,1,\dots,N$, соответствующую краевому условию $(R_Qu')(0)=0$, а последняя строка матрицы $\mathbf{R}_2$ задает линейную комбинацию значений левых производных в точках $k-1+\theta$, $k=1,\dots,N+1$, соответствующую краевому условию $(R_Qu')(d)=0$ (см. (2.80)).

Вытекающие из уравнения (2.1) и условия $f\in L_2(0,d)$ равенства $(R_Qu')(k+0)=(R_Qu')(k-0)$, $k=1,\dots,N$, (см. (2.67)) задаются $2,\dots,N+1$ строками матрицы $\mathbf{R}_1$, а равенства $(R_Qu')(k-1+\theta+0)=(R_Qu')(k-1+\theta-0)$, $k=1,\dots,N$, (см. (2.68)) задаются строками матрицы $\mathbf{R}_2$ с номерами $1,\dots,N$.

Матрицы $\mathbf{R}_1^1$, $\mathbf{R}_2^2$ используются для подсчета числа линейно независимых функций, которым должна быть ортогональна правая часть уравнения (2.1), чтобы обеспечить выполнение равенств $u'(k+0)=u'(k-0)$ и $u'(k-1+\theta+0)=u'(k-1+\theta-0)$, $k=1,\dots,N$, т. е. гладкость обобщенных решений на всем интервале.

Будем предполагать, что выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{N}|a_k(0)|\neq 0, \qquad \sum_{k=1}^{N}|a_{-k}(N+\theta)|\neq 0. \tag{2.60}$$

Замечание 2.4.2. Из условий (2.3), (2.60) следует, что дифференциально-разностное уравнение (2.1) является уравнением нейтрального типа в точке $x = 0 + 0$ или в точке $x = N + \theta - 0$.

Доказательство аналогично доказательству замечания 2.3.2

Лемма 2.4.1. *Пусть выполнены условия* (2.3) *и* (2.60). *Тогда* $rank\boldsymbol{R}_1 = rank\boldsymbol{R}_2 = N + 1$.

Доказательство. Докажем, например, что $rank\mathbf{R}_2 = N+1$. Рассмотрим минор M_{N+1} порядка $N + 1$ матрицы $\mathbf{R}_2$, составленный из последнего столбца этой матрицы, а также 1-го, …, N-го столбцов. В силу условия (2.3) $M_{N+1} = a_0(N+\theta)detR_2(\theta) \neq 0$. Следовательно, $rank\mathbf{R}_2 = N+1$. Аналогично доказывается, что $rank\mathbf{R}_1 = N + 1$. □

Докажем, что обобщенное решение задачи (2.1), (2.2) $u(x)$ принадлежит $W_2^2(0,d)$ при условии ортогональности правой части уравнения (2.1) конечному числу линейно независимых функций в $L_2(0,d)$.

Предположим, что выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{N} |a_{-k}(k)| \neq 0, \qquad \sum_{k=1}^{N} |a_k(N - k + \theta)| \neq 0. \tag{2.61}$$

Замечание 2.4.3. Если коэффициенты $a_k(x)$ не зависят от x, то условие (2.60) следует из условия (2.61).

Замечание 2.4.4. Из условия (2.61) следует, что $G_1^1(0) \neq 0$ и $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$.

В формулировке следующего результата будем пользоваться оператором $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$, введенным в параграфе 2.3, где

$$D(A_R^0) = \left\{u \in W_2^2(0,d) : R_Q u' \in W_2^1(0,d), (R_Q u')(0) = (R_Q u')(d) = 0\right\} = \\ = D(\mathcal{A}_R) \cap W_2^2(0,d). \tag{2.62}$$

Теорема 2.4.1. *Пусть выполнены условия* (2.3), (2.60) *и* (2.61), *а* $0 < \theta < 1$. *Тогда оператор* $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $1 \in \mathcal{N}(A_R^0)$, $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 1$ *и* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 3$.

Доказательство. 1. Очевидно, функция $u(x) \equiv 1$ принадлежит $D(A_R^0)$. В силу следствия 2.1.1 $1 \in \mathcal{N}(\mathcal{A}_R)$ и $dim\mathcal{N}(\mathcal{A}_R) = 1$. Так как $D(A_R^0) \subset D(\mathcal{A}_R)$, то пространство $\mathcal{N}(A_R^0)$ одномерно и состоит из констант.

2. Из части 1 доказательства теоремы 2.1.1 следует, что операторное уравнение

$$(\mathcal{A}_R + \lambda_0 I)u = f \qquad (Re\ \lambda_0 > 0) \tag{2.63}$$

имеет единственное решение $u_f \in D(\mathcal{A}_R)$ для любого $f \in L_2(0,d)$. В силу (2.62) это решение принадлежит $D(A_R^0)$ тогда и только тогда, когда

$$u_f \in W_2^2(0,d). \tag{2.64}$$

Таким образом, $\mathcal{N}(A_R^0 + \lambda_0 I) = \{0\}$, а условие принадлежности правой части уравнения (2.63) образу $\mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I)$ выражается соотношением (2.64). Перепишем это соотношение в виде условий ортогональности правой части уравнения (2.63) некоторым функциям из $L_2(0,d)$.

По условию $0 < \theta < 1$. Тогда $d = N + \theta$, а разбиение интервала $(0,d)$ состоит из двух семейств непересекающихся подынтервалов

$$\begin{aligned} &Q_{1k} = (k-1,k-1+\theta), \qquad k = 1,\ldots,N+1,\\ &Q_{2k} = (k-1+\theta,k), \qquad k = 1,\ldots,N. \end{aligned}$$

В силу (2.20) и теоремы вложения $u_f \in W_2^2(Q_{sk}) \subset C^1(\overline{Q}_{sk})$, $s = 1,2$, $k = 1,\ldots,N(s)$. Поэтому значения производной $u_f'(x)$ определены на концах подынтервалов Q_{sk}.

Условие (2.64) можно переписать в виде

$$u_f'(k+0) = u_f'(k-0), \qquad k = 1,\ldots,N, \tag{2.65}$$

$$u_f'(k-1+\theta+0) = u_f'(k-1+\theta-0), \qquad k = 1,\ldots,N. \tag{2.66}$$

С другой стороны, поскольку $u \in D(\mathcal{A}_R)$, из (2.20) следует

$$(R_Q u_f')(k+0) = (R_Q u_f')(k-0), \qquad k = 1,\ldots,N, \tag{2.67}$$

$$(R_Q u_f')(k-1+\theta+0) = (R_Q u_f')(k-1+\theta-0), \qquad k = 1,\ldots,N. \tag{2.68}$$

2a. В силу (1.4) и леммы 1.1.5 соотношения (2.67) можно переписать в виде

$$(R_1 U_1 P_1 u_f')_{k+1}(0+0) = (R_2 U_2 P_2 u_f')_k(1-0). \tag{2.69}$$

Обозначим

$$\varphi_{1,k} = (U_1 P_1 u'_f)_{k+1}(0+0), \qquad k = 0, \ldots, N,$$
$$\psi_{1,k} = (U_2 P_2 u'_f)_k(1-0), \qquad k = 1, \ldots, N.$$

Из (2.69) следует

$$\sum_{j=1}^{N+1} r^1_{i+1,j}(0)\varphi_{1,j-1} = \sum_{j=1}^{N} r^2_{i,j}(1)\psi_{1,j}, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{2.70}$$

Из равенств (1.5) следует, что $r^1_{i+1,j+1}(0) = r^2_{i,j}(1)$. Тогда равенства (2.70) можно переписать в виде

$$r^1_{i+1,1}(0)\varphi_{1,0} = \sum_{j=1}^{N}(r^2_{i,j}(1)\psi_{1,j} - r^1_{i+1,j+1}(0)\varphi_{1,j}) = \sum_{j=1}^{N} r^2_{i,j}(1)(\psi_{1,j} - \varphi_{1,j}), \tag{2.71}$$

где $i = 1, \ldots, N$. Если выполняются равенства (2.65), из (2.71) и $detR_2(1) \neq 0$ следует, что система

$$\sum_{j=1}^{N} r^2_{i,j}(1)(\psi_{1,j} - \varphi_{1,j}) = r^1_{i+1,1}(0)\varphi_{1,0}, \qquad i = 1, \ldots, N \tag{2.72}$$

имеет единственное решение $\psi_{1,j} - \varphi_{1,j} = 0$, $j = 1, \ldots, N$, если

$$\varphi_{1,0} G^1_1(0) = 0. \tag{2.73}$$

По условию столбец $G^1_1(0) \neq 0$. Следовательно,

$$\varphi_{1,0} = u'_f(0+0) = 0. \tag{2.74}$$

2b. Аналогично, в силу (1.4) и леммы 1.1.5 соотношения (2.68) можно переписать в виде

$$(R_2 U_2 P_2 u'_f)_k(\theta+0) = (R_1 U_1 P_1 u'_f)_k(\theta-0), \qquad k = 1, \ldots, N. \tag{2.75}$$

Обозначим

$$\varphi_{2,k} = (U_2 P_2 u'_f)_k(\theta+0), \qquad k = 1, \ldots, N,$$
$$\psi_{2,k} = (U_1 P_1 u'_f)_k(\theta-0), \qquad k = 1, \ldots, N+1.$$

Из (2.75) следует

$$\sum_{j=1}^{N} r^2_{i,j}(\theta)\varphi_{2,j} = \sum_{j=1}^{N+1} r^1_{i,j}(\theta)\psi_{2,j}, \qquad i = 1,\ldots,N. \tag{2.76}$$

Равенства (2.76) можно переписать в виде

$$r^1_{i,N+1}(\theta)\psi_{2,N+1} = \sum_{j=1}^{N} r^2_{i,j}(\theta)(\psi_{2,j} - \varphi_{2,j}), \qquad i = 1,\ldots,N. \tag{2.77}$$

Если выполняются равенства (2.66), из $detR_2(\theta) \neq 0$ следует, что система (2.77) имеет единственное решение $\psi_{2,j} - \varphi_{2,j} = 0$, $j = 1,\ldots,N$, если

$$\psi_{2,N+1}G^2_{N+1}(\theta) = 0. \tag{2.78}$$

В силу условия (2.61) столбец $G^2_{N+1}(\theta) \neq 0$. Следовательно,

$$\psi_{2,N+1} = u'_f(N + \theta - 0) = 0. \tag{2.79}$$

Таким образом, из условия (2.64) вытекает справедливость равенств (2.74), (2.79). С другой стороны, из равенств (2.74), (2.79), равенств (2.70), (2.76) и невырожденности матриц $R_2(1)$ и $R_2(\theta)$ (см. (2.3)) следуют равенства (2.65), (2.66), т. е. условие (2.64).

3. В силу теоремы вложения $W^2_2(Q_{1k}) \subset C^1(\overline{Q}_{1k})$, $k = 1,N + 1$. Следовательно, из неравенства (2.10) следует, что $u'_f(0 + 0)$ и $u'_f(N + \theta - 0)$ являются линейными ограниченными функционалами, зависящими от $f \in L_2(0,d)$. По теореме Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве существуют определенные единственным образом функции $g_1, g_2 \in L_2(0,d)$ такие, что

$$u'_f(0 + 0) = (f,g_1)_{L_2(0,d)},$$
$$u'_f(N + \theta - 0) = (f,g_2)_{L_2(0,d)}.$$

Следовательно, равенства (2.74) и (2.79) примут вид

$$(f,g_i)_{L_2(0,d)} = 0, \qquad i = 1,2.$$

Исследуем условия, при которых функции g_1, g_2 линейно независимы, т. е. $codim\mathcal{R}(A^0_R + \lambda_0 I) = 2$.

Перепишем условия

$$(R_Q u')(0) = (R_Q u')(d) = 0 \tag{2.80}$$

в виде

$$\sum_{j=1}^{N+1} r^1_{1,j}(0)\varphi_{1,j-1} = 0, \tag{2.81}$$

$$\sum_{j=1}^{N+1} r^1_{N+1,j}(\theta)\psi_{2,j} = 0. \tag{2.82}$$

В силу (2.20) функция $u \in W^1_2(0,d)$ такая, что $u \in W^2_2(Q_{sk})$, $s = 1,2$, $k = 1, \ldots, N(s)$, принадлежит $D(A^0_R)$ тогда и только тогда, когда выполняются равенства (2.70), (2.76), (2.81) и (2.82), которые можно переписать в виде матричных уравнений

$$\mathbf{R}_1\Phi_1 = 0, \tag{2.83}$$

$$\mathbf{R}_2\Phi_2 = 0, \tag{2.84}$$

где

$$\Phi_1 := (\varphi_{1,0}, \ldots, \varphi_{1,N}, -\psi_{1,1}, \ldots, -\psi_{1,N})^T,$$
$$\Phi_2 := (\varphi_{2,1}, \ldots, \varphi_{2,N}, -\psi_{2,1}, \ldots, -\psi_{2,N+1})^T.$$

Для доказательства линейной независимости функций g_1, g_2 достаточно показать, что существуют $f_1, f_2 \in L_2(0,d)$, обладающие свойством

$$(f_i,g_j)_{L_2(0,d)} = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Докажем, например, существование функции $f_2 \in L_2(0,d)$ такой, что

$$(f_2,g_1)_{L_2(0,d)} = 0$$
$$(f_2,g_2)_{L_2(0,d)} = 1.$$

Другими словами, нужно построить функцию $f_2 \in L_2(0,d)$, для которой

$$u'_{f_2}(0+0) := \widetilde{\varphi}_{1,0} = 0, \qquad u'_{f_2}(N+\theta-0) := \widetilde{\psi}_{2,N+1} = 1. \tag{2.85}$$

Введем $N+1$ - мерные векторы

$$\Phi^0_1 := (\varphi_{1,1}, \ldots, \varphi_{1,N}, -\psi_{1,1}, \ldots, -\psi_{1,N})^T,$$
$$\Phi^0_2 := (\varphi_{2,1}, \ldots, \varphi_{2,N}, -\psi_{2,1}, \ldots, -\psi_{2,N})^T$$

с неизвестными координатами. Полагая в (2.83) и (2.84) соответственно

$$\varphi_{1,0} = \widetilde{\varphi}_{1,0} = 0,$$
$$\psi_{2,N+1} = \widetilde{\psi}_{2,N+1} = 1,$$

получим

$$\mathbf{R}_1^1\Phi_1^0 = 0, \tag{2.86}$$

$$\mathbf{R}_2^2\Phi_2^0 = H_2, \tag{2.87}$$

где $H_2 = (a_N(\theta), a_{N-1}(1+\theta), \ldots, a_0(N+\theta))^T$. Из (2.60) и леммы 2.4.1 следует, что $rank\mathbf{R}_2^2 = N+1 = rank\mathbf{R}_2$. В силу равенства $rank\mathbf{R}_2^2 = rank\mathbf{R}_2$ и теоремы Кронекера – Капелли система уравнений (2.87) разрешима. Обозначим через $\widetilde{\Phi}_2^0 := (\widetilde{\varphi}_{2,1}, \ldots, \widetilde{\varphi}_{2,N}, -\widetilde{\psi}_{2,1}, \ldots, -\widetilde{\psi}_{2,N})^T$ решение системы (2.87), а через $\widetilde{\Phi}_1^0$ – тривиальное решение системы (2.86).

Докажем, что существует функция $f_2 \in L_2(0,d)$ такая, что решение уравнения (2.63) u_{f_2} удовлетворяет условию (2.85) и

$$u'_{f_2}(j+0) = 0, \qquad u'_{f_2}(j-0) = 0, \qquad j = 1, \ldots, N,$$
$$u'_{f_2}(j-1+\theta+0) = \widetilde{\varphi}_{2,j}, \qquad u'_{f_2}(j-1+\theta-0) = \widetilde{\psi}_{2,j}, \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Введем функцию

$$v(x) := \begin{cases} 0, & x \in \bigcup\limits_{j=0}^{N} (j, j+\frac{\theta_0}{2}), \\ 0, & x \in \bigcup\limits_{j=1}^{N} (j-\frac{\theta_0}{2}, j), \\ \sum\limits_{j=1}^{N} (x+1-x')\widetilde{\varphi}^j \eta(x+1-x'), & x \in \bigcup\limits_{j=1}^{N} (x'-1, x'-1+\frac{\theta_0}{2}), \\ \sum\limits_{j=0}^{N} (x-x')\widetilde{\psi}^j \eta(x-x'), & x \in \bigcup\limits_{j=0}^{N} (x'-\frac{\theta_0}{2}, x'), \end{cases}$$

где $x' = j+\theta$, $\theta_0 = min\{\theta, 1-\theta\}$, $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ – вещественнозначная функция, $0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1$, $\eta(x) = 1$, $x \in \left[-\frac{\theta_0}{8}, \frac{\theta_0}{8}\right]$, $supp\ \eta \subset \left[-\frac{\theta_0}{4}, \frac{\theta_0}{4}\right]$, $\widetilde{\varphi}_{1,0} = 0$, $\widetilde{\psi}_{2,N+1} = 1$, числа

$$\widetilde{\varphi}_{1,1} = 0, \ldots, \widetilde{\varphi}_{1,N} = 0,$$
$$\widetilde{\psi}_{1,1} = 0, \ldots, \widetilde{\psi}_{1,N} = 0,$$
$$\widetilde{\varphi}_{2,1}, \ldots, \widetilde{\varphi}_{2,N},$$
$$\widetilde{\psi}_{2,1}, \ldots, \widetilde{\psi}_{2,N}$$

удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (2.86) и (2.87) соответственно. По построению $v \in D(\mathcal{A}_R)$. Положим $f_2 := (\mathcal{A}_R + \lambda_0 I)v$. Тогда, полагая $u_{f_2} := v$, получим равенства (2.85).

Аналогично, используя условие $rank\mathbf{R}_1^1 = rank\mathbf{R}_1$, можно построить функцию $f_1 \in L_2(0,d)$, для которой

$$u'_{f_1}(0+0) := \widetilde{\varphi}_{1,0} = 1, \qquad u'_{f_1}(N+\theta-0) := \widetilde{\psi}_{2,N+1} = 0.$$

Следовательно, оператор $A_R^0 + \lambda_0 I$ фредгольмов, $dim\mathcal{N}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 0$ и $codim\mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 2$.

4. В силу пункта 4 доказательства теоремы 2.3.1 оператор $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ является фредгольмовым и $indA_R^0 = ind(A_R^0 + \lambda_0 I)$.

С другой стороны, $codim\mathcal{R}(A_R^0) = codim\mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I) + 1$, так как в силу пункта 1 доказательства пространство $\mathcal{N}(A_R^0)$ одномерно и состоит из констант. Следовательно, $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 3$. $\square$

Пример 2.4.1. Рассмотрим оператор $R_Q : L_2(0,\frac{7}{3}) \to L_2(0,\frac{7}{3})$, где $Q = (0,\frac{7}{3})$, $(Ru)(x) = a_0 u(x) + a_1 u(x+1) + a_{-1}u(x-1) + a_2 u(x+2) + a_{-2}u(x-2)$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2$. Тогда $N = 2$, $\theta = \frac{1}{3}$, а матрицы R_1 и R_2 имеют вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_{-1} & a_0 & a_1 \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$G_1^1(0) = \begin{pmatrix} a_{-1} \\ a_{-2} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad G_3^2(1) = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ определены следующим образом

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & a_0 & a_1 \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_{-1} & a_0 & a_{-1} & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_{-2} & a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что выполняется условие (2.3), а

$$|a_{-1}| + |a_{-2}| \neq 0,$$
$$|a_1| + |a_2| \neq 0,$$

т. е. $G_1^1(0) \neq 0$, $G_3^2(1) \neq 0$. Тогда в силу теоремы 2.4.1 оператор $A_R^0 : W_2^2(0,\frac{7}{3}) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,\frac{7}{3})$ фредгольмов, $1 \in \mathcal{N}(A_R^0)$, $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 1$ и $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 3$.

Глава 3. Краевая задача для дифференциально-разностного уравнения со смешанными граничными условиями на конечном интервале

Глава посвящена исследованию разрешимости и гладкости обобщенных решений краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами с условием первого рода на левом и условием второго рода на правом концах интервала Q. Обозначения и свойства разностных операторов на интервале в данной главе аналогичны Главе 1. В параграфе 3.1 формулируется краевая задача и исследуется вопрос существования обобщенного решения. В параграфе 3.2 исследуется вопрос гладкости обобщенных решений на подынтервалах. Параграфы 3.3 и 3.4 посвящены исследованию гладкости обобщенного решения на всем интервале Q. Основные результаты данной главы содержатся в статье [9].

3.1 Постановка краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения со смешанными граничными условиями и ее разрешимость

Рассматривается уравнение

$$-\left(R_Q u'\right)' = f(x), \qquad x \in Q, \tag{3.1}$$

с краевыми условиями

$$u(0) = 0, \tag{3.2}$$

$$(R_Q u')(d) = 0. \tag{3.3}$$

Здесь $Q = (0,d)$, $d = N + \theta$, $N \in \mathbb{N}$, $0 < \theta \leqslant 1$, $f \in L_2(Q)$ – комплекснозначная функция.

Как и ранее, будем предполагать, что дифференциально-разностное уравнение (3.1) удовлетворяет условию

$$Re(R_s Y,Y)_{\mathbb{C}^{N(s)}} \geqslant c_1 \|Y\|^2_{\mathbb{C}^{N(s)}} \tag{3.4}$$

для всех $x \in \overline{Q}_{s1}$, s и $Y \in \mathbb{C}^{N(s)}$, где $s = 1$, если $\theta = 1$, и $s = 1, 2$, если $0 < \theta < 1$; $c_1 > 0$ не зависит от x и Y.

Через $W^1_{2,0}(Q)$ обозначим пространство функций $u \in W^1_2(Q)$ таких, что $u(0) = 0$. Введем неограниченный оператор $\mathcal{A}_R : L_2(Q) \supset D(\mathcal{A}_R) \to L_2(Q)$ с областью определения

$$D(\mathcal{A}_R) = \left\{ u \in W^1_{2,0}(Q) : R_Q u' \in W^1_2(Q) \right\},$$

действующий по формуле

$$\mathcal{A}_R u = -(R_Q u')', \qquad u \in D(\mathcal{A}_R).$$

Определение 3.1.1. Функцию $u \in D(\mathcal{A}_R)$ будем называть обобщенным решением задачи (3.1)–(3.3), если она удовлетворяет операторному уравнению

$$\mathcal{A}_R u = f. \tag{3.5}$$

Дадим эквивалентное определение.

Определение 3.1.2. Функцию $u \in W^1_{2,0}(Q)$ будем называть обобщенным решением задачи (3.1)–(3.3), если для всех $v \in W^1_{2,0}(Q)$ выполнено интегральное тождество

$$(R_Q u', v')_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}. \tag{3.6}$$

Определяя эквивалентное скалярное произведение в пространстве $W^1_{2,0}(Q)$, можно доказать следующую теорему.

Теорема 3.1.1. *Пусть выполняется условие* (3.4)*. Тогда для любой функции $f \in L_2(Q)$ существует единственное обобщенное решение $u \in W^1_{2,0}(Q)$ задачи* (3.1)–(3.3)*, при этом имеет место оценка*

$$\|u\|_{W^1_2(Q)} \leqslant c_2 \|f\|_{L_2(Q)}, \tag{3.7}$$

где $c_2 > 0$ – постоянная, не зависящая от f.

Следствие 3.1.1. *Пусть уравнение* (3.1) *удовлетворяет условию* (3.4)*. Тогда оператор $\mathcal{A}_R$ фредгольмов, $ind \mathcal{A}_R = 0$ и $dim \mathcal{N}(\mathcal{A}_R) = 0$.*

3.2 Гладкость обобщенных решений краевой задачи со смешанными граничными условиями на подынтервалах

Теорема 3.2.1. *Пусть выполнено условие сильной эллиптичности* (3.4)*. Если $u \in W^1_{2,0}(0,d)$ – обобщенное решение задачи* (3.1)–(3.3)*, тогда $u \in W^2_2(Q_{sk})$,*

$s = 1$, $k = 1,\ldots,N+1$, если $\theta = 1$, и $s = 1,2$, $k = 1,\ldots,N(s)$, если $0 < \theta < 1$; при этом

$$\|u\|_{W_2^2(Q_{sk})} \leqslant c_3\|f\|_{L_2(0,d)}, \tag{3.8}$$

где $c_3 > 0$ не зависит от f.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.4.1 (см. Гл. 1).

Следствие 3.2.1. *Пусть выполняется неравенство* (3.4), *а $u \in W_{2,0}^1(0,d)$ – обобщенное решение задачи* (3.1)–(3.3), *где $f \in L_2(0,d)$. Тогда уравнение* (3.1) *удовлетворяется почти всюду на $(0,d)$, при этом выполняется краевое условие* (3.3).

Доказательство. 1. Возьмем произвольную функцию $v \in C_0^\infty(0,d)$ в интегральном тождестве (3.6). Используя определение обобщенной производной в пространстве распределений $D'(0,d)$, получим

$$\langle -(R_Q u')', v\rangle = (f,v)_{L_2(0,d)}.$$

Так как $f \in L_2(0,d)$, то в силу произвольности выбора $v \in C_0^\infty(0,d)$ имеем

$$-(R_Q u')'(x) = f(x) \tag{3.9}$$

почти всюду на $(0,d)$ и $R_Q u' \in W_2^1(0,d)$.

2. Возьмем теперь произвольную функцию $v \in W_{2,0}^1(0,d)$ в (3.6). Проинтегрировав по частям левую часть тождества (3.6), в силу равенства $v(0) = 0$ получим

$$-\int_0^d (R_Q u')'\overline{v}dx + (R_Q u')(d)\overline{v}(d) = \int_0^d f\overline{v}dx.$$

Тогда из (3.9) следует, что

$$(R_Q u')(d)\overline{v}(d) = 0.$$

В силу произвольности выбора $v \in W_{2,0}^1(0,d)$ из последнего вытекает равенство

$$(R_Q u')(d) = 0.$$

$\square$

Замечание 3.2.1. Из теоремы 3.2.1 и следствия 3.2.1 следует, что

$$
\begin{aligned}
D(\mathcal{A}_R) = \big\{ & u \in W_{2,0}^1(0,d) : R_Q u' \in W_2^1(0,d), (R_Q u')(d) = 0, u \in W_2^2(Q_{sk}), \\
& s = 1, k = 1, \dots, N+1, \text{ если } \theta = 1, \text{ и } s = 1, 2, k = 1, \dots, N(s), \\
& \text{если } 0 < \theta < 1 \big\}.
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

3.3 Гладкость обобщенных решений краевой задачи со смешанными граничными условиями на всем интервале Q при $\theta = 1$

Для формулировки основных результатов о гладкости обобщенных решений задачи (3.1)–(3.3) на интервале целой длины введем некоторые обозначения.

Рассмотрим блочную матрицу $\mathbf{R}_1$ порядка $(N+1) \times (2N+2)$ вида

$$
\mathbf{R}_1 = \left(\widetilde{R}_1 | \widetilde{R}_2 \right),
$$

где $\widetilde{R}_1$, $\widetilde{R}_2$ — матрицы порядка $(N+1) \times (N+1)$, которые имеют вид

$$
\widetilde{R}_1 = \begin{pmatrix}
a_{-1}(1) & a_0(1) & \dots & a_{N-2}(1) & a_{N-1}(1) \\
a_{-2}(2) & a_{-1}(2) & \dots & a_{N-3}(2) & a_{N-2}(2) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{-N}(N) & a_{-N+1}(N) & \dots & a_{-1}(N) & a_0(N) \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0
\end{pmatrix},
$$

$$
\widetilde{R}_2 = R_1(1).
$$

Другими словами,

$$
\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix}
a_{-1}(1) & \dots & a_{N-1}(1) & a_0(1) & \dots & a_N(1) \\
a_{-2}(2) & \dots & a_{N-2}(2) & a_{-1}(2) & \dots & a_{N-1}(2) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{-N}(N) & \dots & a_0(N) & a_{-N+1}(N) & \dots & a_1(N) \\
0 & \dots & 0 & a_{-N}(N+1) & \dots & a_0(N+1)
\end{pmatrix}.
$$

Через $\mathbf{R}_1^1$ ($\mathbf{R}_1^2$) обозначим матрицу порядка $(N+1) \times (2N+1)$, полученную из матрицы $\mathbf{R}_1$ вычеркиванием первого (последнего) столбца соответственно, а через $\mathbf{R}_1^0$ матрицу порядка $(N+1) \times 2N$, полученную из $\mathbf{R}_1$ вычеркиванием первого и последнего столбцов.

Замечание 3.3.1. Первые $N+1$ столбцов матрицы $\mathbf{R}_1$ используются для описания линейных комбинаций правых производных решения в точках $0,1,\ldots,N$, а последние $N+1$ столбцов матрицы $\mathbf{R}_1$ – для описания линейных комбинаций левых производных решения в точках $1,2,\ldots,N+1$.

Последняя строка матрицы $\mathbf{R}_1$ задает линейную комбинацию значений левых производных в точках $1,2,\ldots,N+1$, соответствующую краевому условию (3.3). Строки матрицы $\mathbf{R}_1$ с номерами $1,\ldots,N$ задают равенства $(R_Q u')(k+0) = (R_Q u')(k-0)$, $k=1,\ldots,N$, вытекающие из уравнения (3.1) и условия $f \in L_2(0,d)$.

Матрицы $\mathbf{R}_1^1$, $\mathbf{R}_1^2$ и $\mathbf{R}_1^0$ используются для подсчета числа линейно независимых функций, которым должна быть ортогональна правая часть уравнения (3.1), чтобы обеспечить выполнение равенств $u'(k+0) = u'(k-0)$, $k=1,\ldots,N$, т. е. гладкость обобщенных решений на всем интервале.

Замечание 3.3.2. В отличие от матрицы $\mathbf{R}_1$, построенной для исследования второй краевой задачи (см. Гл. 2), в матрице $\mathbf{R}_1$ для краевой задачи со смешанными граничными условиями (3.1)–(3.3) отсутствует первая строка, так как на левом конце интервала теперь рассматривается условие первого рода.

Лемма 3.3.1. *Пусть выполнено условие сильной эллиптичности* (3.4)*. Тогда* $rank\boldsymbol{R}_1 = rank\boldsymbol{R}_1^1 = N+1$ *и* $rank\boldsymbol{R}_1^0 = rank\boldsymbol{R}_1^2 \geqslant N$.

Доказательство. 1. Так как последние $N+1$ столбцов матриц $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_1^1$ формируют невырожденную матрицу $R_1(1)$ (см. (3.4)), то мы заключаем, что $rank\mathbf{R}_1 = rank\mathbf{R}_1^1 = N+1$.

2. Докажем теперь, что $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^2 \geqslant N$. Рассмотрим последние строки матриц $\mathbf{R}_1^0$ и $\mathbf{R}_1^2$.

2a. Если найдется такое k, $1 \leqslant k \leqslant N$, что $a_{-k}(N+1) \neq 0$, то $(N+1)$-ая строка матрицы порядка $(N+1)\times N$, полученной из матрицы $R_1(1)$ вычеркиванием последнего столбца, равна нетривиальной линейной комбинации строк матрицы $R_2(1)$ порядка $N\times N$. С другой стороны, $(N+1)$-ая строка матрицы порядка $(N+1)\times N$, полученная из матрицы $\widetilde{R}_1$ вычеркиванием первого столбца равна тривиальной линейной комбинации строк матрицы $R_2(1)$. Таким образом, $(N+1)$-ая строка матрицы $\mathbf{R}_1^0$ не может быть равна линейной комбинации первой, второй, $\ldots$, N-ой строк этой матрицы. Следовательно, $rank\mathbf{R}_1^0 = N+1$.

2b. Если $a_{-k}(N+1)=0$, $k=1,\ldots,N$, то последняя строка матрицы $\mathbf{R}_1^0$ является нулевой. С другой стороны, матрица $\mathbf{R}_1^0$ содержит в себе невырожденную матрицу $R_2(1)$ порядка $N\times N$. Следовательно, в этом случае $rank\mathbf{R}_1^0=N$.

2c. Матрица $\mathbf{R}_1^0$ получается из матрицы $\mathbf{R}_1^2$ вычеркиванием ее первого столбца. Поэтому, из $rank\mathbf{R}_1^0\geqslant N$ следует $rank\mathbf{R}_1^0=rank\mathbf{R}_1^2\geqslant N$. $\square$

Рассмотрим ограниченный оператор $A_R^0 : W_2^2(0{,}d)\supset D(A_R^0)\to L_2(0{,}d)$ с областью определения

$$D(A_R^0)=\left\{u\in W_2^2(0{,}d): R_Qu'\in W_2^1(0{,}d), u(0)=(R_Qu')(d)=0\right\},$$

действующий по формуле $A_R^0u=\mathcal{A}_Ru$ при $u\in D(A_R^0)$.

Из (3.10) следует, что

$$D(A_R^0)=D(\mathcal{A}_R)\cap W_2^2(0{,}d). \qquad (3.11)$$

В силу теоремы 3.1.1 операторное уравнение (3.5) имеет единственное решение u_f при любой правой части $f\in L_2(0{,}d)$. Из (3.11) следует, что $u_f\in D(A_R^0)$ в том и только том случае, когда

$$u_f\in W_2^2(0{,}d). \qquad (3.12)$$

Предположим, что выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{N}|a_{-k}(k)|\neq 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{N}|a_k(N+1-k)|\neq 0. \qquad (3.13)$$

Замечание 3.3.3. Из условия (3.13) вытекает, что $G_1^1(0)\neq 0$ или $G_{N+1}^2(1)\neq 0$.

Лемма 3.3.2. *Пусть $\theta=1$, и пусть выполнены условия* (3.4) *и* (3.13).

Если столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно независимы, то обобщенное решение u задачи (3.1)–(3.3) *принадлежит пространству $W_2^2(0{,}d)$ тогда и только тогда, когда $u'(0+0)=u'(N+1-0)=0$.*

Если же существуют такие $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C}$, $\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0$, что $\alpha_1G_1^1(0)+\alpha_2G_{N+1}^2(1)=0$, т. е. столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно зависимы, то обобщенное решение u задачи (3.1)–(3.3) *принадлежит пространству $W_2^2(0{,}d)$ тогда и только тогда, когда $\alpha_2u'(0+0)+\alpha_1u'(N+1-0)=0$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.5.1.

Далее мы покажем, что обобщенное решение задачи (3.1)–(3.3) $u(x)$ принадлежит пространству $W_2^2(0{,}d)$ при условии ортогональности правой части уравнения (3.1) конечному числу линейно независимых функций в $L_2(0{,}d)$. Соответствующие результаты о гладкости обобщенного решения задачи (3.1)–(3.3) будут обобщены на случай $0 < \theta < 1$ в параграфе 3.4.

Теорема 3.3.1. *Пусть $\theta = 1$, и пусть выполнены условия* (3.4) *и* (3.13).

1. Если столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно независимы, то оператор $A_R^0 : W_2^2(0{,}d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0{,}d)$ фредгольмов и $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$. Если к тому же $rank\boldsymbol{R}_1^0 = rank\boldsymbol{R}_1^1 = rank\boldsymbol{R}_1^2 = N+1$, то $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 2$; если же $rank\boldsymbol{R}_1^0 = rank\boldsymbol{R}_1^2 = N$, то $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

2. Если $\alpha_1 G_1^1(0) + \alpha_2 G_{N+1}^2(1) = 0$ и при этом $\alpha_i \neq 0$, $i = 1{,}2$, т. е. $G_1^1(0) \neq 0$ и $G_{N+1}^2(1) \neq 0$, то оператор $A_R^0 : W_2^2(0{,}d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0{,}d)$ фредгольмов, $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$, а $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

3. Если $\alpha_1 G_1^1(0) + \alpha_2 G_{N+1}^2(1) = 0$ и при этом либо $rank\boldsymbol{R}_1^0 = rank\boldsymbol{R}_1^1 = N+1$ и $G_1^1(0) = 0$ или $G_{N+1}^2(1) = 0$, либо $rank\boldsymbol{R}_1^0 = rank\boldsymbol{R}_1^2 = N$ и $G_{N+1}^2(1) = 0$, то оператор $A_R^0 : W_2^2(0{,}d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0{,}d)$ фредгольмов, $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$, а $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

4. Если $G_1^1(0) = 0$ и $rank\boldsymbol{R}_1^0 = rank\boldsymbol{R}_1^2 = N$, то оператор $A_R^0 : W_2^2(0{,}d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0{,}d)$ фредгольмов, $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$, а $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 0$.

Доказательство. 1. В силу следствия 3.1.1 $dim\mathcal{N}(\mathcal{A}_R) = 0$. Поскольку $D(A_R^0) \subset D(\mathcal{A}_R)$, то $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$.

2. Перепишем равенство $(R_Q u')(d) = 0$ в виде

$$\sum_{j=1}^{N+1} r_{N+1,j}^1(1)\psi_j = 0. \tag{3.14}$$

В силу (3.10) функция $u \in W_{2,0}^1(0{,}d)$ такая, что $u \in W_2^2(Q_{1k})$, $k = 1, \dots, N+1$, принадлежит $D(\mathcal{A}_R)$ тогда и только тогда, когда выполняются равенства (1.36) и (3.14), которые можно переписать в виде матричного уравнения

$$\mathbf{R}_1\Phi = 0, \tag{3.15}$$

где $\Phi := (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N, -\psi_1, -\psi_2, \dots, -\psi_{N+1})^T$.

3. Рассмотрим случай, когда столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно независимы. В силу леммы 3.3.2 решение u_f операторного уравнения (3.1) принадлежит

$D(A_R^0)$ в том и только том случае, когда справедливы равенства

$$u'_f(0+0) = 0, \tag{3.16}$$

$$u'_f(N+1-0) = 0. \tag{3.17}$$

Из вложения $W_2^2(Q_{1k}) \subset C^1(\overline{Q}_{1k})$, $k = 1,N+1$, и неравенства (3.8) следует, что $u'_f(0+0)$ и $u'_f(N+1-0)$ являются линейными ограниченными функционалами на пространстве $L_2(0,d)$. Таким образом, в силу теоремы Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве существуют определенные единственным образом функции $g_1, g_2 \in L_2(0,d)$ такие, что

$$u'_f(0+0) = (f,g_1)_{L_2(0,d)},$$
$$u'_f(N+1-0) = (f,g_2)_{L_2(0,d)}.$$

Следовательно, равенства (3.16) и (3.17) можно представить в виде

$$(f,g_i)_{L_2(0,d)} = 0, \qquad i = 1,2.$$

Исследуем условия, при которых функции g_1 и g_2 линейно независимы (т. е. $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 2$), а также условия, при которых эти функции линейно зависимы, но $|g_1(x)| + |g_2(x)| \neq 0$ на множестве положительной меры (т. е. $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$).

3a. Рассмотрим случай $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^1 = rank\mathbf{R}_1^2 = N+1$. Для доказательства линейной независимости функций g_1 и g_2 достаточно показать, что существуют функции $f_1, f_2 \in L_2(0,d)$, обладающие свойством

$$(f_j,g_i)_{L_2(0,d)} = \delta_{ij}, \qquad i,j = 1,2,$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Не ограничивая общности, докажем, что существует функция $f_2 \in L_2(0,d)$, для которой

$$(f_2,g_1)_{L_2(0,d)} = 0,$$
$$(f_2,g_2)_{L_2(0,d)} = 1,$$

т. е.

$$u'_{f_2}(0+0) := \widetilde{\varphi}_0 = 0, \qquad u'_{f_2}(N+1-0) := \widetilde{\psi}_{N+1} = 1. \tag{3.18}$$

Подставляя

$$\varphi_0 = \widetilde{\varphi}_0 = 0,$$
$$\psi_{N+1} = \widetilde{\psi}_{N+1} = 1$$

в систему уравнений (3.15), получим

$$\mathbf{R}_1^0 \Phi^0 = H_2, \tag{3.19}$$

где $\Phi^0 = (\varphi_1, \dots, \varphi_N, -\psi_1, \dots, -\psi_N)^T$ – $2N$-мерный вектор с неизвестными координатами, $H_2 = (a_N(1), a_{N-1}(2), \dots, a_1(N), a_0(N+1))^T$. Из условия $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^1$ и теоремы Кронекера – Капелли следует, что система уравнений (3.19) разрешима. Обозначим решение этой системы через $\widetilde{\Phi}^0 := (\widetilde{\varphi}_1, \dots, \widetilde{\varphi}_N, -\widetilde{\psi}_1, \dots, -\widetilde{\psi}_N)^T$.

Докажем, что существует функция $f_2 \in L_2(0,d)$ такая, что решение u_{f_2} операторного уравнения (3.5) удовлетворяет условию (3.18) и

$$u'_{f_2}(j+0) = \widetilde{\varphi}_j, \qquad u'_{f_2}(j-0) = \widetilde{\psi}_j, \qquad j = 1, \dots, N.$$

Введем функцию

$$v(x) := \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{N} (x-j)\widetilde{\varphi}_j \eta(x-j), & x \in \bigcup\limits_{j=0}^{N} (j, j+\frac{1}{2}), \\ \sum\limits_{j=1}^{N+1} (x-j)\widetilde{\psi}_j \eta(x-j), & x \in \bigcup\limits_{j=1}^{N+1} (j-\frac{1}{2}, j), \end{cases}$$

где $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ – вещественнозначная функция, $0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1$, $\eta(x) = 1$, $x \in \left[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right]$, $supp\ \eta \subset \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, $\widetilde{\varphi}_0 = 0$, $\widetilde{\psi}_{N+1} = 1$, числа $\widetilde{\varphi}_1, \dots, \widetilde{\varphi}_N, \widetilde{\psi}_1, \dots, \widetilde{\psi}_N$ удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (3.19).

По построению $v \in D(\mathcal{A}_R)$. Положим $f_2 := \mathcal{A}_R v$. Следовательно, полагая $u_{f_2} := v$, получим равенства (3.18).

Используя условие $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^2$, аналогичным образом можно доказать существование функции $f_1 \in L_2(0,d)$, для которой

$$u'_{f_1}(0+0) := \widetilde{\varphi}_0 = 1,$$
$$u'_{f_1}(N+1-0) := \widetilde{\psi}_{N+1} = 0.$$

Таким образом, в случае $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^1 = rank\mathbf{R}_1^2 = N+1$ оператор A_R^0 фредгольмов, $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$ и $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

3b. В силу леммы 3.3.1 кроме случая $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^1 = rank\mathbf{R}_1^2 = N+1$, описанного в пункте 3a, возможен лишь случай $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^2 = N$. Рассмотрим этот случай. В силу теоремы Кронекера – Капелли система линейных алгебраических уравнений (3.15) несовместна, если для некоторого $f_2 \in L_2(0,d)$ справедливы равенства $u'_{f_2}(N+1-0) = (f_2,g_2) \neq 0$, т. е. для указанной функции f_2 операторное уравнение (3.5) не имеет решения $u_{f_2} \in D(\mathcal{A}_R)$ такого, что $u'_{f_2}(N+1-0) \neq 0$. Следовательно, для всех $f \in L_2(0,d)$ мы имеем

$$(f,g_2)_{L_2(0,d)} = u'_f(N+1-0) = 0,$$

т. е. $g_2 = 0$.

С другой стороны, по предположению $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^2 = N$. Поэтому в силу теоремы Кронекера – Капелли система уравнений (3.15) совместна для любых $f \in L_2(0,d)$. Аналогично части 3a доказательства можно построить такую функцию $f_1 \in L_2(0,d)$, что

$$(f_1,g_1)_{L_2(0,d)} = u'_{f_1}(0+0) = 1,$$

т. е. $g_1 \neq 0$.

Таким образом, оператор A_R^0 фредгольмов, $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$ и $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

4. Пусть теперь столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно зависимы. Тогда существуют такие $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, что

$$\alpha_1 G_1^1(0) + \alpha_2 G_{N+1}^2(1) = 0.$$

В силу леммы 3.3.2 решение u_f операторного уравнения (3.1) принадлежит $D(A_R^0)$ тогда и только тогда, когда справедливо

$$\alpha_2 u'_f(0+0) + \alpha_1 u'_f(N+1-0) = 0. \tag{3.20}$$

Таким образом, в силу теоремы Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве существует единственная функция $g \in L_2(0,d)$ такая, что

$$\alpha_2 u'_f(0+0) + \alpha_1 u'_f(N+1-0) = (f,g)_{L_2(0,d)}.$$

Следовательно, равенство (3.20) можно переписать в виде

$$(f,g)_{L_2(0,d)} = 0.$$

Покажем, что существует такая функция $f_0 \in L_2(0,d)$, что выполнено равенство

$$(f_0,g)_{L_2(0,d)} = 1. \qquad (3.21)$$

4а. Предположим вначале, что $\alpha_i \neq 0$, $i = 1,2$, при этом либо $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^1 = N+1$, либо $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^2$. Не ограничивая общности, рассмотрим случай $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^2$. Докажем, что $g \neq 0$. В силу (3.21) достаточно показать, что существует такая функция $f_1 \in L_2(0,d)$, что $(f_1,g_1)_{L_2(0,d)} = \frac{1}{\alpha_2}$ и $(f_1,g_2)_{L_2(0,d)} = 0$, т. е. $(f_1,g)_{L_2(0,d)} = 1$. Другими словами, достаточно построить функцию $f_1 \in L_2(0,d)$, для которой

$$u'_{f_1}(0+0) := \widetilde{\varphi}_0 = \frac{1}{\alpha_2}, \qquad u'_{f_1}(N+1-0) := \widetilde{\psi}_{N+1} = 0. \qquad (3.22)$$

Полагая в (3.15)

$$\begin{aligned} \varphi_0 = \widetilde{\varphi}_0 = \frac{1}{\alpha_2}, \\ \psi_{N+1} = \widetilde{\psi}_{N+1} = 0, \end{aligned}$$

получим

$$\mathbf{R}_1^0 \Phi^0 = -H_1', \qquad (3.23)$$

где $\Phi^0 = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N, -\psi_1, \ldots, -\psi_N)^T$ – $2N$-мерный вектор с неизвестными координатами и

$$H_1' = \left(\frac{a_{-1}(1)}{\alpha_2}, \ldots, \frac{a_{-N}(N)}{\alpha_2}, 0 \right)^T.$$

В силу леммы 3.3.1 $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^2$. Отсюда и из теоремы Кронекера – Капелли следует, что система уравнений (3.23) разрешима. Обозначим через $\widetilde{\Phi}^0 := (\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_N, -\widetilde{\psi}_1, \ldots, -\widetilde{\psi}_N)^T$ решение этой системы.

Докажем существование функции $f_1 \in L_2(0,d)$, для которой решение u_{f_1} операторного уравнения (3.5) удовлетворяет условию (3.22) и

$$u'_{f_1}(j+0) = \widetilde{\varphi}_j, \qquad u'_{f_1}(j-0) = \widetilde{\psi}_j, \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Введем функцию

$$v(x) := \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{N} (x-j)\widetilde{\varphi}_j \eta(x-j), & x \in \bigcup\limits_{j=0}^{N} (j, j+\frac{1}{2}), \\ \sum\limits_{j=1}^{N+1} (x-j)\widetilde{\psi}_j \eta(x-j), & x \in \bigcup\limits_{j=1}^{N+1} (j-\frac{1}{2}, j), \end{cases}$$

где $\widetilde{\varphi}_0 = \frac{1}{\alpha_2}$, $\widetilde{\psi}_{N+1} = 0$, а числа $\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_N$, $\widetilde{\psi}_1, \ldots, \widetilde{\psi}_N$ удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (3.22).

По построению $v \in D(\mathcal{A}_R)$. Положим $f_1 := \mathcal{A}_R v$. Полагая $u_{f_1} := v$, получим равенства (3.22). Следовательно, $g = \alpha_2 g_1 + \alpha_1 g_2 \neq 0$.

Таким образом, оператор A_R^0 фредгольмов, $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$ и $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

4b. Пусть теперь $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^1 = N + 1$, при этом либо $\alpha_1 = 0$, либо $\alpha_2 = 0$. Не ограничивая общности, предположим, что $\alpha_1 \neq 0$ и $\alpha_2 = 0$. Тогда $G_1^1(0) = 0$. Для доказательства того, что $g = \alpha_2 g_1 + \alpha_1 g_2 = \alpha_1 g_2 \neq 0$, построим функцию $f_2 \in L_2(0,d)$ такую, что $(f_2,g_2)_{L_2(0,d)} = \frac{1}{\alpha_1}$, т. е. $(f_2,g)_{L_2(0,d)} = 1$. Другими словами, требуется построить такую функцию $f_2 \in L_2(0,d)$, для которой

$$u'_{f_2}(N + 1 - 0) := \widetilde{\psi}_{N+1} = \frac{1}{\alpha_1}. \tag{3.24}$$

Учитывая, что $G_1^1(0) = 0$, и подставляя $\widetilde{\psi}_{N+1} = \frac{1}{\alpha_1}$ в систему уравнений (3.15), получим

$$\mathbf{R}_1^0 \Phi^0 = H'_2, \tag{3.25}$$

где $\Phi^0 = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N, -\psi_1, \ldots, -\psi_N)^T$ – $2N$-мерный вектор с неизвестными координатами и $H'_2 = (\frac{a_N(1)}{\alpha_1}, \frac{a_{N-1}(2)}{\alpha_1}, \ldots, \frac{a_1(N)}{\alpha_1}, \frac{a_0(N+1)}{\alpha_1})^T$. В силу условия $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^1 = N + 1$ и теоремы Кронекера – Капелли система уравнений (3.25) разрешима. Обозначим решение системы (3.25) через $\widetilde{\Phi}^0 := (\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_N, -\widetilde{\psi}_1, \ldots, -\widetilde{\psi}_N)^T$.

Аналогично пункту 3a можно доказать существование такой функции $f_2 \in L_2(0,d)$, что при $f = f_2$ решение u_{f_2} операторного уравнения (3.5) удовлетворяет условию (3.24) и

$$u'_{f_2}(j + 0) = \widetilde{\varphi}_j, \qquad u'_{f_2}(j - 0) = \widetilde{\psi}_j, \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Таким образом, оператор A_R^0 фредгольмов, $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$ и $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

4c. Пусть $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^2 = N$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$. В пункте 3b доказано, что из условия $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^2 = N$ следует равенство $g_2 = 0$. Поэтому для доказательства того, что $g \neq 0$ достаточно построить такую функцию $f_1 \in L_2(0,d)$, что $(f_1,g_1)_{L_2(0,d)} = \frac{1}{\alpha_2}$, т. е. $(f_1,g)_{L_2(0,d)} = 1$. Другими словами, функция

$f_1 \in L_2(0,d)$ такая, что

$$u'_{f_1}(0+0) := \widetilde{\varphi}_0 = \frac{1}{\alpha_2}. \tag{3.26}$$

Учитывая, что $g_2 = 0$, т. е. $u'_f(N+1-0) = 0$ для всех $f \in L_2(0,d)$, и подставляя $\widetilde{\varphi}_0 = \frac{1}{\alpha_2}$ в систему уравнений (3.15), получим систему (3.23).

Аналогично пункту 3a можно доказать существование такой функции $f_1 \in L_2(0,d)$, что при $f = f_1$ решение u_{f_1} операторного уравнения (3.5) удовлетворяет условию (3.26) и

$$u'_{f_1}(j+0) = \widetilde{\varphi}_j, \qquad u'_{f_1}(j-0) = \widetilde{\psi}_j, \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Таким образом, если $G_1^1(0) \neq 0$ и $G_{N+1}^2(1) = 0$, то оператор A_R^0 фредгольмов, $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$ и $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

4d. Остается рассмотреть случай, когда $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^2 = N$ и $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 = 0$. Из пункта 3b и условия $\alpha_2 = 0$ следует, что $g = \alpha_2 g_1 + \alpha_1 g_2 = 0$. Таким образом, если $G_1^1(0) = 0$ и $G_{N+1}^2(1) \neq 0$, то оператор $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ фредгольмов, $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$, а $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 0$, если $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^2 = N$. $\square$

Пример 3.3.1. Рассмотрим оператор $R_Q : L_2(0,3) \to L_2(0,3)$, $(Ru)(x) = 20u(x) + e^x u(x+1) + e^x u(x-1)$, где $Q = (0,3)$. Тогда $N = 2$, $\theta = 1$, а матрица $R_1(x)$ принимает вид

$$R_1(x) = \begin{pmatrix} 20 & e^x & 0 \\ e^{x+1} & 20 & e^{x+1} \\ 0 & e^{x+2} & 20 \end{pmatrix}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Матрица $\mathbf{R}_1$ имеет вид

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} e & 20 & e & 20 & e & 0 \\ 0 & e^2 & 20 & e^2 & 20 & e^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^3 & 20 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, матрица $R_1(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, удовлетворяет условию (3.4), условие (3.13) выполнено, а столбцы

$$G_1^1(0) = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G_3^2(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^2 \end{pmatrix}$$

линейно независимы.

Выпишем матрицу $\mathbf{R}_1^0$

$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{pmatrix} 20 & e & 20 & e \\ e^2 & 20 & e^2 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}.$$

Так как $a_{-1}(3) = e^3 \neq 0$, то $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^2 = N + 1$. Таким образом, в силу части 1 теоремы 3.3.1 оператор $A_R^0 : W_2^2(0{,}3) \supset D(A_R^0) \to L_2(0{,}3)$ фредгольмов, $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$, при этом $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

Пример 3.3.2. Рассмотрим оператор $R_Q : L_2(0{,}3) \to L_2(0{,}3)$, $(Ru)(x) = 2u(x) + (1 - e^{x-2})u(x+1) + (1 - e^{x-3})u(x-1) + (1 - e^{x-3})u(x+2)$, где $Q = (0{,}3)$. Тогда $N = 2$, $\theta = 1$, а матрица $R_1(x)$ имеет вид

$$R_1(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 - e^{x-2} & 1 - e^{x-3} \\ 1 - e^{x-2} & 2 & 1 - e^{x-1} \\ 0 & 1 - e^{x-1} & 2 \end{pmatrix}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Матрица $\mathbf{R}_1$ принимает вид

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 - e^{-2} & 2 & 1 - e^{-1} & 2 & 1 - e^{-1} & 1 - e^{-2} \\ 0 & 1 - e^{-1} & 2 & 1 - e^{-1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица $R_1(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, удовлетворяет условию (3.4), условие (3.13), очевидно, выполнено, а столбцы

$$G_1^1(0) = \begin{pmatrix} 1 - e^{-2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G_3^2(1) = \begin{pmatrix} 1 - e^{-2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

линейно зависимы.

Матрицы $\mathbf{R}_1^0$ и $\mathbf{R}_1^2$ имеют вид

$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 - e^{-1} & 2 & 1 - e^{-1} \\ 1 - e^{-1} & 2 & 1 - e^{-1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_1^2 = \begin{pmatrix} 1 - e^{-2} & 2 & 1 - e^{-1} & 2 & 1 - e^{-1} \\ 0 & 1 - e^{-1} & 2 & 1 - e^{-1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^2 = N$. Следовательно, в силу части 2 теоремы 3.3.1 оператор $A_R^0 : W_2^2(0{,}3) \supset D(A_R^0) \to L_2(0{,}3)$ фредгольмов, $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$, при этом $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

Пример 3.3.3. Рассмотрим оператор $R_Q : L_2(0,3) \to L_2(0,3)$, $(Ru)(x) = a_0u(x) + e^x u(x+1) + (e^{x-1} - 1)u(x-1)$, где $Q = (0,3)$. Тогда $N = 2$, $\theta = 1$, а матрица $R_1(x)$ имеет вид

$$R_1(x) = \begin{pmatrix} a_0 & e^x & 0 \\ e^x - 1 & a_0 & e^{x+1} \\ 0 & e^{x+1} - 1 & a_0 \end{pmatrix}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Матрица $\mathbf{R}_1$ принимает вид

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_0 & e & a_0 & e & 0 \\ 0 & e-1 & a_0 & e-1 & a_0 & e^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^2-1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что выполнены условия

$$a_0 > 0, \qquad a_0^2 > \frac{(2e^2-1)^2 + (2e-1)^2}{4}.$$

Тогда матрица $R_1(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, удовлетворяет условию (3.4), при этом выполнено второе из условий (3.13), т. е.

$$G_1^1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G_3^2(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^2 \end{pmatrix}.$$

Другими словами, столбцы $G_1^1(0)$ и $G_3^2(1)$ линейно зависимы, при этом $\alpha_2 = 0$.

Очевидно, $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^1 = N + 1$. Следовательно, в силу части 3 теоремы 3.3.1 оператор $A_R^0 : W_2^2(0,3) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,3)$ фредгольмов, $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$, при этом $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

Пример 3.3.4. Упростим разностный оператор в примере 3.3.3. Пусть $(Ru)(x) = a_0u(x) + e^x u(x+1)$. Рассмотрим оператор $R_Q : L_2(0,3) \to L_2(0,3)$, где $Q = (0,3)$. Тогда $N = 2$, $\theta = 1$, а матрица $R_1(x)$ имеет вид

$$R_1(x) = \begin{pmatrix} a_0 & e^x & 0 \\ 0 & a_0 & e^{x+1} \\ 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Предположим, что выполнены условия

$$a_0 > 0, \qquad a_0^2 > \frac{e^4 + e^2}{4}.$$

Таким образом, матрица $R_1(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, удовлетворяет условию (3.4), при этом выполнено второе из условий (3.13), т. е.

$$G_1^1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G_3^2(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, столбцы $G_1^1(0)$ и $G_3^2(1)$ линейно зависимы, при этом $\alpha_2 = 0$.

Матрица $\mathbf{R}_1$ принимает вид

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_0 & e & a_0 & e & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 0 & a_0 & e^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $rank\mathbf{R}_1^0 = rank\mathbf{R}_1^2 = N$, при этом $G_1^1(0) = 0$. Таким образом, в силу части 4 теоремы 3.3.1 оператор $A_R^0 : W_2^2(0{,}3) \supset D(A_R^0) \to L_2(0{,}3)$ фредгольмов, $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$, при этом $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 0$.

3.4 Гладкость обобщенных решений краевой задачи со смешанными граничными условиями на всем интервале Q при $0 < \theta < 1$

Рассмотрим матрицу $\mathbf{R}_1$ порядка $N \times (2N+1)$ вида

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} a_{-1}(1) & \dots & a_{N-1}(1) & a_0(1) & \dots & a_{N-1}(1) \\ a_{-2}(2) & \dots & a_{N-2}(2) & a_{-1}(2) & \dots & a_{N-2}(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-N}(N) & \dots & a_0(N) & a_{-N+1}(N) & \dots & a_0(N) \end{pmatrix}$$

и матрицу $\mathbf{R}_2$ порядка $(N+1) \times (2N+1)$ вида

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} a_0(\theta) & \dots & a_{N-1}(\theta) & a_0(\theta) & \dots & a_N(\theta) \\ a_{-1}(1+\theta) & \dots & a_{N-2}(1+\theta) & a_{-1}(1+\theta) & \dots & a_{N-1}(1+\theta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-N+1}(N-1+\theta) & \dots & a_0(N-1+\theta) & a_{-N+1}(N-1+\theta) & \dots & a_1(N-1+\theta) \\ 0 & \dots & 0 & a_{-N}(N+\theta) & \dots & a_0(N+\theta) \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\mathbf{R}_1^1$ матрицу порядка $N \times 2N$, полученную из матрицы $\mathbf{R}_1$ вычеркиванием первого столбца, а через $\mathbf{R}_2^2$ матрицу порядка $(N+1) \times 2N$, полученную из матрицы $\mathbf{R}_2$ вычеркиванием последнего столбца.

Замечание 3.4.1. Первые $N+1$ столбцов матрицы $\mathbf{R}_1$ используются для описания линейных комбинаций правых производных решения в точках $0,1,\ldots,N$, а последние N столбцов матрицы $\mathbf{R}_1$ – для описания линейных комбинаций левых производных решения в точках $1,2,\ldots,N$. В случае матрицы $\mathbf{R}_2$ первые N столбцов необходимы для описания линейных комбинаций правых производных решения в точках $k-1+\theta$, $k=1,\ldots,N$, а последние $N+1$ столбцов для описания линейных комбинаций левых производных решения в точках $k-1+\theta$, $k=1,\ldots,N+1$.

Последняя строка матрицы $\mathbf{R}_2$ задает линейную комбинацию значений левых производных в точках $k-1+\theta$, $k=1,\ldots,N+1$, соответствующую краевому условию (3.3). Вытекающие из уравнения (3.1) и условия $f \in L_2(0,d)$ равенства $(R_Q u')(k+0) = (R_Q u')(k-0)$, $k=1,\ldots,N$, задаются $1,\ldots,N$ строками матрицы $\mathbf{R}_1$, а равенства $(R_Q u')(k-1+\theta+0) = (R_Q u')(k-1+\theta-0)$, $k=1,\ldots,N$, задаются строками матрицы $\mathbf{R}_2$ с номерами $1,\ldots,N$.

Матрицы $\mathbf{R}_1^1$, $\mathbf{R}_2^2$ используются для подсчета числа линейно независимых функций, которым должна быть ортогональна правая часть уравнения (3.1), чтобы обеспечить выполнение равенств $u'(k+0) = u'(k-0)$ и $u'(k-1+\theta+0) = u'(k-1+\theta-0)$, $k=1,\ldots,N$, т. е. гладкость обобщенных решений на всем интервале.

Лемма 3.4.1. *Пусть выполнено условие* (3.4). *Тогда* $rank\boldsymbol{R}_1 = rank\boldsymbol{R}_1^1 = N$, $rank\boldsymbol{R}_2 = N+1$, *а* $rank\boldsymbol{R}_2^2 \geqslant N$.

Доказательство. Справедливость $rank\mathbf{R}_1 = rank\mathbf{R}_1^1 = N$ и $rank\mathbf{R}_2^2 \geqslant N$ очевидна. Равенство $rank\mathbf{R}_2 = N+1$ вытекает из $Re\ a_0(x) > 0$, что следует из условия (3.4). □

Предположим, что выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{N} |a_{-k}(k)| \neq 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{N} |a_k(N-k+\theta)| \neq 0. \tag{3.27}$$

Замечание 3.4.2. Из условия (3.27) вытекает, что $G_1^1(0) \neq 0$ или $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$.

Лемма 3.4.2. *Пусть* $0 < \theta < 1$, *и пусть выполнены условия* (3.4) *и* (3.27).

Если $G_1^1(0) \neq 0$, $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$, *то обобщенное решение* u *задачи* (3.1)–(3.3) *принадлежит пространству* $W_2^2(0,d)$ *тогда и только тогда, когда* $u'(0+0) = u'(N+\theta-0) = 0$.

Если $G^1_1(0) = 0$ *или* $G^2_{N+1}(\theta) = 0$, *то обобщенное решение и задачи* (3.1)–(3.3) *принадлежит пространству* $W^2_2(0,d)$ *тогда и только тогда, когда* $u'(0+0) = 0$ *в случае* $G^1_1(0) \neq 0$ *и* $u'(N+\theta-0) = 0$ *в случае* $G^2_{N+1}(\theta) \neq 0$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.6.1.

Теорема 3.4.1. *Пусть* $0 < \theta < 1$, *и пусть выполнены условия* (3.4) *и* (3.27).

1. Если $G^1_1(0) \neq 0$, $G^2_{N+1}(\theta) \neq 0$ *и* $rank\boldsymbol{R}^2_2 = rank\boldsymbol{R}_2 = N+1$, *то оператор* $A^0_R : W^2_2(0,d) \supset D(A^0_R) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $dim\mathcal{N}(A^0_R) = 0$ *и* $codim\mathcal{R}(A^0_R) = 2$.

2. Если $G^1_1(0) \neq 0$, $G^2_{N+1}(\theta) \neq 0$ *и* $rank\boldsymbol{R}^2_2 = N$, *то оператор* $A^0_R :$ $W^2_2(0,d) \supset D(A^0_R) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $dim\mathcal{N}(A^0_R) = 0$ *и* $codim\mathcal{R}(A^0_R) = 1$.

3. Если $G^2_{N+1}(\theta) = 0$ *или* $G^1_1(0) = 0$ *и* $rank\boldsymbol{R}^2_2 = rank\boldsymbol{R}_2 = N+1$, *то оператор* $A^0_R : W^2_2(0,d) \supset D(A^0_R) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $dim\mathcal{N}(A^0_R) = 0$ *и* $codim\mathcal{R}(A^0_R) = 1$.

4. Если $G^1_1(0) = 0$ *и* $rank\boldsymbol{R}^2_2 = N$, *то оператор* $A^0_R : W^2_2(0,d) \supset D(A^0_R) \to$ $L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $dim\mathcal{N}(A^0_R) = 0$ *и* $codim\mathcal{R}(A^0_R) = 0$.

Доказательство. 1. Согласно части 1 доказательтсва теоремы 3.3.1 заключаем, что $dim\mathcal{N}(A^0_R) = 0$.

2. В силу леммы 3.4.2 решение u_f операторного уравнения (3.5) принадлежит пространству $W^2_2(0,d)$ в том и только том случае, когда справедливы равенства

$$u'_f(0+0) = 0, \tag{3.28}$$

$$u'_f(N+\theta-0) = 0. \tag{3.29}$$

Из неравенства (3.8) и вложения $W^2_2(Q_{1k}) \subset C^1(\overline{Q}_{1k})$, $k = 1,N+1$, вытекает, что $u'_f(0+0)$ и $u'_f(N+\theta-0)$ являются линейными ограниченными функционалами в $L_2(0,d)$. Таким образом, в силу теоремы Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве существуют определенные единственным образом функции $g_1, g_2 \in L_2(0,d)$ такие, что

$$u'_f(0+0) = (f,g_1)_{L_2(0,d)},$$
$$u'_f(N+\theta-0) = (f,g_2)_{L_2(0,d)}.$$

Следовательно, равенства (3.28) и (3.29) можно представить в виде

$$(f,g_i)_{L_2(0,d)} = 0, \qquad i = 1,2.$$

Перепишем равенство $(R_Q u')(d) = 0$ в виде

$$\sum_{j=1}^{N+1} r^1_{N+1,j}(\theta)\psi_{2,j} = 0, \tag{3.30}$$

где $\psi_{2,j} = (U_1 P_1 u')_j(\theta - 0)$, $j = 1, \ldots, N+1$.

В силу (3.10) функция $u \in W^1_{2,0}(0,d)$ такая, что $u \in W^2_2(Q_{sk})$, $s = 1{,}2$, $k = 1, \ldots, N(s)$, принадлежит $D(\mathcal{A}_R)$ тогда и только тогда, когда выполняются равенства (3.30) и

$$r^1_{i+1,1}(0)\varphi_{1,0} = \sum_{j=1}^{N}(r^2_{i,j}(1)\psi_{1,j} - r^1_{i+1,j+1}(0)\varphi_{1,j}), \qquad i = 1, \ldots, N,$$

$$\sum_{j=1}^{N} r^1_{i,j}(\theta)(\varphi_{2,j} - \psi_{2,j}) = r^1_{i,N+1}(\theta)\psi_{2,N+1}, \qquad i = 1, \ldots, N,$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{1,j} &= (U_1 P_1 u')_{j+1}(0+0), \qquad && j = 0, \ldots, N, \\ \psi_{1,j} &= (U_2 P_2 u')_j(1-0), && j = 1, \ldots, N, \\ \varphi_{2,j} &= (U_2 P_2 u')_j(\theta+0), && j = 1, \ldots, N. \end{aligned}$$

Последние равенства с учетом (3.30) можно представить в виде матричных уравнений

$$\mathbf{R}_1\Phi_1 = 0, \tag{3.31}$$

$$\mathbf{R}_2\Phi_2 = 0, \tag{3.32}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1 &:= (\varphi_{1,0}, \ldots, \varphi_{1,N}, -\psi_{1,1}, \ldots, -\psi_{1,N})^T, \\ \Phi_2 &:= (\varphi_{2,1}, \ldots, \varphi_{2,N}, -\psi_{2,1}, \ldots, -\psi_{2,N+1})^T. \end{aligned}$$

3. Предположим вначале, что $G^1_1(0) \neq 0$ и $G^2_{N+1}(\theta) \neq 0$.

3а. Рассмотрим случай $rank\mathbf{R}^2_2 = rank\mathbf{R}_2 = N+1$. Для доказательства линейной независимости функций g_1 и g_2 достаточно показать, что существуют функции $f_1, f_2 \in L_2(0,d)$, обладающие свойством

$$(f_j,g_i)_{L_2(0,d)} = \delta_{ij}, \qquad i,j = 1{,}2,$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Докажем, например, что существует функция $f_2 \in L_2(0,d)$ такая, что

$$(f_2,g_1)_{L_2(0,d)} = 0,$$
$$(f_2,g_2)_{L_2(0,d)} = 1,$$

т. е. необходимо построить функцию f_2, для которой

$$u'_{f_2}(0+0) := \widetilde{\varphi}_{1,0} = 0, \qquad u'_{f_2}(N+\theta-0) := \widetilde{\psi}_{2,N+1} = 1. \tag{3.33}$$

Подставляя

$$\varphi_{1,0} = \widetilde{\varphi}_{1,0} = 0,$$
$$\psi_{2,N+1} = \widetilde{\psi}_{2,N+1} = 1$$

в системы уравнений (3.31) и (3.32) соответственно, получим

$$\mathbf{R}_1^1 \Phi_1^0 = 0, \tag{3.34}$$

$$\mathbf{R}_2^2 \Phi_2^0 = H_2, \tag{3.35}$$

где

$$H_2 = (a_N(\theta), a_{N-1}(1+\theta), \ldots, a_0(N+\theta))^T,$$
$$\Phi_1^0 := (\varphi_{1,1}, \ldots, \varphi_{1,N}, -\psi_{1,1}, \ldots, -\psi_{1,N})^T,$$
$$\Phi_2^0 := (\varphi_{2,1}, \ldots, \varphi_{2,N}, -\psi_{2,1}, \ldots, -\psi_{2,N})^T.$$

В силу $rank\mathbf{R}_2 = rank\mathbf{R}_2^2$ и теоремы Кронекера – Капелли система уравнений (3.35) разрешима. Обозначим через $\widetilde{\Phi}_2^0 := (\widetilde{\varphi}_{2,1}, \ldots, \widetilde{\varphi}_{2,N}, -\widetilde{\psi}_{2,1}, \ldots, -\widetilde{\psi}_{2,N})^T$ решение системы (3.35), а через $\widetilde{\Phi}_1^0$ – тривиальное решение системы (3.34).

Докажем, что существует функция $f_2 \in L_2(0,d)$ такая, что решение u_{f_2} операторного уравнения (3.5) удовлетворяет условию (3.33) и

$$u'_{f_2}(j+0) = 0, \qquad u'_{f_2}(j-0) = 0, \qquad j = 1, \ldots, N,$$
$$u'_{f_2}(j-1+\theta+0) = \widetilde{\varphi}_{2,j}, \qquad u'_{f_2}(j-1+\theta-0) = \widetilde{\psi}_{2,j}, \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Введем функцию

$$v(x) := \begin{cases} 0, & x \in \bigcup\limits_{j=0}^{N} (j, j+\frac{\theta_0}{2}), \\ 0, & x \in \bigcup\limits_{j=1}^{N} (j-\frac{\theta_0}{2}, j), \\ \sum\limits_{j=1}^{N} (x-\sigma)\widetilde{\varphi}_{2,j}\xi(x-\sigma), & x \in \bigcup\limits_{j=1}^{N} (\sigma, \sigma+\frac{\theta_0}{2}), \\ \sum\limits_{j=0}^{N} (x-\sigma)\widetilde{\psi}_{2,j}\xi(x-\sigma), & x \in \bigcup\limits_{j=0}^{N} (j+\theta-\frac{\theta_0}{2}, j+\theta), \end{cases}$$

где $\sigma = \theta - 1 + j$, $\theta_0 = min\{\theta, 1-\theta\}$, $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ – вещественнозначная функция, $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$, $\xi(x) = 1$, $x \in \left[-\frac{\theta_0}{8}, \frac{\theta_0}{8}\right]$, $supp\ \xi \subset \left[-\frac{\theta_0}{4}, \frac{\theta_0}{4}\right]$, $\widetilde{\varphi}_{1,0} = 0$, $\widetilde{\psi}_{2,N+1} = 1$, числа

$$\begin{aligned} &\widetilde{\varphi}_{1,1} = 0, \ldots, \widetilde{\varphi}_{1,N} = 0, \\ &\widetilde{\psi}_{1,1} = 0, \ldots, \widetilde{\psi}_{1,N} = 0, \\ &\widetilde{\varphi}_{2,1}, \ldots, \widetilde{\varphi}_{2,N}, \\ &\widetilde{\psi}_{2,1}, \ldots, \widetilde{\psi}_{2,N} \end{aligned}$$

удовлетворяют системам линейных алгебраических уравнений (3.34) и (3.35) соответственно. По построению $v \in D(\mathcal{A}_R)$. Положим $f_2 := \mathcal{A}_R v$. Тогда, полагая $u_{f_2} := v$, получим равенства (3.33).

Аналогично, используя очевидное равенство $rank\mathbf{R}_1 = rank\mathbf{R}_1^1$, можно построить функцию $f_1 \in L_2(0,d)$, для которой

$$u'_{f_1}(0+0) := \widetilde{\varphi}_{1,0} = 1, \qquad u'_{f_1}(N+\theta-0) := \widetilde{\psi}_{2,N+1} = 0. \tag{3.36}$$

Следовательно, оператор A_R^0 фредгольмов, $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$ и $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

3b. Пусть теперь $rank\mathbf{R}_2^2 = N$. Тогда в силу теоремы Кронекера – Капелли система линейных алгебраических уравнений (3.32) несовместна, если для некоторого $f_2 \in L_2(0,d)$ справедливо $u'_{f_2}(N+\theta-0) \neq 0$, $u_{f_2} \in D(\mathcal{A}_R)$. Следовательно, для всех $f \in L_2(0,d)$ мы имеем

$$(f,g_2)_{L_2(0,d)} = u'_f(N+\theta-0) = 0$$

т. е. $g_2 = 0$.

С другой стороны, в силу теоремы Кронекера – Капелли система уравнений (3.31) совместна для любых $f \in L_2(0,d)$, так как $rank\mathbf{R}_1 = rank\mathbf{R}_1^1$. Аналогично части 3a доказательства можно показать, что существует функция $f_1 \in L_2(0,d)$ такая, что

$$(f_1,g_1)_{L_2(0,d)} = u'_{f_1}(0+0) = 1$$

т. е. $g_1 \neq 0$. Таким образом, оператор A_R^0 фредгольмов, $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$ и $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

4. Предположим теперь, что $G_1^1(0) \neq 0$ и $G_{N+1}^2(\theta) = 0$. В этом случае, исследуя только систему уравнений (3.31), аналогично части 3a можно показать, что оператор A_R^0 фредгольмов, $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$ и $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

5. Наконец, предположим, что $G_1^1(0) = 0$ и $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$.

Если $rank\mathbf{R}_2^2 = rank\mathbf{R}_2 = N+1$. Тогда, исследуя только систему уравнений (3.32), аналогично части 3a доказывается, что оператор A_R^0 фредгольмов, $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$ и $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

Если же $rank\mathbf{R}_2^2 = N$, мы также исследуем только систему уравнений (3.32). Однако, в пункте 3b показано, что из условия $rank\mathbf{R}_2^2 = N$ следует равенство $g_2 = 0$. Таким образом, $g = g_2 = 0$ и мы заключаем, что оператор A_R^0 фредгольмов, $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$ и $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 0$. $\square$

Пример 3.4.1. Рассмотрим оператор $R_Q : L_2\left(0,\dfrac{11}{5}\right) \to L_2\left(0,\dfrac{11}{5}\right)$, $(Ru)(x) = 10u(x) + (1+e^x)u(x+1) + e^{x-1}u(x-1)$, где $Q = \left(0,\dfrac{11}{5}\right)$. Тогда $N = 2$, $\theta = \dfrac{1}{5}$, а матрицы $R_1(x)$ и $R_2(x)$ принимают вид

$$R_1(x) = \begin{pmatrix} 10 & 1+e^x & 0 \\ e^x & 10 & 1+e^{x+1} \\ 0 & e^{x+1} & 10 \end{pmatrix}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{5},$$

$$R_2(x) = \begin{pmatrix} 10 & 1+e^x \\ e^x & 10 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{5} \leqslant x \leqslant 1.$$

Матрицы $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ имеют вид

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1+e & 10 & 1+e \\ 0 & e & 10 & e & 10 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 10 & 1+e^{\frac{1}{5}} & 10 & 1+e^{\frac{1}{5}} & 0 \\ e^{\frac{1}{5}} & 10 & e^{\frac{1}{5}} & 10 & 1+e^{\frac{6}{5}} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{6}{5}} & 10 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $R_1(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{5}$ и $R_2(x)$ при $\dfrac{1}{5} \leqslant x \leqslant 1$ удовлетворяют условию (3.4), при этом

$$G_1^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad G_3^2(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+e^{\frac{6}{5}} \end{pmatrix},$$

а условие (3.27), очевидно, выполнено.

Таким образом, в силу части 1 теоремы 3.4.1 оператор $A_R^0 : W_2^2\left(0,\dfrac{11}{5}\right) \supset D(A_R^0) \to L_2\left(0,\dfrac{11}{5}\right)$ фредгольмов, $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$ и $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

Пример 3.4.2. Рассмотрим оператор $R_Q : L_2\left(0,\dfrac{8}{3}\right) \to L_2\left(0,\dfrac{8}{3}\right)$, $(Ru)(x) = 20u(x) + (e^{\frac{5}{3}} - e^x)u(x+1) + e^{x-1}u(x-1)$, где $Q = \left(0,\dfrac{8}{3}\right)$. Тогда $N = 2$, $\theta = \dfrac{2}{3}$, а матрицы $R_1(x)$ и $R_2(x)$ принимают вид

$$R_1(x) = \begin{pmatrix} 20 & e^{\frac{5}{3}} - e^x & 0 \\ e^x & 20 & e^{\frac{5}{3}} - e^{x+1} \\ 0 & e^{x+1} & 20 \end{pmatrix}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{2}{3},$$

$$R_2(x) = \begin{pmatrix} 20 & e^{\frac{5}{3}} - e^x \\ e^x & 20 \end{pmatrix}, \qquad \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1.$$

Матрицы $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ имеют вид

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 20 & e^{\frac{5}{3}} - e & 20 & e^{\frac{5}{3}} - e \\ 0 & e & 20 & e & 20 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 20 & e^{\frac{5}{3}} - e^{\frac{2}{3}} & 20 & e^{\frac{5}{3}} - e^{\frac{2}{3}} & 0 \\ e^{\frac{2}{3}} & 20 & e^{\frac{2}{3}} & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{5}{3}} & 20 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $R_1(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{2}{3}$ и $R_2(x)$ при $\dfrac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1$ удовлетворяют условию (3.4), при этом

$$G_1^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad G_3^2(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а первое из условий (3.27), очевидно, выполнено.

Таким образом, в силу части 3 теоремы 3.4.1 оператор $A_R^0 : W_2^2\left(0,\dfrac{8}{3}\right) \supset D(A_R^0) \to L_2\left(0,\dfrac{8}{3}\right)$ фредгольмов, $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$ и $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Для первой краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения в дивергентном виде с переменными коэффициентами на интервале конечной длины получены условия на правую часть дифференциально-разностного уравнения, обеспечивающие гладкость обобщенного решения на всем интервале.
2. Для второй краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения в дивергентном виде с переменными коэффициентами на интервале конечной длины исследована разрешимость, а также гладкость обобщенного решения. Получены условия на правую часть дифференциально-разностного уравнения, обеспечивающие гладкость обобщенного решения на всем интервале конечной длины.
3. Для краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения в дивергентном виде с переменными коэффициентами со смешанными граничными условиями на интервале конечной длины доказана разрешимость, а также гладкость обобщенного решения на подынтервалах, порождаемых группой целочисленных сдвигов, и на всем интервале. Получены условия на правую часть дифференциально-разностного уравнения, обеспечивающие гладкость обобщенного решения такой задачи на всем интервале конечной длины.

В заключение автор выражает глубокую благодарность и большую признательность научному руководителю Скубачевскому А. Л. за постановку задачи, поддержку и внимание к работе.

Литература

1. Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л., Об одной задаче успокоения нестационарной системы управления с последействием, *Соврем. мат. Фундам. направл.*, 2019.— 65, № 4.— С. 547–556.

2. Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л., Об успокоении системы управления с последействием нейтрального типа, *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.*, 2020.— 490.— С. 81–84.

3. Антоневич А. Б., Об индексе и нормальной разрешимости общей эллиптической краевой задачи с конечной группой сдвигов на границе, *Дифференц. уравнения*, 1972.— 8, № 2.— С. 309–317.

4. Беллман Р., Кук К., *Дифференциально-разностные уравнения*, Мир, М., 1967.

5. Бицадзе А. В., Самарский А. А., О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач, *Докл. АН СССР*, 1969.— 185, № 4.— С. 739–740.

6. Власов В. В., Раутиан Н. А., *Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений*, МАКС Пресс, М., 2016.

7. Власов В. В., Раутиан Н. А., Исследование функционально-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами, *Докл. РАН*, 2017.— 477, № 6.— С. 641–645.

8. Данфорд Н., Шварц Дж., *Линейные операторы. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве*, Мир, М., 1966.

9. Иванов Н. О., Гладкость обобщенных решений краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения второго порядка со смешанными граничными условиями, *Соврем. мат. Фундам. направл.*, 2023.— 69, № 3.— С. 399–417.

10. Иванова Е. П., О коэрцитивности дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов, *Соврем. мат. Фундам. направл.*, 2016.— 62.— С. 85—99.

11. Иванова Е. П., О гладких решениях дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов, *Матем. заметки*, 2019.— 105, № 1.— С. 145–148.

12. Каменский А. Г., Краевые задачи для уравнений с формально симметричными дифференциально-разностными операторами, *Дифференц. уравнения*, 1976.— 12, № 5.— С. 815–824.

13. Каменский Г. А., Мышкис А. Д., Постановка краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами в старших членах, *Дифференц. уравнения*, 1974.— 10.— С. 409–418.

14. Каменский Г. А., Мышкис А. Д., Скубачевский А. Л., О гладких решениях краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа, *Укр. матем. журнал*, 1985.— 37, № 5.— С. 581–585.

15. Каменский Г. А., Скубачевский А. Л., *Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений*, МАИ, М., 1992.

16. Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

17. Красовский Н. Н., О периодических решениях дифференциальных уравнений с запаздыванием времени, *Докл. АН СССР*, 1957.— 114, № 2.— С. 252–255.

18. Красовский Н. Н., *Теория управления движением. Линейные системы.*, Наука, М., 1968.

19. Крейн С. Г., *Линейные уравнения в банаховых пространствах*, Наука, М., 1971.

20. Кряжимский А. В., Максимов В. И., Осипов Ю. С., О позиционном моделировании в динамических системах, *Прикл. мат. мех.*, 1983.— 47, № 6.— С. 883–890.

21. Лийко В. В., Скубачевский А. Л., Сильно эллиптические дифференциально-разностные уравнения со смешанными краевыми условиями в цилиндрической области, *Соврем. мат. Фундам. направл.*, 2019.— 65, № 4.— С. 635–654.

22. Лийко В. В., Скубачевский А. Л., Смешанные задачи для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений в цилиндре, *Матем. заметки*, 2020.— 107, № 5.— С. 693—716.

23. Лионс Ж. Л., Мадженес Э., *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Мир, М., 1971.

24. Муравник А. Б., Эллиптические задачи с нелокальным потенциалом, возникающие в моделях нелинейной оптики, *Матем. заметки*, 2019.— 105, № 5.— С. 747–762.

25. Муравник А. Б., Эллиптические дифференциально-разностные уравнения в полупространстве, *Матем. заметки*, 2020.— 108, № 5.— С. 764—770.

26. Мышкис А. Д., Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, *УМН*, 1949.— 4, № 5 (33).— С. 99–141.

27. Мышкис А. Д., *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом*, Гостехиздат. М.–Л., 1951.

28. Неверова Д. А., Гладкость обобщенных решений задачи Неймана для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения на границе соседних подобластей, *Соврем. мат. Фундам. направл.*, 2020.— 66, № 2.— С. 272–291.

29. Неверова Д. А., Скубачевский А. Л., О классических и обобщенных решениях краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами, *Матем. заметки*, 2013.— 94, № 5.— С. 702—719.

30. Онанов Г. Г., Скубачевский А. Л., Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела, *Прикл. мех.*, 1979.— 15, № 5.— С. 39–47.

31. Осипов Ю. С., О стабилизации управляемых систем с запаздыванием, *Дифференц. уравнения*, 1965.— 1, № 5.— С. 605–618.

32. Попов В. А., Скубачевский А. Л., Априорные оценки для эллиптических дифференциально-разностных операторов с вырождением, *Соврем. мат. Фундам. направл.*, 2010.— 36.— С. 125—142.

33. Попов В. А., Скубачевский А. Л., Гладкость обобщенных решений эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением, *Соврем. мат. Фундам. направл.*, 2011.— 39.— С. 130—140.

34. Рабинович В. С., О разрешимости дифференциально-разностных уравнений на $\mathbb{R}^n$ и в полупространстве, *Докл. АН СССР*, 1978.— 243, № 5.— С. 1134–1137.

35. Россовский Л. Е., Эллиптическое функционально-дифференциальное уравнение со сжатиями аргументов, *Докл. РАН*, 2006.— 411, № 2.— С. 161—163.

36. Россовский Л. Е., Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции, *Соврем. мат. Фундам. направл.*, 2014.— 54.— С. 3—138.

37. Россовский Л. Е., Тасевич А. Л., Об однозначной разрешимости функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями в весовых пространствах, *Дифференц. уравнения*, 2017.— 53, № 12.— С. 1679—1692.

38. Селицкий А. М., Скубачевский А. Л., Вторая краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, 2007.— 26.— С. 324–347.

39. Селицкий А. М., Третья краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения, *Соврем. мат. Фундам. направл.*, 2007.— 21.— С. 114–132.

40. Скубачевский А. Л., О спектре некоторых нелокальных эллиптических краевых задач, *Матем. сб.*, 1982.— 117, № 4.— С. 548—558.

41. Скубачевский А. Л., О некоторых нелокальных эллиптических краевых задачах, *Дифференц. уравнения*, 1982.— 18, № 9.— С. 1590–1599.

42. Скубачевский А. Л., Нелокальные эллиптические краевые задачи с вырождением, *Дифференц. уравнения*, 1983.— 19, № 1.— С. 457–470.

43. Скубачевский А. Л., Гладкость обобщенных решений первой краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения, *Матем. заметки*, 1983.— 34, № 1.— С. 105–112.

44. Скубачевский А. Л., Нелокальные краевые задачи со сдвигом, *Матем. заметки*, 1985.— 38, № 4.— С. 587–598.

45. Скубачевский А. Л., О некоторых задачах для многомерных диффузионных процессов, *Докл. АН СССР*, 1989.— 307, № 2.— С. 287—292.

46. Скубачевский А. Л., Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами, *Докл. АН*, 1992.— 324, № 6.— С. 1155—1158.

47. Скубачевский А. Л., К задаче об успокоении системы управления с последействием, *Докл. АН*, 1994.— 335, № 2.— С. 157–160.

48. Скубачевский А. Л., Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения, *УМН*, 2016.— 71, № 5.— С. 3–112.

49. Скубачевский А. Л., Иванов Н. О., Об обобщенных решениях второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами, *Соврем. мат. Фундам. направл.*, 2021.— 67, № 3.— С. 576–595.

50. Скубачевский А. Л., Иванов Н. О., Вторая краевая задача для дифференциально-разностных уравнений, *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.*, 2021.— 500.— С. 74–77.

51. Скубачевский А. Л., Иванов Н. О., Об обобщенных решениях второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами на интервале нецелой длины, *Матем. заметки*, 2022.— 111, № 6.— С. 873–886.

52. Скубачевский А. Л., Иванов Н. О., Обобщенные решения первой краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения в дивергентном виде

на интервале конечной длины, *Дифференц. уравнения*, 2023.— 59, № 7.— С. 881–892.

53. Скубачевский А. Л., Цветков Е. Л., Вторая краевая задача для эллиптических дифференциально-разностных уравнений, *Дифференц. уравн.*, 1989.— 25, № 10.— С. 1766—1776.

54. Скубачевский А. Л., Цветков Е. Л., Общие краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений, *Тр. Санкт-Петербург. мат. об-ва.*, 1998.— 5.— С. 223—288.

55. Солонуха О. В., Об одной нелинейной нелокальной задаче эллиптического типа, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2017.— 57, № 3.— С. 417–428.

56. Солонуха О. В., Об одном эллиптическом дифференциально-разностном уравнении с несимметричным оператором сдвигов, *Матем. заметки*, 2018.— 104, № 4.— С. 604–620.

57. Солонуха О. В., Обобщенные решения квазилинейных эллиптических дифференциально-разностных уравнений, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2020.— 60, № 12.— С. 2085—2097.

58. Хейл Дж., *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984.

59. Цветков Е. Л., Разрешимость и спектр третьей краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения, *Матем. заметки*, 1992.— 51, № 1.— С. 107–114.

60. Цветков Е. Л., О гладкости обобщенных решений третьей краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения, *Укр. мат. ж.*, 1993.— 45, № 8.— С. 1140—1150.

61. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б., *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, Наука, М., 1971.

62. Эльсгольц Л. Э., Устойчивость решений дифференциально-разностных уравнений, *УМН*, 1954.— 9, № 4 (62).— С. 95–112.

63. Bowder F., Non-local elliptic boundary value problems, *Amer. J. Math.*, 1964.— 86.— P. 735–750.

64. Carleman T., Sur la theorie des equations integrales et ses applications, *Verhandlungen des Internat. Math. Kongr., Zurich*, 1932.— 1.— P. 132–151.

65. Feller W., The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations, *Ann. of Math.*, 1952.— 55, № 3.— P. 468–519.

66. Hartman F., Stampacchia G. *On some nonlinear elliptic differential-functional equations*, *Acta Math.*, 1966.— 115.— P. 271—310.

67. Liiko V. V., Mixed boundary value problem for strongly elliptic differential difference equations in a bounded domain, *Russian J. Math. Phys.*, 2021.— 28, № 2.— P. 270–274.

68. Nazaikinskii V. E., Savin A. Yu., Sternin B. Yu., *Elliptic theory and noncommutative geometry. Nonlocal elliptic operators*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 2008.

69. Neverova D. A., Generalized and classical solutions to the second and third boundary-value problem for differential-difference equations, *Funct. Differ. Equat.*, 2014.— 21.— P. 47—65.

70. Neverova D. A., Regularity of solutions to the Robin problem for differential-difference equations, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2020. Published online. DOI: 10.1080/17476933.2020.1833872

71. Onanov G. G., Skubachevskii A. L., Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells, *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017.— 12, № 6.— P. 192–207.

72. Onanov G. G., Tsvetkov E. L., On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory, *Russ. J. Math. Phys.*, 1995.— 3, № 4.— P. 491–500.

73. Rossovskii L. E., Elliptic functional differential equations with incommensurable contractions, *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017.— 12, № 6.— P. 1–14.

74. Rossovskii L. E., Tovsultanov A. A., Elliptic functional differential equation with affine transformations, *J. Math. Anal. and Applications*, 2019.— 480, № 2.— P. 1–9.

75. Skubachevskii A. L., The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations, *J. Differential Equations*, 1986.— 63, № 3.— P. 332–361.

76. Skubachevskii A. L., *Elliptic functional differential equations and applications*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1997.