Федеральное государственное автономное

образовательное учреждение высшего образования

«Российский университет дружбы народов»

(РУДН)

На правах рукописи

Жан Поль Владимир

Методика расчёта напряжённо-деформированного состояния линейчатых геликоидов разных типов

2.1.9. Строительная механика

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель

кандидат технических наук, доцент

Рынковская Марина Игоревна

Москва–2022

Содержание

Введение

Актуальность темы исследования. В современном строительстве в условиях урбанизации проектировщики стараются максимально уменьшить площадь застройки, чтобы сэкономить пространство. В таких условиях становиться актуальным развитие новых архитектурных форм на основе новых геометрических моделей.

В промышленном и гражданском строительстве основное применение геликоидальных и винтообразных поверхностей –проектирование различных пандусов и рамп, лестниц многоэтажных зданий. Многие дорожные сооружения имеют форму винтообразных поверхностей, например, конструкции мостов, эстакад, пересечений в нескольких уровнях, транспортные сооружения могут быть как железобетонными, так и стальными. В большинстве архитектурно-строительных объектов традиционно применяется один тип винтовой линейчатой поверхности – прямой геликоид, в то время как другие типы винтовых линейчатых поверхностей намного реже используются еизвестны архитекторами и проектировщиками.

Основным методом современной строительной механики является метод конечных элементов, подавляющее большинство практических расчетов конструкций выполняется на его основе в разнообразных программных комплексах. Метод конечных элементов универсален и позволяет при наличии мощного компьютера рассчитывать практически любые сооружения, имеющие сложную геометрию, структуру и большой объем. На современном этапе развития науки и техники прогресс в создании программных средств и мощных компьютеров привел к тому, что подавляющее большинство инженерных расчетов выполняется по методу конечных элементов при помощи соответствующих программных комплексов, которые позволяют моделировать и рассчитывать объекты всевозможных форм и размеров.

Однако не во всех программных комплексах, основанных на методе конечных элементов, имеются инструменты для создания сложных геометрических форм, зачастую создание нестандартной геометрии сопряжено со значительными усилиями и преодолением сложностей, связанных с использованием для этого стандартных функций и геометрических примитивов. При расчете сложных объектов методом конечных элементов для получения достоверных результатов зачастую требуется дополнительная работа с топологией сетки, оптимизацией размера конечного элемента.

Для проведения верификационных расчетов и оценки достоверности результатов целесообразным представляется применение подходов, основанных на разных методиках, в том числе аналитических и численно-аналитических, что требует развития методик и применения современных инструментов от проверенных расчетных программных комплексов разных уровней сложности до различных языков написания программ, алгоритмов и математических решателей.

При этом многие аналитические методики расчета тонких упругих оболочек в прошлом сводились к упрощениям систем и рассмотрению частных случаев, прежде всего, в части перехода к расчету пологих оболочек и фокусировании оболочках со срединными поверхностями в форме ограниченного набора аналитических поверхностей.

Степень разработанности темы исследования. Анализ литературных источников по теме диссертации показал, что исследованиями прочности геликоидальных оболочек занимался ряд отечественных и зарубежных ученых: Л.И. Соломон, В.Г. Рекач, С.И. Трушин, А.В. Александров, А.Р. Ярошенко, В.С. Люкшин, В.А. Турышев, А.Е. Белкин, И.Я. Бейлин, А. Лисхольм, А.Л. Мартиросов, S. Bottcher, S. Stahl, F.Toshio, S. Tadashi и другие. Только с 1990-х годов разные подходы к определению их НДС предлагали С.Н. Кривошапко, С.Б. Косицын, Н.М. Якупов, J.G. Simmonds, A.W. Leissa, Ю.В. Немировский, J. Knabel, Г.Ч. Баджория, М.К. Джаявардена, С.Ф. Пилипака, Сальман А.Д., С.М. Халаби, М.И. Рынковская, Е.М. Тупикова и др. Исследования проводились как аналитическими, численно-аналитическими, так и численными методами. Однако исследования в основном фокусировались на определенных типах геликоидов, в то время как сравнительный анализ НДС линейчатых геликоидов нескольких типов между собой представлен не был.

Целью исследования является разработка методик определения НДС линейчатых геликоидов разных типов и сравнение работы винтовых конструкций, выполненных в форме разных типов геликоидов.

Задачи исследования. Для достижения цели исследования были поставлены следующие задачи:

1) Проанализировать геометрию пяти типов линейчатых геликоидов: прямой, косой, развертывающийся, псевдо-развертывающийся, конволютный.
2) Разработать методику построения геометрических моделей линейчатых геликоидов в удобном для дальнейшего расчета и инженерного внедрения виде, в том числе с применением аддитивных технологий.
3) Разработать методику расчета НДС прямого пологого геликоида, провести верификацию результатов.
4) Разработать методику расчета НДС прямого непологого геликоида, провести верификацию результатов.
5) Оценить границы пологости при расчете аналитическими и численно-аналитическими методами и проанализировать влияние допущений пологости на результаты.

6) Провести верификационный и сравнительный анализ расчетов НДС разных типов линейчатых геликоидов с применением аналитических и численных методов.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

1. Разработана методика построения 3D моделей тонких винтовых конструкций в форме линейчатых геликоидов, заданных параметрическими уравнениями, в удобном для дальнейшего расчета и инженерного внедрения виде, в том числе с применением аддитивных технологий.

2. Разработана методика для численно-аналитического расчета НДС непологого прямого геликоида с разными параметрами шага винта.

3. Разработана методика для численно-аналитического расчета НДС пологого прямого геликоида с разными параметрами шага винта, позволяющая получить результаты в широком диапазоне, в том числе при самых малых, близких к нулю, параметрах шага винта (что не позволяли существующие ранее аналитические методики).

4. Проведен анализ влияния допущений пологости, заложенных в основы каждой методики, на полученные результаты для геликоидов с различными геометрическими параметрами. Для прямых геликоидов проведено исследование границ пологости, сформулированных в зависимости от шага винта.

5. Проведен сравнительный анализ работы под нагрузкой винтовых конструкций в форме разных типов линейчатых геликоидов.

Теоретическая и практическая значимость работы:

1. Разработанные на основе моментной теории методики расчета оболочек в форме пологого и непологого прямого геликоида на действие статических нагрузок могут быть использованы в практических инженерных расчетах и научных исследованиях.

2. Предложенные автором программные приложения могут быть использованы для разработки нового программного обеспечения для

использования в специализированных исследованиях, учебном процессе и практических расчетах.

3. Впервые установлено, что НДС винтовых конструкций в форме линейчатых геликоидов разных типов отличается при одинаковых внешних геометрических параметрах и нагрузках, а следовательно, рассмотрение разных типов геликоидов и выбор типа для конкретных практических задач и условий на предпроектном этапе может повысить эффективность конструкции и снизить затраты на ее возведение, т.е. проектировщики могут найти наиболее оптимальный тип геликоида для заданного параметра оптимизации.

4. Рассмотрена и реализована методика В.Г. Рекача, позволяющая произвести точный аналитический расчет прямых геликоидов.

Методология и методы исследования.

В основе методов исследований в данной работе лежит классическая теория тонких упругих оболочек Кирхгофа-Лява. Для решения уравнений применяемой математической модели применяются аналитические методы решения дифференциальных уравнений, в частности, разложение решения в ряды Фурье, численные методы решения дифференциальных уравнений, такие как метод Рунге-Кутта-Фельберга. Численные расчеты осуществляются на основе метода конечных элементов (МКЭ) в перемещениях.

Положения, выносимые на защиту:

1. Модифицированная аналитическая методика В.Г. Рекача для расчета пологих прямых геликоидов, разработанный на ее основе алгоритм и авторская программа в среде Mathcad.

2. Численно-аналитическая методика расчета непологого прямого геликоида, разработанный на её основе алгоритм, авторская программа в среде Maple.

3. Численно-аналитическая методика расчета пологого прямого геликоида, разработанный на её основе алгоритм, авторская программа в среде Maple.

4. Методика 3D моделирования геликоида с целью получения аналитически точной (заданной аналитическими уравнениями) объемной модели с заданной толщиной в пригодном для дальнейшего расчета и проектирования виде, а также для реализации с применением аддитивных технологий.

Степень достоверности и апробация результатов, полученных в ходе исследования, обеспечивается корректным использованием обоснованных положений, методов строительной механики и сопротивления материалов, а также путем сравнения аналитических результатов с результатами трех вычислительных программ на базе МКЭ (СКАД, ЛИРА, ANSYS) с учетом моделирования необходимых условий.

Публикации Основные результаты диссертационного исследования докладывались на следующих научно-технических конференциях:

1. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 23-25-February 2018. Международная конференция ICBMC2018, г. Нячанг, Вьетнам, 23-25- февраля 2018 г.

2. The 7th International Conference on Engineering Graphics and Design, in, Belgrade, Serbia. 7-я Международная конференция по инженерной графике и дизайну в г. Белград, Сербия, 18-21 сентября 2020 г.

3. XI международная молодежная конференция по естественным и техническим дисциплинам «Научному прогрессу – творчество молодых», г. Йошкар-Ола, 22-23 апреля 2016 г.

4. XIV международная молодежная научная конференция по естественнонаучным и техническим дисциплинам, г. Йошкар-Ола, 19-20 апреля 2019 г.

5. Конференция «Современные исследования в области прикладных инженерных наук», г. Москва, 6-8 декабря 2016 г.

6. Международный форум International Academy of Astronautics (IAA) SciTech Forum 2018, г. Москва, 13-15 ноября 2018 г.

Публикации. Основные положения диссертационной работы опубликованы в 8 печатных работах, 1 из них в ведущих рецензируемых изданиях, определенных ВАК РФ, и 7 в изданиях, представленных в базе данных Scopus.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, пяти приложений и списка литературы, включающего 105 наименований, в том числе на иностранном языке. Основной текст работы изложен на 148 страницах машинописного текста, объем приложений составляет 38 страниц. Работа включает 73 рисунка и 13 таблиц.

ГЛАВА 1. ГЕОМЕТРИЯ ЛИНЕЙЧАТЫХ ВИНТОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Геликоидальная поверхность возникает, когда некоторая образующая линия вращается вокруг перпендикулярной ей оси и одновременно движется вдоль этой линии с постоянной скоростью [1]. Согласно [2] геликоид представляет собой поверхность, образованную линиями, которые проходят через каждую точку спирали и пересекают ось Z.

Геликоид – это винтовая поверхность, образованная линией, которая всегда пересекает неподвижную ось под прямым углом и которая вращается равномерно по мере того, как точка пересечения равномерно перемещается вдоль оси и пересекает цилиндр, ось которого совпадает с осью спирали. Геликоид имеет форму резьбы винта. Геликоид представляет собой минимальную поверхность. Пересечение геликоида с цилиндром создает спираль – винтовую линию. Линейный геликоид, который получается, когда образующая кривая является прямой линией, является правым коноидом, направляющими которого являются прямая и винтовая линии.

Геликоид имеет разнообразные формы, в зависимости от вида образующей, шага направляющей винтовой линии и других параметров.

Геликоид и катеноид являются частями семейства геликоидно-катеноидных минимальных поверхностей [3].

Геликоиды играют очень важную роль в качестве минимальных поверхностей [4, 5, 6].

Обобщённый (генерализованный) геликоид или геликоид общего вида - поверхность в евклидовом пространстве, образованная вращением и одновременным смещением кривой, кривой профиля, вдоль линии, её оси. Любая точка данной кривой является начальной точкой круговой спирали. Если кривая профиля принадлежит плоскости, проходящей через ось, она называется меридианом обобщённого геликоида. Меридиан геликоида представляет собой линию, которая пересекает ось ортогонально.

Основными типами обобщенных геликоидов являются:

- Линейчатые обобщенные геликоиды. Кривыми профиля таких геликоидов являются линии,
- Круговые обобщенные геликоиды. Кривые профиля этих геликоидов представляют собой окружности.

Геликоид общего вида, согласно [1], можно описать следующими параметрическими уравнениями в декартовых координатах:

$$x = \rho\cos(\alpha\theta), \ \ y = \rho\sin(\alpha\theta), \quad z = \theta, \tag{1.1}$$

где ρ и θ находятся в диапазоне от отрицательной бесконечности до положительной бесконечности, в то время как α является константой. Если α положителен, то геликоид называется правым; если отрицателен, то он называется левым.

Геликоид имеет главные кривизны: $\pm\frac{\alpha}{(1+\alpha^2\rho^2)}$

Сумма этих величин дает среднюю кривизну (в случае прямого геликоида – минимальной поверхности – средняя кривизна будет равна нулю), а произведение указанных выше величин дает Гауссову кривизну.

Геликоид гомеоморфен плоскости, то есть существует взаимно однозначное соответствие между этими двумя топологическим пространствами, при котором оба взаимно обратных отображения, определяемые этим соответствием, непрерывны. Чтобы увидеть это, предположим, что α непрерывно уменьшается от заданного значения до нуля. Каждое промежуточное значение α будет описывать различные геликоиды, пока α = 0 не будет достигнуто и геликоид не станет плоскостью.

И наоборот, плоскость можно превратить в геликоид, выбрав линию или ось на плоскости и затем скрутив плоскость вокруг этой оси:

$$\pi\ [R\sqrt{(R^2+h^2)}+\ h^2\ *In(\frac{R+\sqrt{R^2+h^2}}{h})] \tag{1.2}$$

1.1.Пять основных видов геликоидов

1.1.1. Прямой геликоид

Прямой геликоид – это линейчатая поверхность, которая имеет образующую, пересекающую некоторую линию оси под прямым углом, образующая одновременно вращается с некоторой угловой скоростью вокруг этой оси и перемещается поступательно вдоль этой же оси с постоянной скоростью, пропорционально зависящей от угловой скорости (Рис. 1.1). Прямой геликоид может быть правым, если его подъем происходит при вращении против часовой стрелки, и левым, если, наоборот, против часовой стрелки.

Формы задания поверхности прямого геликоида могут быть представлены в разных видах.

Явная форма уравнения: $z = c \cdot \mathbf{arctan}\frac{y}{x}$,

Приняв за ось геликоида ось z и за уравнение профиля z = f (x), имеем уравнения геликоида в параметрической форме:

$$x=u*\cos v,\ y = u*\sin v,\ z = cv + f(u), \tag{1.3}$$

где c — смещение образующей AB при повороте ее на 1 рад или отношение скорости поступательного движения к круговой скорости; u, v — криволинейные координаты точки C геликоида; |u| — расстояние от оси z геликоида; v — угол поворота образующей AB, отсчитываемый от плоскости z0x соответственно; f(u) — уравнение профиля AB.

Для прямого геликоида f(u) = 0 уравнения принимают вид:

x=u*cos v, y = u* sin v, z = cv, (1.4)

Коэффициенты первой квадратичной формы (функция на векторном пространстве, задаваемая однородным многочленом второй степени от координат вектора) дляповерхности геликоида записываются в виде:

$$A^2 = 1 + f_u^2(u) \quad (1.5)$$

$$F = ABcos\chi = cf_u(u) \quad (1.6)$$

$$B^2 = u^2 + c^2 \quad (1.7)$$

Коэффициенты второй квадратичной формы для геликоида имеют вид:

$$L = uf_{uu}(u)/\Delta \quad (1.8)$$

$$(M = -c/\Delta \quad (1.9)$$

$$N = u^2 f_u(u)/\Delta \quad (1.10)$$

Где:

$$\Delta = \sqrt{A^2B^2 - F^2} = \sqrt{[1 + f_u^2(u)]u^2 + c^2}$$

В случае, если использовать упрощенные гипотезы В.Г. Рекача о малости квадрата величины «c» по сравнению с квадратом «u», квадратичные формы и главные кривизны принимают вид:

A = 1, F = 0, $B^2 = r^2 + c^2$;

L = N = 0, M = –c /B;

kr = 0, kv = 0, k1 = k2 = c/(r2 + c2);

K = –c2/(r2 + c2)2 < 0, H = 0, $\chi = \pi/2$.

где χ– угол между координатными линиями r и v.

Если рассматривать геликоид как подвид коноида, то геликоид имеет прямолинейную образующую и две направляющие, одна из которых есть ось вращения, а вторая – винтовая линия. Прямым называется геликоид, у которого угол между образующей и осью вращения составляет 90 градусов. Если угол принимает другое значение, то геликоид называется косым.

Векторное уравнение: $r(u,v) = re_r + cve_z$

где значение «c» связано с выводом L винтовой поверхности по условию L =2πc.

Для построения модели прямого геликоида в программе MathCAD14 можно воспользоваться следующим алгоритмом:

$M := 50 \qquad N := 50$

$i := 0..M \qquad j := 0..N \qquad U1 := 10\cdot m$

$UO := 2\cdot m$

$\Delta U := \dfrac{U1 - UO}{M}$

$U_i := UO + i\cdot\Delta U$

$VO := 0$

$V1 := 6\pi \qquad \Delta V := \dfrac{V1 - VO}{N}$

$V_j := VO + j\cdot\Delta V \qquad b := 2.m$

$x_{i,j} := U_i\cdot\cos(V_j)$

$y_{i,j} := U_i\cdot\sin(V_j)$

$z_{i,j} := b\cdot V_j$

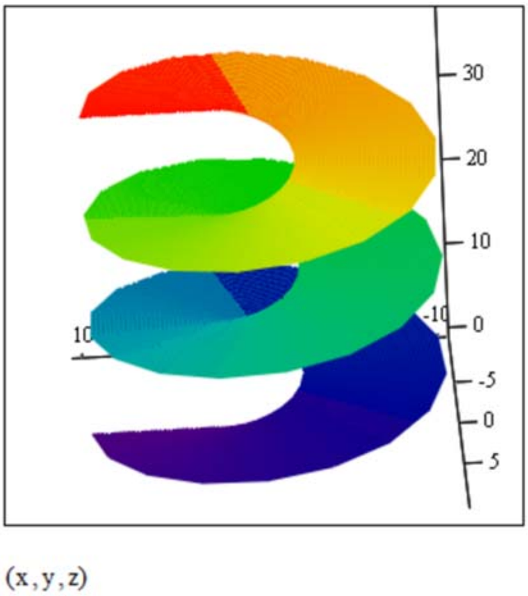


Рис. 1.1. Прямой геликоид.

Образующие прямого геликоида параллельны плоскости паралеллизма, перпендикулярной оси геликоида. Иначе прямой геликоид можно назвать прямым спиральным коноидом. Прямой геликоид является минимальной поверхностью.

Впервые эта поверхность была открыта Дж. Менье в 1776 г. Е.Каталан в 1842 доказал, что прямой геликоид является единственной линейчатой минимальной поверхностью. Кроме того, линейчатая поверхность, которая является минимальной, обязательно является частью прямого геликоида. Прямой геликоид также можно назвать также винтовым , если заметить, что он образуется с помощью двух соосных винтовых линий и плоскости паралеллизма.

У.Дини в 1865 году заметил, что прямой геликоид можно приближенно развернуть на поверхность катеноида, при этом винтовые линии прямого геликоида будут накладываться на параллели катеноида, а прямые образующие геликоида будут накладываться на его меридианы.

Рассматриваемая поверхность может быть классифицирована как коноид, так ее образующей является прямая линия, которая всегда параллельна некоторой плоскости (в данном случае она параллельна к плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра), а поверхность имеет две направляющие, представленные винтовой линией и прямолинейной осью цилиндра. Другое название прямого геликоида – винтовой коноид.

1.1.2. Косой геликоид

Косым геликоидом называется поверхность, которая имеет образующую прямую,которая вращается с постоянной угловой скоростью вокруг заданной оси и одновременно движется вокруг этой оси с пропорциональной линейной скоростью. Угол, под которым образующая геликоида пересекает его ось, не равен 90 градусов (Рис. 1.2.).

Формы уравнения поверхности косого геликоида могут быть представлены в разных видах.

Явная форма уравнения: $z = c\arctan\frac{y}{x} + k\sqrt{x^2 + y^2}$

где c - смещение образующей прямой после ее вращения на один радиан;

k = cotgα

Первый вид параметрических уравнений:

$$x = x(r,v) = r\cos v,\ \ y = y(r,v) = r\sin v,\ \ z = cv + kr. \qquad (1.11)$$

Коэффициенты основных квадратичных форм поверхности:

$A^2 = 1 + k^2,\ F = ck,\ B^2 = r^2 + c^2$

$L = 0,\ M = -\frac{c}{\sqrt{B^2 - F^2}} \qquad N = \frac{kr^2}{\sqrt{B^2 - F^2}}$

$k_r = 0 \quad k_v = \frac{N}{B^2},\ K < 0, \cos\chi = \frac{ck}{\sqrt{r^2 + c^2}}.$

Здесь k – угловой коэффициент, k = cotan α; χ – угол между координатными линиями r и v. Сечение косого геликоида плоскостью z = 0 дает

ρ = cvtgα.

Второй вариант параметрических уравнений:

x = x(u,v) = u sin α cos v, y = y(u,v) = u sin α sin v, z = cv + u cos α, (1.12)

где α - острый угол оси геликоида (оси z) с прямой образующей.

Коэффициенты основных квадратичных форм поверхности:

$$A = 1,\ F = c\cos\alpha,\ B^2 = u^2\sin^2\alpha + c^2,$$

$$L = 0,\ M = -c\frac{\sin\alpha}{\sqrt{u^2+c^2}},\ N = \frac{u^2\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{u^2+c^2}}б$$

$$k_u = 0,\ k_v = \frac{N}{B^2},\ K = -\frac{c^2}{(u^2+c^2)^2} < 0,\ H = \frac{u^2+2c^2}{2(u^2+c^2)^{3/2}}\mathrm{cotan}\alpha.$$

Уравнение косого геликоида в векторном виде:

$\mathbf{r}$(u,φ) = p(u)$\mathbf{e}_r$ +[l_p(u) + aφ]$\mathbf{e}_z$. (1.13)

Величина a связана с выводом L спирали с помощью соотношения:

L = 2πa,

l = ctgα определяет угол наклона образующей

p(u) = mu.

Угол χ между координатными линиями u и φ можно определить по формуле:

$$\cos\chi = \frac{lap(u)}{AB} = \frac{lam}{AB}.$$

Косой геликоид может быть построен в среде MathCAD14 с помощью следующего алгоритма:

$M := 80$ $\quad$ $N := 80$

$i := 0..M$ $\quad$ $j := 0..N$

$U0 := 0$ $\quad$ $U1 := 2$

$\Delta U := \dfrac{U1 - U0}{M}$ $\quad$ $c := 2$ $\quad$ $k := 4$

$b := 1$

$U_i := U0 + i \cdot \Delta U$

$V0 := 0.4\pi$ $\quad$ $V1 := 6 \cdot \pi$

$\Delta V := \dfrac{V1 - V0}{N}$

$V_j := V0 + j \cdot \Delta V$

$X_{i,j} := U_i \cdot \cos\left(V_j\right)$

$Y_{i,j} := U_i \cdot \sin\left(V_j\right)$

$Z_{i,j} := c \cdot V_j + k \cdot U_i$

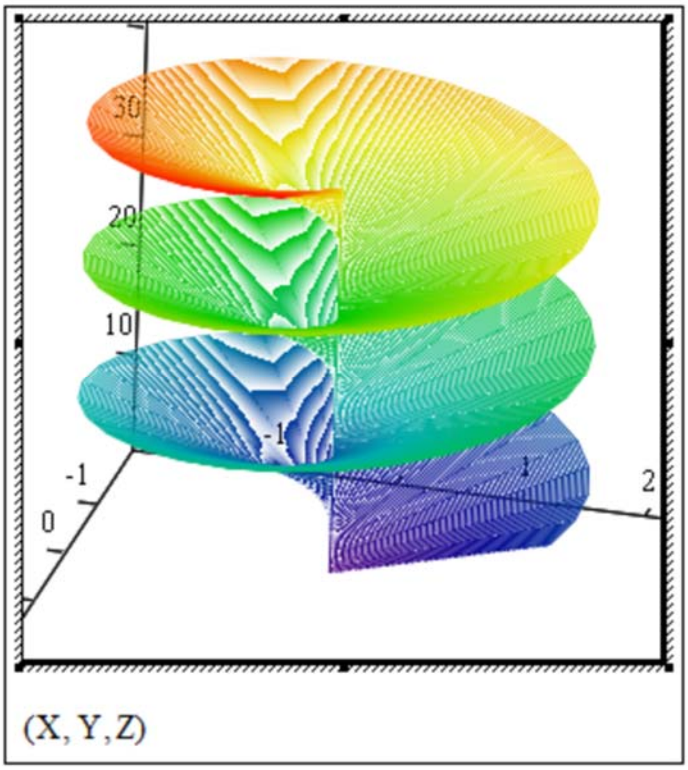


Рис. 1.2. Косой геликоид.

Для геликоида можно построить направляющий конус, образующие которого будут параллельные образующим соответствующего геликоида. Таким образом, если поступательная составляющая скорости равна нулю, то образующие геликоида образуют коническую поверхность, если при этом и угловая составляющая равна нулю, то они образуют пластину, то есть в предельных случаях косой геликоид может вырождаться в конус и в пластину.

В общем случае каждая точка образующей прямой при движении образует спираль. Спирали одного и того же вида будут находиться в пересечениях соосных кольцевых цилиндров с косым геликоидом.

Можно осуществить примерное развертывание косого геликоида с помощью изгиба на поверхности однополостного гиперболоида вращения. Спирали геликоида будут наложены на параллели гиперболоида, а прямолинейные образующие будут накладываться на прямолинейные образующие однополостного гиперболоида вращения.

1.1.3. Развертывающийся геликоид

Развертывающийся геликоид относится к классу торсовых поверхностей. Его образующими являются касательные к некоторой винтовой линии, имеющей постоянный шаг, которая построена на круговом цилиндре радиуса α (Рис. 1.3.). Разверткой торса-геликоида на плоскость будет кольцевая область, органическая соосными окружностями.

Развертывающийся геликоид может быть задан несколькими видами уравнений.

Формы уравнения поверхности развертывающегося геликоида:

$$x = x(u,v) = a\cos v - au\sin v / m, \tag{1.15}$$

$$y = y(u,v) = a\sin v + au\cos v / m, \tag{1.16}$$

$$z = z(u,v) = bv + bu/m, \qquad (1.17)$$

где $m = \sqrt{a^2 + b^2}$, b –это шаг винтовой линии u = 0,

v - угол, измеренный от оси Ox,

Коэффициенты основных квадратичных форм поверхности и его основные кривизны:

$$A = 1, F = m, B^2 = m^2 + u^2 a^2 / m^2, N = uab/m^2,$$
$$L = M = 0, k_u = k_1 = 0, k_v = N/B^2, k_2 = b/(au).$$

Координата u измеряется вдоль образующей прямой. Координаты v измеряются по спирали вдоль направляющей винтовой линии и являются криволинейными. Система координат u, v является сопряженной неортогональной.

Параметрические уравнения:

$$x = x(u,s) = a\cos\frac{s}{m} - \frac{au}{m}\sin\frac{s}{m}, \quad y = y(u,s) = a\sin\frac{s}{m} + \frac{au}{m}\cos\frac{s}{m},$$
$$z = z(u,s) = (s+u)b/m, \qquad (1.18)$$

где s - длина дуги ребра возврата, s = mv.

Коэффициенты основных квадратичных форм поверхности и его основные кривизны:

$$A = F = 1, \; B^2 = 1 + u^2 a^2 / m^4,$$
$$N = abu/m^4, \; L = M = 0, \; k_u = k_1 = 0, \; k_s = N/B^2, \; k_2 = b/(au).$$

Параметрические уравнения:

$$x = x(u,v) = a\cos v - u\cos\varphi\sin v, \qquad (1.19)$$

$$y = y(u,v) = a\sin v + u\cos\varphi\cos v, \qquad (1.20)$$

$$z = z(u,v) = a\,v\,\mathrm{tg}\varphi + u\sin\varphi, \qquad (1.21)$$

где φ - угол наклона прямолинейных генераторов к плоскости xOy, tgφ= b/a.

Коэффициенты основных квадратичных форм поверхности:

A = 1, F = a /cosφ, $B^2 = F^2 + u^2\cos^2\varphi$, $B^2 – F^2 = u^2\cos^2\varphi$,

L = M = 0, N = usinφcosφ.

Параметрические уравнения:

$$x = x(u,s) = a_0 \cos^2\varphi(\cos\frac{s}{m} - \frac{u}{m}\sin\frac{s}{m}),$$
$$y = y(u,s) = a_0 \cos^2\varphi(\sin\frac{s}{m} + \frac{u}{m}\cos\frac{s}{m}),\ z(u,s) = (s+u)\sin\varphi, \tag{1.22}$$

где $m = a_0\cos\varphi,\ a = a_0\cos^2\varphi,\ b = a_0\sin\varphi\cos\varphi,$

где a_0- радиус развертки винтового ребра возврата торса-геликоида на плоскость.

Коэффициенты основных квадратичных форм поверхности:

$$A = F = 1, B^2 = 1 + u^2/a_0^2 = (a_0^2 + u^2)/a_0^2, N = u\text{tg}\varphi/a_0^2, L = M = 0.$$

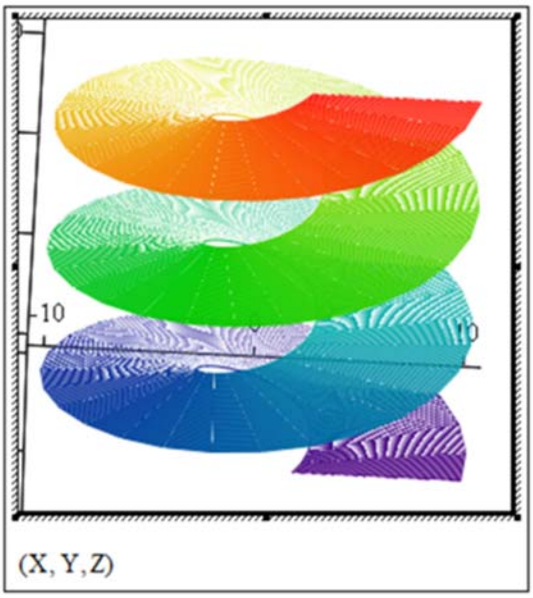


Рис. 1.3. Развертывающийся геликоид.

Развертывающийся геликоид может быть построен в среде MathCAD14 с помощью следующего алгоритма:

$$M := 80 \qquad N := 80$$

$$i := 0..M \qquad j := 0..N$$

$$\alpha 0 := 0 \qquad \alpha n := 4 \qquad a := 1 \qquad b := 1$$

$$\Delta\alpha := \frac{\alpha n - \alpha 0}{M} \qquad \alpha_i := \alpha 0 + i \cdot \Delta\alpha$$

$$v0 := 0 \qquad vn := 10 \cdot \pi \qquad m := \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$v_j := v0 + j \cdot \Delta v \qquad \Delta v := \frac{vn - v0}{N}$$

$$x_{i,j} := \alpha_i \cdot \cos(v_j) - a \cdot \alpha_i \cdot \sin\left(\frac{v_j}{m}\right)$$

$$y_{i,j} := a \cdot \sin(v_j) + a \cdot \alpha_i \cdot \cos\left(\frac{v_j}{m}\right)$$

$$z_{i,j} := b \cdot v_j + b \cdot \left(\frac{v_j}{m}\right)$$

Если мы пересекаем открытый развертывающийся геликоид круговыми цилиндрами с радиусами R_{int} и R_{ext}, оси которых совпадают с осью z открытого геликоида, то их пересечения будут цилиндрическими винтовыми линиями. Поверхность между этими линиями называется винтом Архимеда.

На рис. 1.3 изображен один виток винтовой поверхности, образованной движением образующего отрезка AB. Образующая пересекает ось под углом 60°. Поступательная и угловая скорости движения отрезка относительно прямой пропорциональны. При пересечении открытого развертывающегося геликоида плоскостью, перпендикулярной его оси, в поперечном сечении получится круг.

При движении точки A и B, а также все внутренние точки отрезка образуют цилиндрические винтовые линии, и, таким образом, чем больше проекций этих винтовых линий провести, тем точнее можно изобразить графически очерк поверхности. Формой его будут огибающие линии всех этих проекций. Зачастую, чтобы упростить построение, проводят только прямые, одновременно касающиеся проекций винтовых линий. Поверхность торс-геликоида также может быть прямой, если угол наклона образующей к оси направляющего цилиндра равен 90°, или, в противном случае, при всех остальных углах, косой.

Поверхность развертывающегося геликоида образована однопараметрической системой плоскостей, поэтому аппроксимация открытых развертывающихся геликоидов многогранными поверхностями является легким процессом.

1.1.4. Конволютный геликоид

Согласно определению из [1] «конволютный геликоид образуется при помощи прямой линии AB, движущейся в пространстве, и все время пересекающейся с винтовой линией, касаясь при этом боковой поверхности прямого кругового цилиндра радиусом a. Оси винтовой линии и цилиндра совпадают, а образующая прямая и ось скрещиваются не под прямым углом».

Конволютные поверхности относятся к неразвертывающимся поверхностям, единственной открытой развертываемой конволютной поверхностью является развертывающийся или эволюционный геликоид, являющийся частным случаем конволютного геликоида. При этом прямой конволютный геликоид, образуемый винтовым движением прямой линии, не проходящей через ось геликоида, но лежащей в перпендикулярной его оси плоскости, называется псевдо-развертывающимся геликоидом и также является частным случаем конволютного геликоида.

Конволютный геликоид может быть задан несколькими видами уравнений.

Параметрическая форма уравнения:

$$x = x(t,v) = a\cos v - t\sin\gamma\sin v\ , \tag{1.23}$$

$$y = y(t,v) = a\sin v + t\sin\gamma\cos v\ , \tag{1.24}$$

$$z = z(t,v) = pv + t\cos\gamma; \tag{1.25}$$

где а - кратчайшее расстояние по прямой линии АВ от оси Oz до грани геликоида; γ - угол образующей прямой АВ с осью винта Oz; параметр t определяет расположение точки М, лежащей на прямой образующей. Уравнения дают два типа геликоида, когда t > 0 и t < 0.

Коэффициенты основных квадратичных форм поверхности и кривизны:

$$A = 1,\ F = a\sin\gamma + p\cos\gamma,\ B^2 = a^2 + p^2 + t^2\sin^2\gamma,$$

$$L = 0,$$
$$M = \frac{\sin\gamma(a\cot\gamma - p)}{\sqrt{(a\cot\gamma - p)^2 + t^2}},$$
$$N = \frac{[a(a\cot\gamma - p) + t^2\sin\gamma\cos\gamma]}{\sqrt{(a\cot\gamma - p)^2 + t^2}}$$

$$K = -\frac{(a\cot\gamma - p)^2}{[(a\cot\gamma - p)^2 + t^2]^2} < 0$$

Угол χ между координатными линиями t и v вычисляется с помощью формулы:

$$\cos\chi = (a\sin\gamma + p\cos\gamma)/\sqrt{a^2 + p^2 + t^2\sin^2\gamma}. \tag{1.26}$$

Прямолинейные образующие ортогональны винтовым линиям v, если постоянный угол γ вычисляется по формуле:

tgγ = –p/a.

Приняв γ = π/2, можно получить прямой конволютный геликоид или псевдо-развертывающийся геликоид.

Если угол γ = 0, то общий геликоид вырождается в цилиндрическую спиральную полосу. Если направления образующих прямых совпадают с касательными к направляющей винтовой линии, то образуется развертывающийся геликоид.

Параметрические уравнения:

$$x = (\rho, \varphi) = \rho\cos\varphi,$$
$$y = y(\rho, \varphi) = \rho\sin\varphi \qquad (1.27)$$

$$z = z(\rho, \varphi) = \pm\sqrt{\rho^2 - a^2}\,\mathrm{ctg}\gamma + p\varphi \mp p\arccos(a/\rho) \qquad (1.28)$$

где $a \le \rho \le +\infty$, $\theta + v = \varphi$.

Двум знакам соответствуют значения θ от 0 до π/2 и от 0 до –π/2.

Коэффициенты первой квадратичной формы поверхности:

$$A^2 = 1 + \frac{(\rho^2\cot\gamma - ap)^2}{\rho^2(\rho^2 - a^2)},\; F = \frac{p(\rho^2\cot\gamma - ap)}{\rho\sqrt{\rho^2 - a^2}},\; B^2 = \rho^2 + p^2.$$

Угол χ между координатными линиями ρ и φ может быть вычислен по формуле:

$$\cos\chi = \frac{p(\rho^2\cot\gamma - ap)}{\sqrt{[\rho^2(\rho^2 - a^2) + (\rho^2\cot\gamma - ap)^2][\rho^2 + p^2]}}. \qquad (1.29)$$

Алгоритм построения конволютного геликоида в программе MathCAD14 может быть представлен в следующем виде:

$M := 50 \qquad N := 50 \quad i := 0..M \qquad j := 0..N \qquad \gamma := \frac{\pi}{6}$

$\alpha0 := 2\cdot m \qquad \alpha n := 10\cdot m \qquad \Delta\alpha := \frac{(\alpha n - \alpha0)}{M} \qquad \alpha_i := \alpha0 + i\cdot\Delta\alpha$

$\beta0 := 0 \qquad \beta n := 2\cdot\pi \qquad \Delta\beta := \frac{\beta n - \beta0}{N} \qquad \beta_j := \beta0 + j\cdot\Delta\beta$

$a := 4\cdot m \qquad b := 2\cdot m$

$x_{i,j} := a\cos(\beta_j) - \alpha_i\cdot\sin(\gamma)\,.\,\sin(\beta_j)$

$y_{i,j} := a\cdot\sin(\beta_j) + \alpha_i\sin(\gamma)\cdot\cos(\beta_j)$

$z_{i,j} := b\cdot\beta_j + \alpha_i\cos(\gamma)$

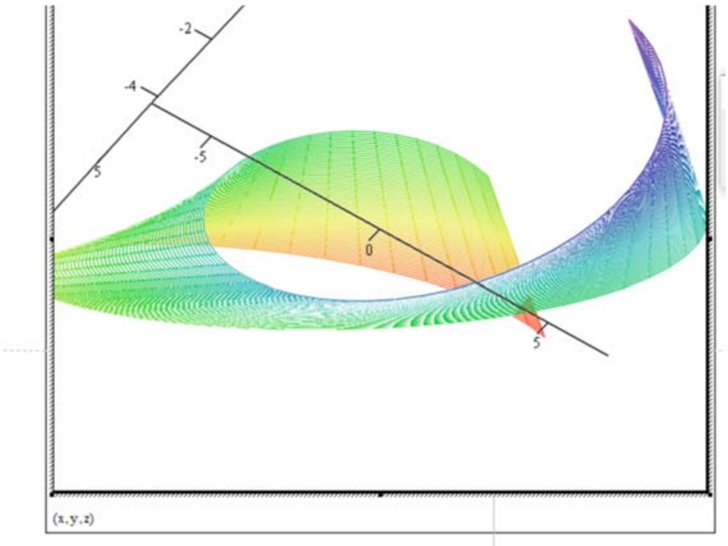


Рис. 1.4. Конволютный геликоид.

1.1.5. Псевдо-развертывающийся геликоид

Псевдо-развертывающийся геликоид является важным частным случаем конволютного геликоида. Его образующими являются проекции касательных к некоторой винтовой линии на плоскость, перпендикулярную к ее оси.

Параметрические уравнения данной поверхности имеют вид:

Параметрические уравнения:

$$\begin{aligned} &x = x(u,v) = a\cos v - u\sin v,\\ &y = y(u,v) = a\sin v + u\cos v,\\ &z = z(v) = bv, \end{aligned} \qquad (1.30)$$

где $|u|$ - расстояние от винтовой направляющей до соответствующей точки на поверхности, взятой вдоль прямолинейной; v - угол от оси Ox в направлении оси Oy; a - эксцентриситет геликоида. Координатные линии u (v = const) совпадают с прямолинейными образующими поверхности, но линии v (u = const) являются винтовыми линиями, равноотстоящими(эксцентриситет) по отношению к винтовой направляющей (u = 0).

Коэффициенты основных квадратичных форм поверхности и ее кривизны:

$A = 1$, $F = a$, $B^2 = a^2 + b^2 + u^2$,

$$\begin{aligned} &L = 0,\ M = -\frac{b}{\sqrt{b^2+u^2}},\ N = -\frac{ab}{\sqrt{b^2+u^2}} = aM,\\ &k_u = 0,\ k_v = -\frac{ab}{B^2\sqrt{b^2+u^2}},\\ &k_1 = \frac{a+\sqrt{a^2+4b^2+4u^2}}{2(b^2+u^2)^{3/2}}b,\ k_2 = \frac{a-\sqrt{a^2+4b^2+4u^2}}{2(b^2+u^2)^{3/2}}b,\\ &K = -\frac{b^2}{(b^2+u^2)^2} < 0,\ H = \frac{ab}{(b^2+u^2)^{3/2}} \neq 0. \end{aligned} \qquad (1.31)$$

Координаты u,v в рассмотренных формулах являются несопряженными неортогональными, криволинейными. Как известно из теории поверхностей, в таком случае $F \neq 0$, $M \neq 0$. Средняя кривизна поверхности также ненулевая, $H \neq 0$, это говорит о том, что псевдоразвертывающийся геликоид, в отличие от прямого, минимальной поверхностью не является.

Угол χ между координатными линиями u и v задаётся как:

$$\cos\chi = \frac{a}{B}.$$

Неявная форма уравнения:

$$x\cos\frac{z}{b} + y\sin\frac{z}{b} = a.$$

Общие параметрические уравнения конволютного или открытого косого геликоида:

$$\begin{aligned} x &= a\cos v - u\cos\varepsilon\sin v, \\ y &= a\sin v + u\cos\varepsilon\cos v, \\ z &= bv + u\sin\varepsilon, \end{aligned} \qquad (1.33)$$

где ε - угол между прямой образующей поверхности и горизонтальной плоскостью. Если положить в уравнении угол равным нулю (ε = 0), то получим открытый прямой геликоид, т.е. псевдо-развертывающийся геликоид.

В программе MathCAD14 модель псевдо-развертывающегося геликоида можно построить по следующему алгоритму:

$$M := 80 \qquad N := 80$$
$$i := 0..M \qquad j := 0..N$$

$$U0 := 2\cdot m \qquad U1 := 10\cdot m$$
$$\Delta U := \frac{U1 - U0}{M}$$
$$U_i := U0 + i\cdot\Delta U$$
$$V0 := 0 \qquad V1 := 6\cdot\pi$$
$$\Delta V := \frac{V1 - V0}{N}$$

$$V_j := V0 + j\cdot\Delta V \qquad a := 1\cdot m \qquad b := 1m$$
$$X_{i,j} := a\cdot\cos(V_j) - U_i\cdot\sin(V_j)$$
$$Y_{i,j} := a\cdot\sin(V_j) + U_i\cdot\cos(V_j)$$
$$Z_{i,j} := b\cdot V_j$$

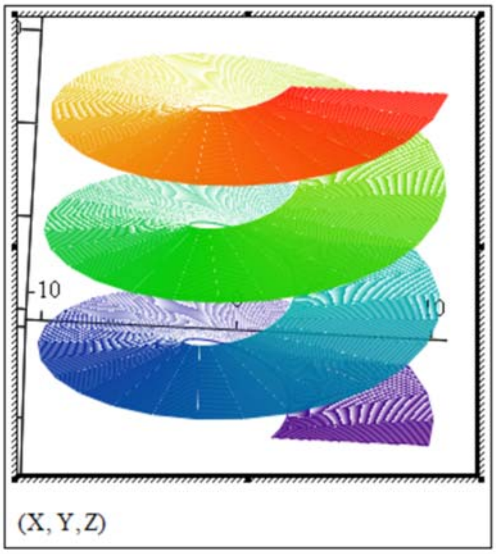


Рис. 1.5. Псевдо-развертывающийся геликоид.

1.2. Применение оболочек в форме геликоидов в строительстве и машиностроении

1.2.1. Строительство

В архитектуре геликоидальные оболочки применяются чаще всего в качестве пандусов и рамп. Одним из ярких примеров масштабного сооружения подобного типа можно назвать башни Марина-Сити в г. Чикаго, США. Башни имеют многоэтажную рампу автостоянки. Объект построен в 1960 г. Музей современного искусства им. Гугенхайма построен примерно в то же самое время (1959) в Нью-Йорке, США, имеет пешеходный спиральный пандус. Все здание, для того чтобы увеличить количество проходящих людей, построено в форме спирали, поднимающейся вверх (Рис. 1.7). Рампа имеет 6 витков спирали и наверху венчается стеклянным куполом. В нашей стране пандусы были крайне популярны еще в 20-е годы 20 века как замена лестницам в архитектуре конструктивизма. Проект башни В.Е. Татлина (Рис. 1.8) мог бы стать ярким воплощением идей конструктивизма, однако так и не был реализован.

Рис. 1.6. Автостоянки в башнях многофункционального комплекса Марина-Сити в Чикаго.

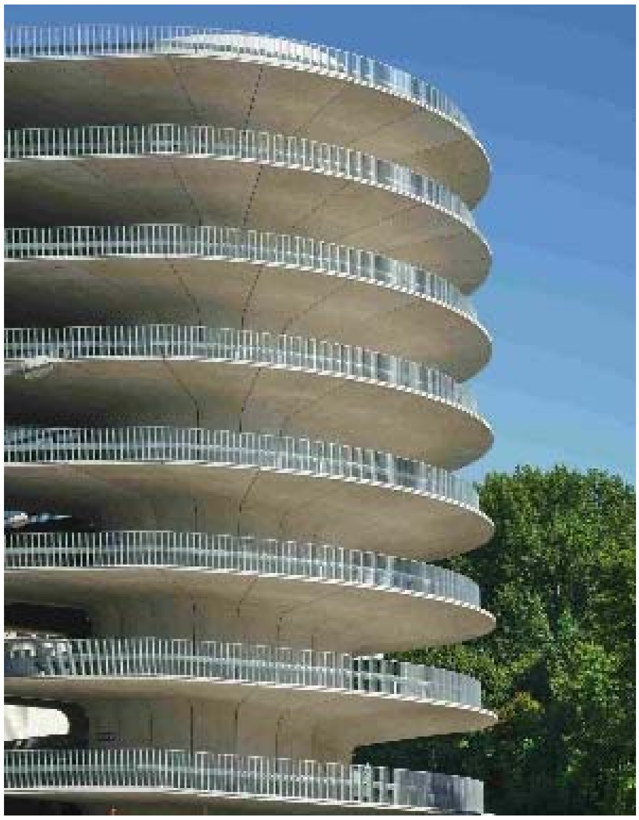
Рис. 1.7. Музей современного искусства им. Гугенхайма в Нью-Йорке.

Рис. 1.8. Проект Башни В. Е. Татлина.

Ещё одно уникальное здание, в котором винтовая рампа используется аналогичным образом (как форма здания в целом) — многофункциональная парковка Амстердамского выставочного и конференц-центра, выполненная архитектурной фирмой Benthem Crouwel Architects. Восьмиэтажное строение высотой 30 метров рассчитано на 1 000 автомобилей. Само здание паркинга прямоугольное и его дизайн простой, однако выразительный силуэт комплекса создаётся двумя спиралевидными башнями, выполненными в форме классической геликоидальной рампы (Рис. 1.9. *а,б,в*). Их функциональная задача — разделить потоки машин, въезжающих и выезжающих из комплекса. За счёт такого разделения парковка здесь происходит быстро и эффективно, что очень важно для густонаселенного Амстердама. Архитекторам удалось, используя простую и лаконичную форму геликоида, создать запоминающийся и очень «лёгкий» образ.

а

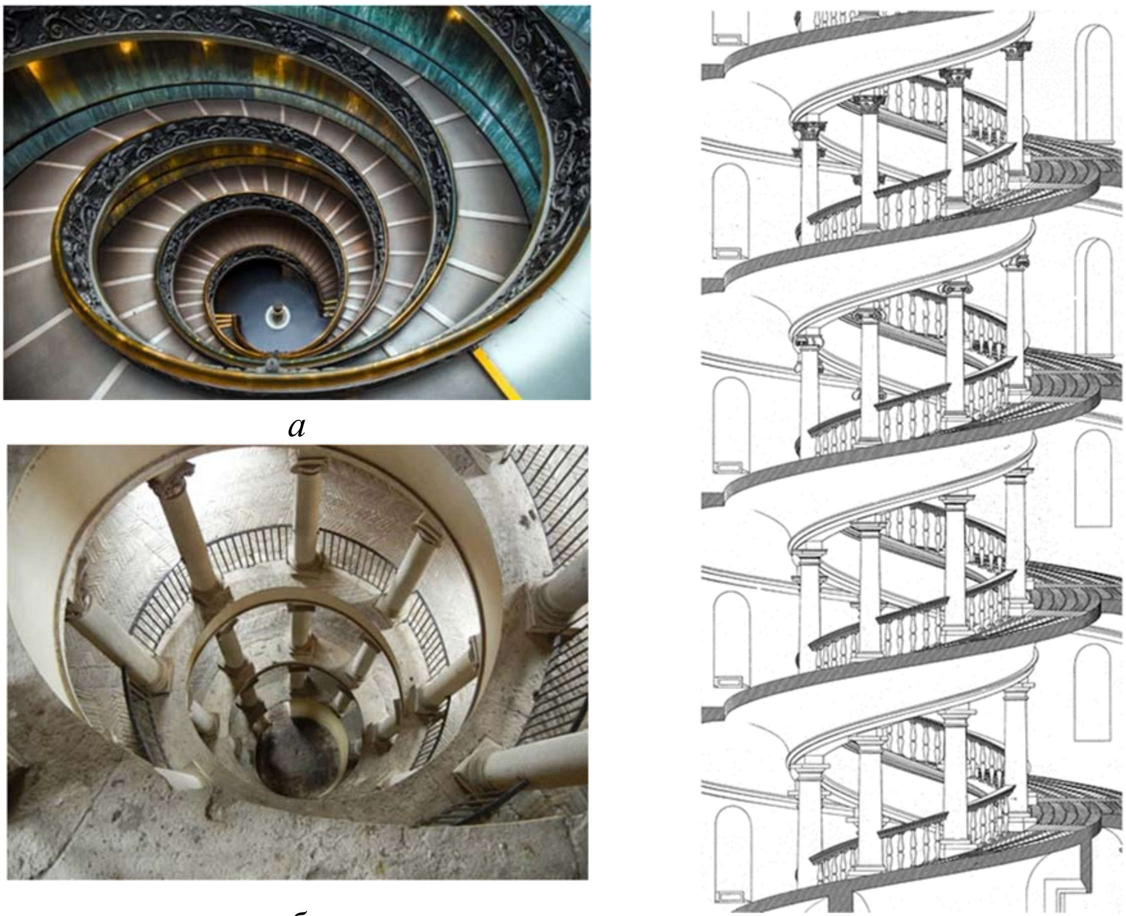
б



в

Рис. 1.9. многофункциональная парковка Амстердамского выставочного и конференц-центра.

Винтовые лестницы в форме прямого геликоида используются в строительстве уже очень давно, и иногда их также делают в виде рампы. Лестница Браманте в музее Ватикана, построенная ещё в 1505 году, выполнена без ступеней и по сути является винтовым пандусом (Рис. 1.10. *а,б*). Сделано это было для того, чтобы тягловые животные могли также забираться по этой лестнице в Ватиканский дворец. Ещё одной интересной особенностью лестницы является то, что она сконструирована с двойной спиралью, чтобы увеличить пропускную способность – по одной спирали двигались вверх, а по другой вниз. В 1932 году по проекту Джузеппе Момо была построена аналогичная лестница в музее Пия-Климента в Ватикане (Рис. 1.10. *в*).



а

б

в

Рис. 1.10. Лестницы Браманте, Ватикан.

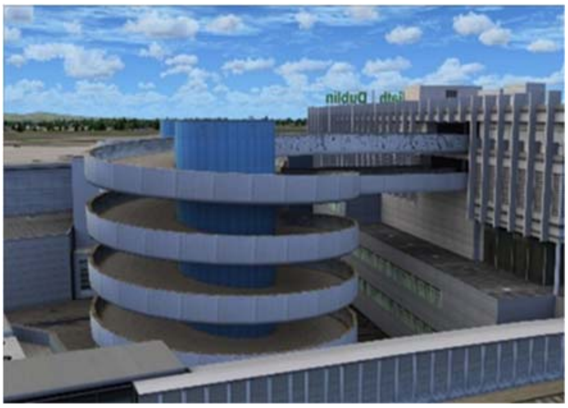
В целом же в настоящее время винтовые рампы применяются в конструкциях автомобильных парковок повсеместно, и их сооружение не является уникальным или даже редким. На Рис. 1.11. представлены фотографии различных пандусов, расположенных по всему миру.

Несмотря на широкое применение геликоидальных оболочек в конструкциях пандусов, все они, как правило, являются либо прямыми, либо косыми геликоидальными поверхностями. Связано это, в первую очередь, с тем, что прямой и косой геликоиды достаточно простые поверхности, их геометрия хорошо изучена. Конволютные и развёртывающиеся геликоиды имеют более сложное формообразование, и поэтому менее распространены.

а

б

в



г

д

е

Рис. 1.11. Различные виды пандусов.

1.2.2. Машиностроение

В машиностроении область применения винтовых поверхностей достаточно обширна, и классифицировать объекты можно следующим образом, ориентируяь на назначение:

- Детали резьбовых соединений, крепежи различного рода;
- Инструменты для работы по металлу и дереву;
- Детали машин, используемые для преобразования вращательного движения в поступательное, а также для передачи вращения.

Рассмотрим некоторые примеры винтов в машиностроении из разных областей:

1. Винты строительных машин. Винтовые детали механизмов и машин функционально делятся на винты, взаимодействующие с рабочей средой (жидкой, сыпучей), например, для перемешивания, а также на винты, взаимодействующие с другими деталями, имеющими резьбовые соединения.
2. Шнеки и шнекообразные детали.

Исторически первая модель шнека – это винт Архимеда, изобретенный еще в 3 веке до н.э. Винты Архимеда в модифицированном виде до сих пор используются, например, в малой гидроэнергетике.

В автомобилестроении известны проекты «шнекоходов» -автомобилей на шнековом ходу.

В работе [7] проведено исследование НДС лопасти шнека для приготовления смесей для литейного производства.

Также примером подобных конструкций может служить винтовой конвейер, в котором в неподвижных подшипниках вращается вал с закрпеленным на нем длинным винтом [8]. Такие конструкции используют как правило прямой геликоид.

Множество работ ученых-машиностроителей посвящено подобным механизмам и их деталям. В работе [9], например, теоретически и экспериментально изучены принципы назначения оптимальных размеров деталейвинтовых шнеков, которые применяются для транспортировки сыпучитх материалов. Оптимизируемыми параметрам являлись диаметры вала и винта, шаг винта.

Оборудование для буровых работ является также важным направлением прикладных исследований винтовых конструкций. Без буровых технологий невозможно представить современное строительство, бурно развиваются гидротехническое строительство, геотехника, транспортное строительство ставит перед инженерами все новые масштабные задачи. Буронабивные сваи, стены в грунте, шпунты и прочие конструкции широко используются в современном строительстве. В условиях многолетней мерзлоты и при возведении сооружений в скальных грунтах требуется специальное оборудование для бурения, в частности, винтовые шнеки. В работе [10] приводятся исследования бурового инструмента и его характеристик, в работе [11]

В работе [12] рассмотрена оптимизация назначения размеров деталей шнековых подъемников. Поверхность развертывающегося геликоида служит основой для направляющей поверхности доменных печей. Для замедления падения сыпучих грузов используется устройство в виде винтового желоба [13]. Другие примеры использования винтовых оболочек в буровых установках и других механизмах приведены в [14-17].

3. Машины и механизмы с винтовыми зубьями и нарезками

Примером механизма с зубчатой нарезкой может служить винтовой компрессор [18], по сравнению с аналогичными устройствами равной мощности он имеет меньшую массу и более экономичен. Одно из применений таких компрессоров – газотурбинные установки судов [19]. В источниках [20, 21] рассмотрены вопросы работы подобных установок.

4. Ветрогенераторы и ветророторы.

В настоящее время популярны альтернативные источники энергии, в частности, развивается ветроэнергетика. Проектирование лопастей ветророторов в форме геликоидальных и винтообразных деталей получило развитие еще в 20 веке. Шнековые ветророторы являются одним из перспективных видов устройств подобного типа [22-23]. В работе [23] приведен обзор шнековых ветророторов, перечислены их характеристики и преимущества. Детали лопастей шнековых ветророторов могут быть изготовлены из плоских круглых пластин, разрезанных по спирали, близкой к спирали Архимеда, впоследствии такая заготовка растягивается вдоль оси вала. В работе [22] приведен пример лопасть спирально-винтовой формы на конусе.

1.3. 3D МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕЛИКОИДОВ

Перечислим системы автоматизированного проектирования (САПР), подходящие для построения моделей оболочек сложной геометрии и особенности их применения:

1). SolidWorks — это система гибридного параметрического моделирования, которая предназначена для проектирования деталей и сборок в трехмерном пространстве [24]. В SolidWorks доступна работа с поверхностями, имеющими двумерную структуру, а также с трехмерными массивными телами. Деталь может быть сформирована из графических примитивов, как твердотельных, так и поверхностных. Графические примитивы могут быть подвергнуты различным геометрическим преобразованиям для создания моделей сложных конструкций. SolidWorks более популярен у машиностроителей, однако его много функциональность и универсальность зачастую бывает оценена и инженерами другого профиля, в том числе строителями. Важной удобной особенностью является непосредственный импорт в формат для трехмерной печати stl, что становится решающим при использовании аддитивных технологий. Недостаток данного программного комплекса в том, что у него функции построения поверхности по явным или параметрическим уравнениям.

2). AutoCAD – продукт фирмы Autodesk, самый распространенный и универсальный программный комплекс для создания геометрических моделей. Широта возможностей, распространенность и открытость AutoCAD делают его предпочтительным программным продуктом для целей освоения технологии геометрического моделирования объектов [25]. Важным преимуществом AutoCad является втроенный язык программирования AutoLISP, который значительно расширяет возможности проектировщика как сфере создания сложных геометрических объектов, так и в автомазации этого процесса. Однако, использование языка AutoLISP подразумевает высокую квалификацию проектировщика, зачастую требует специальной подготовки. Этот язык программирования подходит для создания геометрических объектов сложной формы, однако не является специализированным для таких целей, и процедура создания объектов может быть связана со специфичекими сложностями, характерными для программирования, а не работы пользователя с САПР.

3). Autodesk 3ds Max — программное обеспечение для 3D-моделирования, визуализации и графики. 3ds Max имеет обширный инструментарий графических примитивов, функций для построения и измрения созданных объектов [26]. 3ds Max популярен среди архитекторов благодаря возможностям для создания и визуализации выразительных и эстетически привлекательных моделей. Профиль этой программы не вполне подходит для инженерных целей, несмотря на то, что есть прямой экспорт в формат stl.

4). SCAD Office — САПР, предназначенная для конечно-элементного анализа строительных конструкций, также содержит в себе алгоритмы проверки прочности, устойчивости и жесткости в соответствии с действущими строительными нормами [27, 28]. Важнейшим преимуществом SCAD при задачах моделировании оболочек является возможность построения при помощи специализированной функции построения поверхностей по уравнениям, в том числе параметрическим. Однако программа не имеет функции экспорта построенных моделей в формат .stl.

5) COMSOL Multiphysics — это универсальная среда численного моделирования систем, устройств и процессов во всех областях проектирования, производства и научных исследований [29]. Базовый пакет COMSOL Multiphysics содержит инструменты геометрического моделирования для создания элементов геометрии на основе твердых тел, поверхностей, кривых и булевых операций. В программе есть возможность построения поверхностей параметрическим способом задания, а также экспорта модели в формате .stl.

6) ANSYS — одна из наиболее универсальных систем, имеющая свой втроенный мощный язык программирования APDL. ANSYS имеет также специализированные приложения для подготовки расчетных моделей, работы с геометрией и конечно-элементной сеткой. Создание моделей через язык программирования APDL требует специализированных навыков и некоторого опыта, однако дает широкие возможности для создания наиболее точной геометрии, вплоть до создания каждого узла и конечного элемента в «ручном режиме». При использовании программных макросов доступно построение поверхностей по параметрическим уравнениям. Поддерживается экспорт модели в формат .stl [30].

Подведем итоги обзора и выберем оптимальную программу для задач создания моделей оболочек : Autodesk 3ds Max, SolidWorks, AutoCAD по ряду причин слабо подходят, несмотря на то, что в них можно получить объекты сложной геомерии и экспортировать их в формат .stl, но точность этих построения может быть невысокой. SCAD Office, COMSOL Multiphysics и ANSYS имеют возможность точного создания сложных поверхностей по параметрическим уравнениям, однако проектирование в этих программах не лишено сложностей: из SCAD недоступен экспорт непосредственно в .stl файл, а программы COMSOL и ANSYS мало распространены в России и не имеют локализации [31].

В связи с широким распространением SCAD и наличием лицензии на этот программный комплекс в рамках данного исследовании было решено проработать вопрос возможности построения параметрической модели в SCAD, перевода ее в формат .stl и распечатки модели с применением аддитивных технологий, а также рассмотреть возможные пути решения возникающих при этом проблем.

1.4. Построение модели с использованием SCAD Office.

Для получения 3D-модели оболочки, заданной параметрическими уравнениями, наиболее простым представляется использование программного комплекса SCAD Office, который широко распространён в СНГ и, в отличие от других программ, обладающих нужным функционалом, имеет российскую локализацию. Однако и в этом случае неопытный пользователь при построении поверхности по параметрическим уравнениям может столкнуться с некоторыми нюансами, которые не освещены в Инструкциях. И, так как в SCAD не предусмотрен экспорт модели в формат .stl, то в качестве промежуточного этапа предлагается сначала экспортировать модель в программу, имеющую эту возможность и распространенную на постсоветском пространстве – Autocad.

В качестве тестовых моделей было решено построить модели нескольких геликоидов, относящихся к разным типам, а именно: прямой, косой, конволютный, развёртывающийся и псевдо-развертывающийся, которые, имея на первый взгляд большое внешнее сходство, тем не менее обладают существенными отличиями в уравнениях. Параметрические уравнения рассматриваемых поверхностей, по которым в SCAD Office будут построены модели, представленные в таблице 1.

Таблица 1. Типы геликоидов и соответствующие им уравнения

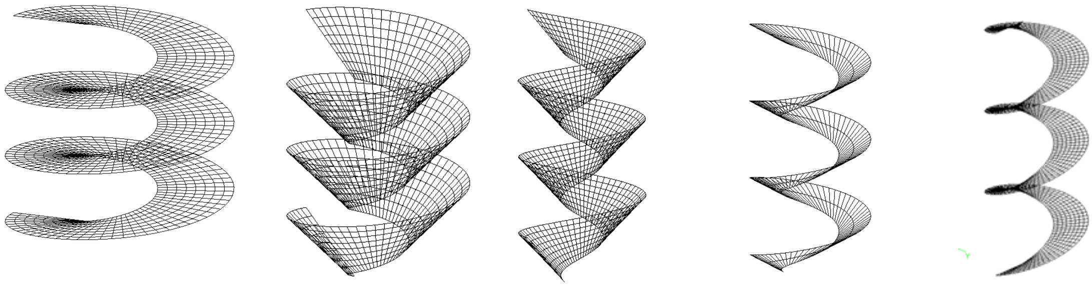
Тип геликоида	Параметрические уравнения задания поверхность
Прямой	$x(r,v) = r \times cos(v)$ $y(r,v) = r \times sin(v)$ $z(r,v) = c \times v$
Косой	$x(r,v) = r \times cos(v)$ $y(r,v) = r \times sin(v)$ $x(r,v) = c \times v + k \times r$
Конволютный	$x(r,v) = a \times cos(v) - r \times sin(\gamma) \times sin(v)$ $y(r,v) = a \times sin(v) + r \times sin(\gamma) \times cos(v)$ $x(r,v) = p \times v + r \times cos(\gamma)$
Развёртывающийся	$x(r,v) = a \times cos(v) - ar \times sin(v)/m$ $y(r,v) = a \times sin(v) + ar \times co\,s(v)/m$ $x(r,v) = b \times v + br/m$
Псевдо-Развёртывающийся	$x(r,v) = a \times cos(v) - rsinv$ $y(r,v) = a \times sin(v) + rcosv$ $z(r,v) = c \times v$

Здесь параметры r и v для всех геликоидов приняты одинаковыми, $r \in [4; 12]$, $v \in [0; 6\pi]$, что соответствует геликоиду с внутренним радиусом 4 м, внешним радиусом 12 м, и количеством витков 3. Постоянные коэффициенты $c; k; a; \gamma; p$ приняты произвольно так, чтобы визуальная разница между геометрией геликоидов была хорошо заметна.

Построение оболочек по параметрическим уравнениям в SCAD Office изложено в [27,28], где подробно разобраны нюансы построения модели геликоида. Для данной задачи отличий почти нет, заметим лишь, что количество шагов табулирования переменной, содержащей угол поворота образующей вокруг оси (в данном случае переменной v), лучше устанавливать как можно большим, чтобы максимально аппроксимировать полученную фигуру к гладкой кривой. При этом SCAD, если устанавливать большое значение этого параметра, может ошибаться в построении, поэтому иногда лучше разбить фигуру на несколько частей и строить их отдельно, что позволит и уменьшить количество шагов табулирования. А количество шагов табулирования другой переменной (то есть r) необходимо, наоборот, устанавливать не слишком большим, так как это увеличит число узлов схемы, что отрицательно скажется при создании твердотельной геометрии в Autocad, а также значительно увеличит скорость обработки модели в нём. Так, при построении моделей количество шагов табулирования принято: $Ns = 90$ (для переменной v), $Nt = 8$ (для переменной r).

Поскольку SCAD Office не позволяет экспортировать модели в файлы формата .stl, то далее необходимо воспользоваться промежуточным шагом – экспортировать модель в программу, которая имеет возможность экспорта в stl. Самый простой вариант для этого – программа Autocad. Для передачи модели в неё используем формат .dxf - универсальный формат, отвечающий за обмен информацией между разнообразными системами проектирования.

Модели построенных геликоидов представлены на Рис. 1.12.



а) *б)* *в)* *г)* *д)*

Рис. 1.12.Модели геликоидов в SCADOffice, *а* – прямой,*б* – косой, *в* – конволютный, *г* – развёртывающийся, *д* – Псевдо- развёртывающийся.

1.5. Редактирование модели в Autocad и экспорт в .stl

После импорта .dxf файла в Autocad попадает только плоская геометрия в виде отдельных 3D-граней (Рис. 1.13.). Такую модель, даже если преобразовать в .stl файл, невозможно будет напечатать на 3D-принтере. Необходимо преобразовать отдельные 3D-грани в один 3D-объект [32].

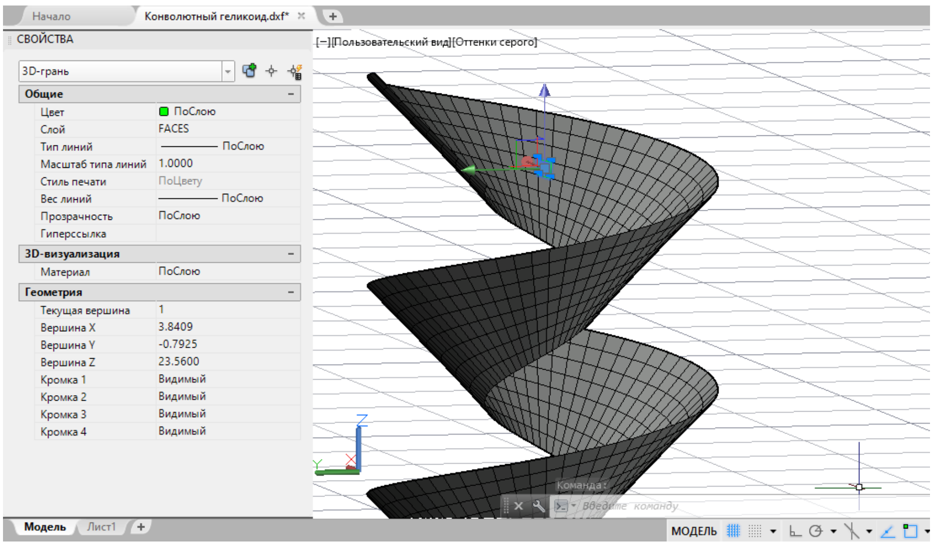


Рис. 1.13. Пример модели в Autocad сразу после импорта .dxf файла.

Для этого необходимо сначала переключить рабочее пространство с «Рисование и аннотации» на «3D-моделирование», используя соответствующий пункт в нижнем правом меню Autocad. После переключения появляются специальные инструментальные панели для работы с 3D-геометрией.

Далее следует выделить все элементы модели и воспользоваться командой «Преобразовать в поверхность» на панели «Редактирования тела». В результате все элементы преобразуются из 3D-граней в поверхности. Это действие необходимо потому, что из элементов типа «3D-грань» невозможно получить 3D-объект в Autocad, а из «Поверхностей» можно.

Затем, снова выделив все элементы, нужно использовать команду «Толщина» для того, чтобы путём задания поверхности некоторой толщины получить 3D-объект. Autocad предложит ввести значение, на которое будет увеличена толщина поверхности. В результате получается множество 3D-объектов заданной толщины. Для экспорта модели в файл .stl необходимо объединить их в один объект: для этого можно воспользоваться командой «Тело, объединение» на панели «Редактирования тела». Autocad попросит выбрать объекты, которые необходимо объединить, для чего требуется выбрать всю имеющуюся геометрию и нажать кнопку «Enter». В результате получится один 3D-объект, который можно экспортировать в .stl файл. Модели геликоидов в Autocad, полученные после выполнения этих операций, представлены на Рис. 1.14.

а) *б)* *в)* *г)* *д)*

Рис. 1.14.Модели геликоидов в Autocad после обработки для экспорта в формат .stl, *а* – прямой, *б* – косой, *в* – конволютный, *г* – развёртывающийся, *д* – Псевдо- развёртывающийся.

Таким образом, после описанной выше обработки моделей остаётся только выбрать команду «Экспорт» в меню Autocad, в выпадающем меню – «Другие форматы», затем в открывшемся окне выбрать тип файла «Литография (*.stl)» и сохранить под нужным именем, не забыв выбрать объект для экспорта, когда Autocad попросит выбрать «тела или непроницаемые сети». Если в командной строке не появилось сообщение об ошибке – экспорт прошёл успешно. Полученный файл можно открыть в любой программе, предназначенной для печати 3D-объектов, а затем и распечатать с применением аддитивных технологий.

В качестве примера на Рис. 1.15. представлена превью 3D-печати на принтере модели конволютного геликоида в программе «MakerBot Print».

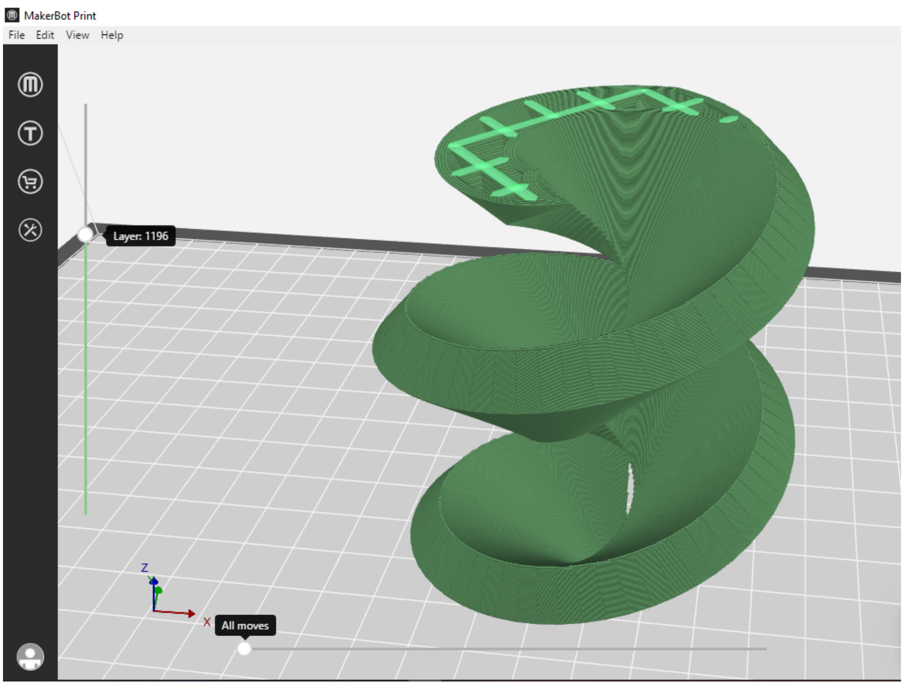


Рис. 1.15. Модель конволютного геликоида в превью печати на 3D-принтере.

Выводы по главе 1

В главе 1 описана геометрия пяти типов геликоидов, приведены параметрические уравнения для их построения, даны алгоритмы создания моделей пяти типов линейчатых геликоидов в среде MathCAD.

Показано, что прямой геликоид достаточно хорошо изучен архитекторами, инженерами-строителями и проектировщиками и имеет достаточно подробное описание характеристик, в то время как остальные типы геликоидов менее известны и применяются в основном в машиностроении.

Также в главе 1 представлено разработанное автором подробное описание методики 3D моделирования геликоида с целью получения аналитически точной (заданной аналитическими уравнениями) модели в пригодном для дальнейшего расчета и проектирования виде.

ГЛАВА 2. ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙЧАТЫХ ГЕЛИКОИДОВ

2.1. Обзор исследований напряженно-деформированного состояния линейчатых геликоидов

На данный момент геликоидальные поверхности применяются чаще всего в строительстве и машиностроении. В строительной практике наиболее распространены прямые и косые геликоиды, другие типы применяют гораздо реже. Это объясняется отсутствием аналитических методов расчёта и тем, что многие инженеры недостаточно информированы о геометрии и напряжённо-деформированном состоянии этих оболочек. В машиностроении часто применяются все типы геликоидов кроме псевдо-развёртывающегося, однако их прочностные показатели определяют экспериментально: размеры деталей, в геометрии которых используют винтовые поверхности, позволяют создавать экспериментальные модели.

Аналитические методы расчёта линейчатых винтовых поверхностей достаточно сложны, а многие методики даже не доведены до численного результата, хотя изучение этого вопроса и началось ещё в 30-ых годах прошлого века. Первые работы в нашей стране появились в это время, как, например, работа [33]. В статье затрагиваются вопросы расчета на прочность прямых геликоидов применительно к машиностроению. Основы расчета тонких упругих оболочек заложил В.З. Власов [34-36]. Напряженно-деформированное состояние винта в форме прямого геликоида изучали В. Розинг, проводивший теоретические расчеты максимальных напряжений в винтах, Г. Биезено, экспериментально изучавший напряжения в гребных винтах [37].

В 1950-е годы началось активное развитие расчетов тонких упругих оболочек, в том числе геликоидов, основном аналитическими методами. Например, необходимо отметить работу Л.И. Соломона «К расчету геликоидальной оболочки» [38], в которой рассмотрена одномерная задач расчета на прочность прямого геликоида. Важные работы созданы Ю.Н. Работновым [39]. Теория тонких упругих оболочек обобщена и систематизирована А.Л. Гольденвейзером [40]. Развитие методике Соломона дали в 1975 г. С.Я. Колтунов и Е.И. Михайловский [41], они рассматривали тонкую упругую оболочку в форме косого геликоида, граничные условия были поставлены следующие: жесткое закрепление одного криволинейного винтового края и свободное описание на балку второго криволинейного края.

Расчетами геликоидов занимался также В.Г. Рекач. В 1957 г. он опубликовал работу, содержавшую вывод теоретических формул для расчета на прочность прямого геликоида, математическая модель была получена в виде дифференциального уравнения второго порядка в частных производных, а решение предполагалось в виде тригонометрических рядов Фурье. Численные результаты, однако, не были получены. В.Г. Рекач и С.Н. Кривошапко [42] исследовали пологие прямые геликоиды, искали решение при помощи рядов Фурье. Численные результаты были получены после исправления ряда ошибок в 2006 г. М.И. Рынковской, реализация расчетов удалась в программном комплексе MathCad, методика в результаты приведены в работе [43].

В 1985 г. были созданы первые численные методы для расчёта геликоидальных оболочек. Г.Ч. Баджория [44] численными методами получил решение системы трёх дифференциальных уравнений восьмого порядка, описывающих одномерную задачу для развёртывающегося геликоида с жёстким закреплением обоих винтовых краёв. В своей работе Баджория пренебрег коэффициентом Пуассона, полагая его нулевым, позднее С.Н. Кривошапко и Кумудини Джаявардена [45] изучали поведение оболочек с произвольным коэффициентом Пуассона.

В 1990-ых гг. под руководством С.Н. Кривошапко был разработан полуаналитический метод расчёта торсов-геликоидов с помощью асимптотического метода малого параметра, который затем был им усовершенствован. М.И. Рынковская реализовала решение метода с применением чисел Бернулли, полученные результаты были сопоставлены с результатами, полученными при помощи других аналитических и численно-аналитических методов [46, 47].

Несмотря на большое количество публикаций об аналитических и численно-аналитических методах расчёта геликоидальных оболочек [48-58], среди инженеров самым популярным остаётся расчёт с помощью программных комплексов, реализующих метод конечных элементов. Ввиду сложности аналитических методов и ограниченности круга задач, доступных для них, многие инженеры не могут использовать их в практической деятельности. Иногда на практике расчет для уверенности производят в нескольких конечно-элементных комплексах и выбирают результаты по более опасному варианту. Аналитические методы сохраняют свое значение для расчета эталонных поверочных случаев и их последующего сравнения с реальной конструкцией.

2.2. Проблемы моделирования оболочек сложной геометрии в современных расчетных программах

На сегодняшний день существует достаточно большое количество На сегодняшний день существует достаточно большое количество программных продуктов для расчётов строительных конструкций. В странах СНГ более всего известны SCAD Office, ПК ЛИРА-САПР и ПК ЛИРА – их создавали разработчики из России и Украины с учётом российских строительных норм, они существуют на рынке долгое время и всем хорошо известны. Существуют и другие менее популярные программы, например Base и NormCAD – они не так функциональны, как их конкуренты, потому не так известны. Помимо отечественных программ, существует множество зарубежных комплексов для расчётов строительных конструкций: Autodesk Robot Structural Analysis Professional, SAP 2000, Stark Es и многие другие. Многие из них не поддерживают российские строительные нормы или не имеют локализации на русский язык, потому непопулярны в СНГ. Однако главной проблемой моделирования оболочек сложной геометрии в современных программах, предназначенных для строительных расчётов является то, что возможности построения геометрии в них достаточно ограничены: в некоторых вообще нет инструментов для построения оболочек по поверхностям второго порядка, другие могут лишь создавать некоторые стандартные конструкции, такие как купола различных форм, цилиндрические или гиперболические оболочки. Из всех программ, распространённых в РФ, только SCADOffice и ЛИРА 10 имеют возможность построения геометрии, используя математическое описание – явную или параметрическую форму задания поверхностей.

Целью данной главы является поиск расчетных программных комплексов, в которых реализована возможность построения геометрии оболочек с использованием математических форм задания поверхности.

Обзор современных программ для моделирования оболочек сложной геометрии.

ПК ЛИРА — универсальный программный комплекс, используемый в основном строителями-проектировщиками. Комплекс решает широкий круг задач, связанных со статическим и динамическим расчетом зданий и сооружений, при помощи метода конечных элементов (МКЭ). Программа имеет свою обширную библиотеку конечных элементов для решения различных задач механики. Типы конечных элементов включают в себя стержневые, оболочечные, пластинчатые, массивные и др.). Для удобства пользователя есть библиотека сортаментов, которую можно редактировать. В программе есть модули, предназначенные для конструирования элементов. Расчеты могут быть проведены в соответствии с действующими строительными нормами разных стран, включая Россию, Евросоюз и другие. ЛИРА поддерживает экспорт/импорт с программами, использующими BIM-технологии, доступна функция сохранения моделей в универсальных форматах для интеграции с другими САПР, таких как *.dfx, *.mdb, *.ifc и др.[59]

Code-Aster — открытый расчетный (МКЭ) пакет, разработанный и сертифицированный специально для французской энергетической отрасли (в том числе расчет строительных конструкций, оснований и т.д.) [60,61].

CodeAster в большой степени является Процессором (решателем) — программой, которая формирует матрицы жёсткости и системы разрешающих уравнений, а затем проводит их решения. В ней также есть базовые функции препроцессора (построения геометрии, определения граничных условия и внешних воздействий и т.п.) и постпроцессора (отображение результатов расчётов в графической форме и формирование различных отчётов с результатами расчётов). Подготовка файлов с геометрией таких моделей требует использования специальных программных продуктов, называемых препроцессорами конструкции [61].

Autodesk Robot Structural Analysis Professional— это интегрированная графическая программа, предназначенная для расчета и проектирования различных типов конструкции.

Autodesk Robot Structural Analysis Professional [62] позволяет создавать конечно-элементные модели конструкций, выполнять статический и динамический расчеты, конструировать элементы, подготавливать документацию в необходимом формате. При работе в программе можно использовать любые элементы по сложности и материалу, это могут быть стержневые элементы, плитные, оболочки и объемные элементы. Плиты и оболочки определяются с использованием контуров и назначением свойств плит. Такие элементы используются для плит, стен, цилиндров, арок, куполов или любых поверхностных элементов. В итоге можно рассчитывать на то, что в программе будет реализована возможность параметрического ввода поверхностей.

ANSYS — одна из наиболее универсальных систем для решения различных физических задач, в рамках данной работы нас интересует модуль Mechanical [63]. Модуль производит расчеты по статике, динамике сооружений, устойчивости, механике переходных процессов, производит спектральный и гармонический анализ конструкций, работающих в динамике. ANSYS поддерживает высокопроизводительные вычисления, имеет различные решатели для разных типов задач. ANSYS доступен в виде приложения с графическим интерфейсом ANSYS Workbench, а также в виде ANSYS APDL, в котором используется свой язык программирования с широкими возможностями для создания макросов. В частности, при помощи макросов иногда удобно моделировать геометрические формы, основанные на сложных явных и параметрических уравнениях линий и поверхностей [63].

SOFiSTiK — интегрированный программный комплекс конечно-элементного анализа строительных конструкций, зданий, мостов, тоннелей и решения геотехнических задач. Программный комплекс имеет сертификат соответствия нормам проектирования РФ. SOFiSTiK позволяет создавать параметрические наборы данных для любого модуля SOFiSTiK на языке макросов. Графический интерактивный ввод геометрии в среде AutoCAD. Моделирование, экспорт и импорт конечных элементов из различных препроцессоров. Моделирование, импорт и экспорт структурных элементов из различных препроцессоров. Автоматическая генерация сетки конечных элементов. Графическая, интерактивная система для генерации 3D-массивов объемных КЭ (включая тоннели); включая интерфейс к любому решателю SOFiSTiK [64].

Рациональность применения программы для целей настоящей работы неоднозначна, так как несмотря на то, что утверждается её сертификация в РФ, материалов и ней в открытом доступе недостаточно.

COMSOLMultiphysics — многофункциональный программный комплекс для моделирования в научных целях, для производственных задач и проектирования устройств. Комплекс имеет препроцессор для создания геометрии, различные решатели и подпрограммы, а также постпроцессор для вывода и обработки результатов. Для решения прикладных инженерных задач Comsol может дополняться специальными модулями расширения, для настоящей работы наиболее интересны «Механика конструкций» и «Проектирование». Модули расширяют функциональность геометрического моделирования за счет дополнительных инструментов для создания геометрических объектов и импорта файлов САПР в различных форматах. Базовый пакет содержит инструменты геометрического моделирования для создания элементов геометрии на основе твердых тел, поверхностей, кривых и булевых операций. В программе есть возможность построения поверхностей параметрическим способом, для этих целей есть функция «параметрическая поверхность». Возможность задания параметрических поверхностей прямо утверждается на официальном сайте представительства в РФ.

SCADOffice - программный комплекс, предназначенный для прочностного анализа строительных конструкций методом конечных элементов, а также их проектирования по существующим строительным нормам. Комплекс состоит из главной программы – SCAD, реализующей конечно-элементный расчёт, а также почти десятка вспомогательных программ, помогающих инженеру на всех этапах его работы.

После поиска информации о программах была выполнена их установка и самостоятельное изучение.

Autodesk Robot Structural Analysis Professional не имеет функционала для построения оболочек параметрическим методом. Реализована возможность построения простых оболочек выдавливанием.

ANSYS позволяет строить поверхности по параметрическим уравнениям при помощи макросов на языке APDL.

В программе SOFiSTiK функция построения праметрических оболочек не найдена.

В COMSOLMultiphysics функция реализована, но пользоваться ей достаточно сложно, если не владеть высоким уровнем английского языка.

Отдельно стоит отметить тот факт, что обе программы не имеют русской локализации и работать в них без минимальных знаний английского языка просто не представляется возможным.

Выводы по главе 2

В Главе 2 приводится обзор более ранних исследований напряженно-деформированного состояния линейчатых геликоидов разных типов с помощью различных интерпретаций аналитического метода и метода конечных элементов. В главе 2 показано, что в предыдущих работах ученых не все типы геликоидов были рассчитаны аналитически. Также в главе 2 приведены трудности, с которыми могут столкнуться расчетчики при применении численных методов расчета линейчатых геликоидов.

Также в Главе 2 описываются характеристики программных продуктов для расчётов строительных конструкций. Ключевым критерием для выбора того или иного программного продукта служила реализация возможности построения геометрии оболочек с использованием математических форм задания поверхности. В главе 2 показано, что возможности расчетных программных комплексов по построению расчетных моделей на основе математических уравнений весьма ограничены и требуют усовершенствования разработчиками.

ГЛАВА 3. Аналитические и численно-аналитические решения задачи расчета линейчатых геликоидальных оболочек

3.1. Методика расчета прямого пологого линейчатого геликоида

3.1.1. Основные уравнения и соотношения для прямого геликоида

Рассмотрим расчет длинного пологого линейчатого геликоида при условии, что ширина геликоида u значительно больше параметра подъема геликоида c (Рис. 3.1), где ширина геликоида будет ограничиваться пределами: $a \le u \le b$, где a - радиус внутреннего и b - радиус внешнего ограничивающих ширину u цилиндров.

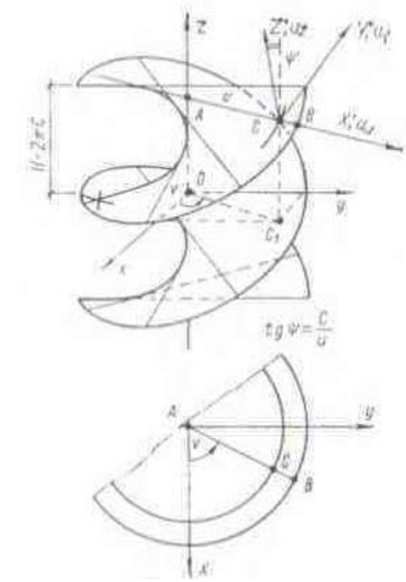


Рис. 3.1. Схема прямого геликоида.

В общем виде, если углы наклона линий, принадлежащих поверхности, малы настолько, что косинус равен единице, то оболочку можно считать пологой. При этом линии на поверхности будут равны их проекциям. Например, отношение наименьшего размера в плане к наибольшей величине стрелы подъема для пологой оболочки должно быть больше (либо равно) пяти. Если применить это положение к геликоидальной оболочке, то получим формулу для определения пологости в следующем виде:

$$\frac{2a}{c} \geq 5,$$

где a и c внутренний радиус и параметр шага винта соответственно (Рис. 3.2.).

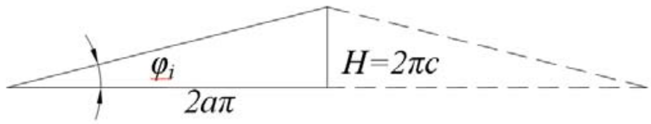


Рис. 3.2. Схема для определения пологости прямого геликоида.

Кроме того, можно записать формулу для определения пологости геликоида через косинус угла наклона линий, касательных к горизонтальной плоскости:

$$\cos\varphi_i = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Для расчета прямого геликоида можно воспользоваться уравнениями К. Марквера, выведенными им в 1938 г. [65, 67]:

$$D\nabla^2\nabla^2 u_z \pm \nabla_k^2 \varphi = Z,$$

$$\nabla^2\nabla^2\varphi \mp Eh\nabla_k^2 u_z = 0, \quad (3.1)$$

где

$$\nabla^2 ... = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial ...}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial ...}{\partial\beta}\right)\right]$$

$$\nabla_k^2 ... = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}k_2\frac{\partial ...}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}k_1\frac{\partial ...}{\partial\beta}\right)\right].$$

Уравнения равновесия для пологих оболочек можно представить в виде:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BN_\alpha) - \frac{\partial B}{\partial\alpha}N_\beta + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(A^2 S\right) + ABX = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(AN_{\beta}\right)-\frac{\partial A}{\partial\beta}N_{\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(B^{2}S\right)+ABY=0, \tag{3.3}$$

$$k_1N_{\alpha}+k_2N_{\beta}+\frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{A}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(BM_{\alpha}\right)-\frac{\partial B}{\partial\alpha}M_{\beta}+\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(A^{2}H\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\left(AM_{\beta}\right)-\frac{\partial A}{\partial\beta}M_{\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(B^{2}H\right)\right]\right\}-Z=0, \tag{3.4}$$

$$Q_{\alpha}=\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(BM_{\alpha}\right)-\frac{\partial B}{\partial\alpha}M_{\beta}+\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(A^{2}H\right)\right], \tag{3.5}$$

$$Q_{\beta}=\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\left(AM_{\beta}\right)-\frac{\partial A}{\partial\beta}M_{\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(B^{2}H\right)\right] \tag{3.6}$$

Уравнения (3.5) и (3.6) можно записать для геликоида в следующем виде:

$$Q_{\alpha}=-\frac{D}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\nabla^{2}u_{z}, \tag{3.7}$$

$$Q_{\beta}=-\frac{D}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\nabla^{2}u_{z}. \tag{3.8}$$

Запишем уравнения деформаций с учетом пологости:

$$\varepsilon_{\alpha}=\frac{1}{A}\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial\alpha}+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}u_{\beta}+k_1u_{z}, \tag{3.9}$$

$$\varepsilon_{\beta}=\frac{1}{B}\frac{\partial u_{\beta}}{\partial\beta}+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}u_{\alpha}+k_2u_{z}, \tag{3.10}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_{\beta}}{B}\right)+\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_{\alpha}}{A}\right), \tag{3.11}$$

$$\kappa_{\alpha}=-\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u_{z}}{\partial\alpha}\right)-\frac{1}{AB^{2}}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial u_{z}}{\partial\beta}, \tag{3.12}$$

$$\kappa_\beta = -\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u_z}{\partial\beta}\right) - \frac{1}{A^2B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial u_z}{\partial\alpha}, \tag{3.13}$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = -\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha}\frac{u_z}{\partial\beta} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial u_z}{\partial\beta} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial u_z}{\partial\alpha}\right). \tag{3.14}$$

Физические уравнения для оболочки в линиях кривизны α и β записываются в виде:

$$N_\alpha = C(\varepsilon_\alpha + \nu\varepsilon_\beta),\ \ N_\beta = C(\varepsilon_\beta + \nu\varepsilon_\alpha),\ M_\alpha = -D(\kappa_\alpha + \nu\kappa_\beta), \tag{3.15}$$

$$M_\beta = -D(\kappa_\beta + \nu\kappa_\alpha),\ S_\alpha = S_\beta = S = \frac{1-\nu}{2}C\varepsilon_{\alpha\beta}, \tag{3.15}$$

$$M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha} = H = (1-\nu)D\kappa_{\alpha\beta}. \tag{3.16}$$

Первые три уравнения статических уравнений (3.2-3.6) совместно с уравнениями деформаций (3.9-3.14) и физическими уравнениями (3.15-3.16) образуют полную систему из 15 уравнений с 15 неизвестными: $N_\alpha, S, N_\beta, M_\alpha, H, M_\beta, \varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_{\alpha\beta}, \kappa_\alpha, \kappa_\beta, \kappa_{\alpha\beta}, u_\alpha, u_\beta, u_z$.

Выражение тангенциальных усилий через скалярную функцию напряжений $\varphi\ (\alpha, \beta)$ по формулам

$$N_\alpha = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{A^2B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \tag{3.17}$$

$$N_\beta = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}, \tag{3.18}$$

$$S = -\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right), \tag{3.19}$$

позволяет удовлетворить уравнениям (3.2) и (3.3) (X = Y = 0). При этом тангенциальные перемещения u_α и u_β можно определить через нормальное перемещение u_z и функцию напряжений φ.

Рассмотрим пологую оболочку, срединная поверхность которой отнесена к произвольной косоугольной системе координат u,v. В этом случае расчетные уравнения смешанного метода сохраняют форму (3.1), а дифференциальные операторы принимают вид [58]:

$$\nabla^2 ... = \frac{1}{AB\sin\chi}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{B}{A\sin\chi}\frac{\partial ...}{\partial u} - ctg\chi\frac{\partial ...}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{A}{B\sin\chi}\frac{\partial ...}{\partial v} - ctg\chi\frac{\partial ...}{\partial u}\right)\right] \tag{3.20}$$

$$\nabla_k^2 ... = \frac{1}{AB\sin\chi}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{N}{AB\sin\chi}\frac{\partial ...}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L}{AB\sin\chi}\frac{\partial ...}{\partial v}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{M}{AB\sin\chi}\frac{\partial ...}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{M}{AB\sin\chi}\frac{\partial ...}{\partial u}\right)\right]. \tag{3.21}$$

Для геликоида общего вида ($f(u) \neq$const) операторы (3.21) принимают вид:

$$\nabla^2 ... = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u^2+c^2}{\Delta}\frac{\partial ...}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{cf_u}{\Delta}\frac{\partial ...}{\partial v}\right) - \frac{cf_u}{\Delta}\frac{\partial^2 ...}{\partial u\partial v} + \frac{1+f_u^2}{\Delta}\frac{\partial^2 ...}{\partial v^2}\right], \tag{3.22}$$

$$\nabla_k^2 ... = -\frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u^2 f_u}{\Delta^2}\frac{\partial ...}{\partial u}\right) + \frac{uf_{uu}}{\Delta^2}\frac{\partial^2 ...}{\partial v^2} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{c}{\Delta^2}\frac{\partial ...}{\partial v}\right) + \frac{c}{\Delta^2}\frac{\partial^2 ...}{\partial u\partial v}\right], \tag{3.23}$$

$$\Delta = \sqrt{\left(1+f_u^2\right)u^2 + c^2}. \tag{3.24}$$

Формулы (3.7) могут быть упрощены, если рассматривать пологий геликоид, то есть если можно пренебречь квадратом параметра c по сравнению с квадратом параметра u .

3.1.2. Аналитический расчет прямого геликоида по методике В.Г. Рекача с модификацией М.И. Рынковской

Для прямого геликоида $f(u)=0$ и согласно формулам (2.3) и (2.4) коэффициенты основных квадратичных форм будут равны:

$$A^2=1,\ B^2=u^2+c^2,\ F=0,\ \chi=\pi/2,\ \cos\chi=0,$$

$$L=0,\ M=-c/\sqrt{u^2+c^2},\ N=0. \qquad (3.25)$$

Подстановка значений коэффициентов основных квадратичных форм (3.25) в уравнение

$$\begin{vmatrix} A^2du+Fdv & Fdu+B^2dv \\ Ldu+Mdv & Mdu+Ndv \end{vmatrix}=0 \qquad (3.26)$$

дает

$$du^2=\left(u^2+c^2\right)dv^2, \text{ откуда } du/dv=\pm\sqrt{u^2+c^2}\ . \qquad (3.27)$$

Направление du/dv составляет с направлением $dv=0$ угол α , для которого

$$\cos\alpha=\frac{A^2du+Fdv}{\sqrt{A^2du^2+2Fdudv+B^2dv^2}}=\frac{du}{\sqrt{du^2+\left(u^2+c^2\right)dv^2}} \qquad (3.28)$$

и при учете уравнения (3.27) получается

$$\cos\alpha=du/\sqrt{2du^2}=\sqrt{2}/2,$$

т.е. каждое направление составляет с образующей $dv=0$ угол 45^0. Таким образом, главные направления делят пополам углы между направлениями образующей AB и винтовой линией $u=\text{const}$ (см. Рис. 36).

Путем интегрирования уравнения (3.10), можно найти $u=\pm csh(v-v_0)$.

Главные кривизны можно найти с помощью подстановки (3.25) в формулу

$$\lambda = \frac{1}{R} = \frac{Ldu + Mdv}{A^2du + Fdv}: \tag{3.29}$$

$$\frac{1}{R_{1,2}} = \mp\frac{c}{u^2 + c^2}, \tag{3.30}$$

$$k = k_1 k_2 = -\frac{c^2}{\left(u^2 + c^2\right)^2}, \tag{3.31}$$

$$k_{cp} = 0. \tag{3.32}$$

Из формулы (3.32) следует, что прямой геликоид – это минимальная поверхность. Из формулы (3.31) видно, квадратный корень из кривизны со знаком минус соответствует кручению винтовой линии, которая проходит через рассматриваемую точку прямого геликоида.

Формулы (3.22-3.24) для прямого геликоида принимают вид:

$$\nabla^2 ... = \frac{1}{\sqrt{u^2 + c^2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{u^2 + c^2}\,\frac{\partial ...}{\partial u}\right) + \frac{1}{\sqrt{u^2 + c^2}}\frac{\partial^2 ...}{\partial v^2}\right] \tag{3.33}$$

$$\nabla_k^2 ... = -\frac{2c}{\left(u^2 + c^2\right)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial ...}{\partial u} - \frac{u ...}{u^2 + c^2}\right). \tag{3.34}$$

Если рассматривать пологую оболочку с параметром *c*, соответствующим условию пологости, то можно пренебречь c^2 по сравнению с u^2, и формулы для определения квадратичных форм и операторов (3.25) и (3.34) соответственно примут вид:

$$A=1,\ B = u,\ F = 0,\ L=0,\ M = -c/u,\ N = 0,$$

$$\nabla^2 ... = \frac{1}{u}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial ...}{\partial u}\right) + \frac{1}{u}\frac{\partial^2 ...}{\partial v^2}\right], \tag{3.35}$$

$$\nabla_k^2 \ldots = -\frac{2c}{u^2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial \ldots}{\partial v}\right) = -\frac{H}{\pi}\frac{1}{u^2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial \ldots}{\partial v}\right), \tag{3.36}$$

где $H = 2\pi c$.

Расчетные уравнения для пологого геликоида (3.1) принимают вид [58]:

$$D\nabla^2\nabla^2 u_z = Z + \frac{H}{\pi}\frac{1}{u^2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right), \tag{3.37}$$

$$\nabla^2\nabla^2 \varphi = -Eh\frac{H}{\pi}\frac{1}{u^2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial u_z}{\partial v}\right). \tag{3.38}$$

Е. Рейсснер [66] вывел уравнения (3.37), (3.38) из уравнений К. Марквера для круглых плит [65] и решил их для нескольких частных случаев: $\varphi = \varphi(u)$ и $u_z = u_z(u)$; $\varphi = kv$ и $u_z = u_z(u)$, $\varphi = \varphi(u)$ и $u_z = kv$, а В.Г. Рекач в работе [42] предпринял попытку расширить сферу применения этих уравнений.

Из формул (3.35) и (3.36) следует, что уравнения (3.37), (3.38) - уравнения типа Эйлера и их можно привести к уравнениям с постоянными коэффициентами с помощью замены:

$$u = e^t \text{ или } t = \ln u. \tag{3.39}$$

Для получения операторов (3.36) в однородном виде можно применить соотношения

$$\frac{d\ldots}{du} = \frac{1}{u}\frac{d\ldots}{dt},\ \frac{d^2\ldots}{du^2} = \frac{1}{u^2}\left(\frac{d^2\ldots}{dt^2} - \frac{d\ldots}{dt}\right), \tag{3.40}$$

$$\frac{d^3\ldots}{du^3} = \frac{1}{u^3}\left(\frac{d^3\ldots}{dt^3} - 3\frac{d^2\ldots}{dt^2} + 2\frac{d\ldots}{dt}\right), \tag{3.41}$$

$$\frac{d^4 \ldots}{du^4} = \frac{1}{u^4}\left(\frac{d^4 \ldots}{dt^4} - 6\frac{d^3 \ldots}{dt^3} + 11\frac{d^2 \ldots}{dt^2} - 6\frac{d \ldots}{dt}\right), \tag{3.42}$$

и получить:

$$\nabla^2 \ldots = \frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial^2 \ldots}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \ldots}{\partial v^2}\right), \tag{3.43}$$

$$\nabla^4 \ldots = \frac{1}{u^4}\left(\frac{\partial^4 \ldots}{\partial t^4} - 4\frac{\partial^3 \ldots}{\partial t^3} + 4\frac{\partial^2 \ldots}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^3 \ldots}{\partial t \partial v^2} + 2\frac{\partial^4 \ldots}{\partial t^2 \partial v^2} + 4\frac{\partial^2 \ldots}{\partial v^2} + \frac{\partial^4 \ldots}{\partial v^4}\right), \tag{3.44}$$

$$\nabla_k^2 \ldots = \frac{1}{u^4}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial}{\partial t^2} - 1\right)\ldots \tag{3.45}$$

После умножения на $u^4 = e^{4t}$ уравнения (3.38) принимают вид:

$$\nabla^4(t,v)u_z - \frac{H}{\pi D}\nabla_k^2(t,v)\varphi = e^{4t}\frac{Z}{D}, \tag{3.46}$$

$$\nabla^4(t,v)\varphi + \frac{EhH}{\pi}\nabla_k^2(t,v)u_z = 0, \tag{3.47}$$

где $\nabla^4(t,v)\ldots = u^4\nabla^4\ldots$, $\nabla_k^2(t,v)\ldots = u^4\nabla_k^2\ldots$.

Далее, вводя функцию напряжений φ и перемещений u_z :

$$\varphi = \left(\frac{EhH}{\pi}\right)\nabla_k^2(t,v)\Phi(t,v), \tag{3.48}$$

$$u_z = -\nabla^4(t,v)\Phi(t,v), \tag{3.49}$$

можно удовлетворить второму уравнению системы (3.47), в то время как первое уравнение (3.19) примет вид уравнения восьмого порядка:

$$\nabla^8(t,v)\Phi(t,v) + p^2\nabla_k^4(t,v)\Phi(t,v) = -e^{4t}Z(t,v)/D, \tag{3.50}$$

где $p^2 = \dfrac{EhH^2}{\pi^2 D} = \dfrac{12\left(1-\nu^2\right)H^2}{\pi^2 h^2}$ - параметр, связанный с жесткостью геликоида.

Для решения уравнения (3.50) с правой частью, равной нулю, разложить решение в тригонометрические ряды

$$\Phi(t,v) = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(t)\sin mv\,. \tag{3.51}$$

При этом коэффициенты (3.51) можно определить из дифференциальных уравнений:

$$\nabla^8\left(t,m\right)\Phi_m(t) - p^2\nabla_k^4(t,m)\Phi_m(t) = 0\,, \tag{3.52}$$

где операторы будут иметь вид:

$$\nabla^4(t,m)... = \frac{d^4...}{dt^4} - 4\frac{d^3...}{dt^3} + 2(2-m^2)\frac{d^2...}{dt^2} + 4m^2\frac{d...}{dt} + m^2(m^2-4)...$$

$$\nabla_k^2(t,m)... = \pm m\left(\frac{d}{dt} - 1\right).... \tag{3.53}$$

Уравнение (3.52) можно представить в следующем виде:

$$\left[\nabla^4\left(t,m\right) + p\nabla_k^2(t,m)\right]\left[\nabla^4\left(t,m\right) - p\nabla_k^2(t,m)\right]\Phi_m(t) = 0 \tag{3.54}$$

и искать решение двух уравнений четвертого порядка

$$\left[\nabla^4\left(t,m\right) \pm p\nabla_k^2(t,m)\right]\Phi_m(t) = 0 \tag{3.55}$$

или в развернутом виде

$$\left[\frac{d^4}{dt^4} - 4\frac{d^3}{dt^3} + 2(2-m^2)\frac{d^2}{dt^2} + m\left(4m \pm p\right)\frac{d}{dt} + m^2(m^2-4) \mp mp\right]\Phi_m\left(t\right) = 0\,. \tag{3.56}$$

Решение уравнений (3.52) принимается в форме

$$\Phi_m(t) = A_{mi} e^{\alpha_{mi} t}, \qquad (3.57)$$

где A_{mi}- произвольные постоянные, $i = 1, 2, \ldots, 8$.

Уравнение (3.56) будем решать с помощью характеристического уравнения:

$$\alpha^4 - 4\alpha^3 + 2(2-m^2)\alpha^2 + m(4m \pm p)\alpha + m[m(m^2-4) \mp p] = 0. \qquad (3.58)$$

Для первого члена ряда ($m = 0$) характеристическое уравнение примет вид:

$$\alpha^4 - 4\alpha^3 + 4\alpha^2 = 0 \qquad (3.59)$$

и будет удовлетворяться корнями $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \alpha_4 = 2$, а решение запишется в виде:

$$u_z = A_{01} + A_{02} t + A_{03} e^{2t} + A_{04} t e^{2t}. \qquad (3.60)$$

Таким образом, получаем полярно-симметричное решение для круглой пластины:

$$u_z = A_{01} + A_{02} \ln u + A_{03} u^2 + A_{04} u^2 \ln u. \qquad (3.61)$$

Для последующих членов ряда ($m \geq 1$) требуется найти корни двух уравнений четвертой степени общего вида

$$\alpha^4 + b\alpha^3 + c\alpha^2 + d\alpha + e = 0, \qquad (3.62)$$

которые, как известно [76], совпадают с корнями двух квадратных уравнений

$$\alpha^2 + (b + A)\alpha / 2 + y + (by - d) / A = 0, \qquad (3.63)$$

где $A = \pm\sqrt{8y + b^2 - 4c}$, а y - какой-либо действительный корень кубического уравнения

$$8y^3 - 4cy^2 + (2bd - 8e)y + e(4c - b^2) - d^2 = 0 \qquad (3.64)$$

или для рассматриваемого случая:

$$b=-4\,,\ c=2\left(2-m^2\right),\ d=m\left(4m\pm p\right),\ e=m\left[m\left(m^2-4\right)\mp p\right], \qquad (3.65)$$

и кубическое уравнение (3.32) запишется в виде:

$$y^3-\left(2-m^2\right)y^2-m^4y-m^2\left(m^4-2m^2+p^2/8\right)=0. \qquad (3.66)$$

Полагая далее $y=z+\left(2-m^2\right)/3$, можно привести уравнение (3.66) к виду

$$z^3-3\overline{p}z+2\overline{q}=0, \qquad (3.67)$$

где $\overline{p}=4\left(m^4-m^2+1\right)/9$,

$$\overline{q}=-\left(8m^6-12m^4-12m^2+8+27m^2p^2/16\right)/27. \qquad (3.68)$$

Решение уравнения (3.67) можно искать с помощью формулы Кардано. Найдем дискриминант (3.67)

$$D=\left(2\overline{q}/2\right)^2+\left(-3\overline{p}/3\right)^3>0. \qquad (3.69)$$

При любых $m\geq 1$, у уравнения (3.67) будет одно действительное и два мнимых решения. Для нахождения действительного корня воспользуемся формулой:

$$z_1=\sqrt[3]{-\left(2\overline{q}\right)/2+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-\left(2\overline{q}\right)/2-\sqrt{D}}, \qquad (3.70)$$

откуда

$$y_1=z_1+\frac{2-m^2}{3}. \qquad (3.71)$$

Таким образом, можно получить 8 корней уравнения путем подстановки y_1 в (3.63). Для каждого m -го члена решения (3.57) будут свои 8 корней.

В частности, для $m=1$ среди восьми корней уравнения (3.57) два корня будут кратными с кратностью $k=1\left(\alpha_1=\alpha_8=1\right)$, и в соответствии с (3.27) и (3.28) решение (3.71) записывается в виде:

$$\Phi(t,v)=\sum_{m=1}^{\infty}\Big(A_{m1}e^{\alpha_1 t}+A_{m2}e^{\alpha_2 t}+A_{m3}e^{\alpha_3 t}+A_{m4}e^{\alpha_4 t}+A_{m5}e^{\alpha_5 t}+$$

$$+A_{m6}e^{\alpha_6 t}+A_{m7}e^{\alpha_7 t}+A_{m8}te^{\alpha_8 t}\Big)\sin mv. \qquad (3.72)$$

При $m>1$ среди восьми корней уравнения (3.57) четыре корня будут однократными сопряженными комплексными корнями ($\alpha_{3,4}=k_3\pm z_3 i$, $\alpha_{5,6}=k_5\pm z_5 i$), и в соответствии с (3.27) и (3.29) решение (3.71) записывается в виде:

$$\Phi(t,v)=\sum_{m=1}^{\infty}\Big(A_{m1}e^{\alpha_1 t}+A_{m2}e^{\alpha_2 t}+e^{k_3 t}\left(A_{m3}\cos z_3 t+A_{m4}\sin z_3 t\right)+$$

$$+e^{k_5 t}\left(A_{m5}\cos z_5 t+A_{m6}\sin z_5 t\right)+A_{m7}e^{\alpha_7 t}+A_{m8}e^{\alpha_8 t}\Big)\sin mv. \qquad (3.73)$$

После определения корней уравнения (3.57) можно определить функцию напряжений φ и перемещения u_z, а также и внутренние силовые факторы (Рис. 3.3):

$$N_u=\frac{1}{u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}=\pm\frac{EhH}{\pi}\frac{1}{u}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{d}{du}-\frac{m^2}{u}\right)\nabla_k^2(u,m)\Phi_m(u)\sin mv, \quad (3.74)$$

$$N_v=\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}=\pm\frac{EhH}{\pi}\frac{d^2}{du^2}\sum_{m=1}^{\infty}\nabla_k^2(u,m)\Phi_m(u)\sin mv, \qquad (3.75)$$

$$S=-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)=\frac{EhH}{\pi}\frac{1}{u}\left(\frac{d}{du}-\frac{1}{u}\right)\sum_{m=1}^{\infty}m\nabla_k^2(u,m)\Phi_m(u)\sin mv, \qquad (3.76)$$

$$Q_u=-D\frac{\partial}{\partial u}\nabla^2 u_z=D\frac{d}{du}\frac{1}{u^2}\sum_{m=1}^{\infty}\nabla^6(u,m)\Phi_m(u)\sin mv, \qquad (3.77)$$

$$Q_v=-\frac{D}{u}\frac{\partial}{\partial v}\nabla^2 u_z=\pm\frac{D}{u^3}\sum_{m=1}^{\infty}m\nabla^6(u,m)\Phi_m(u)\sin mv, \qquad (3.78)$$

$$M_u=-D\left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial u^2}+\frac{\nu}{u}\left(\frac{\partial u_z}{\partial u}+\frac{1}{u}\frac{\partial^2 u_z}{\partial v^2}\right)\right]=$$

$$= D\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{d^2}{du^2}+\frac{\nu}{u}\left(\frac{d}{du}-\frac{m^2}{u}\right)\right]\nabla^4(u,m)\Phi_m(u)\sin mv, \tag{3.79}$$

$$M_v = -D\left[\frac{1}{u}\left(\frac{\partial u_z}{\partial u}+\frac{1}{u}\frac{\partial^2 u_z}{\partial v^2}\right)+\nu\frac{\partial^2 u_z}{\partial u^2}\right]=$$

$$= D\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{u}\left(\frac{d}{du}-\frac{m^2}{u}\right)+\nu\frac{d^2}{du^2}\right]\nabla^4(u,m)\Phi_m(u)\sin mv, \tag{3.80}$$

$$M_{uv} = -(1-\nu)\frac{D}{u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial u_z}{\partial u}-\frac{u_z}{u}\right)=$$

$$= \mp(1-\nu)\frac{D}{u}\left(\frac{d}{du}-\frac{1}{u}\right)\sum_{m=1}^{\infty} m\nabla^4(u,m)\Phi_m(u)\sin mv, \tag{3.81}$$

где $\nabla_k^2(u,m)... = m\left(u\frac{d}{du}-1\right)...,$

$\nabla^2(u,m)... = \left(u^2\frac{d^2}{du^2}+u\frac{d}{du}-m^2\right)...$ и т.д.

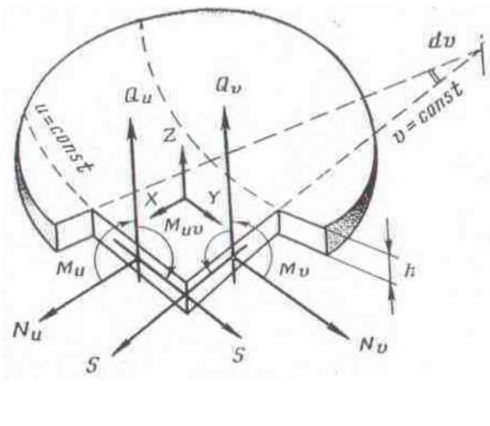


Рис. 3.3. Внутренние усилия.

Будем искать частное решение в виде:

$$\overline{\Phi}(t,v) = \sum_{m=1}^{\infty}\overline{\Phi}_m(t)\sin mv, \tag{3.82}$$

разложим правую часть уравнения в тригонометрический ряд

$$-\frac{e^{4t}}{D}Z(t,v)=-\frac{e^{4t}}{D}\sum_{m=1}^{\infty}Z_m(t)\sin mv, \qquad (3.83)$$

и получим для m -го члена ряда

$$\left[\nabla^4\nabla^4(t,m)-p^2\nabla_k^2\nabla_k^2(t,m)\right]\overline{\Phi}(t)=-\frac{e^{4t}}{D}Z_m(t), \qquad (3.84)$$

где $\nabla^4(t,m)...$ и $\nabla_k^2(t,m)...$ - операторы, определяемые формулами (3.52).

При постоянной нагрузке $Z(t,v)=q=const$ получим два возможных случая:

$$Z_m=\frac{4q}{\pi m} \text{ для } 0<v<\pi$$

$$Z_m=-\frac{4q}{\pi m}(-1)^{\frac{m+1}{2}} \text{ для } -\frac{\pi}{2}<v<\frac{\pi}{2} \text{ при } m=1,3,5, \qquad (3.85)$$

Уравнение (3.84) принимает вид для двух случаев:

$$\left[\nabla^4\nabla^4(t,m)-p^2\nabla_k^2\nabla_k^2(t,m)\right]\overline{\Phi}(t)=-\frac{4q}{\pi m}\frac{e^{4t}}{D} \text{ для } 0<v<\pi,$$

$$\left[\nabla^4\nabla^4(t,m)-p^2\nabla_k^2\nabla_k^2(t,m)\right]\overline{\Phi}(t)=\frac{4q}{\pi m}(-1)^{\frac{m+1}{2}}\frac{e^{4t}}{D} \text{ для } -\frac{\pi}{2}<v<\frac{\pi}{2}, \qquad (3.86)$$

откуда можно выразить частные решения для двух случаев:

$$\overline{\Phi_m}(t)=Ae^{4t} \text{ для } 0<v<\pi,$$

$$\overline{\Phi_m}(t)=-A(-1)^{\frac{m+1}{2}}e^{4t} \text{ для } -\frac{\pi}{2}<v<\frac{\pi}{2}, \qquad (3.87)$$

где $A=\dfrac{-4q}{D\pi m[4^6+m^8-40m^6+528m^4-2560m^2-9p^2m^2]}$. (3.88)

3.1.3. Определение тангенциальных перемещений прямого геликоида

Для определения тангенциальных перемещений u_u и u_v можно применить три уравнения из монографии [41]:

$$\varepsilon_u = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial u}\left(u_u + u_v\cos\chi\right) - \frac{B\sin^2\chi}{A^2}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}u_v + \frac{u_z}{R_u}, \tag{3.89}$$

$$\varepsilon_v = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial v}\left(u_v + u_u\cos\chi\right) - \frac{A\sin^2\chi}{B^2}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}u_u + \frac{u_z}{R_v}, \tag{3.90}$$

$$\varepsilon_{uv} = \omega_u + \omega_v,$$

$$\omega_u = \frac{\sin\chi}{A}\frac{\partial u_v}{\partial u} - \left[\frac{\sin\chi}{B}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} + \frac{1}{A}\frac{\partial\chi}{\partial u}\right]u_u + \cos\chi\left[\frac{B\sin\chi}{A^2}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} + \frac{1}{A}\frac{\partial\chi}{\partial u}\right]u_v -$$

$$-\frac{1}{\sin\chi}\left(\frac{1}{R_{uv}} + \frac{\cos\chi}{R_u}\right)u_z, \tag{3.91}$$

$$\omega_v = \frac{\sin\chi}{B}\frac{\partial u_u}{\partial v} - \left[\frac{\sin\chi}{A}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + \frac{1}{B}\frac{\partial\chi}{\partial v}\right]u_v + \cos\chi\left[\frac{A\sin\chi}{B^2}\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} + \frac{1}{B}\frac{\partial\chi}{\partial v}\right]u_u$$

$$-\frac{1}{\sin\chi}\left(\frac{1}{R_{uv}} + \frac{\cos\chi}{R_v}\right)u_z, \tag{3.92}$$

$$\frac{1}{R_{uv}} = \frac{M}{AB} = \frac{\sin 2\lambda}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \tag{3.93}$$

$$\kappa_u = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\gamma_u - \gamma_v\cos\chi}{\sin\chi}\right) - \frac{\sin\chi}{B}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\gamma_v + \frac{\delta}{R_{uv}}, \tag{3.94}$$

$$\kappa_v = -\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\gamma_v - \gamma_u\cos\chi}{\sin\chi}\right) - \frac{\sin\chi}{A}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\gamma_u - \frac{\delta}{R_{uv}}, \tag{3.95}$$

$$\kappa_{uv} = \tau^{(1)} + \aleph_u \cos\chi - \frac{1}{R_{uv}}\left(\varepsilon_v \sin\chi - \frac{1}{2}\varepsilon_{uv}\cos\chi\right) + \frac{\varepsilon_{uv}}{2R_u}, \tag{3.96}$$

$$\tau^{(1)} = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\gamma_v - \gamma_u \cos\chi}{\sin\chi}\right) - \frac{B\sin\chi}{A^2}\begin{Bmatrix}1 1\\ 2\end{Bmatrix}\gamma_u + \frac{\delta}{R_u}, \tag{3.97}$$

$$\gamma_u = \frac{1}{A}\frac{\partial u_z}{\partial u} - \frac{u_u}{R_u} + \frac{u_v}{R_{uv}},\ \gamma_v = \frac{1}{B}\frac{\partial u_z}{\partial v} - \frac{u_v}{R_v} + \frac{u_u}{R_{uv}}, \tag{3.98}$$

$$\delta = (\omega_v - \omega_u)/2. \tag{3.99}$$

При коэффициентах первой квадратичной формы $A=1,\ B=u$, кривизнах $k_u = k_v = 0$ и $k_{uv} = \frac{1}{R_{uv}} = \frac{M}{AB} = -\frac{c}{u^2}$ уравнения (3.48) можно переписать в следующей форме:

$$\varepsilon_u = \frac{\partial u_u}{\partial u}, \tag{3.100}$$

$$\varepsilon_v = \frac{1}{B}\frac{\partial u_v}{\partial v} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial u}u_u = \frac{1}{u}\left(\frac{\partial u_v}{\partial v} + u_u\right), \tag{3.101}$$

$$\varepsilon_{uv} = \omega_u + \omega_v = u\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u_v}{u}\right) + \frac{1}{u}\frac{\partial u_u}{\partial v} + 2\frac{c}{u^2}u_z. \tag{3.102}$$

Общее решение уравнений (3.100-3.102) с правой часть, равной нулю, имеет вид:

$$u_u = -A_1 \sin v + A_2 \cos v,\ u_v = -A_1 \cos v - A_2 \sin v + A_3 u, \tag{3.103}$$

т.е. соответствует перемещениям оболочки как твердого тела. Решение системы уравнений (3.100-3.102) с правой частью, отличной от нуля, при

$$\varepsilon_u = \frac{1}{Eh}\left(N_u - \nu N_v\right) = \frac{1}{Eh}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} - \nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\right), \tag{3.104}$$

$$\varepsilon_v = \frac{1}{Eh}\left(N_v - \nu N_u\right) = \frac{1}{Eh}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - \nu\left(\frac{1}{u}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right)\right), \tag{3.105}$$

$$\varepsilon_{uv} = \frac{2(1+\nu)}{Eh}S = -\frac{2(1+\nu)}{Eh}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) \tag{3.106}$$

и значениях функции напряжений φ и нормального перемещения u_z, определяемых формулами (3.39) и (3.51), представляет определенные трудности, поэтому было предложено найти аналитические выражения для тангенциальных перемещений напрямую.[41]

Можно получить аналитические выражения для тангенциальных перемещений, проинтегрировав уравнения (3.106), выраженные через полученные ранее значения функции напряжений φ и нормального перемещения u_z, определяемые формулами (3.49) и (3.51).

Выражение для функции перемещения φ для членов ряда *m>1* было получено ранее

$$\varphi(t,v) = \left(\frac{EhHm}{\pi}\right)\sum_{m=2}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{8}A_{mi}e^{\alpha_i t}\left(\alpha_i - 1\right) + 3Ae^{4t}\right)\cos mv \tag{3.107}$$

или

$$\varphi(u,v) = \left(\frac{EhHm}{\pi}\right)\sum_{m=2}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{8}A_{mi}u^{\alpha_i}\left(\alpha_i - 1\right) + 3Au^4\right)\cos mv.$$

Запишем простые производные, которые понадобятся в дальнейших вычислениях:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \left(\frac{EhHm}{\pi}\right)\sum_{m=2}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{8}A_{mi}u^{\alpha_i - 1}\left(\alpha_i - 1\right)\alpha_i + 12Au^3\right)\cos mv, \tag{3.108}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}=\left(\frac{EhHm}{\pi}\right)\sum_{m=2}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{8}A_{mi}u^{\alpha_i-2}(\alpha_i-1)^{2}\alpha_i+36Au^2\right)\cos mv, \qquad (3.109)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\left(\frac{EhHm^2}{\pi}\right)\sum_{m=2}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{8}A_{mi}u^{\alpha_i}(\alpha_i-1)+3Au^4\right)\sin mv, \qquad (3.110)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}=-\left(\frac{EhHm^3}{\pi}\right)\sum_{m=2}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{8}A_{mi}u^{\alpha_i}(\alpha_i-1)+3Au^4\right)\cos mv\ . \qquad (3.111)$$

Далее можно вычислить ε_u и ε_v по (3.106) с учетом (3.111):

$$\varepsilon_u=\left(\frac{Hm}{\pi}\right)\sum_{m=2}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{8}A_{mi}u^{\alpha_i-2}(\alpha_i-1)\left(\alpha_i-m^2-\nu\alpha_i(\alpha_i-1)\right)+Au^2\left(12-3m^2-36\nu\right)\right)\cos mv, \qquad (3.112)$$

$$\varepsilon_v=\left(\frac{Hm}{\pi}\right)\sum_{m=2}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{8}A_{mi}u^{\alpha_i-2}(\alpha_i-1)\left(\alpha_i(\alpha_i-1)+m^2\nu-\nu\alpha_i\right)+Au^2\left(36+3m^2\nu-12\nu\right)\right)\cos mv\ . \qquad (3.113)$$

Формулы для тангенциальных перемещений u_u и u_v можно получить из (3.102) путем интегрирования:

$$u_u=\int\varepsilon_u du, \qquad (3.114)$$

$$u_v=\int\left(u\varepsilon_v-u_u\right)dv, \qquad (3.115)$$

учитывая

$$\int u^{\alpha-2}du=\frac{u^{\alpha-1}}{\alpha-1}, \qquad (3.116)$$

$$\int u^{\alpha-2}\ln u\,du=\frac{u^{\alpha-1}}{\alpha-1}\left((\alpha-2)\ln u-1\right), \qquad (3.117)$$

$$\int u^{\alpha}du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1},\ \int\cos mv\,dv=\frac{\sin mv}{m}, \qquad (3.118)$$

$$u\varepsilon_v-u_u=\left(\frac{Hm}{\pi}\right)\sum_{m=2}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{8}A_{mi}u^{\alpha_i-1}\left[(\alpha_i-1)\left(\alpha_i(\alpha_i-1)+m^2\nu-\nu\alpha_i\right)-\alpha_i+m^2+\nu\alpha_i(\alpha_i-1)\right]+Au^2\left(36+3m^2\nu-4+m^2\right)\right)\cos mv, \qquad (3.119)$$

можно записать

$$u_u = \left(\frac{Hm}{\pi}\right)\sum_{m=2}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{8} A_{mi}u^{\alpha_i-1}\left(\alpha_i - m^2 - \nu\alpha_i(\alpha_i-1)\right) + Au^3\left(4 - m^2 - 12\nu\right)\right)\cos mv \text{,} \quad (3.120)$$

$$u_v = \left(\frac{H}{\pi}\right)\sum_{m=2}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{8} A_{mi}u^{\alpha_i-1}\left[(\alpha_i-1)\left(\alpha_i(\alpha_i-1)+m^2\nu-\nu\alpha_i\right)-\alpha_i+m^2+\nu\alpha_i(\alpha_i-1)\right] + Au^2\left(36+3m^2\nu-4+m^2\right)\right)\cos mv \cdot \quad (3.121)$$

Для получения решения для второго члена ряда (*m = 1)* необходимо учесть, что два корня из восьми будут кратными, и производные (*i=8)* запишутся следующим образом

$$\varphi_{18}(u,v) = \frac{EhH}{\pi} A_{18}u^{\alpha_8}\left((\alpha_8-1)\ln u + 1\right)\cos v \text{,} \quad (3.122)$$

$$\frac{\partial\varphi_{18}}{\partial u} = \frac{EhH}{\pi} A_{18}u^{\alpha_8-1}\left(\alpha_8(\alpha_8-1)\ln u + 2\alpha_8 - 1\right)\cos v \text{,} \quad (3.123)$$

$$\frac{\partial^2\varphi_{18}}{\partial u^2} = \frac{EhH}{\pi} A_{18}u^{\alpha_8-2}\left(\alpha_8(\alpha_8-1)^2\ln u + 3\alpha_8^2 - 4\alpha_8 + 1\right)\cos v \text{,} \quad (3.124)$$

$$\frac{\partial\varphi_{18}}{\partial v} = -\frac{EhH}{\pi} A_{18}u^{\alpha_8}\left((\alpha_8-1)\ln u + 1\right)\sin v \text{,} \quad (3.125)$$

$$\frac{\partial^2\varphi_{18}}{\partial v^2} = -\frac{EhH}{\pi} A_{18}u^{\alpha_8}\left((\alpha_8-1)\ln u + 1\right)\cos v \text{.} \quad (3.126)$$

Таким образом, можно записать выражения для тангенциальных перемещений для второго члена ряда (*m=1)*

$$u_u = \frac{H}{\pi}\left\{\sum_{i=1}^{7} A_{1i}u^{\alpha_i-1}\left(\alpha_i - 1 - \nu\alpha_i(\alpha_i-1)\right) + Au^3\left(3-12\nu\right) + \right.$$

$$\left. + A_{18}\frac{u^{\alpha_8-1}}{\alpha_8-1}\left[2\alpha_8 - 2 - \nu\left(3\alpha_8^2 - 4\alpha + 1\right) + \left(\ln u(\alpha-2)-1\right)(\alpha-1)\left(\alpha-1-\nu\alpha(\alpha-1)\right)\right]\right\}\cos v \text{,} \quad (3.126)$$

$$u_v=\frac{H}{\pi}\left\{\sum_{i=1}^{7}A_{1i}u^{\alpha_i-1}\left[(\alpha_i-1)(\alpha_i(\alpha_i-1)+\nu)-\alpha_i+1\right]+3Au^3(11+\nu)+\right.$$

$$+A_{18}u^{\alpha_8-1}\left[\ln u(\alpha_8-1)(\alpha_8(\alpha_8-1)-\nu\alpha_8+\nu-(\alpha_8-2)(\alpha_8-1-\nu\alpha_8(\alpha_8-1)))+\right.$$

$$\left.\left.+3\alpha_8^2-4\alpha_8+1-\nu(2\alpha_8-1)+\nu-(\alpha_8-1)(\alpha_8-1-\nu\alpha_8(\alpha_8-1))\right]\right\}\cos v. \qquad (3.127)$$

Выражения для усилий в общем виде

$$N_u=\frac{1}{u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}=\pm\frac{EhH}{\pi}\frac{1}{u}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{d}{du}-\frac{m^2}{u}\right)\nabla_k^2(u,m)\Phi_m(u)\sin mv\ ,(3.128)$$

$$N_v=\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}=\pm\frac{EhH}{\pi}\frac{d^2}{du^2}\sum_{m=1}^{\infty}\nabla_k^2(u,m)\Phi_m(u)\sin mv, \qquad (3.129)$$

$$S=-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)=\frac{EhH}{\pi}\frac{1}{u}\left(\frac{d}{du}-\frac{1}{u}\right)\sum_{m=1}^{\infty}m\nabla_k^2(u,m)\Phi_m(u)\sin mv, \qquad (3.130)$$

$$Q_u=-D\frac{\partial}{\partial u}\nabla^2u_z=D\frac{d}{du}\frac{1}{u^2}\sum_{m=1}^{\infty}\nabla^6(u,m)\Phi_m(u)\sin mv, \qquad (3.131)$$

$$Q_v=-\frac{D}{u}\frac{\partial}{\partial v}\nabla^2u_z=\pm\frac{D}{u^3}\sum_{m=1}^{\infty}m\nabla^6(u,m)\Phi_m(u)\sin mv, \qquad (3.132)$$

$$M_u=-D\left[\frac{\partial^2u_z}{\partial u^2}+\frac{\nu}{u}\left(\frac{\partial u_z}{\partial u}+\frac{1}{u}\frac{\partial^2u_z}{\partial v^2}\right)\right]=$$

$$=D\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{d^2}{du^2}+\frac{\nu}{u}\left(\frac{d}{du}-\frac{m^2}{u}\right)\right]\nabla^4(u,m)\Phi_m(u)\sin mv, \qquad (3.133)$$

$$M_v=-D\left[\frac{1}{u}\left(\frac{\partial u_z}{\partial u}+\frac{1}{u}\frac{\partial^2u_z}{\partial v^2}\right)+\nu\frac{\partial^2u_z}{\partial u^2}\right]=$$

$$=D\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{u}\left(\frac{d}{du}-\frac{m^2}{u}\right)+\nu\frac{d^2}{du^2}\right]\nabla^4(u,m)\Phi_m(u)\sin mv, \qquad (3.134)$$

$$M_{uv}=-(1-\nu)\frac{D}{u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial u_z}{\partial u}-\frac{u_z}{u}\right)=$$

$$=\mp(1-\nu)\frac{D}{u}\left(\frac{d}{du}-\frac{1}{u}\right)\sum_{m=1}^{\infty}m\nabla^4(u,m)\Phi_m(u)\sin mv, \tag{3.135}$$

где $\nabla_k^2(u,m)...=m\left(u\dfrac{d}{du}-1\right)...,$

$\nabla^2(u,m)...=\left(u^2\dfrac{d^2}{du^2}+u\dfrac{d}{du}-m^2\right)...$ и т.д.

Выражения усилий для членов ряда, начиная с третьего *(m≥2)*, запишутся в виде:

$$N_u=\pm\frac{EhHm}{\pi}\left[\sum_{i=1}^{8}A_{mi}u^{\alpha_i-2}\beta_{Nui}+Au^2\beta_{Nu}\right]\cos mv, \tag{3.136}$$

где $\beta_{Nui}=(\alpha_i-1)(\alpha_i-m^2)$, $\beta_{Nu}=12-3m^2$;

$$N_v=\pm\frac{EhHm}{\pi}\left[\sum_{i=1}^{8}A_{mi}u^{\alpha_i-2}\beta_{Nvi}+Au^2\beta_{Nv}\right]\cos mv, \tag{3.137}$$

где $\beta_{Nvi}=(\alpha_i-1)^2\alpha_i$, $\beta_{Nv}=36$;

$$S=\frac{EhHm}{\pi}\left[\sum_{i=1}^{8}A_{mi}u^{\alpha_i-2}\beta_{Si}+Au^2\beta_S\right]\sin mv, \tag{3.138}$$

где $\beta_{Si}=(\alpha_i-1)^2$, $\beta_S=9$;

$$Q_v=Dm\left[\sum_{i=1}^{8}A_{mi}u^{\alpha_i-3}\beta_{Qvi}+Au\beta_{Qv}\right]\cos mv, \tag{3.139}$$

где $\beta_{Qvi}=\beta_i\left(\alpha_i^2-m^2\right)$, $\beta_{Qv}=\beta\left(16-m^2\right)$;

$$Q_u = D\left[\sum_{i=1}^{8} A_{mi} u^{\alpha_i - 3} \beta_{Qui} + Au\beta_{Qu}\right]\sin mv, \qquad (3.140)$$

где $\beta_{Qui} = \beta_i(\alpha_i - 2)(\alpha_i^2 - m^2)$,

$$\beta_{Qu} = 2\beta(16 - m^2) = 2\beta_{Qv}; \qquad (3.141)$$

$$M_u = D\left[\sum_{i=1}^{8} A_{mi} u^{\alpha_i - 2} \beta_{Mui} + Au^2\beta_{Mu}\right]\sin mv, \qquad (3.142)$$

где $\beta_{Mui} = \beta_i\left[\alpha_i(\alpha_i - 1) + \sigma(\alpha_i - m^2)\right]$, $\beta_{Mu} = \beta(12 + 4\sigma - \sigma m^2)$; (3.143)

$$M_v = D\left[\sum_{i=1}^{8} A_{mi} u^{\alpha_i - 2} \beta_{Mvi} + Au^2\beta_{Mv}\right]\sin mv, \qquad (3.144)$$

где $\beta_{Mvi} = \beta_i\left[\alpha_i\sigma(\alpha_i - 1) + \alpha_i - m^2\right]$, $\beta_{Mv} = \beta(4 + 12\sigma - m^2)$;

$$M_{uv} = Dm(1-\sigma)\left[\sum_{i=1}^{8} A_{mi} u^{\alpha_i - 2} \beta_{Muvi} + Au^2\beta_{Muv}\right]\cos mv, \qquad (3.145)$$

где $\beta_{Muvi} = \beta_i(\alpha_i - 1)$, $\beta_{Muv} = 3\beta$; $\beta = 64 - 20m^2 + m^4$,

$$\beta_i = \alpha_i^2 - 4\alpha_i^3 + 2(2 - m^2)\alpha_i^2 + 4m^2\alpha_i + (m^2 - 4)m^2. \qquad (3.146)$$

Выражения усилий для второго члена ряда ($m = 1$) будут:

$$N_u = \pm\frac{EhH}{\pi}\left[\sum_{i=1}^{7} A_{1i} u^{\alpha_i - 2}\beta_{Nui} + A_{18}u^{\alpha_8 - 2}\beta_{Nu8} + Au^2\beta_{Nu}\right]\cos v, \qquad (3.147)$$

где $\beta_{Nui} = (\alpha_i - 1)^2$, $\beta_{Nu8} = (\alpha_8 - 1)\left[\ln u(\alpha_8 - 1) + 2\right]$, $\beta_{Nu} = 9$;

$$N_v = \pm\frac{EhH}{\pi}\left[\sum_{i=1}^{7} A_{1i} u^{\alpha_i - 2}\beta_{Nvi} + A_{18}u^{\alpha_8 - 2}\beta_{Nv8} + Au^2\beta_{Nv}\right]\cos v, \qquad (3.148)$$

где $\beta_{Nvi} = (\alpha_i - 1)^2\alpha_i$, $\beta_{Nv8} = 3\alpha_8^2 - 4\alpha_8 + 1 + (\alpha_8 - 1)^2\alpha_8\ln u$, $\beta_{Nv} = 36$;

$$S=\frac{EhH}{\pi}\left[\sum_{i=1}^{7}A_{1i}u^{\alpha_i-2}\beta_{Si}+A_{18}u^{\alpha_8-2}\beta_{S8}+Au^2\beta_S\right]\sin v, \tag{3.149}$$

где $\beta_{Si}=(\alpha_i-1)^2$, $\beta_S=9$, $\beta_{S8}=(\alpha_8-1)(2+(\alpha_8-1)\ln u)$;

$$Q_v=D\left[\sum_{i=1}^{7}A_{1i}u^{\alpha_i-3}\beta_{Qvi}+A_{18}u^{\alpha_8-3}\beta_{Qv8}+Au\beta_{Qv}\right]\cos v, \tag{3.150}$$

где $\beta_{Qvi}=\beta_i\left(\alpha_i^{\,2}-1\right), \beta_{Qv8}=\left(\alpha_8^{\,2}-1\right)\left(4\alpha_8^3-12\alpha_8^2+4\alpha_i+4+\beta_8\ln u\right)+2\alpha_8\beta_8$, $\beta_{Qv}=15\beta$;

$$Q_u=D\left[\sum_{i=1}^{7}A_{1i}u^{\alpha_i-3}\beta_{Qui}+A_{18}u^{\alpha_8-3}\beta_{Qu8}+Au\beta_{Qu}\right]\sin v, \tag{3.151}$$

где $\beta_{Qui}=\beta_i(\alpha_i-2)\left(\alpha_i^{\,2}-1\right)$, $\beta_{Qu}=30\beta$, $\beta_{Qu8}=(\alpha_8-2)\beta_{Qv8}+\beta_8\left(\alpha_8^{\,2}-1\right)$;

$$M_u=D\left[\sum_{i=1}^{7}A_{1i}u^{\alpha_i-2}\beta_{Mui}+A_{18}u^{\alpha_8-2}\beta_{Mu8}+Au^2\beta_{Mu}\right]\sin v, \tag{3.152}$$

где $\beta_{Mui}=\beta_i(\alpha_i-1)(\alpha_i+\sigma)$, $\beta_{Mu}=3\beta(4+\sigma)$,

$$\beta_{Mu8}=(\alpha_8-1+\sigma)\left(\alpha_8\bar{\beta}_8+\alpha_8\beta_8\ln u+\beta_8\right)+\alpha_8\beta_8-\sigma\left(\bar{\beta}_8+\beta_8\ln u\right); \tag{3.153}$$

$$M_v=D\left[\sum_{i=1}^{7}A_{1i}u^{\alpha_i-2}\beta_{Mvi}+A_{18}u^{\alpha_8-2}\beta_{Mv8}+Au^2\beta_{Mv}\right]\sin v, \tag{3.154}$$

где $\beta_{Mvi}=\beta_i\left[\alpha_i\sigma(\alpha_i-1)+\alpha_i-1\right], \beta_{Mv}=3\beta(1+4\sigma)$,

$$\beta_{Mv8}=(\alpha_8\sigma-\sigma+1)\left(\alpha_8\bar{\beta}_8+\alpha_8\beta_8\ln u+\beta_8\right)+\beta_8(\sigma\alpha_8-\ln u)-\bar{\beta}_8; \tag{3.155}$$

$$M_{uv}=D(1-\sigma)\left[\sum_{i=1}^{7}A_{1i}u^{\alpha_i-2}\beta_{Muvi}+A_{18}u^{\alpha_8-2}\beta_{Muv8}+Au^2\beta_{Muv}\right]\cos v, \tag{3.156}$$

где $\beta_{Muvi}=\beta_i(\alpha_i-1)$, $\beta_{Muv8}=(\alpha_8-1)\left(\bar{\beta}_8+\beta_8\ln u\right)+\beta_8$, $\beta_{Mu}=3\beta$;

где $\bar{\beta}_8=4\alpha_8^3-12\alpha_8^2+4\alpha_8+4.$

Рассмотрим пример.

Пусть дан сектор $(0 \le v \le \pi)$ прямой геликоидальной оболочки с внутренним радиусом $r = 5$м, внешним радиусом $R = 6{,}708$м и толщиной толщина $h = 0{,}02$м. Положим материал оболочки с модулем упругости E = 200000 МПа; коэффициентом Пуассона ν = 0,3. Зададим шаг винта равным H= 0,314м. В качестве нагрузки рассмотрим равномерно распределенную по площади q = 10^{-2} МН/м^2.

Листинг программы приведен в Приложении 4.

В соответствии с полученными результатами и варьированием учитываемого числа членов ряда было установлено, что учет одиннадцати членов ряда позволяет получить результаты, сходные с решениями другими методами, а увеличение числа членов ряда до двадцати одного позволяет добиться практически идентичных результатов. При этом при последующем увеличении числа членов ряда расхождения не превышают 0,175%.

Результаты представлены в Таблицах 3.2.1 и 3.2.2.

При этом из значений результатов видно, что величины нормальных перемещений и изгибающих моментов в середине пролета получаются очень близкими уже при учете одиннадцати членов ряда, тогда как значения изгибающих моментов в заделках и поперечные силы при одиннадцати членах ряда дают небольшие отличия, исчезающие при увеличении числа членов ряда до двадцати одного, однако, и эти отличия не оказывают существенного влияния на результаты и погрешность расчета можно считать в запас прочности.

Результаты расчета тестового примера с учетом разного числа членов ряда и в сравнении с МКЭ расчетом в ПК ЛИРА представлены в Таблице 3.2.1.

Таблица 3.2.1. Значения нормальных перемещений, посчитанных по аналитической методике и МКЭ

	Аналитическая методика с учетом 11 членов ряда	Аналитическая методика с учетом 21 членов ряда	МКЭ расчет в ПК ЛИРА
Нормальный прогиб u_z в середине пролета, мм	1,49	1,484	1,486

Таблица 3.2.2. Значения силовых факторов, посчитанных по аналитической методике и МКЭ

	Аналитическая методика с учетом 11 членов ряда	МКЭ расчет в ПК ЛИРА
Изгибающий момент в середине пролета Mu, тм/м	0,120	0,120
Изгибающий момент на внутреннем защемленном крае Mu, тм/м	- 0,257	- 0,247
Изгибающий момент на внешнем защемленном крае Mu, тм/м	- 0,230	- 0,221
Изгибающий момент в середине пролета Mv, тм/м	0,037	0,037
Изгибающий момент на внутреннем защемленном крае Mv, тм/м	- 0,077	- 0,075

Изгибающий момент на внешнем защемленном крае Mv, тм/м	- 0,069	- 0,076
Поперечная сила на внутреннем защемленном крае Qu, т/м	-0,92	-0,95
Поперечная сила на внешнем защемленном крае Qu, т/м	-0,803	-0,742

Кроме того, был проведен расчет прямой геликоидальной оболочки с толщиной h = 0,01м и шагом винта H = 0,628 м для сравнения с результатами, полученными другими исследователями, в частности с применением вариационно-разностного метода (ВРМ) [45]. Результаты представлены в Таблице 3.2.3.

Таблица 3.2.3.

	Аналитическая методика с учетом 11 членов ряда	Вариационно-разностный метод [45]	МКЭ расчет в ПК ЛИРА
Нормальный прогиб u_z в середине пролета, мм	11,84	12	11,8

При этом, если сравнить полученные результаты с расчетом балки шириной 1 м с аналогичным пролетом и защемлением краев, максимальный прогиб составит 12 мм, что позволяет сделать вывод, что результаты, полученные по аналитической методике и по МКЭ в ПК ЛИРА, дают лучшую сходимость, а результаты, полученные по ВРМ [45] завышены.

3.2. Расчет пологих и непологих прямых геликоидов, границы пологости в зависимости от параметра подъема винта

В данной работе рассматривается вопрос о применимости разных подходов к расчету пологих и непологих оболочек.

Как уже отмечалось ранее, для прямого геликоида пологость или непологость зависит от параметра, связанного с шагом винта. Параметры пологости рассматривались в Разделе 3.1.

Было выполнено сравнение, две модели прямых геликоидов с меняющимся параметром подъема винта были рассчитаны при помощи следующих методов:

1) универсальным полуаналитическим методом, подходящим для непологого косого геликоида и прямого, как его частного случая;

2) численно при помощи МКЭ в программном комплексе ANSYS APDL;

3) полуаналитическим методом для прямых пологих геликоидов   ;

4) аналитическим методом Рекача для расчета прямых пологих геликоидов.

Метод 1: Метод конечных элементов

Модель была построениа в конечноэлементном программном комплексе ANSYS при помощи создания точек по координатам, взятым на основе параметрического уравнения поверхности, далее созданы были с некоторым шагом направляющие прямые, соединяющие эти точки, и на их основе в свою очередь была построена поверхностб геликоида про помощи специальной команды. Созданная в препроцессоре модель разбивается на конечные элементы заданного размера, можно выбрать оптимальный размер стороны элемента или количество разбиений. Моделирование в ANSYS при помощи задания координат опорных точек в APDL является точным.

В библиотеке конечных элементов ANSYS ест два наиболее подходящих элемента для построения пластин и оболочек – shell63 (более старый) и shell181 (новый, модифицированный). Результаты при использовании обоих практически идентичны. При возможности разработчики рекомендуют пользоваться четырехугольными элементами. При определении элементов должна быть назначена толщина как параметр, определяющий жесткость, свойства материала, в данном случае для упругого материала – модуль Юнга, коэффициент Пуассона.

После назначения нагрузок и задания граничных условий модель запускается на расчет и после получения решения в постпроцессоре можно оценить получившиеся результаты.

Метод 2: Численно-аналитический

Расчет непологих оболочек отличается, как известно, от расчета пологих количеством слагаемых, входящих в уравнения – для непологих учитываются члены, связанные с поперечными силами в урвнениях равновесия. При расчете деформаций возникают также перемещения u_uи u_v, которыми уже нельзя пренебречь.

Рассмотрим уравнения косого геликоида и прямого как его частного случая при нулевом угле наклона образующей в следующем виде:

$$x = u\,cos\,v,$$

$$y = u\,sin\,v,$$

$$z = k\,u + c\,v \qquad (3.157$$

квадратичные формы принимают вид:

$$A = \sqrt{1+k^2},\ B = \sqrt{u^2+c^2},\ F = kc,$$

$$L = 0, M = -\frac{c}{\sqrt{A^2u^2+c^2}}, N = \frac{ku^2}{\sqrt{A^2u^2+c^2}}. \qquad (2.158)$$

Компоненты деформаций:

$$\varepsilon_u = \frac{\frac{\partial}{\partial u}u_u - \frac{k\,c\,u}{A\,(c^2+u^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{k\ c\frac{d}{du}u_v}{A\,(c^2+u^2)^{\frac{1}{2}}}}{A}, \tag{3.159}$$

$$\varepsilon_v = \frac{u\,u_u}{A\,(c^2+u^2)} + \frac{ku\sqrt{1+k^2}u_z}{\sqrt{A^2u^2+c^2}\,(c^2+u^2)}, \tag{3.160}$$

$$\omega_u = \frac{\sqrt{1-\frac{k^2c^2}{A^2(c^2+u^2)}}\frac{d}{du}u_v}{A} - \frac{cu_z}{A\sqrt{u^2+c^2}\sqrt{A^2u^2+c^2}\sqrt{1-\frac{k^2c^2}{A^2(c^2+u^2)}}} + \frac{k^2c^2\,u\,u_v}{A^3(c^2+u^2)^2\sqrt{1-\frac{k^2c^2}{A^2(c^2+u^2)}}}, \tag{3.161}$$

$$\omega_v = -\frac{u\,u_v}{\sqrt{u^2+c^2}\sqrt{A^2u^2+c^2}} - \frac{cu_z}{(u^2+c^2)} - \frac{c\,k\,u\,u_u}{A\,(u^2+c^2)\sqrt{A^2u^2+c^2}}, \tag{3.162}$$

$$\varepsilon_{uv} = \omega = \omega_u + \omega_v, \tag{3.163}$$

$$\gamma_u = -\frac{\frac{d}{du}u_z}{A} - \frac{c\,u_v}{A\sqrt{u^2+c^2}\sqrt{A^2u^2+c^2}}, \tag{3.164}$$

$$\gamma_v = -\frac{cu_u}{A\sqrt{u^2+c^2}\sqrt{A^2u^2+c^2}} + \frac{ku^2u_v}{(u^2+c^2)\sqrt{A^2u^2+c^2}} \tag{3.165}$$

$$\kappa_u = -\frac{u\,c\left(k^2+\frac{3}{2}\right)(A^6u^6+3A^4u^4\cdot c^2+3A^2u^2\cdot c^4+c^{10})}{(A^2u^2+c^2)^3(c^2+u^2)^2}u_v + \frac{2ku^2c^2\left(\left(A^4+\frac{1}{4}\right)c^4+\frac{5}{4}A^2u^2\right)}{A^2(A^2u^2+c^2)^2(c^2+u^2)^{\frac{3}{2}}}u_u -$$
$$-\frac{c^2k^2u}{A(A^2u^2+c^2)^{\frac{3}{2}}(c^2+u^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\mathrm{u_z} + \frac{c\left(A^2+\frac{1}{2}\right)}{A^3(c^2+u^2)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\mathrm{u_v} - \frac{c^2k}{A^2(A^2u^2+c^2)(c^2+u^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\mathrm{u_u} +$$
$$+\frac{(c^2+u^2)^{\frac{1}{2}}}{A(A^2u^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{d^2}}{\mathrm{du^2}}\mathrm{u_u} + \frac{k^2u^2c^2}{2(A^2u^2+c^2)^{3/2}(c^2+u^2)^{\frac{3}{2}}}u_z, \tag{3.166}$$

$$\kappa_v = \frac{u\frac{d}{du}u_z}{A(A^2u^2+c^2)^{1/2}(c^2+u^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{c\,u\,u_v}{2A^3(c^2+u^2)^2} - \frac{u\,c^2k\ u_u}{2A^2(A^2u^2+c^2)(c^2+u^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{c\frac{d}{du}u_v}{2\,A^3(c^2+u^2)} -$$
$$-\frac{c^2u^2k^2u_z}{A(A^2u^2+c^2)^{3/2}(c^2+u^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{3.167}$$

$$\kappa_{uv} = \frac{ck(A^2u^2+c^2)^{1/2}u_z}{(u^2+c^2)A^2} - \frac{c\,u\,u_u}{A(u^2+c^2)(A^2u^2+c^2)} -$$

$$-\frac{ku\left(-A^8u^8-3A^6u^{6\cdot}c^2-3A^2u^{2\cdot}c^4-A^2u^{2\cdot}c^6+\left(A^2+\frac{1}{2}\right)c^{12}-\left(A^2+\frac{1}{2}\right)c^8\right)u_v}{A^4(u^2+c^2)^{\frac{5}{2}}(A^2u^2+c^2)^3}+\frac{cuk(A^2u^2+c^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{du}u_z}{(u^2+c^2)A^2}+$$

$$+\frac{c\frac{d}{du}u_u}{(u^2+c^2)A^3}-\frac{u^2k\frac{d}{du}u_v}{(u^2+c^2)^{3/2}A^2}. \qquad 3.168))$$

Данные геометрические соотношения, будучи подставлены в уравнения равновесия, дают уравнения, которые можно представить в виде:

$$k1_{u_u}u_u+k1_{u_v}u_v+k1_{u_z}u_z+k1_{du_u}\frac{d}{du}u_u+k1_{du_v}\frac{d}{du}u_v+k1_{du_z}\frac{d}{du}u_z+$$

$$+k1_{d2u_u}\frac{d^2}{du^2}u_u+k1_{d2u_v}\frac{d^2}{du^2}u_v+k1_{d2u_z}\frac{d^2}{du^2}u_z+k1_{d3u_z}\frac{d^3}{du^3}u_z=0,$$

(3.169)

$$k2_{u_u}u_u+k2_{u_v}u_v+k2_{u_z}u_z+k2_{du_u}\frac{d}{du}u_u+k2_{du_v}\frac{d}{du}u_v+k2_{du_z}\frac{d}{du}u_z+$$

$$+k2_{d2u_u}\frac{d^2}{du^2}u_u+k2_{d2u_v}\frac{d^2}{du^2}u_v+k2_{d2u_z}\frac{d^2}{du^2}u_z+k2_{d3u_z}\frac{d^3}{du^3}u_z=0(3.170)$$

$$k3_{u_u}u_u+k3_{u_v}u_v+k3_{u_z}u_z+k3_{du_u}\frac{d}{du}u_u+k3_{du_v}\frac{d}{du}u_v+k3_{du_z}\frac{d}{du}u_z+$$

$$+k3_{d2u_u}\frac{d^2}{du^2}u_u+k3_{d2u_v}\frac{d^2}{du^2}u_v+k3_{d2u_z}\frac{d^2}{du^2}u_z+k3_{d3u_u}\frac{d^3}{du^3}u_u+$$

$$+k3_{d3u_v}\frac{d^3}{du^3}u_v+k3_{d3u_z}\frac{d^3}{du^3}u_z+k3_{d4u_z}\frac{d^4}{du^4}u_z=0. \qquad (3.171)$$

Выражения для коэффициентов полностью приведены в Приложении 4.

Первое и второе уравнения надо поинтегрировать, после интегрирования из них можно будет выразить величины них $\frac{d^3}{du^3}u_v$, $\frac{d^3}{du^3}u_u$, $\frac{d^2}{du^2}u_u$, $\frac{d^2}{du^2}u_v$, которые затем подставляются в третье уравнение равновесия.

В Приложении 4 полностью приведены все промежуточные выкладки, после которых можно в итоговом виде вывести систему трех дифференциальных уравнений. Порядок системы –восьмой.

$$y=\begin{bmatrix}y_0\\y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\\y_6\\y_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_u\\(u_u)'\\u_v\\(u_v)'\\u_z\\(u_z)'\\(u_z)''\\(u_z)'''\end{bmatrix}, f(u,y_i)=\begin{bmatrix}f_0\\f_1\\f_2\\f_3\\f_4\\f_5\\f_6\\f_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\f_1\\y_3\\f_3\\y_5\\y_6\\y_7\\f_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(u_u)'\\(u_u)''\\(u_v)'\\(u_v)''\\(u_z)'\\(u_z)''\\(u_z)'''\\(u_z)''''\end{bmatrix},$$

$$f_1=k_{10}y_0+k_{11}y_1+k_{12}y_2+k_{13}y_3+k_{14}y_4+k_{15}y_5+k_{16}y_6+k_{17}y_7, \quad (3.172)$$

$$f_3=k_{30}y_0+k_{31}y_1+k_{32}y_2+k_{33}y_3+k_{34}y_4+k_{35}y_5+k_{36}y_6+k_{37}y_7, \quad (3.173)$$

$$f_7=k_{70}y_0+k_{71}y_1+k_{72}y_2+k_{73}y_3+k_{74}y_4+k_{75}y_5+k_{76}y_6+k_{77}y_7. \quad (3.174)$$

Метод 3: численно-аналитический для пологого прямого геликоида.

В случае учета свойств прямого геликоида как частного случая косого его квадратичные формы принимают более простой по сравнению с косым вид, а при учете пологости итоговые уравнения еще более упрощаются. Такой подход рассматривался в работе [103,104]. Приведем здесь формулы.

Уравнения срединной поверхности оболочки в форме косого геликоида имеют вид:

$$x=u\cos\varphi\cos v,$$

$$y=u\cos\varphi\sin v,$$

$$z = u\sin\varphi + cv. \tag{3.175}$$

φ – угол наклона прямых образующих,φ=const,

c– параметр, связанный с шагом винта ($L = 2\pi c$).

При таком задании вид квадратичных форм:

$$A = 1, B = \sqrt{u^2cos^2\varphi + c^2},$$

$$F = csin\varphi,$$

$$L = 0, M = -\frac{c\,cos\,\varphi}{\sqrt{u^2 + c^2}},$$

$$N = \frac{u^2\,sin\,2\varphi}{\sqrt{u^2+c^2}}. \tag{3.176}$$

Угол между координатными линиями: $\chi = arccos\left(\frac{c\,sin\,\varphi}{\sqrt{u^2cos^2\varphi+c^2}}\right)$. (3.176)

Величины, связанные с кривизнами:

$$\frac{1}{R_{u'}} = 0,$$

$$\frac{1}{R_{v'}} = -\frac{\sqrt{c^2+u^2}(u^2cos^2\varphi+c^2)}{u^2\sin 2\varphi},$$

$$\frac{1}{R_{uv'}} = -\frac{\sqrt{c^2+u^2}\sqrt{u^2cos^2\varphi+c^2}}{ccos\varphi}. \tag{3.176}$$

Символы Кристоффеля принимают следующий вид:

$$\Gamma_{11}^1 = 0,$$

$$\Gamma_{11}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{12}^1 = -\frac{\mathrm{c}\,sin\,\varphi}{c^2 + u^2},$$

$$\Gamma_{12}^{2} = \frac{u}{c^2 + u^2},$$

$$\Gamma_{22}^{1} = -\frac{u(u^2 cos^2\varphi + c^2)}{c^2 + u^2},$$

$$\Gamma_{22}^{2} = -\frac{c\, sin\,\varphi u}{c^2+u^2}\ . \qquad (3.177))$$

Если принять гипотезу пологости, то все соотношения можно переписать в соответствующем виде:

Коэффициенты полученной системы уравнений могут быть получены в виде:

$$k_{10} = 0,$$

$$k_{11} = -\frac{\left(\sigma\sqrt{c^2+u^2} - \sigma + \sqrt{c^2+u^2}\right)u}{\left(c^2+u^2\right)^{3/2}}\ , \qquad (3.178)$$

$$k_{12} = -\frac{c^2\sigma\sqrt{c^2+u^2} - u^2}{\left(c^2+u^2\right)^{5/2}}\ , \qquad (3.179)$$

$$k_{13} = 0, \qquad (3.180)$$

$$k_{14} = -\frac{4\sigma c^2 u}{\left(c^2+u^2\right)^{5/2}}\ , \qquad (3.181)$$

$$k_{15} = -\frac{2\sigma u^2}{\left(c^2+u^2\right)^{3/2}}\ , \qquad (3.182)$$

$$k_{1Z} = -\frac{2(1-\sigma)(c^2+u^2)^{21/2}}{D1}, \qquad (3.183)$$

$$k_{30} = \frac{1+\sigma}{(1-\sigma)(c^2+u^2)}, \qquad (3.184)$$

$$k_{31} = \frac{u\,(1+\sigma)}{(1-\sigma)(c^2+u^2)}, \qquad (3.185)$$

$$k_{32} = \frac{1}{(c^2+u^2)}, \tag{3.186}$$

$$k_{33} = -\frac{u}{(c^2+u^2)}, \tag{3.187}$$

$$k_{34} = 0, \tag{3.188}$$

$$k_{35} = 0, \tag{3.189}$$

$$k_{3Y} = \frac{2}{D1\,(1-\sigma)}, \tag{3.190}$$

$$k_{70} = 0, \quad (3.191)$$

$$k_{71} = 0, \quad (3.191)$$

$$k_{72} = 0, \tag{3.192}$$

$$k_{73} = 0, \tag{3.193}$$

$$k_{74} = \frac{2(1-\sigma)c^2(4u^2-c^2)}{(c^2+u^2)^4}, \tag{3.194}$$

$$k_{75} = -\frac{(3-8\sigma)uc^2+u^3}{(c^2+u^2)^3}, \tag{3.195}$$

$$k_{76} = \frac{-2\,c^2\,\sigma + u^2}{\left(c^2+u^2\right)^2}, \tag{3.196}$$

$$k_{77} = -\frac{2\,u}{c^2+u^2},$$

$$k_{7Z} = \frac{1}{D2}. \quad (3.197))$$

Внутренние усилия и моменты могут выражены в следующем виде:

$$N_{\mathrm{u}} = \frac{D1\,u\,\sigma\,u_{\mathrm{u}}}{c^2+u^2} + D1\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\,u_{\mathrm{u}}\right) + \frac{2\;D1\;u_{\mathrm{z}}\,\sigma\,u^2}{\left(c^2+u^2\right)^{3/2}}, \tag{3.198}$$

$$N_{\mathrm{v}} = D1\,\sigma\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}u_{\mathrm{u}}\right) + \frac{D1\cdot u}{c^2+u^2}u_{\mathrm{u}}, \tag{3.199}$$

$$S_{\mathrm{u}} = \frac{D1\,(1+\sigma)\,u\,u_{\mathrm{u}}}{2(c^2+u^2)} - \frac{D1\,(1-\sigma)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}u_v\right)}{2} + \frac{D1\,u_v\,(1-\sigma)\,u}{2(c^2+u^2)}, \tag{3.200}$$

$$M_{\mathrm{u}} = \frac{c^2(1-\sigma)\,D2\,u_z}{\left(c^2+u^2\right)^2} - \frac{\sigma\,u\,(c^2+u^2)\,D2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}u_z}{\left(c^2+u^2\right)^2} - D2\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}u_z\,. \tag{3.201}$$

$$M_v = -\frac{D2\,c^2\,(1-\sigma)\,u_z}{\left(c^2+u^2\right)^2} - \frac{u(c^2+u^2)\,D2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}u_z}{\left(c^2+u^2\right)^2} - \frac{\sigma(c^2+u^2)^2\,D2\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}u_z}{\left(c^2+u^2\right)^2}, \tag{3.202}$$

$$Q_u = -\frac{D2\cdot 2c^2\,u\,(1-\sigma)\,u_z}{\left(c^2+u^2\right)^3} - \frac{D2\left(2c^2\sigma(2c^2+u^2) - (c^2+u^2)^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}u_z}{\left(c^2+u^2\right)^3} - \tag{3.203}$$
$$- \frac{D2\cdot u\cdot(c^2+u^2)^2\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}u_z}{\left(c^2+u^2\right)^3} - \frac{C2\,(c^3+u^3)^2\,\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}u^3}u_z}{\left(c^2+u^2\right)^3}\,.$$

Остальные силовые факторы равны нулю.

Программа для реализации методики приводится в приложении 1 и 2

Метод 4:

Модифицированная методика расчета В.Г. Рекача для прямого пологого геликоида.

При использовании методики в реализации на программном комплексе MathCad было выявлено, что при значениях парамета «с», близких к нулю, при решении системы уравнений возникают сингулярные матрицы, и найти решение невозможно.

Исследуемые модели и полученные результаты:

Модель 1:

Рассмотрим следующую модель: оболочки из железобетона имеет жесткие заделки по криволинейным краям, нагрузка – равномерно распределенная, направлена вертикально – 1000 кг/м^2. Внутренний радиус R1=2м, внешний радиус R2=4м, толщина оболочки – 12 см, механические свойства условного железобетона: E= 32500МПа, ν=0.17.

Рассмотрим поведение конструкций с меняющимся шагом винта, соответствующий параметр меняется в диапазоне от 0 до 2· 2π.

Результаты для модели 1 :

Для этой модели граница пологости проходит при c=0.054.

Если пологими считаются оболочки, у которых $l_{\min}/f \geq 5$

Тогда при
$$a = 2м$$
$$f = H = 2 \cdot \pi \cdot c$$
$$\frac{2}{2 \cdot \pi \cdot c} = 5$$
$$c = 0.063$$

-Значение наибольшего «с», при котором оболочка является еще пологой.

Результаты приведены в таблице 5.

Таблица 5. Сравнение расчета перемещения, полученного четырьмя разными способами при изменении параметра «с» для модели 1.

Параметр «с»	Перемещение, МКЭ, М*10-3	Перемещение, для непологого прямого численно-аналитически, М*10-3	Перемещение, Для пологого прямого численно-аналитически, М*10-3	Перемещение, Метод Рекача, М*10-3
2	0,484	0,365	0,361	0,357
1,7	0,496	0,429	0,422	0,422
1,5	0,507	0,479	0,474	0,474
1,2	0,577	0,562	0,567	0,563
1	0,633	0,632	0,633	0,629
0,5	0,787	0,794	0,792	0,791
0,3	0,837	0,840	0,840	0,838
0,2	0,854	0,856	0,856	0,855
0,15	0,860	0,862	0,862	0,860
0,1	0,865	0,867	0, 866	0,864
0,08	0,866	0,867	0,867	0,866
0,06	0,867	0,868	0,868	0,865
0,05	0,868	0,868	0,869	0,864
0,04	0,868	0,869	0,869	-

0,02	0,868	0,869	0,869	-
0,01	0,869	0,870	0,870	-
0	0,869	0,870	0,870	-

Модель 2, Рассмотрим стальную оболочку, жестко закрепленную по обоим краям, загруженную вертикальной равномерно распределенной нагрузкой. Контурные радиусы— R1=5м, R2=6,7м; толщина 3 см, шаг винта направляющей — $0.01 \cdot 2\pi$; характеристики материала: E=200000 МПа, ν=0.3 величина нагрузки - 1000кг/м².

Рассмотрим следующую модель: оболочки из стали имеет жесткие заделки по криволинейным краям, нагрузка – равномерно распределенная, направлена вертикально – 1000 кг/м^2. Внутренний радиус R1=5м, внешний радиус R2=6.7м, толщина оболочки – 3 см, механические свойства стали: E=200000 МПа, ν=0.3.

Для этой модели граница пологости проходит при c=0.054.

Если пологими считаются оболочки, у которых $l_{\min}/f \geq 5$

Тогда при
$$a = 1.7м$$
$$f = H = 2 \cdot \pi \cdot c$$
$$\frac{1.7}{2 \cdot \pi \cdot c} = 5$$
$$c = 0.054$$

-Значение наибольшего «с», при котором оболочка является еще пологой.

Результаты для модели 2 представлены в таблице 6:

Таблица 6. Результаты расчета перемещений четырьмя разными способами для модели 2.

Параметр «с»	Перемещение, МКЭ, М*10-3	Перемещение, числ-аналитич., М*10-3	Перемещение, числ-аналитич., для прямого пологого, М*10-3	Перемешение метод Рекача t=0.03 *10-3
2	0,262	0,366	0,256	0,25456
1,5	0,313	0,391	0,315	0,31101
1	0,370	0,415	0,377	0,37148
0,8	0,392	0,423	0,400	0,39459
0,6	0,412	0,430	0,420	0,41372
0,5	0,421	0,433	0,428	0,42075
0,4	0,436	0,428	0,435	0,42757
0,2	0,439	0,438	0,445	0,43702
0,1	0,440	0,440	0,447	0,43944
0,05	0,440	0,440	0,448	0,44001
0,04	0,441	0,440	0,448	0,44013
0,03	0,441	0,440	0,448	0,44019
0,02	0,441	0,440	0,449	0,44022
0,01	0,441	0,441	0,449	-
0	0,441	0,441	0,449	-

Выводы по результатам 3.2.

Результаты демонстрируют следующее:

1) В пределах пологости по классической формуле для пологости (до 0,05 все методы имеют минимальное расхождение с точным аналитическим, кроме метода 3. Метод 3 представляется самым грубым, хоть и основан на предположении о пологости. Он дает несколько завышенные (на значение около 2-3 %) результаты.

2) гипотеза «длинного» геликоида и вытекающая из нее возможность пренебречь производными вдоль оси «у» для длинного геликоида оправдана, так как результаты, полученные с ее применением (методики 2 и 3) и без ее применения (1 и 4) имеют незначительное расхождение.

1) За пределами пологости в целом для прямых геликоидов все четыре методики демонстрируют до некоторого предела близкие результаты. В данных численных экспериментах пределы диапазона параметров «с», соответсвующие хорошей сходимости с пологой моделью, в несколько раз шире, чем согласно классической формуле, связывающей размер в плане и стрелу подъема. Так, в результатах модели 1 значительное расхождение начинается в непологом диапазоне при «с» более 1 -1.2, причем наиболее близкую сходимость демонстрируют методы 1 и 4 , метод конечных элементов и аналитический метод Рекача. При значениях параметра «с», превышающих 1.5, значения прогибов, посчитанные по методу конечных элементов, превышают результаты, полученные по остальным трем методам, примерно на 10%, а при параметре «с=2» на 25%.

Для модели 2 наблюдаются практически на всем диапазоне изменения параметра «с» почти идентичные результаты по методам 1,3 и 4. Метод 2, основанный на непологих предпосылках, дает завышенные на 20-30% по сравнению с остальными значения прогибов при больших, больше 1-1.5 значениях параметра «с», то есть при резком подъеме винта.

Результаты требуют дальнейшего изучения и проведения других численных экспериментов для более однозначной интерпретации и выявления более явных закономерностей.

Листинги программ для проведенных численных экспериментов приведены в приложениях (3 и 4) – метод 1 (Ansys APDL), ()-метод 2(Maple), () – метод 3 (Maple).

3.3. Аналитический расчет конволютного геликоида

Коэффициенты основных квадратичных форм поверхности и кривизны конволютного геликоида [65]:

$$A=1,\ F=a\sin\gamma+p\cos\gamma,\ B^2=a^2+p^2+t^2\sin^2\gamma,$$

$$L=0, M=\frac{\sin\gamma(a\cot\gamma-p)}{\sqrt{(a\cot\gamma-p)^2+t^2}}, N=\frac{[a(a\cot\gamma-p)+t^2\sin\gamma\cos\gamma]}{\sqrt{(a\cot\gamma-p)^2+t^2}}$$

$$K=-\frac{(a\cot\gamma-p)^2}{[(a\cot\gamma-p)^2+t^2]^2}<0$$

Угол χ между координатными линиями:

$$\cos\chi=(a\sin\gamma+p\cos\gamma)/\sqrt{a^2+p^2+t^2\sin^2\gamma}.$$

Уравнения равновесия для конволютного геликоида:

$$\frac{1}{Sin\chi}\frac{\partial}{\partial u}[B(N_u+cos\chi S_u)]-\frac{B^2}{A}.\Gamma_{11}^2 sin\chi S_u-\frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial v}[A(S_v-cos\chi N_v)]-$$
$$B\Gamma_{12}^2 sin\chi N_v-\frac{AB}{sin\chi}\left(\frac{Q_u}{R_u'}-\frac{Q_v}{R_{uv}}\right)+AB(\mathrm{X}+cos\chi Y)=0 \qquad (3.204)$$

$$\frac{1}{Sin\chi}\frac{\partial}{\partial u}[B(S_u+cos\chi S_u)]-A.\Gamma_{12}^2 sin\chi N_u-\frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial v}[A(N_v-cos\chi S_v)]+BA=$$
$$\frac{A^2}{B}\Gamma_{22}^2 sin\chi S_v-\frac{AB}{sin\chi}\left(\frac{Q_v}{R_v'}-\frac{Q_u}{R_{uv}}\right)+AB(Y+cos\chi X)=0 \qquad (3.205)$$

$$B\left(\frac{N_u}{R_u}+\frac{N_v}{R_v}+\frac{S_v-S_u}{R_{uv}}\right)+\frac{\partial}{\partial u}(BQ_u)+\frac{\partial}{\partial v}(AQ_v)+ABsin\chi Z=0 \qquad (3.206)$$

$$\frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial u}(B(M_{uv}+cos\chi M_u))-\frac{B^2}{A}\Gamma_{11}^2 sin\chi M_u-\frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial v}(A(M_v-cos\chi M_{uv}))-$$
$$B\Gamma_{12}^2 sin\chi M_{vu}+ABQ_v=0 \qquad (3.207)$$

$$\frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial u}(B(M_u+\ cos\chi M_{uv}))-A\Gamma_{12}^1 sin\chi M_{uv}+\frac{1}{sin\chi}\frac{\partial}{\partial v}(A(M_{vu}-cos\chi M_v))+$$

$$\frac{A^2}{B}\Gamma_{22}^1 sin\chi M_v-ABQ_u=0 \qquad (3.208)$$

$$sin\chi(S_u+\ S_v)+\frac{M_{uv}}{R_u}+\frac{M_{vu}}{R_v}+\frac{M_v-M_u}{Ru_v}=0, \qquad (3.209)$$

(звездочки условно не показаны),

где Ru, Rv - радиусы кривизны нормальных сечений поверхности, прове-денных вдоль координатных линий, а встречающиеся в уравнении обозначения вычисляются по формулам:

$$\frac{1}{\mathrm{R'_u}}=-\frac{\mathrm{L}}{A^2},\ \frac{1}{\mathrm{R'}_v}=-\frac{\mathrm{N}}{B^2},\ \frac{1}{\mathrm{R_{uv}}}=\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{AB}}$$

Разложение внешних сил и моментов по осям X, Y, Z производится следующим образом: $P=X\frac{\overline{\boldsymbol{r_u}}}{A}+Y\frac{\overline{\boldsymbol{r_v}}}{B}-Z\overline{\boldsymbol{n}},Q=E\frac{\overline{\boldsymbol{r_u}}}{A}+F\frac{\overline{\boldsymbol{r_v}}}{B}.$

$\bar{u}$=u(u,v) - вектор упругого смещения произвольной точки срединной поверхности, разложенный по ортам:

$$\overline{\boldsymbol{u}}=u_u\frac{\overline{\boldsymbol{r_u}}}{A}+u_v\frac{\overline{\boldsymbol{r_v}}}{B}+u_z\overline{\boldsymbol{n}} \qquad (3.210)$$

где $u_u,u_{v,}u_z$ −компоненты смещения.

Продольные и изгибные деформации записываются в виде:

$$\varepsilon_u=\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial u}(u_u+u_v cos\chi)-\frac{\mathrm{B}\,sin\chi^2}{A^2}\mathit{\Gamma}_{11}^2u_v+\frac{u_z}{R_u}, \qquad (3.211)$$

$$\varepsilon_u=\frac{1}{1}\frac{\partial}{\partial u}\left(u_u+u_v(a\sin\gamma+\rho\cos\gamma)/\sqrt{a^2}+\rho^2\quad+t^2sin^2\gamma\right)-$$

$$\frac{\sqrt{a^2}+\rho^2\quad+t^2sin^2\gamma.sin\chi^2}{1^2}\mathit{\Gamma}_{11}^2u_v+\frac{u_z}{R_u} \qquad (3.212)$$

$$\varepsilon_v = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial v}(u_v + u_u cos\chi) - \frac{\mathrm{A}\, sin\chi^2}{B^2}\Gamma^1_{22}u_u + \frac{u_z}{R_v}, \qquad (3.213)$$

$$\varepsilon_v = \frac{1}{\sqrt{a^2}+\rho^2 \;\; +t^2 sin^2\gamma}\frac{\partial}{\partial v}\left(u_v + u_u(a\sin\gamma + \rho\cos\gamma)/\sqrt{a^2} + \rho^2 \;\; + t^2 sin^2\gamma\right) -$$

$$\frac{1\, sin\chi^2}{(\sqrt{a^2}+\rho^2 \;\; +t^2 sin^2\gamma)^2}\Gamma^1_{22}u_u + \frac{u_z}{R_v}, \qquad (3.214)$$

$$\omega_u = \frac{sin\chi}{1}\frac{\partial}{\partial u}u_v - \left(\frac{sin\chi}{\sqrt{a^2}+\rho^2 \;\; +t^2 sin^2\gamma}\Gamma^1_{12} + \frac{1}{1}\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)u_u + (a\sin\gamma + \rho\cos\gamma)/\sqrt{a^2} +$$

$$\rho^2 \;\; + t^2 sin^2\gamma\left(\frac{\sqrt{a^2}+\rho^2 \;\; +t^2 sin^2\gamma sin\chi}{1^2}\Gamma^2_{11} + \frac{1}{1}\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)u_{v-} - \frac{1}{sin\chi}\left(\frac{1}{R_{uv}} + \frac{cos\chi}{R_u}\right)u_z,$$

$$(3.215)$$

$$\omega_v = \frac{sin\chi}{\sqrt{a^2}+\rho^2 \;\; +t^2 sin^2\gamma}\frac{\partial}{\partial v}u_u - \left(\frac{sin\chi}{\sqrt{a^2}+\rho^2 \;\; +t^2 sin^2\gamma}\Gamma^2_{12} + \frac{1}{\sqrt{a^2}+\rho^2 \;\; +t^2 sin^2\gamma}\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)u_v +$$

$$cos\chi\left(\frac{1 sin\chi}{(\sqrt{a^2}+\rho^2 \;\; +t^2 sin^2\gamma)^2}\Gamma^1_{22} + \frac{1}{\sqrt{a^2}+\rho^2 \;\; +t^2 sin^2\gamma}\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)u_{u-} - \frac{1}{sin\chi}\left(\frac{1}{R_{uv}} + \frac{cos\chi}{R_v}\right)u_z,$$

$$(3.216)$$

$$\varepsilon_{uv} = \omega = \omega_u + \omega_v, \qquad (3.217)$$

$$\varepsilon_{uv} = \omega = \frac{sin\chi}{1}\frac{\partial}{\partial u}u_v - \left(\frac{sin\chi}{\sqrt{a^2}+\rho^2 \;\; +t^2 sin^2\gamma}\Gamma^1_{12} + \frac{1}{1}\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)u_u + (a\sin\gamma + \rho\cos\gamma)/\sqrt{a^2} +$$

$$\rho^2 \;\; + t^2 sin^2\gamma\left(\frac{\sqrt{a^2}+\rho^2 \;\; +t^2 sin^2\gamma sin\chi}{1^2}\Gamma^2_{11} + \frac{1}{1}\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)u_{v-} - \frac{1}{sin\chi}\left(\frac{1}{R_{uv}} +\right.$$

$$\left.\frac{cos\chi}{R_u}\right)u_z, + \frac{sin\chi}{\sqrt{a^2}+\rho^2 \;\; +t^2 sin^2}\frac{\partial}{\partial v}u_u - \left(\frac{sin\chi}{\sqrt{a^2}+\rho^2 \;\; +t^2 sin^2\gamma}\Gamma^2_{12} + \frac{1}{\sqrt{a^2}+\rho^2 \;\; +t^2 sin^2\gamma}\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)u_v +$$

$$cos\chi\left(\frac{1 sin\chi}{(\sqrt{a^2}+\rho^2 \;\; +t^2 sin^2\gamma)^2}\Gamma^1_{22} + \frac{1}{\sqrt{a^2}+\rho^2 \;\; +t^2 sin^2\gamma}\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)u_{u-} - \frac{1}{sin\chi}\left(\frac{1}{R_{uv}} + \frac{cos\chi}{R_v}\right)u_z,$$

$$(3.218)$$

$$\gamma_u = \frac{1}{1}\frac{\partial}{\partial u}u_z - \frac{u_u}{R_u} + \frac{u_v}{R_{uv}}, \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{a^2}+\rho^2 \;\; +t^2 sin^2\gamma}\frac{\partial}{\partial v}u_z - \frac{u_v}{R_v} - \frac{u_u}{R_{uv}}, \qquad (3.219)$$

$$\delta = \frac{1}{2}(\omega_v - \omega_u) \qquad (3.220)$$

$$\delta = \frac{1}{2}((\frac{sin\chi}{\sqrt{a^2}+\rho^2 \;\; +t^2 sin^2\gamma}\frac{\partial}{\partial v}u_u - \left(\frac{sin\chi}{\sqrt{a^2}+\rho^2 \;\; +t^2 sin^2\gamma}\Gamma^2_{12} + \frac{1}{\sqrt{a^2}+\rho^2 \;\; +t^2 sin^2\gamma}\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)u_v +$$

$$cos\chi\left(\frac{1sin\chi}{\sqrt{a^2}+\rho^2\ \ +t^2sin^2\gamma^2}\Gamma_{22}^{1}+\frac{1}{\sqrt{a^2}+\rho^2\ \ +t^2sin^2\gamma}\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)u_{u-}-\frac{1}{sin\chi}\left(\frac{1}{R_{uv}}+\frac{cos\chi}{R_v}\right)u_{z},)-$$

$$(\frac{sin\chi}{1}\frac{\partial}{\partial u}u_v-\left(\frac{sin\chi}{\sqrt{a^2}+\rho^2\ \ +t^2sin^2\gamma}\Gamma_{12}^{1}+\frac{1}{1}\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)u_u+(a\sin\gamma+\rho\cos\gamma)/\sqrt{a^2}+\rho^2\ \ +$$

$$t^2sin^2\gamma\left(\frac{\sqrt{a^2}+\rho^2\ \ +t^2sin^2\gamma sin\chi}{1^2}\Gamma_{11}^{2}+\frac{1}{1}\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)u_{v-}-\frac{1}{sin\chi}\left(\frac{1}{R_{uv}}+\frac{cos\chi}{R_u}\right)u_{z},\ \ ))$$

(3.221)

$$\kappa_u=-\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\gamma_u-\gamma_v cos\chi}{sin\chi})-\frac{sin\chi}{B}\Gamma_{12}^{1}\gamma_v+\frac{\delta}{R_{uv}},\tag{3.222}$$

$$\kappa_v=-\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\gamma_v-\gamma_u cos\chi}{sin\chi}\right)-\frac{sin\chi}{A}\Gamma_{12}^{2}\gamma_u-\frac{\delta}{R_{uv}},\tag{3.223}$$

$$\tau^{(1)}=-\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\gamma_v-\gamma_u cos\chi}{sin\chi})-\frac{Bsin\chi}{A^2}\Gamma_{11}^{2}\gamma_u+\frac{\delta}{R_u},\tag{3.224}$$

$$\tau^{(1)}=\kappa_{uv}-\kappa_u cos\chi+\frac{1}{R_{uv}}\ (\varepsilon_v sin\chi-\frac{\varepsilon_{uv}cos\chi}{2})-\frac{\varepsilon_{uv}}{2R_u},\tag{3.225}$$

$$\tau^{(2)}=-\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial v}(\frac{\gamma_u-\gamma_v cos\chi}{sin\chi})-\frac{Asin\chi}{B^2}\Gamma_{22}^{1}\gamma_u+\frac{\delta}{R_u},\tag{3.226}$$

$$\tau^{(1)}=-\kappa_{uv}+\kappa_v cos\chi-\frac{1}{R_{uv}}\ (\varepsilon_u sin\chi-\frac{\varepsilon_{uv}cos\chi}{2})-\frac{\varepsilon_{uv}}{2R_v},\tag{3.227}$$

Коэффициенты Кристоффеля:

$$\Gamma_{11}^{1}=\frac{(\sqrt{a^2}+\rho^2\ \ +t^2sin^2\gamma)^2\frac{\partial A}{\partial u}+\sqrt{a^2}+\rho^2\ \ +t^2sin^2 1^2\frac{\partial A}{\partial v}-cos\chi\frac{\partial}{\partial u}(ABcos\chi)}{(\sqrt{a^2}+\rho^2\ \ +t^2sin^2\gamma)^2 sin\chi^2}\tag{3.228}$$

$$\Gamma_{11}^{2}=\frac{-\sqrt{a^2}+\rho^2\ \ +t^2sin^2)cos\chi\frac{\partial A}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{a^2}+\rho^2\ \ +t^2sin^2\gamma cos\chi)-\frac{\partial A}{\partial v}}{(\sqrt{a^2}+\rho^2\ \ +t^2sin^2\gamma)^2 sin\chi^2}\tag{3.229}$$

$$\Gamma_{12}^{1}=\frac{(\sqrt{a^2}+\rho^2\ \ +t^2sin^2\gamma)^2\frac{\partial A}{\partial v}-(\sqrt{a^2}+\rho^2\ \ +t^2sin^2\gamma)^2cos\chi\frac{\partial B}{\partial u}}{(\sqrt{a^2}+\rho^2\ \ +t^2sin^2\gamma)^2 sin\chi^2}\tag{3.230}$$

$$\Gamma_{12}^{2}=\frac{\sqrt{a^2}+\rho^2\ \ +t^2sin^2\gamma\frac{\partial B}{\partial u}-\sqrt{a^2}+\rho^2\ \ +t^2sin^2\gamma cos\chi\frac{\partial B}{\partial u}}{(\sqrt{a^2}+\rho^2\ \ +t^2sin^2\gamma)^2 sin\chi^2}\tag{3.231}$$

$$\Gamma_{22}^{1}=\frac{-(\sqrt{a^2}+\rho^2\ \ +t^2sin^2\gamma)^2cos\chi\frac{\partial B}{\partial v}+(\sqrt{a^2}+\rho^2\ \ +t^2sin^2\gamma)^2\frac{\partial}{\partial v}(ABcos\chi)-\frac{\partial B}{\partial u}}{(\sqrt{a^2}+\rho^2\ \ +t^2sin^2\gamma)^2 sin\chi^2}$$

(3.232)

$$\Gamma_{22}^{2}=\frac{\sqrt{a^2}+\rho^2\ \ +t^2sin^2\gamma cos\chi\frac{\partial A}{\partial v}+(\sqrt{a^2}+\rho^2\ \ +t^2sin^2\gamma)^2cos\chi\frac{\partial A}{\partial v}-ABcos\chi\frac{\partial}{\partial v}(ABcos\chi)}{(\sqrt{a^2}+\rho^2\ \ +t^2sin^2\gamma)^2sin\chi^2}$$

(3.233)

Физические соотношения теории упругости записываются в виде:

$$N_u=\frac{Eh}{(1-\nu^2)}\left(\frac{\varepsilon_u-\varepsilon_{uv}ctg\chi+\nu\varepsilon_v}{sin\chi}\right),\qquad(3.234)$$

$$N_v=\frac{Eh}{(1-\nu^2)}\left(\frac{\varepsilon_v-\varepsilon_{uv}ctg\chi+\nu\varepsilon_u}{sin\chi}\right),\qquad(3.235)$$

$$S_u=-S_v=\frac{Eh}{2(1-\nu^2)}((\frac{1+cos^2\chi}{sin^2\chi}\varepsilon_{uv}-(\varepsilon_u-\varepsilon_v)ctg\chi\Big)-\frac{Eh}{2(1-\nu^2)}\nu((\varepsilon_{uv}-(\varepsilon_u-\varepsilon_v)ctg\chi),$$

(3.236)

$$M_u=-\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\kappa_u+\nu\kappa_v}{sin\chi}\right)\qquad(3.237)$$

$$M_v=-\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\kappa_v+\nu\kappa_u}{sin\chi}\right),\qquad(3.238)$$

$$M_{uv}=\frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\left(\frac{\kappa_{uv}-cos\chi\kappa_v}{sin\chi}\right),\qquad(3239)$$

$$M_{vu}=-\frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\left(\frac{\kappa_{uv}+cos\chi\kappa_u}{sin\chi}\right)\qquad(3.240)$$

Таким образом, полученная А.Л. Гольденвейзером система расчетных уравнений содержит 19 неизвестных: $\mathrm{N_u}$, N_v, S_u, S_v, M_u, M_v, M_{uv}, M_{vu}, ε_u, ε_v, $\varepsilon_{uv}, \gamma_u$, γ_v, ω_u,ω_v,κ_u,κ_v,κ_{uv}(звездочки условно не показаны).

Объем получившихся уравнений делает нецелесообразным даже помещать их в данной главе, а расчет, очевидно, был бы сопряжен в настоящее время с непреодолимыми вычислительными трудностями.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что попытка аналитического расчета конволютного геликоида не удалась и для его расчета следует пользоваться численными методами, что и сделано в Главе 4.

Псевдоразвертывающийся геликоид является частным случаем конволютного геликоида, его расчет рассматривал в своей диссертации С.М. Халаби [68].

3.4. Расчет непологих оболочек в форме косого геликоида по моментной теории аналитическим методом

Расчету косых геликоидов на прочность посвящены работы [69-72].

Рассмотрим один из вариантов параметрических уравнений косого геликоида: (3.195)

$$x = u\cos v,$$

$$y = u\sin v,$$

$$z = k\,u + c\,v \qquad (3.241)$$

Квадратичные формы:

$$A = \sqrt{1+k^2},\ B = \sqrt{u^2+c^2},\ F = kc,$$

$$L = 0, M = -\frac{c}{\sqrt{A^2u^2+c^2}}, N = \frac{ku^2}{\sqrt{A^2u^2+c^2}}. \qquad (3.242)$$

Компоненты деформаций:

$$\varepsilon_u = \frac{\frac{\partial}{\partial u}u_u - \frac{k\,c\,u}{A\,(c^2+u^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{k\ c\frac{d}{du}u_v}{A\,(c^2+u^2)^{\frac{1}{2}}}}{A}, \qquad (3.243)$$

$$\varepsilon_v = \frac{u\,u_u}{A\,(c^2+u^2)} + \frac{ku\sqrt{1+k^2}u_z}{\sqrt{A^2u^2+c^2}\,(c^2+u^2)}, \qquad (3.244)$$

$$\omega_u = \frac{\sqrt{1-\frac{k^2c^2}{A^2(c^2+u^2)}}\frac{d}{du}u_v}{A} - \frac{cu_z}{A\sqrt{u^2+c^2}\sqrt{A^2u^2+c^2}\sqrt{1-\frac{k^2c^2}{A^2(c^2+u^2)}}} + \frac{k^2c^2\,u\,u_v}{A^3(c^2+u^2)^2\sqrt{1-\frac{k^2c^2}{A^2(c^2+u^2)}}}, \qquad (3.245)$$

$$\omega_v = -\frac{u\,u_v}{\sqrt{u^2+c^2}\sqrt{A^2u^2+c^2}} - \frac{cu_z}{(u^2+c^2)} - \frac{c\,k\,u\,u_u}{A\,(u^2+c^2)\sqrt{A^2u^2+c^2}}, \qquad (3.246)$$

$$\varepsilon_{uv} = \omega = \omega_u + \omega_v, \tag{3.247}$$

$$\gamma_u = -\frac{\frac{d}{du}u_z}{A} - \frac{c\, u_v}{A\sqrt{u^2+c^2}\sqrt{A^2u^2+c^2}}, \tag{3.248}$$

$$\gamma_v = -\frac{cu_u}{A\sqrt{u^2+c^2}\sqrt{A^2u^2+c^2}} + \frac{ku^2u_v}{(u^2+c^2)\sqrt{A^2u^2+c^2}}, \tag{3.249}$$

$$\kappa_u = -\frac{u\, c\, \left(k^2+\frac{3}{2}\right)(A^6u^6+3A^4u^4\cdot c^2+3A^2u^2\cdot c^4+c^{10})}{(A^2u^2+c^2)^3(c^2+u^2)^2}u_v$$
$$+\frac{2ku^2c^2\left(\left(A^4+\frac{1}{4}\right)c^4+\frac{5}{4}A^2u^2\right)}{A^2(A^2u^2+c^2)^2(c^2+u^2)^{\frac{3}{2}}}u_u$$
$$--\frac{c^2k^2u}{A(A^2u^2+c^2)^{\frac{3}{2}}(c^2+u^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\mathrm{u_z}+\frac{c\left(A^2+\frac{1}{2}\right)}{A^3(c^2+u^2)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\mathrm{u_v}-$$
$$\frac{c^2k}{A^2(A^2u^2+c^2)(c^2+u^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\mathrm{u_u}++\frac{(c^2+u^2)^{\frac{1}{2}}}{A(A^2u^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{du}^2}\mathrm{u_u}+$$
$$\frac{k^2u^2c^2}{2(A^2u^2+c^2)^{3/2}(c^2+u^2)^{\frac{3}{2}}}u_z, \tag{3.250}$$

$$\kappa_v = \frac{u\frac{d}{du}u_z}{A(A^2u^2+c^2)^{1/2}(c^2+u^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{c\, u\, u_v}{2A^3(c^2+u^2)^2} - \frac{u\, c^2k\ u_u}{2A^2(A^2u^2+c^2)(c^2+u^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{c\frac{d}{du}u_v}{2\, A^3(c^2+u^2)} -$$
$$-\frac{c^2u^2k^2u_z}{A(A^2u^2+c^2)^{3/2}(c^2+u^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{3.251}$$

$$\kappa_{uv} = \frac{ck(A^2u^2+c^2)^{1/2}u_z}{(u^2+c^2)A^2} - \frac{c\, u\, u_u}{A(u^2+c^2)(A^2u^2+c^2)} -$$

$$-\frac{ku\left(-A^8u^8-3A^6u^6\cdot c^2-3A^2u^2\cdot c^4-A^2u^2\cdot c^6+\left(A^2+\frac{1}{2}\right)c^{12}-\left(A^2+\frac{1}{2}\right)c^8\right)u_v}{A^4(u^2+c^2)^{\frac{5}{2}}(A^2u^2+c^2)^3}+\frac{cuk(A^2u^2+c^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{du}u_z}{(u^2+c^2)A^2}+$$

$$+\frac{c\frac{d}{du}u_u}{(u^2+c^2)A^3}-\frac{u^2k\frac{d}{du}u_v}{(u^2+c^2)^{3/2}A^2}. \qquad (3.252)$$

Выражения для усилий:

$$N_u=\frac{1}{(A^2u^2+c^2)^2(c^2+u^2)^{\frac{1}{2}}A\,(1-\sigma^2)}\Big(E\Big((A^2u^2+c^2)A^2ku^2\sigma$$

$$+\big(2c^2+u^2(A^2+1)\big)c^2A^2k\Big)h\,\Big)u_z+$$

$$+\frac{E\left(u\,\sigma+uc^2k^2\right)h}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{3}{2}}(c^2+u^2)^{\frac{3}{2}}(1-\sigma^2)}u_u+\frac{E\sqrt{c^2+u^2}h}{\sqrt{A^2u^2+c^2}(1-\sigma^2)}\frac{d}{du}u_u\,, \qquad (3.253)$$

$$N_v=-\frac{E\;h\;k\;c\;u}{\sqrt{A^2u^2+c^2}(c^2+u^2)A(1+\sigma)}u_v+\frac{E\;h\;u\left(A^2\sqrt{c^2+u^2}\right)}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{3}{2}}(1-\sigma^2)}u_u+$$

$$+\frac{E\;h\;k\;c}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{1}{2}}A(1+\sigma)}\frac{d}{du}u_v+\frac{h\sqrt{c^2+u^2}EO\sigma}{\sqrt{A^2u^2+c^2}(1-\sigma^2)}\frac{d}{du}u_u+\frac{E\;h\;A\;k\sqrt{c^2+u^2}}{(A^2u^2+2c^2)(1-\sigma^2)}u_z\,, \qquad (3.254)$$

$$M_v=\frac{Eh^3 1}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{7}{2}}(c^2+u^2)^{\frac{3}{2}}A^2\,(1-\sigma^2)}\left(((k^2\sigma+\frac{3}{2}\sigma-\frac{1}{2}\right)(u^6(1+k^2)^3+$$

$$+3u^4(1+k^2)^2c^2+3u^2(1+k^2)c^4)+\sigma\,c^{10}k^2+\frac{3}{2}\sigma\,c^{10}-\frac{1}{2}\;c^6)u\;c\;u_v)+$$

$$+\frac{1}{6}\frac{u\left(\left(A^2\sigma+\frac{1}{4}\sigma-\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{4}(\sigma-\frac{1}{5})u^2A^2\right)c^2k\,u_u}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{5}{2}}(c^2+u^2)A^2\,(1-\sigma^2)}$$

$$-\frac{1}{12}\frac{\left((1-k^2\sigma)c^2+u^2A^2\right)u}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{5}{2}}(c^2+u^2)A^2\,(1-\sigma^2)}\frac{d}{du}u_z-$$

$$\frac{1}{12}\frac{\left(-\frac{1}{2}+A^2+\frac{1}{2}\sigma\right)c}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{1}{2}}(u^2+c^2)^{\frac{1}{2}}A^2\,(1-\sigma^2)}\frac{d}{du}u_v+\frac{1}{12}\frac{\sigma\,c^2k}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{3}{2}}A\,(1-\sigma^2)}\frac{d}{du}u_u-$$

$$-\frac{1}{12}\frac{\sigma\,(c^2+u^2)}{(A^2u^2+c^2)(1-\sigma^2)}\frac{d^2}{du^2}u_z+\frac{1}{24}\frac{c^2k^2u^2}{(A^2u^2+c^2)(u^2+c^2)(1+\sigma)}u_z, \quad (3.255)$$

$$M_u=\frac{E\,h^3}{12\,(A^2u^2+c^2)^{\frac{7}{2}}(c^2+u^2)^{\frac{3}{2}}A^2\,(1-\sigma^2)}((k(A^6u^6+3u^4+3c^4A^2u^2)^2-$$

$$-\frac{1}{2}\sigma(A^6u^6+3c^2A^4u^4+3c^4A^2u^2)+\frac{3}{2}+c^{10}k^2+\frac{3}{2}c^{10}-\frac{1}{2}c^2\sigma)u\,c\;\;u_v)-$$

$$-\frac{1E\,h^3}{6}\frac{ku\left(\left(A^2-\frac{1}{4}\sigma+\frac{1}{4}\right)c^2-\frac{1}{4}(\sigma-5)u^2A^2\right)c^2\,u_u}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{5}{2}}(c^2+u^2)A^2\,(1-\sigma^2)}-\frac{1}{24}E\,h^3\frac{c^2k^2u^2}{(A^2u^2+c^2)(u^2+c^2)(1+\sigma)}u_z$$

$$-$$

$$-\frac{1}{12}\frac{Eh^3\left((\sigma-k^2)c^2+u^2A^2\sigma\right)u}{(A^2u^2+c^2)^2\,(1-\sigma^2)}\frac{d}{du}u_z-\frac{1}{12}E\,h^3\frac{\left(-\frac{1}{2}+A^2-\frac{1}{2}\sigma\right)c}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{1}{2}}(u^2+c^2)^{\frac{1}{2}}A^2\,(1-\sigma^2)}\frac{d}{du}u_v+$$

$$+\frac{1}{12}E\,h^3\frac{\sigma\,c^2k}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{3}{2}}A\,(1-\sigma^2)}\frac{d}{du}u_u-\frac{1}{12}E\,h^3\frac{\sigma\,(c^2+u^2)}{(A^2u^2+c^2)(1-\sigma^2)}\frac{d^2}{du^2}u_z,$$

$$M_{uv}=\frac{E\,h^3}{12\,(A^2u^2+c^2)^{\frac{7}{2}}(c^2+u^2)^2A^3\,(1+\sigma)}(A^8u^8+\frac{5}{2}A^6u^6c^2+\frac{3}{2}A^4u^4c^4+$$

$$+\left(-c^{12}+c^{8}-\frac{1}{2}c^{6}u^{2}\right)A^{2}-\frac{1}{2}c^{12})u\,k\,h^{3}u_{v})-\frac{Eh^{3}\ \left((c^{2}+u^{2})A^{2}-\frac{1}{2}c^{2}k^{2}\right)u\,c}{12\,(A^{2}u^{2}+c^{2})^{\frac{7}{2}}(c^{2}+u^{2})^{2}A^{3}\,(1+\sigma)}u_{u}+$$

$$+\frac{E\,c\,k\ \ (A^{2}u^{2}+c^{2}-1)}{12\,A\,(c^{2}+u^{2})^{\frac{1}{2}}(A^{2}u^{2}+c^{2})A\,(1+\sigma)}\frac{d}{du}u_{z}-\frac{E\,h^{3}\,k\ \left(A^{2}u^{2}-\frac{1}{2}c^{2}\right)}{12\ \ (c^{2}+A^{2}u^{2})^{\frac{1}{2}}(u^{2}+c^{2})A^{3}\,(1+\sigma)}\frac{d}{du}u_{v}+$$

$$+\frac{E\,h^{3}c}{12\,A^{2}\,(c^{2}+u^{2})^{\frac{1}{2}}(c^{2}+A^{2}u^{2})^{\frac{1}{2}}\,(1+\sigma)}\frac{d}{du}u_{u}+$$

$$+\frac{E\,h^{3}c\,k}{12\,A\,(c^{2}+u^{2})^{2}(c^{2}+A^{2}u^{2})^{\frac{3}{2}}\,(1+\sigma)}((c^{2}u^{4}+u^{6})A^{4}+$$

$$+(2c^{4}u^{2}+2c^{2}u^{4})A^{2}+c^{2}(c^{4}+c^{2}u^{2}+\frac{1}{2}k^{2}u^{2}))u_{z}, \tag{3.256}$$

$$M_{vu}=-\frac{E\,h^{3}}{12\,(A^{2}u^{2}+c^{2})^{\frac{7}{2}}(c^{2}+u^{2})^{2}A^{3}\,(1+\sigma)}(((1+A^{2})c^{8}+3(k^{2}+\frac{11}{6})A^{2}u^{2}c^{6}+$$

$$+3\left(k^{2}+\frac{5}{2}\right)A^{4}u^{4}c^{4}+\left(k^{2}+\frac{9}{2}\right)A^{6}u^{6}c^{2}+A^{8}u^{8})u\,k\,u_{v}-$$

$$+\frac{E\,h^{3}}{12\,(A^{2}u^{2}+c^{2})^{2}(c^{2}+u^{2})^{\frac{3}{2}}A\,(1+\sigma)}(c\,k(c^{6}+(2A^{2}u^{2}+u^{2})c^{4}+$$

$$+\left(A^{4}u^{2}+2A^{2}u^{2}-\frac{1}{2}k^{2}\right)c^{2}u^{2}+A^{4}u^{6})-$$

$$-\frac{E\,h^{3}}{12\,(A^{2}u^{2}+c^{2})^{\frac{5}{2}}(c^{2}+u^{2})^{\frac{3}{2}}A^{2}\,(1+\sigma)}(c((1+2k^{2})A^{2}+\frac{1}{2}k^{2})c^{4}+A^{2}(A^{2}+\frac{5}{2}k^{2}+1)u^{2}c^{2}+$$

$$+u^{4}A^{4})u\,u_{u})-\frac{E\,h^{3}k(\,c^{4}+(2A^{2}u^{2}+k^{2})c^{2}+A^{4}u^{4})u\,c}{12\,A\,(c^{2}+u^{2})^{\frac{1}{2}}(A^{2}u^{2}+c^{2})^{2}A\,(1+\sigma)}\frac{d}{du}u_{z}+$$

$$+\frac{E\,h^3\,k\ \left(A^2u^2+\frac{1}{2}c^2+A^2c^2\right)}{12\ (c^2+A^2u^2)^{\frac{1}{2}}(u^2+c^2)A^3\ (1+\sigma)}\frac{d}{du}u_v-\frac{E\,h^3\,c\ \ (A^2u^2+A^2c^2)}{12\ (c^2+u^2)^{\frac{3}{2}}\ (c^2+A^2u^2)^{\frac{1}{2}}A^2\ (1+\sigma)}\frac{d}{du}u_u+$$

$$+\frac{c\,k\,(c^2+u^2)^{\frac{1}{2}}}{12\,A\,(c^2+A^2u^2)\,(1+\sigma)}\frac{d^2}{du^2}u_z, \qquad (3.257)$$

$$S_u=S_v=\frac{1}{2}\frac{E\,h}{\left(A^2u^2+c^2\right)^2A^2(c^2+u^2)(1-\sigma^2)}((2c^2+u^2(A^2+1))cA^2(-u^2A^2(1-\sigma)-$$

$$-2(k^2-\frac{1}{2}\sigma+\frac{1}{2})c^2)-(A^2u^2+c^2)k^2(1+\sigma)\,c\,A^2u^2)\,u_z)+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{E\,h}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{1}{2}}(u^2+c^2)^{\frac{1}{2}}A^2(1-\sigma^2)}(u(\left(-A^2(1-\sigma)-k^2(1+\sigma)\right)c^2-$$

$$-u^2A^2(1-\sigma))+k^2(1+\sigma)c^2u)\,u_v+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{E\,h}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{3}{2}}(u^2+c^2)A^2(1-\sigma^2)}(u\,c\,k\,A\,(\left(-A^2(1-\sigma)-k^2(1+\sigma)\right)c^2+$$

$$-u^2A^2(1-\sigma))-(A^2u^2+c^2)k(1+\sigma)c\,A\,u)u_u)+$$

$$+\ \frac{1}{2}\frac{E\,h}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{1}{2}}(u^2+c^2)^{\frac{1}{2}}A^2}(A^2(1-\sigma)+k^2(1+\sigma))c^2-A^2u^2(1-\sigma))-$$

$$-k^2c^2(1+\sigma))\frac{d}{du}u_v-\frac{1}{2}\frac{E\,h\,k\,(1+\sigma)c}{(A^2u^2+c^2)^{\frac{1}{2}}A(1-\sigma^2)}\frac{d}{du}u_u. \qquad (3.258)$$

Из последних двух уравнений равновесия могут быть выражены поперечные силы. Подставив их в первые три уравнения равновесия, получим 3 уравнения вида:

$$k1_{u_u}u_u + k1_{u_v}u_v + k1_{u_z}u_z + k1_{du_u}\frac{d}{du}u_u + k1_{du_v}\frac{d}{du}u_v + k1_{du_z}\frac{d}{du}u_z +$$

$$+k1_{d2u_u}\frac{d^2}{du^2}u_u + k1_{d2u_v}\frac{d^2}{du^2}u_v + k1_{d2u_z}\frac{d^2}{du^2}u_z + k1_{d3u_z}\frac{d^3}{du^3}u_z = 0, \quad (3.259)$$

$$k2_{u_u}u_u + k2_{u_v}u_v + k2_{u_z}u_z + k2_{du_u}\frac{d}{du}u_u + k2_{du_v}\frac{d}{du}u_v + k2_{du_z}\frac{d}{du}u_z +$$

$$+k2_{d2u_u}\frac{d^2}{du^2}u_u + k2_{d2u_v}\frac{d^2}{du^2}u_v + k2_{d2u_z}\frac{d^2}{du^2}u_z + k2_{d3u_z}\frac{d^3}{du^3}u_z = 0, \quad (3.260)$$

$$k3_{u_u}u_u + k3_{u_v}u_v + k3_{u_z}u_z + k3_{du_u}\frac{d}{du}u_u + k3_{du_v}\frac{d}{du}u_v + k3_{du_z}\frac{d}{du}u_z +$$

$$+k3_{d2u_u}\frac{d^2}{du^2}u_u + k3_{d2u_v}\frac{d^2}{du^2}u_v + k3_{d2u_z}\frac{d^2}{du^2}u_z + k3_{d3u_u}\frac{d^3}{du^3}u_u +$$

$$+k3_{d3u_v}\frac{d^3}{du^3}u_v + k3_{d3u_z}\frac{d^3}{du^3}u_z + k3_{d4u_z}\frac{d^4}{du^4}u_z = 0. \quad (3.261)$$

Полностью формулы для косого геликоида приведены в работе [73].

Первые два уравнения подвергаются интегрированию, для того чтобы выразить величины $\frac{d^3}{du^3}u_v, \frac{d^3}{du^3}u_u, \frac{d^2}{du^2}u_u, \frac{d^2}{du^2}u_v$ и подставить в третье уравнение.

В результате можно получить систему трех дифференциальных уравнений восьмого порядка. Запишем ее в каноническом виде:

$$y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_u \\ (u_u)' \\ u_v \\ (u_v)' \\ u_z \\ (u_z)' \\ (u_z)'' \\ (u_z)''' \end{bmatrix}, f(u, y_i) = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ f_1 \\ y_3 \\ f_3 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_u)' \\ (u_u)'' \\ (u_v)' \\ (u_v)'' \\ (u_z)' \\ (u_z)'' \\ (u_z)''' \\ (u_z)'''' \end{bmatrix},$$

$$f_1 = k_{10}y_0 + k_{11}y_1 + k_{12}y_2 + k_{13}y_3 + k_{14}y_4 + k_{15}y_5 + k_{16}y_6 + k_{17}y_7, \quad (3.262)$$

$$f_3 = k_{30}y_0 + k_{31}y_1 + k_{32}y_2 + k_{33}y_3 + k_{34}y_4 + k_{35}y_5 + k_{36}y_6 + k_{37}y_7, \quad (3.263)$$

$$f_7 = k_{70}y_0 + k_{71}y_1 + k_{72}y_2 + k_{73}y_3 + k_{74}y_4 + k_{75}y_5 + k_{76}y_6 + k_{77}y_7 \quad (3.264)$$

Рассмотрим теперь аналитическую методику, подходящую, однако, только для пологих косых геликоидов.

Для косого геликоида f(u)=Ku (см. формулу (3.1)), где К-угловой коэффициент. Согласно формулам (3.14) , при $u^2 + c^2 \approx u^2$ получим

$A^2 = 1+К^2$, $B^2=u^2$, $F = 0$ □$= \frac{\pi}{2}$,

$$L = 0 \ , \ M = -\frac{C}{u(\sqrt{1+к^2}} \ , N=\frac{Ku}{\sqrt{1+к^2}} \quad (3.265)$$

Согласно формулам (3.11) имеем

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \ldots \cdot = \frac{1}{u(1+к^2)} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial u} \text{ и} \frac{\partial}{\partial u} - ck\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{u}\frac{\partial \ldots}{\partial v} - \frac{ck}{u}\frac{\partial^2 \ldots}{\partial u\, \partial v} + \frac{1+k^2}{u}\frac{\partial^2 \ldots}{\partial v^2}\right] \quad (3.266)$$

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{k}}^2 \ldots \cdot = -\frac{1}{u(1+к^2)^{3/2}} \cdot \left[k\frac{\partial^2 \ldots}{\partial u^2} - c\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{u^2}\frac{\partial \ldots}{\partial v} - \frac{c}{u^2}\, c\frac{\partial^2 \ldots}{\partial u\, \partial v} + \right] \quad (3.267)$$

В данной работе уже приводилась гипотеза о «длинном» геликоиде, у которого напряженное состояние зависит только от координаты u $[\varphi = \varphi(u)$и $z = z(u)]$, и в средней части мало зависит от краевых условий при v = v1 и v=v2. При использовании этой гипотезы операторы (3.48) принимают вид :

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \ldots \cdot = \frac{1}{u(1+к^2)}\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{u}\left(u\frac{\partial}{\partial u}\right), \quad (3.268)$$

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{k}}^2 \ldots \cdot = -\frac{1}{u(+к^2)^{3/2}}\frac{\partial^2 \ldots}{\partial u^2}\frac{1}{u} \quad (3.269)$$

А уравнения (3.37-3.38) записываются в следующей форме:

$$\frac{D}{(1+к^2)^2}\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{u}\left(u\frac{\partial}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial^2 \ldots}{\partial u^2} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial \ldots}{\partial v}\right)u_z - \frac{к}{(1+к^2)^{3/2}}\frac{1}{u}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} = Z \quad (3.270)$$

$$\frac{u}{\sqrt{1+k^2}\,Eh}\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial^2 \ldots}{\partial u^2}+\frac{1}{u}\frac{\partial \ldots}{\partial u}\right)\varphi+k\frac{\partial u_z}{\partial u}=\ 0. \qquad (3.271)$$

При отсутствии нагрузки Z= 0 однородное уравнение (3.106) будет иметь вид:

$$\frac{Du}{\sqrt{1+k^2}}\frac{d}{du}\left(\frac{\partial^2 \ldots}{\partial u^2}+\frac{1}{u}\frac{\partial \ldots}{\partial u}\right)u_z-k\frac{d\varphi}{du}=0 \qquad (3.272)$$

$$\frac{u}{\sqrt{1+k^2}\,Eh}\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial^2 \ldots}{\partial u^2}+\frac{1}{u}\frac{\partial \ldots}{\partial u}\right)\varphi+k\frac{\partial u_z}{\partial u}=\ 0. \qquad (3.273)$$

Если принять, что константа интегрирования в первом уравнении равна нулю, то производная от вертикального перемещения из второго уравнения может быть получена в виде:

$$\frac{\partial u_z}{\partial u}=-\frac{u}{Ehk\sqrt{1+k^2}}\frac{d}{du}\left(\frac{\partial^2 \ldots}{\partial u^2}+\frac{1}{u}\frac{\partial \ldots}{\partial u}\right)\varphi. \qquad (3.274)$$

После элементарных преобразований получим:

$$\frac{Du}{Ehk^2((1+k^2)}\left(u\ \frac{\partial^5 \ldots}{\partial u^5}+4\frac{\partial^4 \ldots}{\partial u^4}\right)\varphi+\frac{d\varphi}{du}=0\ . \qquad (3.276)$$

Приняв обозначение:

$$\frac{d\varphi}{du}=\phi$$

и заменив переменную x на y,

$$u=u_0 * x,$$

где $u_0=\sqrt{\frac{D}{Ehk^2((1+k^2)}}=\ \frac{h}{2k}\sqrt{\frac{1}{3(1-v^2)(1+k^2)}},$

окончательно получим разрешающее уравнение метода:

$$2\ \frac{d^4\phi}{dx^4}+4x\ \frac{d^3\phi}{dx^3}+\phi=0. \qquad (3.277)$$

Решение уравнения (3.229) принимается в форме степенного ряда

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\lambda+n}. \qquad (3.278)$$

Подставляя значение (3.57) в уравнение (3.56) и проделав определенные преобразования, можно получить

$$\sum_{n=0}^{\infty} [a_n(\lambda+n+1)(\lambda+n)(\lambda+n-1)(\lambda+n-2)x^{\lambda+n-2} + a_n x^{\lambda+n}] = 0. \qquad (3.279)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях аргумента $\boldsymbol{\lambda}$ + n, получим

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{(\lambda+n+3)(\lambda+n+2)(\lambda+n+1)(\lambda+n)} \qquad (3.280)$$

Для низшей степени $x^{\lambda-2}$ при n=0 получим из уравнения (3.58)

$$(\lambda+1)\boldsymbol{\lambda}(\lambda-1)(\lambda-2) = 0 \qquad (3.281)$$

$$\lambda^{u1} = -1, \ \lambda^{u2}=0, \ \lambda^{u3}=1, \ \lambda^{u4}=2. \qquad (3.282)$$

Для степени $x^{\lambda-1}$ при n=1 получим из уравнения (3.58)

$$(\lambda+2)\boldsymbol{\lambda}(\lambda+1)(\lambda-1) = 0 \qquad (3.283)$$

$$\lambda^{н1} = -1, \ \lambda^{н2}=0, \ \lambda^{н3}=1, \ \lambda^{н4}=-2. \qquad (3.284)$$

Рассмотрим решение при $\lambda^{u1}, \lambda^{н1}, \boldsymbol{\lambda}$, которых будет три:

$$\lambda = 0, \quad \lambda = 1, \qquad \lambda = -1$$

Решение при $\boldsymbol{\lambda}$ = -1 приводит к решению при $\boldsymbol{\lambda}$=1, и поэтому не рассматривается.Решение при $\boldsymbol{\lambda}$=0 дает

$$a_{2n+1} = (-1)^{n+2} \frac{A_1}{5^{n-1}.4!.5!.7!.....(2n+1)!} \qquad (3.285)$$

$$a_{2n} = (-1)^{n-1} \frac{A_2}{5^{n-1}.4!.6!.8!.....(2n)!} \qquad (3.286)$$

где $A_1 = a1$ и $A_2 = a2 -$ произвольные постоянные решения,

$$\phi_1(x) = A_1(X - \frac{X^3}{4!} + \frac{X^5}{5.4!.5!} - \frac{X^7}{5^2.4!.5!.7!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-2}x^{2n+1}}{5^{n-1}.4!.6!.8!...(2n+1)!} + \cdots)\quad(3.287)$$

$$\phi_2(x) = A_2(X^2 - \frac{X^4}{5.4!} + \frac{x^6}{5^2.4!.6!} - \frac{X^8}{5^3.4!.6!.8!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{5^{n-1}.4!.6!.8!...(2n)!} + \cdots)\quad(3.288)$$

Решение при $\boldsymbol{\lambda}$ =1 дает

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{A_3}{(2n)!(2n+2)!},\ a_{2n+1} = (-1)^n \frac{A_4}{(2n+1)!(2n+3)!}.\qquad(3.289)$$

где $A_3 = 2a_1$ и $A_4 = 6a_2$ – произвольные постоянные решений,

$$\phi_3(x) = A_3(\frac{X}{2!} - \frac{X^3}{2!.4!} + \frac{X^5}{4!.6!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n)!\,.(2n+2)!} + \cdots)\qquad(3.290)$$

$$\phi_4(x) = A_4(\frac{X^3}{3!} - \frac{X^4}{3!.5!} + \frac{X^6}{5!.7!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)!\,.(2n+3)!} + \cdots)\qquad(3.291)$$

Ряды $\phi_1(x)$, так же, как и ряды, получаемые из них формальным дифференцированием, сходятся равномерно на любом конечном отрезке оси x.

$$\Phi(x)=\phi_1(x)+\phi_2(x)+\phi_3(x)+\phi_4(x).\qquad(3.292)$$

Согласно (3.54) получаем

$$\varphi = u_0 \int_0^x \phi(x)dx == C_1 \sum_{n=0.1.2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}x^{2n+2}}{5^{n-1}.4!6!8!....(2n)!(2n+1)!(2n+2)} + C_2 \sum_{n=0.1.2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}x^{2n+1}}{5^{n-1}.4!6!8!....(2n)!(2n+1)} + C_3 \sum_{n=0.1.2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}x^{2n+2}}{(2n)!(2n+2)!(2n+2)} + C_4 \sum_{n=0.1.2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}x^{2n+3}}{(2n+1)!(2n+3)!(2n+3)} + C_7\qquad(3.293)$$

где $C_1 = u_0 A_i$ – произвольная постоянная, C_7 не влияет на НДС, может быть проигнорирована.

Согласно формулам (3.52) и (3.54) можно записать

$$\frac{du_z}{dx} = -\frac{x}{Ehk\sqrt{1+k^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{d\phi}{dx} + \frac{1}{x}\phi\right),\qquad(3.294)$$

откуда

$$u_z = -\frac{1}{Ehk\sqrt{1+k^2}}\left(x\,\frac{d\phi}{dx} - \int_0^x \frac{1}{x}\phi dx + A_5\right) =$$

$$= -\frac{1}{Ehk\sqrt{1+k^2}}\Big[A_1\sum_{n=1.2.3}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}x^{2n+1}\,(2n+1\,)^2-1}{4!(2n+1)5^{n-1}.5!.7!....(2n+1)!} +$$
$$A_2\sum_{n=1.2.3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4n^{\,2}-1 \quad x^{2n}}{(2n)5^{n-1}\;.\;4!.6!.8!....(2n)!} + A_3\sum_{n=1.2.3}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(2n+1)^2-1\;\;x^{2n+1}}{(2n)!(2n+2)!(2n+1)} +$$
$$A_4\sum_{n=.1.2.3}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\;(2n+1)^2-1 \quad x^{2n+2}}{(2n+1)!(2n+3)!(2n+2)} + A_{5.} \qquad (3.295)$$

Внутренние усилия определяются по формулам :

$$N_U = \frac{1}{u_0^2 x}\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{u_0^2 x}\phi \qquad (3.296)$$

$$N_v = \frac{1}{u_0^2}\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{1}{u_0}\frac{d\phi}{dx} \qquad (3.297)$$

$$Q_u = -\frac{D}{u_0^3}\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2u_2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{du_z}{dx}\right) = -\frac{D}{u_0^3\,Ehk\sqrt{1+k^2}}\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{x}\right)\left[x\frac{d}{dx}\left(\frac{d...}{dx}+\frac{...}{x}\right)\right]\phi (3.298)$$

$$м_u = -\frac{D}{u_0^2}\left(\frac{d^2u_2}{dx^2} + \frac{v}{x}\frac{du_z}{dx}\right) = -\frac{D}{u_0^2\,Ehk\sqrt{1+k^2}}\left(\frac{d}{dx}+\frac{v}{x}\right)\left[x\frac{d}{dx}\left(\frac{d...}{dx}+\frac{...}{x}\right)\right]\phi$$
$$(3.299)$$

$$м_v = \frac{D}{u_0^2\,Ehk\sqrt{1+k^2}}\left(\frac{1}{x}+v\frac{d}{dx}\right)\left[x\frac{d}{dx}\left(\frac{d...}{dx}+\frac{...}{x}\right)\right]\phi. \qquad (3.300)$$

Остальные усилия равны нулю.

Для определения тангенциальных перемещений u_u и u_v применим прием, использованный в разд. 3.2 .

Согласноформулам (3.66)можно получить

$$N_v + N_U = \frac{1}{u_0^2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\varphi}{dx}\right) = \frac{1}{u_0^2}\boldsymbol{\nabla}^2\varphi\ S{=}0. \qquad (3.301)$$

$$N_v + N_U = Eh\frac{(\varepsilon_u+\varepsilon_v)}{1-v} \qquad (3.302)$$

$$\varepsilon_u = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}u_0}\frac{du_u}{dx}\;.\;\; \varepsilon_v = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}u_0}\frac{u_u}{x} + k_v u_z, \qquad (3.303)$$

$$\varepsilon_{uv} = \omega_u + \omega_v = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}u_0}\Big[\frac{du_x}{dx} - \frac{u_v}{x} + \frac{2c\;\;u_z}{u_0\sqrt{1+k^2}x^2}, \qquad (3.304)$$

где $k_v = \frac{1}{R_v} = \frac{N}{B^2} = \frac{K}{u_0\, x\, \sqrt{1+k^2}}$ –кривизна изгиба.

Приравнивая выражения (3.67) и (3.68) и приравнивая нулю выражение (3.69), получим для определения тангенциальных перемещений следующие уравнения:

$$\frac{du_u}{dx} + \frac{u_u}{x} = Q\,, \quad \frac{du_v}{dx} - \frac{u_v}{x} = R \qquad (3.306)$$

где

$$Q = \frac{(1-V)\sqrt{1+k^2}}{Ehu_0}\boldsymbol{\nabla^2\varphi} - \mathbf{k}\frac{u_z}{x}\,, \qquad (3.307)$$

$$R = -\frac{2C}{u_0\sqrt{1+k^2}}\frac{u_Z}{x^2}, \qquad (3.308)$$

откуда находим

$$U_u = \frac{1}{x}(c_6 + \int xQdx)\,, U_v = x\int\frac{R}{X}dx,$$

т.е. получена связь междуперемещениями u_u, u_v, u_z. Шесть произвольных постоянных C_i определяются из граничных условий, которые задаются на краях оболочки $x = x_1$ и $x = x_2$.

Частные решения находятся, если решить уравнение с правой частью:

$$x^2\frac{d^4\phi}{dx^4} + 4x\,\frac{d^3\phi}{dx^3} + \phi = u_0^2(1+k^2)^{3/2}\int Z\,(x)x\,dx\,. \qquad (3.309)$$

Если, например, Z=q=const , то уравнение (3.71) принимает вид

$$x^2\frac{d^4\phi}{dx^4} + 4x\,\frac{d^3\phi}{dx^3} + \phi = u_0^2(1+k^2)^{3/2}q\,\frac{x^2}{2}, \qquad (3.310)$$

откуда, Ф=$\frac{(1+k^2)^{3/2}}{2}u_0^2 q\, x^2$.

Данный алгоритм приводится в литературе, но так и не был доведен до численных результатов. Е.М. Тупикова в своих работах [73-76] производит разбор формул методики, делает предположение о том, что она основана на не вполне корректных предпосылках.

Выводы по главе 3

В Главе 3 приводится описание следующих методик:

- методика выведения уравнений равновесия для расчета напряженно-деформированного состояния пологих прямых геликоидальных оболочек;
- методика расчета прямого геликоида по аналитическому методу на основе методики В.Г. Рекача, модифицированной для получения численных результатов;
- методика расчета прямого геликоида методом конечных элементов в программном комплексе ЛИРА с рекомендациями по выбору размера сетки и этапами моделирования геликоида;
- методика расчета косого геликоида по аналитическому методу на основе модифицированной методики В.Г. Рекача.

В Главе 3 проведено сравнение результатов, полученных аналитическими и численными методами, и показано, что для прямого и косого геликоидов могут быть получены аналитические решения, согласующиеся с решениями, получаемыми численно, и подходящие для верификации численных расчетов.

ГЛАВА 4. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ И СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ, ПОЛУЧЕННЫХ РАЗЛИЧНЫМИ МЕТОДИКАМИ

4.1. Численный расчет пандуса с помощью метода конечных элементов в расчетном комплексе SCAD

Рассмотрим расчет пандуса в программе SCAD.

Модули упругости бетона (согласно СП 52-101-2003) приводятся в Таблице 4.1.

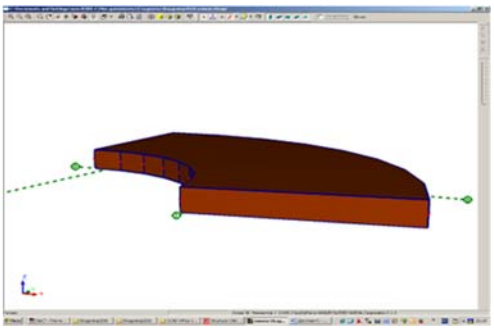
Таблица 4.1. Модули упругости бетона (согласно СП 52-101-2003)

Значения начального модуля упругости бетона при сжатии и растяжении Eb, МПа 10^{-3}, при классе бетона по прочности на сжатие/										
B10	B15	B20	B25	B30	B35	B40	B45	B50	B55	B60
19,0	24,0	27,5	30,0	32,5	34,5	36,0	37,0	38,0	39,0	39,5

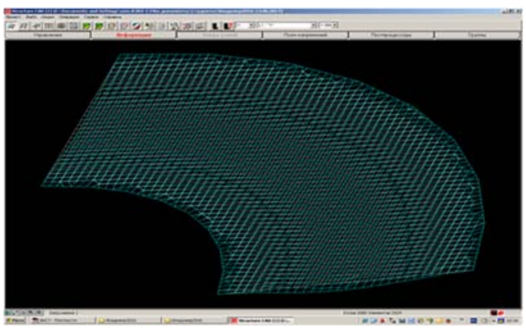
Пусть дан пандус со следующими физико-механическими и геометрическими характеристиками: модуль упругости E (для бетона B25) = 30000000 кН /м^2, коэффициент Пуассона ν=0.2, нагрузка q =33,6кН/м^2, внутренний радиус равен 3м, внешний радиус равен 6м, высота пандуса H=0,8 м, толщина 0,4 м.

Результаты расчета представлены в Приложении 5.

На Рис. 4.1 частично представлены результаты расчета.



а)



б)

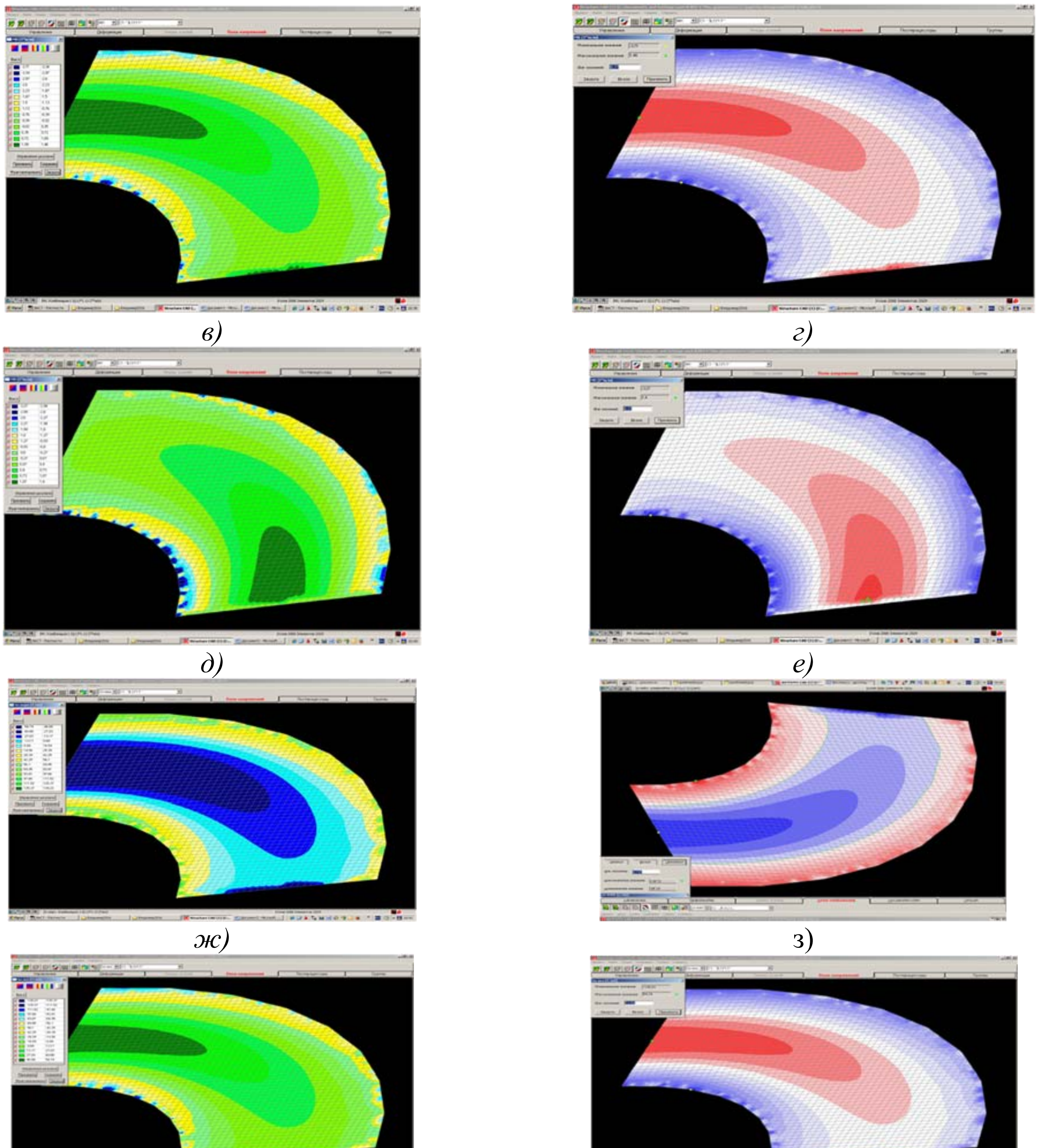


Рис. 4.1. Результаты расчета пандуса в СКАД*:*
а – Основная схема пандуса; б – Деформация пандуса; в – Момент M_x max; г – Момент M_x min; д – Момент M_y max; е – Момент M_y min; ж – Суммарная сдвигаюшая сил S_x max; з – Суммарная сдвигаюшая сил S_x min;и – Суммарная сдвигающая сила S_y max; к – Суммарная сдвигающая сила S_y min.

Сравнение результатов расчета для пандуса методом конечных элементов в программном комплексе SCAD с результатами, полученными с помощью аналитического метода по модифицированной методике профессора Рекача В.Г. приводится в Таблице 4.2.

Таблица 4.2. Сравнение результатов МКЭ в SCAD и аналитического метода профессора Рекача В.Г.

Параметры расчета	Единицы измерений	МКЭ в SCAD	Аналитически
Mx	Т.М	1,313	1,245
My	Т.М	1,274	1,72
Qx	Т.М	7,699	9,85
Qy	Т.М	9,09	3,85
Nx	Т.М	0	0,07
Ny	Т.М	0	0,15
Uz	мм	0,044	0,0426

После получения и сравнения результатов, можно сделать вывод, что по аналитическому методу расчета в линейчатом пологом прямом геликоиде будут возникать продольные силы (отличные от нуля), в то время как по расчету МКЭ значения равны нулю. При этом значения остальных силовых факторов в основном демонстрируют близкое совпадение.

4.2. Численный расчет пандуса в форме разных типов геликоидов в программе ANSYS

В программе ANSYS [77-79] были рассчитаны модели четырех пандусов, спроектированных в виде четырех разных геликоидов со сходными геометрическими параметрами, размеры примерно соответствуют размерам пандусов по строительным нормам [80]:

- закрепление всех краев жесткое;
- контурные радиусы R1=3.1 м, R2=7.1 м;
- толщина h=0.12 м;
- модуль Юнга условного железобетона E=32500000000 Н/м^2;
- коэффициент Пуассона ν=0.17.

Для прямого геликоида:

- угол наклона образующей φ=0°;
- параметр шага винта: с=0.477465.

Для косого геликоида:

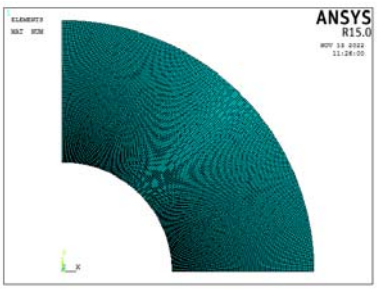
- угол наклона образующей φ=3°;
- параметр шага винта: с=0.477465.

Для конволютного геликоида:

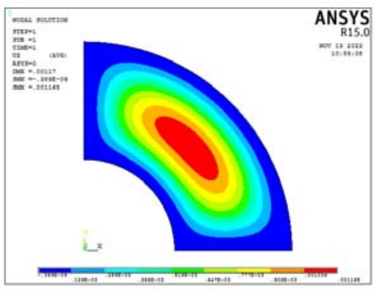
- параметр a=3.1м;
- параметр шага винта: c=0.477465;
- ширина оболочки вдоль образующих: t=6.387488;
- параметр α=87°.

Все оболочки моделировались конечными элементами shell63, разбивка на элементы – вдоль образующей 30 делений, вдоль криволинейного края- 90 делений, на каждый градус.

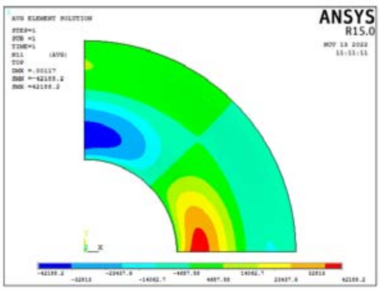
Расчет для прямого геликоида в программе ANSYS приведен на Рис. 4.2.



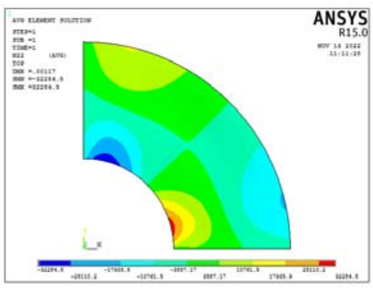
а)



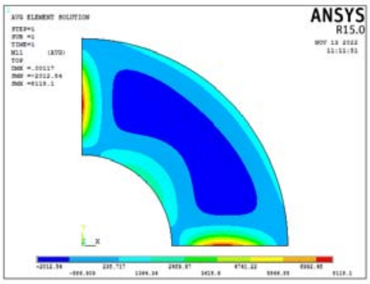
б)



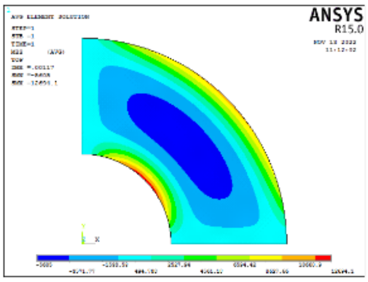
в)



г)



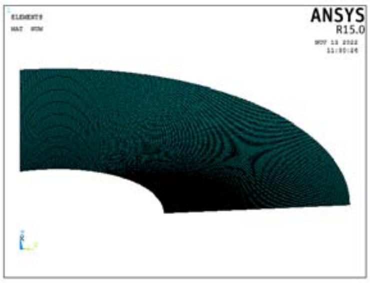
д)



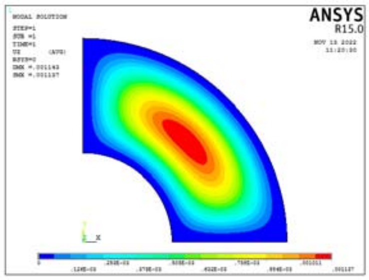
е)

Рис. 4.2. Прямой геликоид: *а – Модель; б – Прогиб по U_z; в – Нормальная сиола N_u; г – Нормальная сила N_v; д – Момент M_u; е - Момент M_v.*

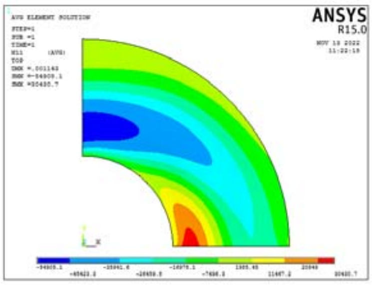
Расчет для косого геликоида в программе ANSYS приведен на Рис. 4.3.



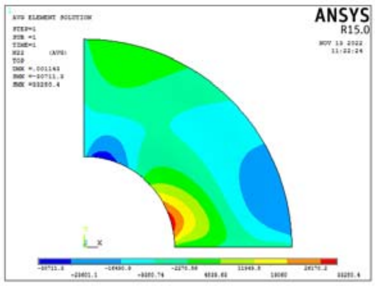
а)



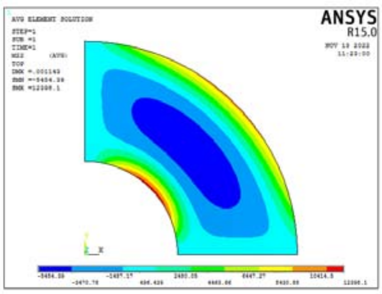
б)



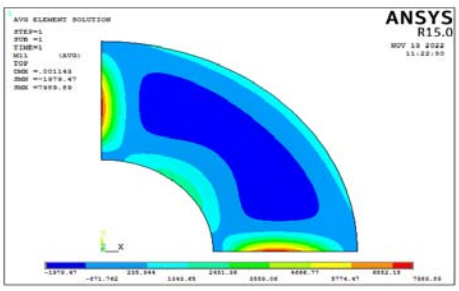
в)



г)



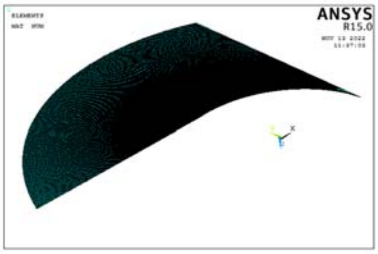
д)



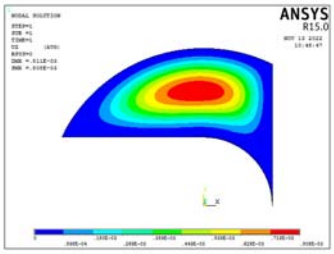
е)

Рис. 4.3. Косой геликоид: *а – Модель; б – Прогиб по U_z; в – Нормальная сиола N_u; г – Нормальная сила N_v; д – Момент M_u; е - Момент M_v.*

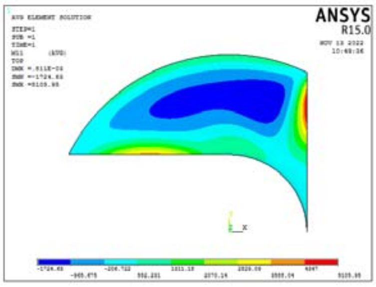
Расчет для конволютного геликоида в программе ANSYS приведен на Рис. 4.4.



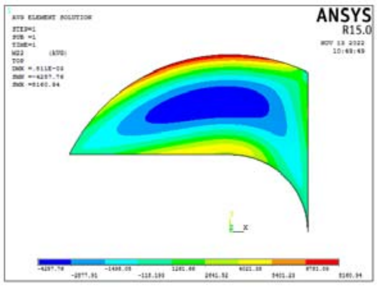
а)



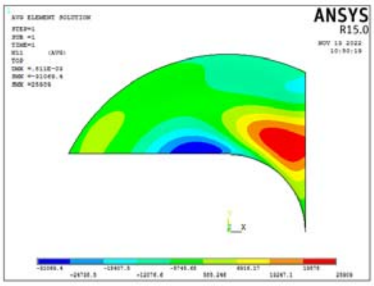
б)



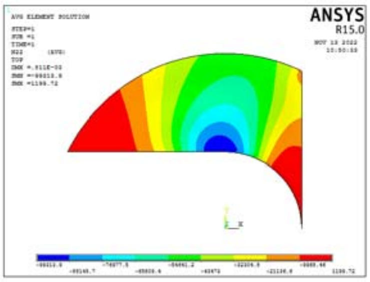
в)



г)



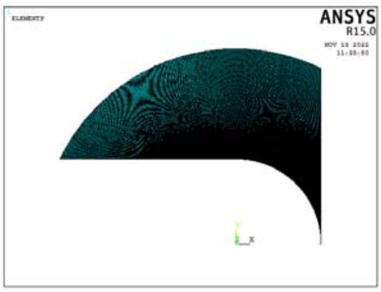
д)



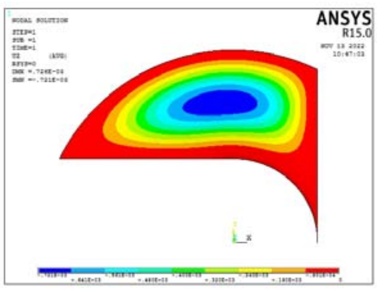
е)

Рис. 4.4. Конволютный геликоид: *а – Модель; б – Прогиб по* U_z*; в – Нормальная сиола* N_u*; г – Нормальная сила* N_v*; д – Момент* M_u*; е - Момент* M_v*.*

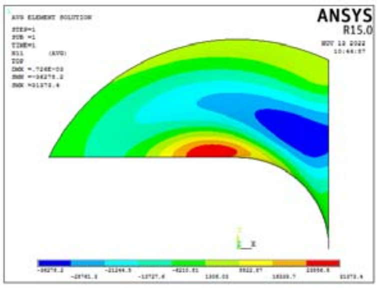
Расчет для псевдо-развертывающийся геликоида в программе ANSYS приведен на Рис. 4.5.



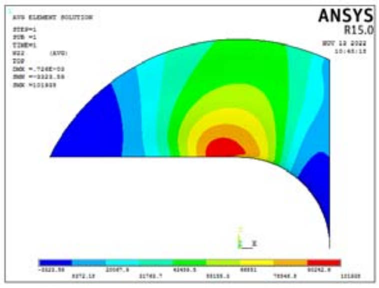
а)



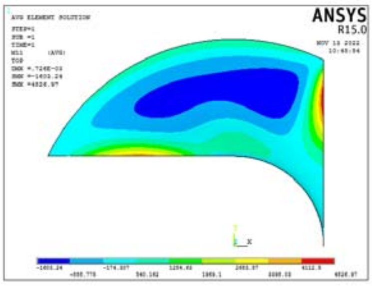
б)



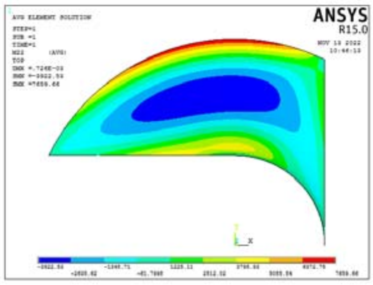
в)



г)



д)



е)

Рис. 4.5. Псевдо-развертывающийся геликоид*: а – Модель; б – Прогиб по U_z; в – Нормальная сиола N_u; г – Нормальная сила N_v; д – Момент M_u; е - Момент M_v.*

Численные результаты расчета четырех типов пандусов в программе Ansys приведены в Таблице 4.3.

Таблица 4.3. Численные результаты расчета.

Вид геликоида	Прогиб U_z, м	Максимальный изгибающий момент, кН*м/м	Минимальный изгибающий момент, кН*м/м
Прямой	0,001165	12694	-5605
Косой	0,001137	12398	-5454
Конволютный	0,000808	8160	-4257
Псевдо-развертывающийся	0,000721	7659	-3922

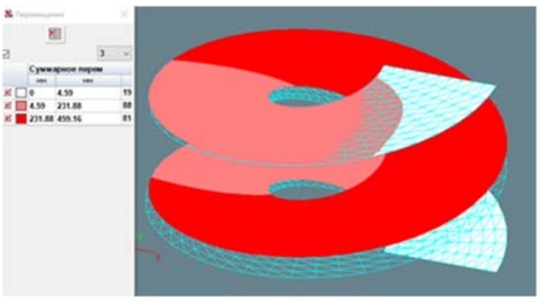
По результатам проведенного сравнения можно сделать вывод, что при близких геометрических параметрах оболочек, которые визуально выглядят очень похоже, напряженно-деформированное состояние значительно отличается, хоть и значения силовых факторов и прогибов находятся в основном в пределах одного порядка. Максимальные изгибающие моменты в средних сечениях у прямого и псевдо-развертывающегося геликоидов отличаются примерно в 1.6 раза, как и максимальные прогибы. Можно считать, что конволютный и псевдоразвертывающийся геликоиды более экономичны, при той же нагрузке демонстрируют меньший прогиб и момент, однако на практике они сложнее в изготовлении. Наиболее целесообразное решение в каждом конкретном случае принимается проектировщиком, в зависимости от задач и возможностей.

4.3. Сравнительный анализ результатов расчета с помощью метода конечных элементов в SCAD и ЛИРА

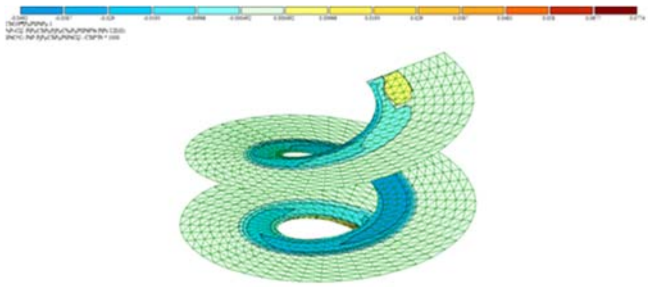
4.3.1. Суммарное перемещение

Для анализа перемещений пяти типов геликоидов были приняты следующие параметры: высота геликоида h = 3м; толщина 0,2 м; наружный диаметр 3,1 м; внутренний диаметр 2,3 м; коэффициент Пуассона ν = 0,18; модуль упругости E = 32.5x10^3 МПа. На каждый геликоид действует одинаковая распределенная нагрузка 4,233 кН соответственно. Конструкции рассчитаны на действие собственного веса.

Схемы расчетов суммарного перемещения для пяти типов геликоидов приводятся на Рис. 4.7-4.11.

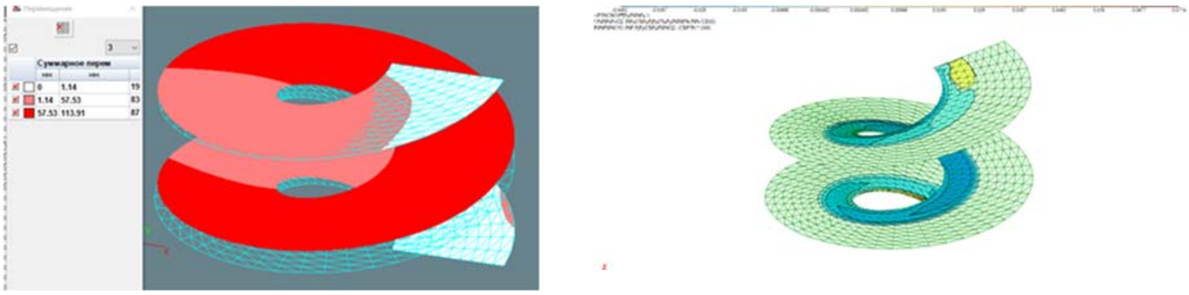


а)



б)

Рис. 4.7. Суммарное перемещение для прямого геликоида: а – в SCAD; б – в Лира Сапр.



а) *б)*

Рис. 4.8. Суммарное перемещение для косого геликоида: а – в SCAD; б – в Лира Сапр.

а) *б)*

Рис. 4.9. Суммарное перемещение для развертывающегося геликоида: а – в SCAD; б – в Лира Сапр.

а) *б)*

Рис. 4.10. Суммарное перемещение для конволютного геликоида: а – в SCAD; б – в Лира Сапр.

а) б)

Рис. 4.11. Суммарное перемещение для псевдо-развертывающегося геликоида: а – в SCAD; б – в Лира Сапр.

По изополям перемещений видно, что у разных типов геликоидов максимальные перемещения возникают в разных зона, а также видно, что разные расчетные программы показывают разные характеры расположения зон повышенных перемещений.

4.3.2. Сравнение результатов

Сравнение результатов расчетов, полученных с помощью программных комплексов SCADи ЛИРА, основанных на методе конечных элементов, по максимальным и минимальным перемещениям, изгибающим моментам, продольным и поперечным силам, представлено в таблице 4.4.

Таблица 4.4. Результаты для разных типов геликоидов, посчитанных в SCAD

Перемещение по оси Z					
Тип геликоида	Единицы измерений	МКЭ в SCAD		МКЭ в ЛИРА	
		Мин	Max	Мин	Max
Прямой	мм	-2,860	0,431	-1,670	0,061
Косой	мм	-2,860	0,432	-1,671	0,061
Развёртывающийся	мм	-1,259	0,01	-1,212	2,150
Конволютный	мм	-4,560	3,214	-2,162	0,240
Псевдо-Развёртывающийся	мм	-5,590	1,051	-3,881	0,013
Момент Mx					
Тип геликоида		МКЭ в SCAD		МКЭ в Лира Сапр	

	Единицы измерений	Мин	Max	Мин	Max
Прямой	Т.М	-10,12	13,56	-9,11	13,31
Косой	Т.М	-10,13	15,57	-9,12	13,30
Развёртывающийся	Т.М	-14,15	20,11	-12,14	19,10
Конволютный	Т.М	-9,65	13,45	-8,97	13,00
Псевдо-Развёртывающийся	Т.М	-10,65	12,80	-9,52	11,60
Момент My					
Тип геликоида	Единицы измерений	МКЭ в SCAD		МКЭ в Лира Сапр	
		Мин	Max	Мин	Max
Прямой	Т.М	-10,01	13,12	-9,45	12,93
Косой	Т.М	-10,02	12,12	-9,45	12,93
Развёртывающийся	Т.М	-13,24	16,90	-10,88	14,56
Конволютный	Т.М	-9,98	12,54	-9,35	11,80
Псевдо-Развёртывающийся	Т.М	10.50	12,90	-9,33	11,20
Продольная сила Nx					
Тип геликоида	Единицы измерений	МКЭ в SCAD		МКЭ в Лира Сапр	
		Мин	Max	Мин	Max
Прямой	$Т/М^2$	-33,90	31,56	-31,14	33,40
Косой	$Т/М^2$	-33,90	31,56	-31,14	33,40
Развёртывающийся	$Т/М^2$	22,52	56,80	21,60	45,50
Конволютный	$Т/М^2$	-9,98	15,90	-8,46	12,40
Псевдо-Развёртывающийся	$Т/М^2$	-22,60	45,10	-21,08	43,30
Продольная сила Ny					
Тип геликоида	Единицы измерений	МКЭ в SCAD		МКЭ в Лира Сапр	
		Мин	Max	Мин	Max
Прямой	$Т/М^2$	-67,12	77,60	-65,59	76,60
Косой	$Т/М^2$	-67,12	77,60	-65,59	76,60
Развёртывающийся	$Т/М^2$	-24,25	46,30	-22,20	44,50
Конволютный	$Т/М^2$	-28,40	37,54	-26,20	31,20
Псевдо-Развёртывающийся	$Т/М^2$	-25,10	49,50	23,90	47,80
Поперечная сила Qx					
Тип геликоида	Единицы измерений	МКЭ в SCAD		МКЭ в Лира Сапр	
		Мин	Max	Мин	Max
Прямой	Т×М	-61,59	76,15	-60,80	75,50
Косой	Т×М	-61,59	76,15	-60,80	75,50
Развёртывающийся	Т×М	-25,60	45,80	-24,90	43,70
Конволютный	Т×М	46,45	67,89	-44,10	66,10

Псевдо-Развёртывающийся	Т×М	-53,26	72,43	-49,70	70,90
Поперечная сила Qy					
Тип геликоида	Единицы измерений	МКЭ в SCAD		МКЭ в Лира Сапр	
		Мин	Max	Мин	Max
Прямой	Т×М	-58,54	69,10	-57,80	68,00
Косой	Т×М	-58,54	69,10	-57,80	68,00
Развёртывающийся	Т×М	28,95	49,60	-24,68	48,10
Конволютный	Т×М	-37,80	53,54	-35,67	51,90
Псевдо-Развёртывающийся	Т×М	-53,16	72,30	-49,20	70,03

В результате проведенного анализа расчета разных типов геликоидальных оболочек методом конечных элементов в программных комплексах SCAD и ЛИРА можно сделать вывод о том, что при сравнении пяти типов геликоидов похожее поведение и близкие результаты демонстрируют прямой и косой геликоид, и также псевдоразвертывающийся. Развертывающийся геликоид демонстрирует величины внутренних силовых факторов в 2-3 раза меньше, чем у прямого и косого, и примерно в 1.5 раза меньше, чем у конволютного, что может быть обусловлено большей величиной угла наклона образующих. Однако, при сравнительной простоте изготовления развертывающийся геликоид может быть признан оптимальным решением в данном случае.

Выводы по главе 4

Ранее было показано, что прямой геликоид хорошо изучен архитекторами, инженерами-строителями и проектировщиками и имеет достаточно подробное описание характеристик, в то время как остальные типы геликоидов частично известны и применяются в основном только в машиностроении [81-88], поэтому было принято решение провести сравнительный анализ НДС оболочек в форме всех известных геометрам видов линейчатых геликоидов.

Поскольку основным методом современной строительной механики является метод конечных элементов и именно с применением этого метода выполняется большинство научных и практических расчетов [89-105], в четвертой главе кандидатской диссертации проведены численные эксперименты по определению НДС винтовых оболочек в форме линейчатых геликоидов разных типов в программных комплексах, основанных МКЭ, а также проведен сравнительный анализ результатов и сделаны выводы о работе под нагрузкой винтовых конструкций разных типов при одинаковых условиях закрепления и загружения. Также в Главе 4 приводятся результаты расчетов пяти типов линейчатых геликоидальных оболочек методом конечных элементов в программных комплексах SCAD, ЛИРА и ANSYS проводится сравнение полученных результатов и показаны выводы о целесообразности применения расчетных указанных программных комплексов для расчета разных типов геликоидов. По итогам трех проведенных исследований, можно сделать единый вывод о том, что использование не только традиционных прямого и косого геликоидов, а также менее популярных остальных трех типов геликоидов может быть оправдано и рекомендовано к внедрению в инженерную практику, поскольку такие формы могут обладать преимуществами в несущей способности и работе под нагрузкой.

С другой стороны, обратной стороной прочности и равномерного распределения напряжений для конволютного, развертывающегося и псевдоразвертывающегося геликоидов можно назвать повышенную сложность изготовления. Можно порекомендовать проводить предварительное вариантное проектирование с использованием разных форм, чтобы подобрать оптимальное техническое решение в каждом случае.

Заключение

В данном диссертационном исследовании были рассмотрены возможности аналитических и численно-аналитических методов расчета линейчатых геликоидов, сравнение поведения под нагрузкой винтовых конструкций в форме разных типов линейчатых геликоидов, предложены методики выбора типа геликоида на предварительном этапе проектирования, а также предложена методика трехмерного моделирования геликоидальных оболочек разных типов в удобном для дальнейшего применения виде (для расчета, внедрения в практику, создания конструкции посредством аддитивных технологий).

В работе решены следующие задачи и сделаны следующие выводы:

1) Проанализирована геометрия всех 5 типов геликоидов (прямой, косой, развертывающийся, конволютный, псевдо-развертывающийся), а также разработаны алгоритмы построения пяти типов геликоидов в среде Mathcad.

2) Проведен анализ возможностей моделирования геликоидов в различных программах (Solidworks, Scad, Autocad) и разработана методика построения моделей геликоидов для дальнейшего расчета, проектирования и реализации с применением аддитивных технологий.

3) Показано, что подход В.Г. Рекача применим только в узком диапазоне (только для пологих оболочек с малым параметром c), и предложена методика для расчета НДС непологого прямого геликоида с оценкой границ пологости для новой методики.

4) Проведены сравнительные аналитические и численные расчеты НДС разных типов пологих линейчатых геликоидальных оболочек. Расчеты проводились методом конечных элементов в расчетных программных комплексах SCAD, ЛИРА, ANSYS, а также аналитическими и численно-аналитическими методами с применением авторских программ, написанных в средах MathCAD и Maple.

5) Проведен анализ расчетов и сравнение результатов, полученных различными методиками, дан анализ границ пологости при расчете прямого геликоида, а также рекомендации по применению методик и программных комплексов для расчета разных типов линейчатых геликоидов.

6) Предлагаемый в работе метод 3D-моделирования геликоида с целью получения аналитически точной (заданной аналитическими уравнениями) модели с заданной толщиной в пригодном для дальнейшего расчета, проектирования и 3D печати виде, позволяет быстро и без особых затруднений создавать на основе параметрических уравнений модель сложной геометрии и изготавливать ее твердую копию с применением аддитивных технологий. Метод подходит для любых оболочек и других архитектурных объектов, которые возможно построить в SCAD, программном комплексе, доступном для пользователей в РФ и достаточно простом в освоении.

7) Впервые проведен анализ НДС непологого прямого геликоида численно-аналитическим методом.

Список литературы

1. Krivoshapko S N and Ivanov V N 2015 Encyclopedia of Analytical Surfaces Springer p 752
2. http://www.geom.uiuc.edu/zoo/diffgeom/surfspace/helicoid/
3. Weisstein E W 2003 CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, Second Edition, Chapman & Hall/CRC p 3252
4. Nield D A and Kuznetsov A V 2004 Forced connection in a helical pipe filled with a saturated porous medium Int. J. of Heat and Mass Transfer. V. 47 24 pp 5175-80
5. Vasudevaiah M and Patturaj R 1994 Effect of torsion in a helical pipe flow Int. J. of Mathematics and Mathematical Sciences V. 17 3 pp 553-60
6. https://en.wikipedia.org/wiki/Helicoid
7. Белкин А.Е., Нарская Н.Л., Пожалостин А.А. Деформации винтовой лопасти шнека при изгибе// Расчеты на прочность (Москва). – 1990. – № 31. – С. 3-11.
8. Турышев В.А. Винтовые конвейеры. - Красноярск: КПИ, 1970. - 20 с
9. Roberts A.W., Manjunath K.S., Mcbride W. The mechanics of screw feeder performance for bulk solids flow control// Nat. Conf. Publ, Inst. Eng., Austral, 1992. - №92/7. –P. 333-338.
10. Dabrowski Otton, Sapian Czeslaw. Loading of a central screw chute in a coal storage container// Pr. nauk. Inst. beed. pwrocl. - 1987, № 51. - P. 125-130.
11. Люкшин В.С. Теория винтовых поверхностей в проектировании режущих инструментов. - М.: Машиностроение, 1968. - 371с.
12. Рябинов Д.Л. Развертывание геликоида на основе изгибания поверхностей// Труды Московск. сем. по начертат. геометрии и инж. графике. -М., 1963. - Вып. 2. - С. 212-216
13. Люкшин В.С. Теория винтовых линий и поверхностей. - М.: Моск. станкоинструментальный ин-т, 1963. - 217 с.

14. Можаев С.С. Аналитическая теория спирального сверла. – М.-Л.: Гостехниздат, 1948.

15. Lysholm A. Rotationskompressor. – Sweden, 1934, Patent N 87610 (kl.27 c3) handed 13.08.1936.

16. Андреев П.А., Шнепп В.Б., Шварц А.И., Бобриков Н.И., Галеев А.М. Состояние и перспективы развития винтового компрессоростроения// Винтовые компрессоры в энергомашиностроении: Тр. ЦКТИ. – Л., 1975. – Вып. 127. – С. 3-7.

17. Винтовые компрессорные машины: Аннотированный сб. описаний иностранных изобретений. – Л.: ЛенНИИХимМаш, 1966. – 32 с.

18. Винтовые компрессорные машины: Аннотированный сб. описаний иностранных изобретений. – Л.: ЛенНИИХимМаш, 1968. – 60 с.

19. Teraoka Ats. Analisis del husillo de alta plastificacion para el moldeo por inyeccion// Rev. plast. mod. – 1995. – 46, № 463. – P. 55-64

20. Патент России №2148185 МКИ6 F 03 D 5/00, 3/06. Ветроротор для ветряка/Антонов Ю.М., ВНИИЭСХ, опубл. 1998.12.10

21. Патент России №2223414 МКИ6 F 03 D 5/00, 3/06.Ротор-спираль/Морозов В.А., ЗАО «Подольскинновация» опубл. 10.02.2004

22. Патент России № 2101560, МКИ6 F 03 D 5/00, 3/06.Шнековый ветроротор/ Смульский И.И., Мельников В.П., Кавун И.Н., опубл. 10.01.98, Бюл. № 1.

23. Смульский И.И. Шнековые ветродвигатели и их особенности // Инженерно-физический журнал. - 2001 г.- Т. 74, №5, с.187-195.

24. Alamovsky, A.A. SolidWorks 2007/2008. Computer Modeling in Engineering Practice/A.A. Alamovsky. - Moscow: SPb: BHV-Petersburg, 2008. - 192 c.

25. Pogorelov, Victor AutoCAD 2009. 3D modeling/Victor Pogorelov. - Moscow: BHV-Petersburg, 2009. - 400 c

26. Autodesk 3ds Max//Wikipedia is a free encyclopedia. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Autodesk_3ds_Max

27. Busygina G.M., Dremova O.V. Application of SCAD Office software complex for calculation of rod structures: educational and methodological manual for students of construction specialties/Alt. госуд. техн. Un named after I.I. Slunov. Barnaul, 2015. 39 pages

28. Karpilovsky V.S., Kriksunov E.Z., Maliren- ko A.A., Perelmuter A.V., Fialko S.Y. SCAD Office. Version 21. SCAD computing system. MOSCOW: SCAD SOFT, 2015. 848 pages.

29. Анализируйте, прогнозируйте поведение и оптимизируйте инженерные расчётные проекты с помощью пакета COMSOLMultiphysics®// COMSOL: MultiphysicsSoftwareforOptimizingDesigns. URL: https://goo.su/0ul7

30. Программные продукты ANSYS// ANSYS, Лицензирование, внедрение, консалтинг – CADFEM. URL: https://www.cadfem-cis.ru/products/ansys

31. Rynkovskaya M.I., Elberdov T., Sert E., Öchsner A. Study of modern software capabilities for complex shell analysis (Исследование возможностей современных компьютерных программ для расчета оболочек сложной геометрии) // Строительная механика инженерных конструкцийи и сооружений. 2020. Т. 16. № 1. С. 45–53. http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-45-53.

32. Kosyreva O.N., Gresina A.V. Geometric modeling of 2D- and 3D- objects by means of CAD AutoCAD. Part 1: Educational and methodical grant. - Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State University, 2015. - 81 page.

33. Панов Д.Ю. Расчет воздушного винта на прочность. - Тр. ЦАГИ. - 1937. -Вып.288.

34. Власов В.З. Строительная механика оболочек. - ГСИ, 1935.

35. Власов В.З. Общая теория оболочек. - ГИТТЛ, 1949.

36. Власов В.З. Основные дифференциальные уравнения общей теории уп¬ругих оболочек // Прикладная математика и механика. Т.8. Вып.2, 1944.

37. Biezeno G.G. De experimentele bepaling van de in een scheepsschroef optredente spanningen// De Ingenieur. - 1945. - № 57.

38. Соломон JI.И. К расчету геликоидальных оболочек: Дисс. канд. техн. наук-М.: МИСИ, 1953.

39. Работнов Ю.Н. Некоторые решения безмоментной теории оболочек // ПММ. - 1946. - Т.10, №5-6. - С.636-645.

40. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. - ГИТТЛ, 1953.

41. Колтунов С.Я., Михайловский Е.И. Квазисимметричная деформация подкрепленной геликоидальной оболочки//Теория оболочек и плас-тин: Тр. IX Всесоюзн. конференции по теории оболочек и пластин. - Л.: Су-достроение, 1975. - С. 73-76.

42. Рекач В.Г., Кривошапко С.Н. Расчет оболочек сложной геометрии. - М.: Изд-во УДН, 1988. - 177с.

43. Рынковская М.И. К вопросу расчета прямых геликоидальных оболочек по методу В.Г. Рекача // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2006, № 2. С. 63 - 66.

44. Баджория Г.Ч. Расчет длинного развертывающегося геликоида по мо-ментной теории в перемещениях // Строительная механика и расчет сооружений. - 1985. - №3. - С.22-24.

45. М.К.А. Кумудини Джаявардена. Решение задач расчета упругих оболочек в форме развертывающихся геликоидов: Дисс. канд. техн. наук. - М.: УДН, 1992.- 183с.

46. Иванов В.Н., Рынковская М.И. К расчету пологого прямого геликоида // Научная сессия «Развитие методов расчета и проектирования

про¬странственных конструкций зданий и сооружений» 15-16 мая 2013г. Тез. докл. - М.: МОО «Пространственные конструкции».

47. Рынковская М.И. О применении чисел Бернулли к расчету тонких упругих торсов-геликоидов по асимптотическому методу малого параметра // Пространственные конструкции зданий и сооружений (исследование, расчет, проектирование, применение): Сб. статей. Вып. 12 / под ред. В.В. Шугаева и др. - М.: МОО «Пространственные конструкции», 2009. - С. 59-64.

48. Хабидуллаулы Е., Быстрова Д.В., Зефирова А.Д., Жан Поль В. Обзор геометрии и применения геликоидальных оболочек в инженерном деле. Тамбов: Перспективы науки. № 4(115).2019. стр. 92-99

49. Jean Paul, V. On the investigations of ruled helical shels in 2000–2017 / V. Jean Paul // Structural mechanics of engineering constructions and buildings. – RUDN University. – 2017. – № 3.

50. Рынковская М.И. Влияние значения коэффициента Пуассона на точность результатов расчета НДС торса-геликоида. Строительство и реконструкция №4 (60) 2015.

51. Александров П.В., Немировский Ю.В. Напряженное состояние армированных геликоидальных оболочек // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1991. – № 9. – С. 18–24.

52. Александров П.В., Немировский Ю.В. Напряженное состояние гиперболической оболочки вращения при неоднородном армировании // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1991. – № 10. – С. 27–32.

53. Немировский Ю.В, Мищенко А.В. Динамический расчет системы профилированных композитных стержней // Вычислительная механика сплошных сред. – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 188–199.

54. Немировский Ю.В., Бабин А.И., Сальский Е.А. Термонапряженное состояние многослойных полиармированных геликоидальных оболочек. Доклады АН ВШ РФ, 2016. № 4 (33)
55. Сорокина А.Г. Расчет напряженно-деформированного состояния эластичной ленты геликоидального конвейера / А.Г. Сорокина, В.Ф. Фомичева, В.Г. Кокоулин // Инженерный журнал: наука и инновации # 12·2018. – С. 55-63.
56. Savićević S., Janjić M., Vukčević M., Šibalić N. Stress research of helicoidal shell shape elements. Machines, technologies, materials, 2013, iss. 10. URL:http://www.mech-ing.com/journal/Archive/2013/10/42_Savicevic_mtm13.pdf (дата обращения 20.05.2017)
57. Jean Paul, V. On the investigations of ruled helical shels in 2000–2017 / V. Jean Paul // Structural mechanics of engineering constructions and buildings. – RUDN University. – 2017. – № 3.
58. Рынковская М.И. Изгибание и задачи расчета тонких упругих оболочек в форме прямого и развертывающегося геликоидов на распределенную нагрузку и осадку одной из криволинейных опор. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. М.: РУДН, 2013. – 217 с.
59. Стрелец-Стрелецкий Е. Б., Боговис В. Е., Гензерский Ю. В. и др. Лира 9.4. Руководство пользователя. Основы. Учебное пособие. — Киев: «Факт», 2008.
60. Code-Aster - Общая информация//Сайт проектировщиков, инженеров, конструкторов – DWG.RU. URL: https://dwg.ru/dnl/3548
61. Сафронов П.И. Использование программного комплекса Code_Aster для решения задач строительной механики и теории упрогуости. // Вестник Псковского государственного университета. Серия "Экономические и технические науки"(3), С. 148-158.

62. Общее описание Robot//Техническая поддержка и обучение | AutodeskKnowledgeNetwork. URL: https://goo.su/0ul5
63. ANSYS// Википедия – свободная энциклопедия. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/ANSYS
64. SOFiSTiK// SOFiSTiK: Информационный ресурс. URL: http://mysofistik.blogspot.com/p/sofistik_18.html
65. Marquere K. Zur Theorie der gekrümmter Platte prosser Formänderung // Proc. of the Fifth Int. Congress for Appl. Mech. - 1938. - P.93-101.
66. Reissner E. Small rotationally symmetric deformations of shallow helicoidal shells // J. Appl. Mech. - 1955. - Vol.22, №1. - P.31-34.
67. Иванов В.Н., Кривошапко С.Н. Аналитические методы расчета оболочек неканонической формы: Монография. – М.: РУДН, 2010 г. – 542 с.ил.
68. Халаби С. М. Моментная Теория расчета псевдо - торсовых геликоидальных оболочек в криволинейных неортогональных координатах Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. М.: РУДН, 2005. – 278 с.
69. O'Mathuna D. Rotationally symmetric deformations in helicoidal shells.- Ph.D. Thesis,MIT, April 1962.
70. O'Mathuna D. Rotationally symmetric deformations in helicoidal shells // J. of Math. and Physics.- 1963.-42, №2.-P.85-111.
71. Ярошенко А.Р. Осесимметричная деформация винтовой оболочки с прямоугольным профилем// Динамика и прочность машин. - Харьков, 1971. -Вып. 12. - С. 3-9.
72. Залесский В.К. Двумерная безмоментная задача для оболочки в форме косого геликоида//Динамика и прочность машин.-Харьков, 1974. Вып. 20. - С. 88-93.

73. Тупикова Е.М. Анализ напряженно-деформированного состояния тонкой упругой оболочки в форме длинного косого геликоида. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. М.: РУДН, 2016. – 176 с.

74. Тупикова, Е. М. Расчет тонких упругих оболочек в форме длинного косого геликоида / Е. М. Тупикова // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2015. - № 3. – С. 23-27.

75. Тупикова Е.М. Полуаналитический расчет оболочки в форме длинного пологого косого геликоида в неортогональной несопряженной системе координат по моментной теории. Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2016, № 3, С. 3–8.

76. Тупикова Е.М. Анализ метода В.Г. Рекача для расчета напряженно-деформированного состояния оболочки в форме длинного пологого косого геликоида. Строительная механика и расчет сооружений, 2016, № 1, С. 14–20.

77. Kohnke P. (ed.) Ansys: Theory Reference, release 5.6 Ansys, inc., 1999. - 1286 p.

78. Ansys в примерах и задачах Басов К.А, Под общ. ред. Д. Г. Красковского. — М: КомпьютерПресс, 2002. —224 с: ил.

79. Каплун А.Б., Морозов Е.М., Олферьева М.А. ANSYS в руках инженера: Практическое руководство - М.: Едиториал УРСС, 2003,272 стр.

80. Свод правил СП 59.13330.2012 "СНиП 35-01-2001. Доступность зданий и сооружений для маломобильных групп населения" от 1 января 2013г.

81. Лексина О.И. Линейчатые поверхности как конструктивное, функциональное и художественное средство в архитектуре Гауди / AMIT 3 (28) 2014. – 20 с.

82. Сальман А.Д. Решение задач расчета тонких упругих оболочек в форме прямого и эвольвентного геликоидов аналитическими и численными методами: Дисс. канд. техн. наук. -М.: УДН, 1989. - 109с.
83. Технология и техника разведочного бурения: Учеб. для вузов/Ф.А. Шалилев, С.Н. Тараканов, Б.Б. Кудряшов и др. - 3-е изд., перераб. и доп.- М.: Недра, 1983.
84. Люкшин В.С. Теория винтовых поверхностей в проектировании режущих инструментов. - М.: Машиностроение, 1968. – 371Jeanc.
85. Турышев В.А. Винтовые конвейеры. Красноярск: КПИ, 1970. - 20с.
86. Dabrowski Otton, Sapian Czeslaw. Loading of a central screw chute in a coal storage container // Pr. nauk. Inst. beed. pwrocl. - 1987, №51. - P.125-130.
87. Андреев П.А., Шнепп В.Б., Шварц А.И., Бобриков Н.И., Галлеев А.М. Состояние и перспективы развития винтового компрессоростроения // Винтовые компрессоры в энергомашиностроении: Тр. ЦКТИ. - Л., 1975.- Вып. 127.-с.3-7.
88. С.М. Халаби. Численный расчёт псевдо-торсовых геликоидов//Строительная механика инженерных конструкций и сооружений,2006.С. 35 - 46.
89. Трушин, С.И. Расчет конструкций в форме пологих сетчатых гипаров с учетом геометрической нелинейности / С.И. Трушин, Е.В. Сысоева, Ф.И. Петренко // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. - 2016 - № 3. - С. 74-80.
90. Тимергалиев, С. Н. О разрешимости геометрически нелинейных краевых задач для пологих оболочек типа Тимошенко с шарнирно опертыми краями / С. Н. Тимергалиев, А. Н. Углов, Л. С. Харасова // Известия высших учебных заведений. Математика. - 2015. - № 5. – С. 49-61.
91. Скопинский, В. Н. Нелинейный анализ и определение предельных нагрузок для сосуда давления с эллиптическим днищем и патрубком при

комбинированном нагружении / В. Н. Скопинский, Н. А. Берков, Н. А. Столярова // Машиностроение и инженерное образование. – 2015. - № 1 (42). – С. 22-31.

92. Сидоров, В. Н. Метод конечных элементов в расчете сооружений. / В.Н. Сидоров, В.В. Вершинин. – М.: Издательство АСВ, 2015. – 288 с.

93. Паймушин, В. Н. Исследование процессов среднего изгиба подкрепленных на контуре трехслойных оболочек / В.Н. Паймушин, М.А. Шишов // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика.-2017.-Т. 5.-№ 7-2 (33-2).-С. 133-136

94. Клочков, Ю. В. Конечно-элементный анализ НДС оболочек вращения с учетом деформаций поперечного сдвига / Ю.В. Клочков, А.П. Николаев, Т.Р. Ищанов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2016. - № 5. С. 49–54.

95. Корнишин М.С., Якупов Н.М.Сплайновый вариант метода конечных э лементов для расчета оболочек сложной геометрии // Прикладная механика. Т.23, № 3, Киев. 1987. С.38-44.

96. Киямов И.Х., Киямов Х.Г., Якупов Н.М., Якупов С.Н. Моделирование элементов конструкций сложной геометрии трехмерными конечными элементами // Механика композиционных материалов и конструкций, 2011, том 17, №1, с. 145-154.

97. Ищанов Т.Р. Конечно-элементный анализ напряженно-деформированного состояния тонких оболочек с учетом поперечного сдвига при различных вариантах аппроксимации угловых перемещений. Дисс. канд. тех. наук. Волгоград: ВГАУ.

98. Александров П.В., Немировский Ю.В. Напряженное состояние гиперболической оболочки вращения при неоднородном армировании // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1991. – № 10. – С. 27–32.

99. Косицын С.Б. Метод конечных элементов в перемещениях для расчета оболочек произвольной формы // Торсовые поверхности и оболочки: Справочник / Под ред. С.Н. Кривошапко, М.: Изд-во УДН, 1991. -С.188-196.

100. Александров А.В., Косицын С.Б., Косицын А.С. Нетрадиционные модели конечных элементов высоких порядков // Теоретические основы строительства. - Москва: Изд-во АСВ, 1996. - С. 26-30.

101. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2006. - 392 с.

102. Перельмутер, А.В. , Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа//Киев Издательство «Сталь» 2002

103. Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных конструкций 2000, М .: АСВ - 152 стр.

104. Корнишин М.С., Якупов Н.М. Вариант МКЭ применительно к оболочкам сложной геометрии// Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы 11 Всесоюзной конференции. – Новосибирск, 1990. – С. 124-130

105. Косицын С.Б., Федоров В.С., Акулич В.Ю. Численный анализ напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки, взаимодействующей с основанием, с учетом изменения расчетной модели во времени // Научный журнал строительства и архитектуры. 2019. № 3 (55). С. 84-93.

Приложение 1

Листинг программы для расчета прямого геликоида как частного случая косого с углом наклона образующей, близким к 0.

> $c := 0.02 : \varphi := \dfrac{0.0000000000001 \cdot \mathrm{Pi}}{180} : h := 0.03 : E0 := 200000 : \sigma := 0.3 : p := 0.01 : C1 := \dfrac{E0 \cdot h}{(1-\sigma^2)} : C2 := \dfrac{E0 \cdot h^3}{12 \cdot (1-\sigma^2)} : C3 := \dfrac{E0 \cdot h^3}{12 \cdot (1+\sigma)} : z := p \cdot \cos(\varphi) : y := 0 : x := p \cdot \sin(\varphi) : k := \tan(\varphi) : A := \sqrt{1+k^2} : F := k \cdot c :$

>

>

>

>

>

> 3 е *уравнение*

3 е *уравнение*

>

>

>

>

>

>

>

>

>

>

>

> $kkuz := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2uz - dk2d3uu \cdot dk1uz)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}:$

> $kkduz := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2duz - dk2d3uu \cdot dk1duz)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}:$

> $kkd2uz := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2d2uz - dk2d3uu \cdot dk1d2uz)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}:$

> $kkd3uz := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2d3uz - dk2d3uu \cdot dk1d3uz)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}:$

> $kkd4uz := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2d4uz - dk2d3uu \cdot dk1d4uz)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}:$

> $kkuv := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2uv - dk2d3uu \cdot dk1uv)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}:$

> $kkduv := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2duv - dk2d3uu \cdot dk1duv)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}:$

> $kkd2uv := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2d2uv - dk2d3uu \cdot dk1d2uv)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}:$

> $kkuu := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2uu - dk2d3uu \cdot dk1uu)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}:$

> $kkduu := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2duu - dk2d3uu \cdot dk1duu)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}:$

> $kkd2uu := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2d2uu - dk2d3uu \cdot dk1d2uu)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}:$

> $kkX := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2X - dk2d3uu \cdot dk1X)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}:$

> $kkY := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2Y - dk2d3uu \cdot dk1Y)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}:$

>

> $kcuz := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2uz - dk2d3uu \cdot dk1uz)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}:$

> $kcduz := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2duz - dk2d3uu \cdot dk1duz)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}:$

> $kcd2uz := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2d2uz - dk2d3uu \cdot dk1d2uz)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}:$

> $kcd3uz := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2d3uz - dk2d3uu \cdot dk1d3uz)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}:$

> $kcd4uz := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2d4uz - dk2d3uu \cdot dk1d4uz)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}:$

> $kcuv := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2uv - dk2d3uu \cdot dk1uv)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}:$

> $kcduv := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2duv - dk2d3uu \cdot dk1duv)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}:$

> $kcd2uv := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2d2uv - dk2d3uu \cdot dk1d2uv)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}:$

> $kcuu := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2uu - dk2d3uu \cdot dk1uu)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}:$

> $kcduu := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2duu - dk2d3uu \cdot dk1duu)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}:$

> $kcd2uu := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2d2uu - dk2d3uu \cdot dk1d2uu)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}:$

> $kcX := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2X - dk2d3uu \cdot dk1X)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}:$

> $kcY := \frac{(dk1d3uu \cdot dk2Y - dk2d3uu \cdot dk1Y)}{(dk2d3uu \cdot dk1d3uv - dk1d3uu \cdot dk2d3uv)}:$

>

>

>

>

>

>

>

>

>

>

>

>

>

>

> $k22uu := \dfrac{(k1d2uu \cdot k2uu - k2d2uu \cdot k1uu)}{(k2d2uu \cdot k1d2uv - k1d2uu \cdot k2d2uv)}$:

> $k22duu := \dfrac{(k1d2uu \cdot k2duu - k2d2uu \cdot k1duu)}{(k2d2uu \cdot k1d2uv - k1d2uu \cdot k2d2uv)}$:

> $k22d2uu := \dfrac{(k1d2uu \cdot k2d2uu - k2d2uu \cdot k1d2uu)}{(k2d2uu \cdot k1d2uv - k1d2uu \cdot k2d2uv)}$;

$$k22d2uu := 0.$$

> $k22uv := \dfrac{(k1d2uu \cdot k2uv - k2d2uu \cdot k1uv)}{(k2d2uu \cdot k1d2uv - k1d2uu \cdot k2d2uv)}$:

> $k22duv := \dfrac{(k1d2uu \cdot k2duv - k2d2uu \cdot k1duv)}{(k2d2uu \cdot k1d2uv - k1d2uu \cdot k2d2uv)}$:

> $k22uz := \dfrac{(k1d2uu \cdot k2uz - k2d2uu \cdot k1uz)}{(k2d2uu \cdot k1d2uv - k1d2uu \cdot k2d2uv)}$:

> $k22duz := \dfrac{(k1d2uu \cdot k2duz - k2d2uu \cdot k1duz)}{(k2d2uu \cdot k1d2uv - k1d2uu \cdot k2d2uv)}$:

> $k22d2uz := \dfrac{(k1d2uu \cdot k2d2uz - k2d2uu \cdot k1d2uz)}{(k2d2uu \cdot k1d2uv - k1d2uu \cdot k2d2uv)}$:

> $k22d3uz := \dfrac{(k1d2uu \cdot k2d3uz - k2d2uu \cdot k1d3uz)}{(k2d2uu \cdot k1d2uv - k1d2uu \cdot k2d2uv)}$:

$$k22X := \frac{(k1d2uu \cdot k2X - k2d2uu \cdot k1X)}{(k2d2uu \cdot k1d2uv - k1d2uu \cdot k2d2uv)} :$$

$$k22Y := \frac{(k1d2uu \cdot \mathrm{k2Y} - k2d2uu \cdot k1Y)}{(k2d2uu \cdot k1d2uv - k1d2uu \cdot k2d2uv)} :$$

> $k11uu := \frac{(k1d2uv \cdot k2uu - k2d2uv \cdot k1uu)}{(k2d2uv \cdot k1d2uu - k1d2uv \cdot k2d2uu)} :$

> $k11duu := \frac{(k1d2uv \cdot k2duu - k2d2uv \cdot k1duu)}{(k2d2uv \cdot k1d2uu - k1d2uv \cdot k2d2uu)} :$

> $k11d2uu := \frac{(k1d2uv \cdot k2d2uu - k2d2uv \cdot k1d2uu)}{(k2d2uv \cdot k1d2uu - k1d2uv \cdot k2d2uu)} :$

>

> $k11uv := \frac{(k1d2uv \cdot k2uv - k2d2uv \cdot k1uv)}{(k2d2uv \cdot k1d2uu - k1d2uv \cdot k2d2uu)} :$

> $k11duv := \frac{(k1d2uv \cdot k2duv - k2d2uv \cdot k1duv)}{(k2d2uv \cdot k1d2uu - k1d2uv \cdot k2d2uu)} :$

> $k11uz := \frac{(k1d2uv \cdot k2uz - k2d2uv \cdot k1uz)}{(k2d2uv \cdot k1d2uu - k1d2uv \cdot k2d2uu)} :$

> $k11duz := \frac{(k1d2uv \cdot k2duz - k2d2uv \cdot k1duz)}{(k2d2uv \cdot k1d2uu - k1d2uv \cdot k2d2uu)} :$

> $k11d2uz := \frac{(k1d2uv \cdot k2d2uz - k2d2uv \cdot k1d2uz)}{(k2d2uv \cdot k1d2uu - k1d2uv \cdot k2d2uu)} :$

> $k11d3uz := \frac{(k1d2uv \cdot k2d3uz - k2d2uv \cdot k1d3uz)}{(k2d2uv \cdot k1d2uu - k1d2uv \cdot k2d2uu)} :$

> $k11X := \frac{(k1d2uv \cdot k2X - k2d2uv \cdot k1X)}{(k2d2uv \cdot k1d2uu - k1d2uv \cdot k2d2uu)} :$

> $k11Y := \frac{(k1d2uv \cdot k2Y - k2d2uv \cdot k1Y)}{(k2d2uv \cdot k1d2uu - k1d2uv \cdot k2d2uu)}$:

>

> $K10 := k11uu$:

> $K11 := k11duu$:

> $K12 := k11uv$:

> $K13 := k11duv$:

> $K14 := k11uz$:

> $K15 := k11duz$:

> $K16 := k11d2uz$:

> $K17 := k11d3uz$:

> $K1X := k11X$:

> $K1Y := k11Y$:

>

>

> $K30 := k22uu$:

> $K31 := k22duu$:

> $K32 := k22uv$:

> $K33 := k22duv$:

> $K34 := k22uz$:

> $K35 := k22duz$:

> $K36 := k22d2uz$:

> $K37 := k22d3uz$:

> $K3X := k22X$:

> $K3Y := k22Y$:

>

>

> $$K70 := \frac{(k3uu + k3d3uv \cdot kkuu + k3d3uu \cdot kcuu + k3d2uu \cdot (k11uu + k22uu))}{-(k3d4uz + kkd4uz + kcd4uz)}:$$

>

> $$K71 := \frac{(k3duu + k3d3uv \cdot kkduu + k3d3uu \cdot kcduu + k3d2uu \cdot (k11duu + k22duu))}{-(k3d4uz + kkd4uz + kcd4uz)}:$$

> $$K72 := \frac{(k3uv + k3d3uv \cdot kkuv + k3d3uu \cdot kcuv + k3d2uu \cdot (k11uv + k22uv))}{-(k3d4uz + kkd4uz + kcd4uz)}:$$

> $$K73 := \frac{(k3duv + k3d3uv \cdot kkduv + k3d3uu \cdot kcduv + k3d2uu \cdot (k11duv + k22duv))}{-(k3d4uz + kkd4uz + kcd4uz)}:$$

> $$K74 := \frac{(k3uz + k3d3uv \cdot kkuz + k3d3uu \cdot kcuz + k3d2uu \cdot (k11uz + k22uz))}{-(k3d4uz + kkd4uz + kcd4uz)}:$$

>

> $$K75 := \frac{(k3duz + k3d3uv \cdot kkduz + k3d3uu \cdot kcduz + k3d2uu \cdot (k11duz + k22duz))}{-(k3d4uz + kkd4uz + kcd4uz)}:$$

> $K76 := \frac{(k3d2uz + k3d3uv \cdot kkd2uz + k3d3uu \cdot kcd2uz + k3d2uu \cdot (k11d2uz + k22d2uz))}{-(k3d4uz + kkd4uz + kcd4uz)}:$

> $K77 := \frac{(k3d3uz + k3d3uv \cdot kkd3uz + k3d3uu \cdot kcd3uz + k3d2uu \cdot (k11d3uz + k22d3uz))}{-(k3d4uz + kkd4uz + kcd4uz)}:$

> $K7Z := \frac{(k3Z)}{-(k3d4uz + kkd4uz + kcd4uz)}:$

> $K7X := \frac{(k3d3uv \cdot kkX + k3d3uu \cdot kcX + k3d2uu \cdot (k11X + k22X))}{-(k3d4uz + kkd4uz + kcd4uz)}:$

>

> $K7Y := \frac{(k3d3uv \cdot kkY + k3d3uu \cdot kcY + k3d2uu \cdot (k11Y + k22Y))}{-(k3d4uz + kkd4uz + kcd4uz)}:$

> $ode0 := \frac{d}{du} y0(u) = y1(u);$

$$ode0 := \frac{d}{du} y0(u) = y1(u)$$

> $ode1 := \frac{d}{du} y1(u) = K10 \cdot y0(u) + K11 \cdot y1(u) + K12 \cdot y2(u) + K13 \cdot y3(u) + K14 \cdot y4(u) + K15 \cdot y5(u) + K16 \cdot y6(u) + K17 \cdot y7(u):$

> $ode1p := \frac{d}{du} y1(u) = K10 \cdot y0(u) + K11 \cdot y1(u) + K12 \cdot y2(u) + K13 \cdot y3(u) + K14 \cdot y4(u) + K15 \cdot y5(u) + K16 \cdot y6(u) + K17 \cdot y7(u) + K1X \cdot x + K1Y \cdot y:$

> $ode2 := \frac{d}{du} y2(u) = y3(u):$

> $ode3 := \frac{d}{du} y3(u) = K30 \cdot y0(u) + K31 \cdot y1(u) + K32 \cdot y2(u) + K33 \cdot y3(u) + K34 \cdot y4(u) + K35 \cdot y5(u) + K36 \cdot y6(u) + K37 \cdot y7(u):$

> $ode3p := \frac{d}{du} y3(u) = K30 \cdot y0(u) + K31 \cdot y1(u) + K32 \cdot y2(u) + K33 \cdot y3(u) + K34 \cdot y4(u) + K35 \cdot y5(u) + K36 \cdot y6(u) + K37 \cdot y7(u) + K3X \cdot x + K3Y \cdot y:$

> $ode4 := \frac{d}{du} y4(u) = y5(u) :$

> $ode5 := \frac{d}{du} y5(u) = y6(u) :$

> $ode6 := \frac{d}{du} y6(u) = y7(u) :$

> $ode7 := \frac{d}{du} y7(u) = K70 \cdot y0(u) + K71 \cdot y1(u) + K72 \cdot y2(u) + K73 \cdot y3(u) + K74 \cdot y4(u) + K75 \cdot y5(u) + K76 \cdot y6(u) + K77 \cdot y7(u) :$

> $ode7p := \frac{d}{du} y7(u) = K70 \cdot y0(u) + K71 \cdot y1(u) + K72 \cdot y2(u) + K73 \cdot y3(u) + K74 \cdot y4(u) + K75 \cdot y5(u) + K76 \cdot y6(u) + K77 \cdot y7(u) + K7X \cdot x + K7Y \cdot y + K7Z \cdot z :$

>

> $odesys := ode0, ode1, ode2, ode3, ode4, ode5, ode6, ode7 :$

> $odesysP := ode0, ode1p, ode2, ode3p, ode4, ode5, ode6, ode7p :$

>

> $u1 := 5; u2 := 6.7;$

$$u1 := 5$$

$$u2 := 6.7$$

>

> $fncs := \{y0(u), y1(u), y2(u), y3(u), y4(u), y5(u), y6(u), y7(u)\} :$

> $ics1 := y0(u1) = 0, y1(u1) = 1, y2(u1) = 0, y3(u1) = 0, y4(u1) = 0, y5(u1) = 0, y6(u1) = 0, y7(u1) = 0 :$

>

> $YY1 := dsolve(\{odesys, ics1\}, fncs, type = numeric, output = listprocedure)$:

> $YY10 := subs(YY1, y0(u))$:

> $YY11 := subs(YY1, y1(u))$:

> $YY12 := subs(YY1, y2(u))$:

> $YY13 := subs(YY1, y3(u))$:

> $YY14 := subs(YY1, y4(u))$:

> $YY15 := subs(YY1, y5(u))$:

> $YY16 := subs(YY1, y6(u))$:

> $YY17 := subs(YY1, y7(u))$:

>

>

> $ics3 := y0(u1) = 0, y1(u1) = 0, y2(u1) = 0, y3(u1) = 1, y4(u1) = 0, y5(u1) = 0, y6(u1) = 0, y7(u1) = 0$:

> $YY3 := dsolve(\{odesys, ics3\}, fncs, type = numeric, output = listprocedure)$:

> $YY30 := subs(YY3, y0(u))$:

> $YY31 := subs(YY3, y1(u))$:

> $YY32 := subs(YY3, y2(u))$:

> $YY33 := subs(YY3, y3(u))$:

> $YY34 := subs(YY3, y4(u))$:

> $YY35 := subs(YY3, y5(u))$:

> $YY36 := subs(YY3, y6(u))$:

> $YY37 := subs(YY3, y7(u))$:

>

>

>

>

>

> $\mathrm{ics6} := y0(\mathrm{u1}) = 0, y1(u1) = 0, y2(u1) = 0, y3(u1) = 0, y4(u1) = 0, y5(u1) = 0, y6(u1) = 1, y7(u1) = 0 :$

> $YY6 := dsolve(\{odesys, ics6\}, fncs, type = numeric, output = listprocedure) :$

> $YY60 := subs(YY6, y0(u)) :$

> $YY61 := subs(YY6, y1(u)) :$

> $YY62 := subs(YY6, y2(u)) :$

> $YY63 := subs(YY6, y3(u)) :$

> $YY64 := subs(YY6, y4(u)) :$

> $YY65 := subs(YY6, y5(u)) :$

> $YY66 := subs(YY6, y6(u)) :$

> $YY67 := subs(YY6, y7(u)) :$

>

>

>

> $ics7 := y0(u1) = 0, y1(u1) = 0, y2(u1) = 0, y3(u1) = 0, y4(u1) = 0, y5(u1) = 0, y6(u1) = 0, y7(u1) = 1 :$

> $YY7 := dsolve(\{odesys, ics7\}, fncs, type = numeric, output = listprocedure) :$

> $YY70 := subs(YY7, y0(u))$:

> $YY71 := subs(YY7, y1(u))$:

> $YY72 := subs(YY7, y2(u))$:

> $YY73 := subs(YY7, y3(u))$:

> $YY74 := subs(YY7, y4(u))$:

> $YY75 := subs(YY7, y5(u))$:

> $YY76 := subs(YY7, y6(u))$:

> $YY77 := subs(YY7, y7(u))$:

>

>

>

>

> $icsP := y0(\mathrm{u1}) = 0, y1(\mathrm{u1}) = 0, y2(\mathrm{u1}) = 0, y3(\mathrm{u1}) = 0, y4(\mathrm{u1}) = 0, y5(\mathrm{u1}) = 0, y6(\mathrm{u1}) = 0,$
$y7(\mathrm{u1}) = 0$:

> $YYP := dsolve(\{odesysP, icsP\}, fncs, type = numeric, output = listprocedure)$:

> $YYP0 := subs(YYP, y0(u))$:

> $YYP1 := subs(YYP, y1(u))$:

> $YYP2 := subs(YYP, y2(u))$:

> $YYP3 := subs(YYP, y3(u))$:

> $YYP4 := subs(YYP, y4(u))$:

> $YYP5 := subs(YYP, y5(u))$:

> $YYP6 := subs(YYP, y6(u))$:

> $YYP7 := subs(YYP, y7(u))$:

>

>

>

>

> $AA := \begin{bmatrix} \mathrm{YY10(u2)} & \mathrm{YY30(u2)} & \mathrm{YY60(u2)} & \mathrm{YY70(u2)} \\ \mathrm{YY12(u2)} & \mathrm{YY32(u2)} & \mathrm{YY62(u2)} & \mathrm{YY72(u2)} \\ \mathrm{YY14(u2)} & \mathrm{YY34(u2)} & \mathrm{YY64(u2)} & \mathrm{YY74(u2)} \\ \mathrm{YY15(u2)} & \mathrm{YY35(u2)} & \mathrm{YY65(u2)} & \mathrm{YY75(u2)} \end{bmatrix}$;

$AA := [[1.54954792099586, -3.75383265402463\ 10^{-16}, -5.42188056510705\ 10^{-17},$
$-2.11128146757517\ 10^{-17}],$
$[-3.44466613354428\ 10^{-15}, 3748.31826886297, 0.178749554229756,$
$0.0277924887891722],$
$[-4.68250780792546\ 10^{-13}, 1.85611475997401, 1.45530141086756, 0.705850801180261$
$],$
$[-1.08954767490097\ 10^{-12}, 4.17436020272641, 1.72261849494113, 1.19139974827384]]$

> $CP := \begin{bmatrix} \mathrm{YYP0(u2)} \\ \mathrm{YYP2(u2)} \\ \mathrm{YYP4(u2)} \\ \mathrm{YYP5(u2)} \end{bmatrix}$;

$$CP := \begin{bmatrix} -1.56181537457286\ 10^{-19} \\ 0.0000880161150629244 \\ 0.00627213950015681 \\ 0.0143967066515285 \end{bmatrix}$$

> $with(LinearAlgebra)$:

> $MatrixInverse(AA)$;

$[[0.645349515462112, 5.76816973004548\ 10^{-20}, 3.51525880583808\ 10^{-17}, -9.39142454719059\ 10^{-18}], [5.94439075565148\ 10^{-18}, 0.000266779243552145, -0.0000850332196571131, 0.0000441550429757287], [-2.63128606340345\ 10^{-13}, 0.000378638225889444, 2.30017151558908, -1.36275707022899], [9.70609953164252\ 10^{-13}, -0.00148219090239433, -3.32546908855971, 2.80957438431885]]$

> $\mathrm{CC} := \mathrm{MatrixVectorMultiply}(\mathit{MatrixInverse}(AA), \mathrm{CP});$

$$CC := \begin{bmatrix} -1.55102507554363\ 10^{-20} \\ 1.25827857667193\ 10^{-7} \\ -0.00519218383105569 \\ 0.0195906817430963 \end{bmatrix}$$

> $yy0 := \mathrm{YY10}\cdot\mathrm{CC}(1) + \mathrm{YY30}\cdot\mathrm{CC}(2) + \mathrm{YY60}\cdot\mathrm{CC}(3) + \mathrm{YY70}\cdot\mathrm{CC}(4) - YYP0;$

$yy0 := -1.55102507554363\ 10^{-20}\ YY10 + 1.25827857667193\ 10^{-7}\ YY30 - 0.00519218383105569\ YY60 + 0.0195906817430963\ YY70 - YYP0$

>

> $yy2 := \mathrm{YY12}\cdot\mathrm{CC}(1) + \mathrm{YY32}\cdot\mathrm{CC}(2) + \mathrm{YY62}\cdot\mathrm{CC}(3) + \mathrm{YY72}\cdot\mathrm{CC}(4) - YYP2;$

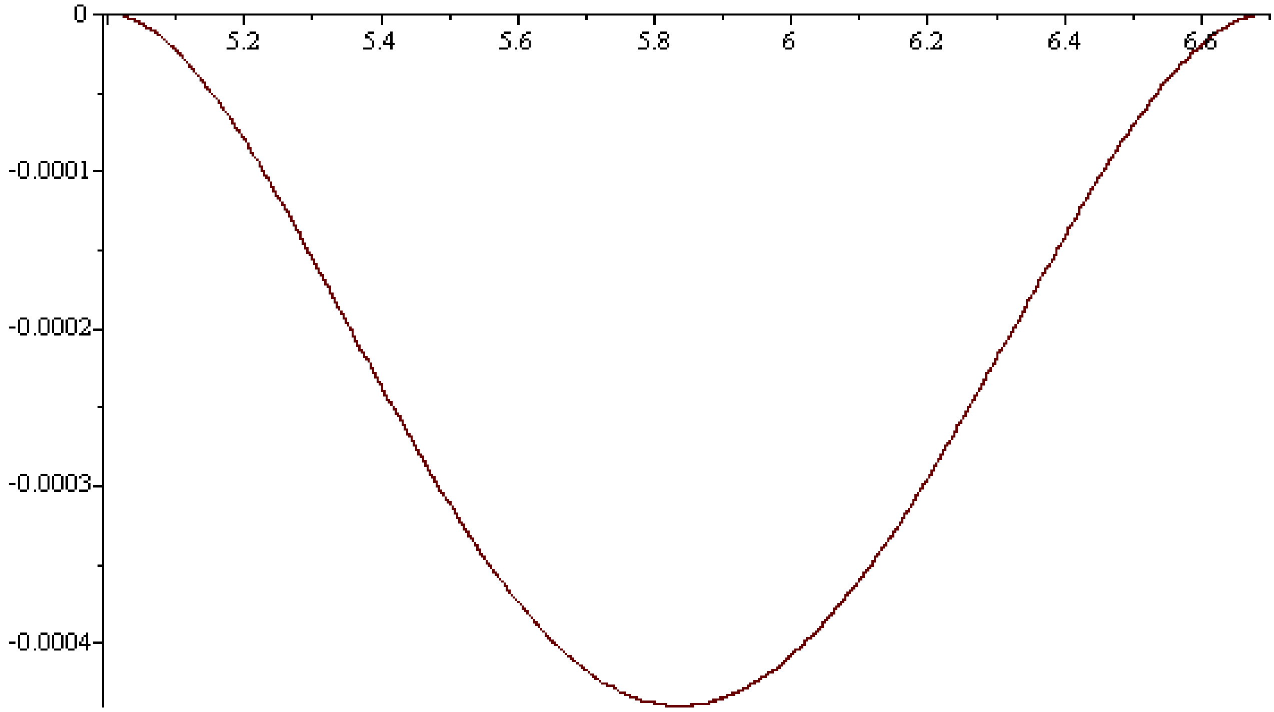
$yy2 := -1.55102507554363\ 10^{-20}\ YY12 + 1.25827857667193\ 10^{-7}\ YY32 - 0.00519218383105569\ YY62 + 0.0195906817430963\ YY72 - YYP2$

>

> $\mathrm{yy4} := + \mathrm{YY14}\cdot\mathrm{CC}(1) + \mathrm{YY34}\cdot\mathrm{CC}(2) + \mathrm{YY64}\cdot\mathrm{CC}(3) + \mathrm{YY74}\cdot\mathrm{CC}(4) - \mathrm{YYP4};$

$yy4 := -1.55102507554363\ 10^{-20}\ YY14 + 1.25827857667193\ 10^{-7}\ YY34 - 0.00519218383105569\ YY64 + 0.0195906817430963\ YY74 - YYP4$

> $plot(yy4, \mathrm{u1}\ ..\mathrm{u2});$



yy1 := + YY11·CC(1) + YY31·CC(2) + YY61·CC(3) + YY71·CC(4) − YYP1;

$$-1.55102507554363\ 10^{-20}\ YY11 + 1.25827857667193\ 10^{-7}\ YY31 - 0.00519218383105569\ YY61 + 0.0195906817430963\ YY71 - YYP1$$

yy7 := + YY17·CC(1) + YY37·CC(2) + YY67·CC(3) + YY77·CC(4) − YYP7;

$$-1.55102507554363\ 10^{-20}\ YY17 + 1.25827857667193\ 10^{-7}\ YY37 - 0.00519218383105569\ YY67 + 0.0195906817430963\ YY77 - YYP7$$

yy3 := + YY13·CC(1) + YY33·CC(2) + YY63·CC(3) + YY73·CC(4) − YYP3;

$$-1.55102507554363\ 10^{-20}\ YY13 + 1.25827857667193\ 10^{-7}\ YY33 - 0.00519218383105569\ YY63 + 0.0195906817430963\ YY73 - YYP3$$

yy5 := + YY15·CC(1) + YY35·CC(2) + YY65·CC(3) + YY75·CC(4) − YYP5;

$$-1.55102507554363\ 10^{-20}\ YY15 + 1.25827857667193\ 10^{-7}\ YY35 - 0.00519218383105569\ YY65 + 0.0195906817430963\ YY75 - YYP5$$

yy6 := + YY16·CC(1) + YY36·CC(2) + YY66·CC(3) + YY76·CC(4) − YYP6;

$$-1.55102507554363\ 10^{-20}\ YY16 + 1.25827857667193\ 10^{-7}\ YY36 - 0.00519218383105569\ YY66 + 0.0195906817430963\ YY76 - YYP6$$

>

>

>

Приложение 2

Листинг кода в ANSYS APDL

```
PREP7
ET,1,shell63
R,1,0.12,0.12,0.12,0.12, , ,
RMORE, , , ,
RMORE
RMORE, ,
!*
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,32500000000
MPDATA,PRXY,1,,0.17
*AFUN,DEG
*SET,R1,2
*SET,R2,4
*SET,c,0*3.14/180
*SET,phi,0
*DO,vv,1,91,1
k,vv,R1*cos(vv-1),R1*sin(vv-1),c*(vv-1)+R1*tan(phi)
k,vv+190,R2*cos(vv-1),R2*sin(vv-1),c*(vv-1)+R2*tan(phi)
*ENDDO
```

```
*DO,vv,1,91,1
l,vv,vv+190
*ENDDO
*DO,vv,1,91,1
l,vv,vv+190
*ENDDO
FLST,3,91,3
FITEM,3,1
FITEM,3,2
FITEM,3,3
FITEM,3,4
FITEM,3,5
FITEM,3,6
FITEM,3,7
FITEM,3,8
FITEM,3,9
FITEM,3,10
FITEM,3,11
FITEM,3,12
FITEM,3,13
FITEM,3,14
FITEM,3,15
FITEM,3,16
FITEM,3,17
FITEM,3,18
FITEM,3,19
FITEM,3,20
FITEM,3,21
```

FITEM,3,22

FITEM,3,23

FITEM,3,24

FITEM,3,25

FITEM,3,26

FITEM,3,27

FITEM,3,28

FITEM,3,29

FITEM,3,30

FITEM,3,31

FITEM,3,32

FITEM,3,33

FITEM,3,34

FITEM,3,35

FITEM,3,36

FITEM,3,37

FITEM,3,38

FITEM,3,39

FITEM,3,40

FITEM,3,41

FITEM,3,42

FITEM,3,43

FITEM,3,44

FITEM,3,45

FITEM,3,46

FITEM,3,47

FITEM,3,48

FITEM,3,49

FITEM,3,50

FITEM,3,51

FITEM,3,52

FITEM,3,53

FITEM,3,54

FITEM,3,55

FITEM,3,56

FITEM,3,57

FITEM,3,58

FITEM,3,59

FITEM,3,60

FITEM,3,61

FITEM,3,62

FITEM,3,63

FITEM,3,64

FITEM,3,65

FITEM,3,66

FITEM,3,67

FITEM,3,68

FITEM,3,69

FITEM,3,70

FITEM,3,71

FITEM,3,72

FITEM,3,73

FITEM,3,74

FITEM,3,75

FITEM,3,76

FITEM,3,77

FITEM,3,78

FITEM,3,79

FITEM,3,80

FITEM,3,81

FITEM,3,82

FITEM,3,83

FITEM,3,84

FITEM,3,85

FITEM,3,86

FITEM,3,87

FITEM,3,88

FITEM,3,89

FITEM,3,90

FITEM,3,91

BSPLIN, ,P51X

FLST,3,91,3

FITEM,3,191

FITEM,3,192

FITEM,3,193

FITEM,3,194

FITEM,3,195

FITEM,3,196

FITEM,3,197

FITEM,3,198

FITEM,3,199

FITEM,3,200

FITEM,3,201

FITEM,3,202

FITEM,3,203

FITEM,3,204

FITEM,3,205

FITEM,3,206

FITEM,3,207

FITEM,3,208

FITEM,3,209

FITEM,3,210

FITEM,3,211

FITEM,3,212

FITEM,3,213

FITEM,3,214

FITEM,3,215

FITEM,3,216

FITEM,3,217

FITEM,3,218

FITEM,3,219

FITEM,3,220

FITEM,3,221

FITEM,3,222

FITEM,3,223

FITEM,3,224

FITEM,3,225

FITEM,3,226

FITEM,3,227

FITEM,3,228

FITEM,3,229

FITEM,3,230

FITEM,3,231

FITEM,3,232

FITEM,3,233

FITEM,3,234

FITEM,3,235

FITEM,3,236

FITEM,3,237

FITEM,3,238

FITEM,3,239

FITEM,3,240

FITEM,3,241

FITEM,3,242

FITEM,3,243

FITEM,3,244

FITEM,3,245

FITEM,3,246

FITEM,3,247

FITEM,3,248

FITEM,3,249

FITEM,3,250

FITEM,3,251

FITEM,3,252

FITEM,3,253

FITEM,3,254

FITEM,3,255

FITEM,3,256

FITEM,3,257

FITEM,3,258

```
FITEM,3,259
FITEM,3,260
FITEM,3,261
FITEM,3,262
FITEM,3,263
FITEM,3,264
FITEM,3,265
FITEM,3,266
FITEM,3,267
FITEM,3,268
FITEM,3,269
FITEM,3,270
FITEM,3,271
FITEM,3,272
FITEM,3,273
FITEM,3,274
FITEM,3,275
FITEM,3,276
FITEM,3,277
FITEM,3,278
FITEM,3,279
FITEM,3,280
FITEM,3,281
BSPLIN, ,P51X
FLST,2,91,4
FITEM,2,1
FITEM,2,2
FITEM,2,3
```

FITEM,2,4

FITEM,2,5

FITEM,2,6

FITEM,2,7

FITEM,2,8

FITEM,2,9

FITEM,2,10

FITEM,2,11

FITEM,2,12

FITEM,2,13

FITEM,2,14

FITEM,2,15

FITEM,2,16

FITEM,2,17

FITEM,2,18

FITEM,2,19

FITEM,2,20

FITEM,2,21

FITEM,2,22

FITEM,2,23

FITEM,2,24

FITEM,2,25

FITEM,2,26

FITEM,2,27

FITEM,2,28

FITEM,2,29

FITEM,2,30

FITEM,2,31

FITEM,2,32

FITEM,2,33

FITEM,2,34

FITEM,2,35

FITEM,2,36

FITEM,2,37

FITEM,2,38

FITEM,2,39

FITEM,2,40

FITEM,2,41

FITEM,2,42

FITEM,2,43

FITEM,2,44

FITEM,2,45

FITEM,2,46

FITEM,2,47

FITEM,2,48

FITEM,2,49

FITEM,2,50

FITEM,2,51

FITEM,2,52

FITEM,2,53

FITEM,2,54

FITEM,2,55

FITEM,2,56

FITEM,2,57

FITEM,2,58

FITEM,2,59

FITEM,2,60

FITEM,2,61

FITEM,2,62

FITEM,2,63

FITEM,2,64

FITEM,2,65

FITEM,2,66

FITEM,2,67

FITEM,2,68

FITEM,2,69

FITEM,2,70

FITEM,2,71

FITEM,2,72

FITEM,2,73

FITEM,2,74

FITEM,2,75

FITEM,2,76

FITEM,2,77

FITEM,2,78

FITEM,2,79

FITEM,2,80

FITEM,2,81

FITEM,2,82

FITEM,2,83

FITEM,2,84

FITEM,2,85

FITEM,2,86

FITEM,2,87

```
FITEM,2,88
FITEM,2,89
FITEM,2,90
FITEM,2,91
ASKIN,P51X
FLST,2,1,5,ORDE,1
FITEM,2,1
AESIZE,P51X,0.05,
CM,_Y,AREA
ASEL, , , ,      1
CM,_Y1,AREA
CHKMSH,'AREA'
CMSEL,S,_Y
!*
MSHKEY,1
AMESH,_Y1
MSHKEY,0
!*
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
CMDELE,_Y2
!*
!*
ANTYPE,0
FLST,2,4,4,ORDE,3
FITEM,2,1
FITEM,2,91
FITEM,2,-93
```

```
!*
/GO
DL,P51X, ,ALL,
FLST,2,1,5,ORDE,1
FITEM,2,1
/GO
!*
SFA,P51X,1,PRES,-10000
FINISH
/SOL
! /STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
```

Приложение 3

$u1 := 5 : u2 := 6.708 : c := 0.1 : k := 0 : h := 0.02 : E0 := 200000 : \sigma := 0.3 : p := 0.01 : C1 := \frac{E0 \cdot h}{\left(1-\sigma^2\right)} : C2 := \frac{E0 \cdot h^3}{12 \cdot \left(1-\sigma^2\right)} : C3 := \frac{E0 \cdot h^3}{12 \cdot (1+\sigma)} :$

$z := p : y := 0 : x := 0 :$

$K10 := \frac{1}{u^2} :$

$K11 := -\frac{1}{u} :$

$K12 := 0 :$

$K13 := 0 :$

$K14 := \frac{k}{u^2} :$

$K15 := -\frac{k\,\sigma}{u} :$

$K1X := \frac{(\sigma-1)\ (1+\sigma)\ \left(k^2+1\right)}{E0\ h} :$

$K30 := 0 :$

$K31 := 0 :$

$K32 := \frac{1}{u^2} :$

$K33 := -\frac{1}{u} :$

$K34 := 0 :$

$K35 := \frac{2\,c}{\sqrt{k^2+1}\ u^2} :$

$K3Y := -\frac{2\ \left(k^2+1\right)\ (1+\sigma)}{E0\ h} :$

$K70 := -\frac{12\,k\,\left(k^2+1\right)}{u^2\,h^2} :$

$K71 := -\frac{12\,k\,\sigma\,\left(k^2+1\right)}{h^2\,u} :$

$K72 := \frac{12\,c\,\sqrt{k^2+1}\ (\sigma-1)}{h^2\,u^3} :$

$$K73 := -\frac{12\,c\,\sqrt{k^2+1}\,(\sigma-1)}{h^2\,u^2}:$$

$$K74 := \frac{24\left(\left(-\frac{1}{2}\,k^2-\frac{1}{2}\,k^4\right)u^2+c^2\,(\sigma-1)\right)}{h^2\,u^4}:$$

$$K75 := -\frac{1}{u^3}:$$

$$K76 := \frac{1}{u^2}:$$

$$K77 := -\frac{2}{u}:$$

$$K7Z := -\frac{12\,(\sigma-1)\,(1+\sigma)\,(k^2+1)^2}{E0\,h^3}:$$

$$ode0 := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\,y0(u) = y1(u):$$

$$ode1 := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\,y1(u) = K10\cdot y0(u) + K11\cdot y1(u) + K14\cdot y4(u) + K15\cdot y5(u):$$

$$ode1p := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\,y1(u) = K10\cdot y0(u) + K11\cdot y1(u) + K14\cdot y4(u) + K15\cdot y5(u) + K1X\cdot x:$$

$$ode1p := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\,y1(u) = K10\cdot y0(u) + K11\cdot y1(u) + K14\cdot y4(u) + K15\cdot y5(u) + K1X\cdot x:$$

$$ode2 := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\,y2(u) = y3(u):$$

$$ode3 := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\,y3(u) = K30\cdot y0(u) + K31\cdot y1(u) + K32\cdot y2(u) + K33\cdot y3(u) + K34\cdot y4(u) + K35 \cdot y5(u):$$

$$ode4 := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\,y4(u) = y5(u):$$

$$ode5 := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\,y5(u) = y6(u):$$

$$ode6 := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\,y6(u) = y7(u):$$

$$ode7 := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\,y7(u) = K70\cdot y0(u) + K71\cdot y1(u) + K72\cdot y2(u) + K73\cdot y3(u) + K74\cdot y4(u) + K75 \cdot y5(u) + K76\cdot y6(u) + K77\cdot y7(u):$$

$$ode7p := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\,y7(u) = K70\cdot y0(u) + K71\cdot y1(u) + K72\cdot y2(u) + K73\cdot y3(u) + K74\cdot y4(u) + K75 \cdot y5(u) + K76\cdot y6(u) + K77\cdot y7(u) + K7Z\cdot z:$$

$odesys := ode0, ode1, ode2, ode3, ode4, ode5, ode6, ode7 :$

$$ode7p := \frac{d}{d\,u}\, y7(u) = K70 \cdot y0(u) + K71 \cdot y1(u) + K72 \cdot y2(u) + K73 \cdot y3(u) + K74 \cdot y4(u) + K75 \cdot y5(u) + K76 \cdot y6(u) + K77 \cdot y7(u) + K7Z \cdot z :$$

$odesysN := ode0, ode1p, ode2, ode3, ode4, ode5, ode6, ode7p :$

$u1 := 5 : u2 := 6.708 :$

$$odesys := \frac{d}{du}\, y0(u) = y1(u),\ \frac{d}{du}\, y1(u) = \frac{y0(u)}{u^2} - \frac{y1(u)}{u},\ \frac{d}{du}\, y2(u) = y3(u),\ \frac{d}{du}\, y3(u) = \frac{y2(u)}{u^2} - \frac{y3(u)}{u} + \frac{0.2\, y5(u)}{u^2},\ \frac{d}{du}\, y4(u) = y5(u),\ \frac{d}{du}\, y5(u) = y6(u),\ \frac{d}{du}\, y6(u) = y7(u),\ \frac{d}{du}\, y7(u) = -\frac{2100.000000\, y2(u)}{u^3} + \frac{2100.000000\, y3(u)}{u^2} - \frac{420.0000000\, y4(u)}{u^4} - \frac{y5(u)}{u^3} + \frac{y6(u)}{u^2} - \frac{2\, y7(u)}{u} :$$

$ics1 := y0(u1) = 0, y1(u1) = 1, y2(u1) = 0, y3(u1) = 0, y4(u1) = 0, y5(u1) = 0, y6(u1) = 0, y7(u1) = 0 :$

$fncs := \{y0(u), y1(u), y2(u), y3(u), y4(u), y5(u), y6(u), y7(u)\} :$

$YY1 := dsolve(\{odesys, ics1\}, fncs, type = numeric, output = listprocedure) :$

$YY10 := subs(YY1, y0(u)) :$

$YY11 := subs(YY1, y1(u)) :$

$YY12 := subs(YY1, y2(u)) :$

$YY13 := subs(YY1, y3(u)) :$

$YY14 := subs(YY1, y4(u)) :$

$YY15 := subs(YY1, y5(u)) :$

$YY16 := subs(YY1, y6(u)) :$

$YY17 := subs(YY1, y7(u)) :$

$ics3 := y0(u1) = 0, y1(u1) = 0, y2(u1) = 0, y3(u1) = 1, y4(u1) = 0, y5(u1) = 0, y6(u1) = 0, y7(u1) = 0 :$

```
0 :
fncs := {y0(u), y1(u), y2(u), y3(u), y4(u), y5(u), y6(u), y7(u)} :
YY1 := dsolve({odesys, ics1}, fncs, type=numeric, output=listprocedure) :
YY10 := subs(YY1, y0(u)) :
YY11 := subs(YY1, y1(u)) :
YY12 := subs(YY1, y2(u)) :
YY13 := subs(YY1, y3(u)) :
YY14 := subs(YY1, y4(u)) :
YY15 := subs(YY1, y5(u)) :
YY16 := subs(YY1, y6(u)) :
YY17 := subs(YY1, y7(u)) :

ics3 := y0(u1) = 0, y1(u1) = 0, y2(u1) = 0, y3(u1) = 1, y4(u1) = 0, y5(u1) = 0, y6(u1) = 0, y7(u1)
    = 0 :
YY3 := dsolve({odesys, ics3}, fncs, type=numeric, output=listprocedure) :
YY30 := subs(YY3, y0(u)) :
YY31 := subs(YY3, y1(u)) :
YY32 := subs(YY3, y2(u)) :
YY33 := subs(YY3, y3(u)) :
YY34 := subs(YY3, y4(u)) :
YY35 := subs(YY3, y5(u)) :
YY36 := subs(YY3, y6(u)) :
YY37 := subs(YY3, y7(u)) :
YY3(u2) :
ics6 := y0(u1) = 0, y1(u1) = 0, y2(u1) = 0, y3(u1) = 0, y4(u1) = 0, y5(u1) = 0, y6(u1) = 1, y7(u1)
    = 0 :
YY6 := dsolve({odesys, ics6}, fncs, type=numeric, output=listprocedure) :
YY60 := subs(YY6, y0(u)) :
YY61 := subs(YY6, y1(u)) :
YY62 := subs(YY6, y2(u)) :
YY63 := subs(YY6, y3(u)) :
YY64 := subs(YY6, y4(u)) :
YY65 := subs(YY6, y5(u)) :
YY66 := subs(YY6, y6(u)) :
YY67 := subs(YY6, y7(u)) :
YY6(u2) :
ics7 := y0(u1) = 0, y1(u1) = 0, y2(u1) = 0, y3(u1) = 0, y4(u1) = 0, y5(u1) = 0, y6(u1) = 0, y7(u1)
    = 1 :
YY7 := dsolve({odesys, ics7}, fncs, type=numeric, output=listprocedure) :
YY70 := subs(YY7, y0(u)) :
YY71 := subs(YY7, y1(u)) :
```

```
YY72 := subs(YY7, y2(u)) :
YY73 := subs(YY7, y3(u)) :
YY74 := subs(YY7, y4(u)) :
YY75 := subs(YY7, y5(u)) :
YY76 := subs(YY7, y6(u)) :
YY77 := subs(YY7, y7(u)) :
YY7(u2) :
```

решение с *нагрузкой*

решение с нагрузкой **(1)**

$$odesysP := \frac{d}{du}\, y0(u) = y1(u),\ \frac{d}{du}\, y1(u) = \frac{y0(u)}{u^2} - \frac{y1(u)}{u},\ \frac{d}{du}\, y2(u) = y3(u),\ \frac{d}{du}\, y3(u) = \frac{y2(u)}{u^2} - \frac{y3(u)}{u} + \frac{0.2\, y5(u)}{u^2},\ \frac{d}{du}\, y4(u) = y5(u),\ \frac{d}{du}\, y5(u) = y6(u),\ \frac{d}{du}\, y6(u) = y7(u),\ \frac{d}{du}\, y7(u) = 0.06825000000 - \frac{2100.000000\, y2(u)}{u^3} + \frac{2100.000000\, y3(u)}{u^2} - \frac{420.0000000\, y4(u)}{u^4} - \frac{y5(u)}{u^3} + \frac{y6(u)}{u^2} - \frac{2\, y7(u)}{u} :$$

$icsP := y0(\mathrm{u1}) = 0, y1(\mathrm{u1}) = 0, y2(\mathrm{u1}) = 0, y3(\mathrm{u1}) = 0, y4(\mathrm{u1}) = 0, y5(\mathrm{u1}) = 0, y6(\mathrm{u1}) = 0, y7(\mathrm{u1}) = 0 :$

$YYP := dsolve(\{odesysP, icsP\}, fncs, type = numeric, output = listprocedure) :$

$YYP0 := subs(YYP, y0(u)) :$

$YYP1 := subs(YYP, y1(u)) :$

$YYP2 := subs(YYP, y2(u)) :$

$YYP3 := subs(YYP, y3(u)) :$

$YYP4 := subs(YYP, y4(u)) :$

$YYP5 := subs(YYP, y5(u)) :$

$YYP6 := subs(YYP, y6(u)) :$

$YYP7 := subs(YYP, y7(u)) :$

$YYP(\mathrm{u2}) :$

$$AA := \begin{bmatrix} \mathrm{YY10(u2)} & \mathrm{YY30(u2)} & \mathrm{YY60(u2)} & \mathrm{YY70(u2)} \\ \mathrm{YY12(u2)} & \mathrm{YY32(u2)} & \mathrm{YY62(u2)} & \mathrm{YY72(u2)} \\ \mathrm{YY14(u2)} & \mathrm{YY34(u2)} & \mathrm{YY64(u2)} & \mathrm{YY74(u2)} \\ \mathrm{YY15(u2)} & \mathrm{YY35(u2)} & \mathrm{YY65(u2)} & \mathrm{YY75(u2)} \end{bmatrix} :$$

$$CP := \begin{bmatrix} \mathrm{YYP0(u2)} \\ \mathrm{YYP2(u2)} \\ \mathrm{YYP4(u2)} \\ \mathrm{YYP5(u2)} \end{bmatrix} :$$

$with(LinearAlgebra) :$

$MatrixInverse(AA);$

[[0.670891827081838, 0., 0., 0.], **(2)**
[0., 0.668028383619778, -0.00336327820424459, 0.00108009849582351],
[0., 8.96578294922853, 2.23463387576989, -1.34274926467723],
[0., -37.8151279313812, -3.09333770774321, 2.72595398492755]]

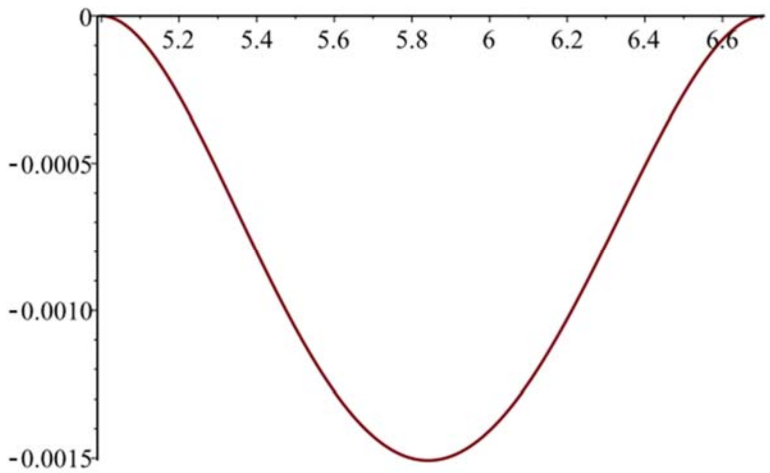
$CC := \mathrm{MatrixVectorMultiply}(\mathit{MatrixInverse}(AA), CP);$

$$\begin{bmatrix} 0. \\ 0.00000630345776281686 \\ -0.0176098862385151 \\ 0.0661145024060626 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$yy0 := YY10 \cdot CC(1) + YY30 \cdot CC(2) + YY60 \cdot CC(3) + YY70 \cdot CC(4) - YYP0:$

$yy2 := YY12 \cdot CC(1) + YY32 \cdot CC(2) + YY62 \cdot CC(3) + YY72 \cdot CC(4) - YYP2:$

$yy4 := + YY14 \cdot CC(1) + YY34 \cdot CC(2) + YY64 \cdot CC(3) + YY74 \cdot CC(4) - YYP4:$
$plot(yy4, u1 ..u2);$



$yy1 := + YY11 \cdot CC(1) + YY31 \cdot CC(2) + YY61 \cdot CC(3) + YY71 \cdot CC(4) - YYP1:$

Приложение 4

Листинг программы расчета прямого геликоида по модифицированной методике В.Г. Рекача

Модуль Юнга $E := 20000000 \; \frac{т}{м2}$ Нагрузка $Q := -1$ т

Толщина оболочки $h := 0.02$ м $r := 5$ $R := 6.7$

Шаг винта $H0 := 0.314$ м Коэффициент Пуассона $\sigma := 0.3$

$$wh := \frac{h^2}{6}$$

Цилиндрическая жесткость облочки $D0 := \frac{E \cdot h^3}{12(1-\sigma^2)}$ $D0 = 14.652$ $P := \sqrt{\frac{E \cdot h \cdot H0^2}{\pi^2 \cdot D0}}$

$$q(m) := \frac{-8}{27} \cdot m^6 + \frac{12}{27} \cdot m^4 + \frac{12}{27} \cdot m^2 - \frac{8}{27} - \frac{m^2 \cdot P^2}{16} \qquad p(m) := \frac{4}{9}(m^4 - m^2 + 1)$$

$$D(m) := -p(m)^3 + q(m)^2 \qquad a(m) := \sqrt[3]{-q(m) + \sqrt{D(m)}} \qquad b(m) := \sqrt[3]{-q(m) - \sqrt{D(m)}} \qquad Z(m) := a(m) + b(m)$$

$$y(m) := Z(m) + \frac{2 - m^2}{3} \qquad A1(m) := \sqrt{8 \cdot (y(m) + m^2)} \qquad A2(m) := -\sqrt{8 \cdot (y(m) + m^2)}$$

$$\alpha 1(m) := 1 - \frac{A1(m)}{4} + \frac{\sqrt{\left(\frac{A1(m) - 4}{2}\right)^2 - 4\,y(m) + \frac{16 \cdot y(m) + 16m^2 + 4 \cdot m \cdot P}{A1(m)}}}{2}$$

$$\alpha 5(m) := 1 - \frac{A1(m)}{4} + \frac{\sqrt{\left(\frac{A1(m) - 4}{2}\right)^2 - 4\,y(m) + \frac{16 \cdot y(m) + 16m^2 - 4 \cdot m \cdot P}{A1(m)}}}{2}$$

$$\alpha 2(m) := 1 - \frac{A1(m)}{4} - \frac{\sqrt{\left(\frac{A1(m) - 4}{2}\right)^2 - 4\,y(m) + \frac{16 \cdot y(m) + 16m^2 + 4 \cdot m \cdot P}{A1(m)}}}{2}$$

$$\alpha 6(m) := 1 - \frac{A1(m)}{4} - \frac{\sqrt{\left(\frac{A1(m) - 4}{2}\right)^2 - 4\,y(m) + \frac{16 \cdot y(m) + 16m^2 - 4 \cdot m \cdot P}{A1(m)}}}{2}$$

$$\alpha 3(m) := 1 - \frac{A2(m)}{4} + \frac{\sqrt{\left(\frac{A2(m) - 4}{2}\right)^2 - 4\,y(m) + \frac{16 \cdot y(m) + 16m^2 + 4 \cdot m \cdot P}{A2(m)}}}{2}$$

$$\alpha 7(m) := 1 - \frac{A2(m)}{4} + \frac{\sqrt{\left(\frac{A2(m) - 4}{2}\right)^2 - 4\,y(m) + \frac{16 \cdot y(m) + 16m^2 - 4 \cdot m \cdot P}{A2(m)}}}{2}$$

$$\alpha 4(m) := 1 - \frac{A2(m)}{4} - \frac{\sqrt{\left(\frac{A2(m) - 4}{2}\right)^2 - 4\,y(m) + \frac{16 \cdot y(m) + 16m^2 + 4 \cdot m \cdot P}{A2(m)}}}{2}$$

$$\alpha 8(m) := 1 - \frac{A2(m)}{4} - \frac{\sqrt{\left(\frac{A2(m) - 4}{2}\right)^2 - 4\,y(m) + \frac{16 \cdot y(m) + 16m^2 - 4 \cdot m \cdot P}{A2(m)}}}{2}$$

$ORIGIN := 1$

$$\alpha(m) := \begin{pmatrix} \alpha1(m) \\ \alpha2(m) \\ \alpha3(m) \\ \alpha4(m) \\ \alpha5(m) \\ \alpha6(m) \\ \alpha7(m) \\ \alpha8(m) \end{pmatrix} \qquad A0(m,\gamma) := \frac{1}{m\left[\left(\gamma^4 - 20\cdot\gamma^2 + 64\right)^2 - 9\cdot p^2\cdot\gamma^2\right]}$$

$$\beta uz(m,\alpha) := \left[(\alpha-2)^2 - m^2\right]\cdot\left(\alpha^2 - m^2\right) \qquad \beta duz(m,\alpha) := \alpha\cdot\beta uz(m,\alpha) \qquad \mu(m) := \sqrt{1-m^2}$$

$$\beta u(m,\alpha) := \frac{\left[(1-\sigma)\cdot\left(\alpha^2 - m^2\right)\cdot(\alpha-2) - 2\cdot(1+\sigma)\cdot(\alpha-1)\cdot m^2\right]\cdot m\cdot(\alpha-1) - m\cdot\beta uz(m,\alpha)}{(\alpha-1)^2 - \mu(m)^2}$$

$$\beta v(m,\alpha) := \frac{\left[(1-\sigma)\cdot\left(\alpha^2 - m^2\right) + 2\cdot(1+\sigma)\cdot(\alpha-1)\cdot\alpha\right]\cdot m^2\cdot(\alpha-1) + \alpha\cdot\beta uz(m,\alpha)}{(\alpha-1)^2 - \mu(m)^2} \qquad \beta Nv(m,\alpha) := m\cdot\alpha\cdot(\alpha-1)^2$$

$$\beta Mu(m,\alpha) := \left[\alpha\cdot(\alpha-1) + \sigma\cdot\left(\alpha - m^2\right)\right]\cdot\beta uz(m,\alpha) \qquad \beta Mv(m,\alpha) := \left[\sigma\cdot\alpha\cdot(\alpha-1) + \left(\alpha - m^2\right)\right]\cdot\beta uz(m,\alpha) \qquad \beta S(m,\alpha) := m^2\cdot(\alpha-1)^2$$

$$\beta Qu(m,\alpha) := (\alpha-2)\cdot\left(\alpha^2 - m^2\right)\cdot\beta uz(m,\alpha) \qquad \beta Qv(m,\alpha) := m\cdot\left(\alpha^2 - m^2\right)\cdot\beta uz(m,\alpha) \qquad \beta H(m,\alpha) := m\cdot(\alpha-1)\cdot\beta uz(m,\alpha)$$

$$\beta\varepsilon u(m,\alpha) := \beta Nu(m,\alpha) - \sigma\cdot\beta Nv(m,\alpha) \qquad \beta\varepsilon v(m,\alpha) := \beta Nv(m,\alpha) - \sigma\cdot\beta Nu(m,\alpha) \qquad \beta\varepsilon uv(m,\alpha) := m^2\cdot(\alpha-1)^2$$

$$\beta\varepsilon u1(m,\alpha) := (\alpha-1)\cdot\beta u(m,\alpha) \qquad \beta\varepsilon v1(m,\alpha) := \beta u(m,\alpha) + m\cdot\beta v(m,\alpha) \qquad \beta\varepsilon uv1(m,\alpha) := -m\cdot\beta u(m,\alpha) + (\alpha-2)\cdot\beta v(m,\alpha) - \beta uz(m,\alpha)$$

$$CM := \frac{4\cdot Q}{\pi} \qquad Cuz := \frac{CM}{D0} \qquad CN := \frac{E\cdot h\cdot H0}{\pi}\cdot Cuz \qquad Cu := Cuz\cdot\frac{H0}{\pi}$$

$$CH := CM\cdot(1-\sigma) \qquad C\varepsilon := \frac{H0}{\pi}\cdot Cuz$$

$$C := \frac{E\cdot h}{1-\sigma^2} \qquad C\gamma := C\varepsilon\cdot 2\cdot(1+\sigma)$$

$$\beta f(m,\alpha) := \begin{pmatrix} \beta u(m,\alpha) & \beta v(m,\alpha) & \beta uz(m,\alpha) \\ \beta Nu(m,\alpha) & \beta Nv(m,\alpha) & \beta S(m,\alpha) \\ \beta Mu(m,\alpha) & \beta Mv(m,\alpha) & \beta H(m,\alpha) \\ \beta Qu(m,\alpha) & \beta Qv(m,\alpha) & \beta duz(m,\alpha) \\ \beta\varepsilon u(m,\alpha) & \beta\varepsilon v(m,\alpha) & \beta\varepsilon uv(m,\alpha) \\ \beta\varepsilon u1(m,\alpha) & \beta\varepsilon v1(m,\alpha) & \beta\varepsilon uv1(m,\alpha) \end{pmatrix} \qquad fv(m,v) := \begin{pmatrix} \sin(m\cdot v) \\ \cos(m\cdot v) \end{pmatrix} \qquad Fu(\eta,\alpha,\omega) := \omega\cdot\eta^{\alpha}$$

$$F(u,\alpha,\omega) := u^{\alpha}\cdot\omega$$

Определение констант из граничных условий $M := 21$ - число членов ряда

$kc := 1.001$ $m := 1..M$ $\gamma_m := \dfrac{2m-1}{kc}$ - получаем нечетные члены ряда

$j := 1..8$ - № столбца $mc_m := 2\cdot m - 1$

$$\omega1_{j,m} := \beta uz\left(\gamma_m, \alpha(\gamma_m)_j\right) \qquad \omega2_{j,m} := \beta uz\left(\gamma_m, \alpha(\gamma_m)_j\right)\cdot\alpha(\gamma_m)_j \qquad \omega3_{j,m} := \beta u\left(\gamma_m, \alpha(\gamma_m)_j\right)$$

$$\omega4_{j,m} := \beta v\left(\gamma_m, \alpha(\gamma_m)_j\right)$$

$D1_{j,m} := F\left(r, \alpha(\gamma_m)_j, \omega 1_{j,m}\right)$ $\quad D2_{j,m} := F\left(R, \alpha(\gamma_m)_j, \omega 1_{j,m}\right)$ $\quad D3_{j,m} := F\left(r, \alpha(\gamma_m)_j, \omega 2_{j,m}\right)$

$D4_{j,m} := F\left(R, \alpha(\gamma_m)_j, \omega 2_{j,m}\right)$ $\quad D5_{j,m} := F\left(r, \alpha(\gamma_m)_j, \omega 3_{j,m}\right)$ $\quad D6_{j,m} := F\left(R, \alpha(\gamma_m)_j, \omega 3_{j,m}\right)$

$D7_{j,m} := F\left(r, \alpha(\gamma_m)_j, \omega 4_{j,m}\right)$ $\quad D8_{j,m} := F\left(R, \alpha(\gamma_m)_j, \omega 4_{j,m}\right)$

i - № строки

$$Dm(i,j,m) := \left[D1_{j,m}\cdot(i=1) + D2_{j,m}\cdot(i=2) + D3_{j,m}\cdot(i=3) + D4_{j,m}\cdot(i=4)\right]\cdot 1 + 1\cdot\left[D5_{j,m}\cdot(i=5) + D6_{j,m}\cdot(i=6) + D7_{j,m}\cdot(i=7) + D8_{j,m}\cdot(i=8)\right]$$

$$SD_m := \begin{pmatrix} Dm(1,1,m) & Dm(1,2,m) & Dm(1,3,m) & Dm(1,4,m) & Dm(1,5,m) & Dm(1,6,m) & Dm(1,7,m) & Dm(1,8,m) \\ Dm(2,1,m) & Dm(2,2,m) & Dm(2,3,m) & Dm(2,4,m) & Dm(2,5,m) & Dm(2,6,m) & Dm(2,7,m) & Dm(2,8,m) \\ Dm(3,1,m) & Dm(3,2,m) & Dm(3,3,m) & Dm(3,4,m) & Dm(3,5,m) & Dm(3,6,m) & Dm(3,7,m) & Dm(3,8,m) \\ Dm(4,1,m) & Dm(4,2,m) & Dm(4,3,m) & Dm(4,4,m) & Dm(4,5,m) & Dm(4,6,m) & Dm(4,7,m) & Dm(4,8,m) \\ Dm(5,1,m) & Dm(5,2,m) & Dm(5,3,m) & Dm(5,4,m) & Dm(5,5,m) & Dm(5,6,m) & Dm(5,7,m) & Dm(5,8,m) \\ Dm(6,1,m) & Dm(6,2,m) & Dm(6,3,m) & Dm(6,4,m) & Dm(6,5,m) & Dm(6,6,m) & Dm(6,7,m) & Dm(6,8,m) \\ Dm(7,1,m) & Dm(7,2,m) & Dm(7,3,m) & Dm(7,4,m) & Dm(7,5,m) & Dm(7,6,m) & Dm(7,7,m) & Dm(7,8,m) \\ Dm(8,1,m) & Dm(8,2,m) & Dm(8,3,m) & Dm(8,4,m) & Dm(8,5,m) & Dm(8,6,m) & Dm(8,7,m) & Dm(8,8,m) \end{pmatrix}$$

$$RD_m := -\begin{pmatrix} \beta uz(\gamma_m,4)\cdot r^4 \\ \beta uz(\gamma_m,4)\cdot R^4 \\ 4\,\beta uz(\gamma_m,4)\cdot r^4 \\ 4\,\beta uz(\gamma_m,4)\cdot R^4 \\ \beta u(\gamma_m,4)\cdot r^4 \\ \beta u(\gamma_m,4)\cdot R^4 \\ \beta v(\gamma_m,4)\cdot r^4 \\ \beta v(\gamma_m,4)\cdot R^4 \end{pmatrix}\cdot A0(mc_m,\gamma_m)$$

$$AD_m := (SD_m)^{-1}\cdot RD_m$$

$$Ff(\eta,v,m,k1,k2,p) := \left[\sum_{j=1}^{8}\left[(AD_m)_j\cdot Fu\left(\eta,\alpha(\gamma_m)_j,\beta f\left(\gamma_m,\alpha(\gamma_m)_j\right)_{k1,k2}\right)\right] + A0(mc_m,\gamma_m)\cdot\beta f(\gamma_m,4)_{k1,k2}\,\eta^4\right]\cdot fv(mc_m,v)_p$$

$$FU(\eta,v,m1,m2,k1,k2,p) := \mathrm{Re}\left(\sum_{i=m1}^{m2} Ff(\eta,v,i,k1,k2,p)\right)$$

$uu(\eta,v,m1,m2) := \dfrac{Cu}{\eta}\cdot FU(\eta,v,m1,m2,1,1,2)$ $\quad uv(\eta,v,m1,m2) := \dfrac{Cu}{\eta}\cdot FU(\eta,v,m1,m2,1,2,1)$ $\quad uz(\eta,v,m1,m2) := Cuz\cdot FU(\eta,v,m1,m2,1,3,1)$

$Nu(\eta,v,m1,m2) := \frac{CN}{\eta^2}\cdot FU(\eta,v,m1,m2,2,1,2)$ $Nv(\eta,v,m1,m2) := \frac{CN}{\eta^2}\cdot FU(\eta,v,m1,m2,2,2,2)$ $S(\eta,v,m1,m2) := \frac{CN}{\eta^2}\cdot FU(\eta,v,m1,m2,2,3,1)$

$Mu(\eta,v,m1,m2) := \frac{CM}{\eta^2}\cdot FU(\eta,v,m1,m2,3,1,1)$ $Mv(\eta,v,m1,m2) := \frac{CM}{\eta^2}\cdot FU(\eta,v,m1,m2,3,2,1)$ $H(\eta,v,m1,m2) := \frac{CH}{\eta^2}\cdot FU(\eta,v,m1,m2,3,3,2)$

$Qu(\eta,v,m1,m2) := \frac{CM}{\eta^3}\cdot FU(\eta,v,m1,m2,4,1,1)$ $Qv(\eta,v,m1,m2) := \frac{CM}{\eta^3}\cdot FU(\eta,v,m1,m2,4,2,2)$ $duz(\eta,v,m1,m2) := \frac{Cuz}{\eta}\cdot FU(\eta,v,m1,m2,4,3,1)\cdot r$

$\sigma Mu(u,v,m1,m2) := \frac{Mu(u,v,m1,m2)}{wh}$ $\sigma Mv(u,v,m1,m2) := \frac{Mv(u,v,m1,m2)}{wh}$ $\tau H(u,v,m1,m2) := \frac{H(u,v,m1,m2)}{wh}$

$\sigma Nu(u,v,m1,m2) := \frac{Nu(u,v,m1,m2)}{h}$ $\sigma Nv(u,v,m1,m2) := \frac{Nv(u,v,m1,m2)}{h}$ $\tau S(u,v,m1,m2) := \frac{S(u,v,m1,m2)}{h}$

$\varepsilon u(\eta,v,m1,m2) := \frac{C\varepsilon}{\eta^2}\cdot FU(\eta,v,m1,m2,5,1,2)$ $\varepsilon v(\eta,v,m1,m2) := \frac{C\varepsilon}{\eta^2}\cdot FU(\eta,v,m1,m2,5,2,2)$ $\varepsilon uv(\eta,v,m1,m2) := \frac{C\gamma}{\eta^2}\cdot FU(\eta,v,m1,m2,5,3,1)$

$\varepsilon u1(\eta,v,m1,m2) := \frac{C\varepsilon}{\eta^2}\cdot FU(\eta,v,m1,m2,6,1,2)$ $\varepsilon v1(\eta,v,m1,m2) := \frac{C\varepsilon}{\eta^2}\cdot FU(\eta,v,m1,m2,6,2,2)$ $\varepsilon uv1(\eta,v,m1,m2) := \frac{C\varepsilon}{\eta^2}\cdot FU(\eta,v,m1,m2,6,3,1)$

$Nu1(\eta,v,m1,m2) := C\cdot(\varepsilon u1(\eta,v,m1,m2) + \sigma\cdot\varepsilon v1(\eta,v,m1,m2))$

$S1(\eta,v,m1,m2) := \frac{E\cdot h}{2\cdot(1+\sigma)}\cdot\varepsilon uv1(\eta,v,m1,m2)$

$Nv1(\eta,v,m1,m2) := C\cdot(\sigma\cdot\varepsilon u1(\eta,v,m1,m2) + \varepsilon v1(\eta,v,m1,m2))$

m1, m2 - позволяет проверить влияние одного или суммы любых членов ряда

$M := 21$ $uc := \frac{r+R}{2}$ $vc := \frac{\pi}{2}$

$uz(uc,vc,1,1) = 0.00188$ $uz(uc,vc,2,2) = -0.00061$ $uz(uc,vc,2,M) = -0.0004$ $uz(uc,vc,1,M) = 0.00148$

$N := 10$ $du := \frac{R-r}{N}$ $u := r, r+du..R+0.1du$ $dv := \frac{\pi}{N}$ $v := 0, dv..\pi+.1\cdot dv$

u =	uz(u,vc,1,M)	duz(u,vc,1,M)	Mu(u,vc,1,M)	Mv(u,vc,1,M)	H(u,0,1,M) =	Qu(u,vc,1,M)	Qv(u,0,1,M)
5	-0	-0	0.25671	0.077013	0	-0.92021	0.55743
5.17	0.000202	0.01049	0.113348	0.039323	0.038622	-0.72021	0.14075
5.34	0.000631	0.01367	0.006201	0.008509	0.043928	-0.52959	-0.09607
5.51	0.001073	0.01163	-0.067171	-0.014747	0.033561	-0.34594	-0.23173
5.68	0.001384	0.0063	-0.108729	-0.029909	0.015983	-0.1683	-0.30012
5.85	0.001484	-0.00051	-0.120163	-0.036539	-0.00377	0.00396	-0.31673
6.02	0.001352	-0.00707	-0.102962	-0.034285	-0.022035	0.17132	-0.28776
6.19	0.001024	-0.0118	-0.058442	-0.022862	-0.035522	0.33426	-0.21307
6.36	0.000588	-0.01316	0.012241	-0.002036	-0.040515	0.49328	-0.08607
6.53	0.000184	-0.00969	0.108106	0.028386	-0.031719	0.64916	0.10894
6.7	-0	-0	0.228468	0.068541	0	0.80341	0.40359

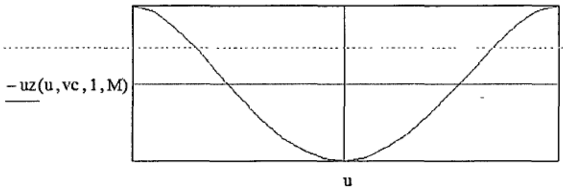
u =	Nu(u,0,1,M)	Nv(u,0,1,M)	S(u,vc,1,M)	uu(u,0,1,M) =	uv(u,vc,1,M)	εu(u,0,1,M)	εv(u,0,1,M) =	εuv(u,vc,1,M)
5	-0.43344	-0.13003	-0.4772	$-6.95\cdot10^{-10}$	$6.96\cdot10^{-10}$	$-9.86\cdot10^{-7}$	$-2.7\cdot10^{-15}$	$-3.1\cdot10^{-6}$
5.17	-0.35572	-0.28661	-0.44636	$-1.41\cdot10^{-7}$	$-4.71\cdot10^{-7}$	$-6.74\cdot10^{-7}$	$-4.5\cdot10^{-7}$	$-2.9\cdot10^{-6}$
5.34	-0.27439	-0.35197	-0.4184	$-2.34\cdot10^{-7}$	$-7.2\cdot10^{-7}$	$-4.22\cdot10^{-7}$	$-6.74\cdot10^{-7}$	$-2.72\cdot10^{-6}$
5.51	-0.18559	-0.30794	-0.39299	$-2.88\cdot10^{-7}$	$-6.97\cdot10^{-7}$	$-2.33\cdot10^{-7}$	$-6.31\cdot10^{-7}$	$-2.55\cdot10^{-6}$
5.68	-0.09088	-0.18751	-0.36982	$-3.15\cdot10^{-7}$	$-4.62\cdot10^{-7}$	$-8.66\cdot10^{-8}$	$-4.01\cdot10^{-7}$	$-2.4\cdot10^{-6}$
5.85	0.00477	-0.03694	-0.34864	$-3.19\cdot10^{-7}$	$-1.25\cdot10^{-7}$	$3.96\cdot10^{-8}$	$-9.59\cdot10^{-8}$	$-2.27\cdot10^{-6}$
6.02	0.0952	0.09986	-0.32924	$-3.02\cdot10^{-7}$	$1.96\cdot10^{-7}$	$1.63\cdot10^{-7}$	$1.78\cdot10^{-7}$	$-2.14\cdot10^{-6}$
6.19	0.1747	0.18919	-0.31141	$-2.63\cdot10^{-7}$	$3.99\cdot10^{-7}$	$2.95\cdot10^{-7}$	$3.42\cdot10^{-7}$	$-2.02\cdot10^{-6}$
6.36	0.23927	0.21246	-0.29499	$-2.01\cdot10^{-7}$	$4.26\cdot10^{-7}$	$4.39\cdot10^{-7}$	$3.52\cdot10^{-7}$	$-1.92\cdot10^{-6}$
6.53	0.28754	0.17123	-0.27981	$-1.13\cdot10^{-7}$	$2.73\cdot10^{-7}$	$5.9\cdot10^{-7}$	$2.12\cdot10^{-7}$	$-1.82\cdot10^{-6}$
6.7	0.32118	0.09636	-0.26576	$-6.95\cdot10^{-10}$	$6.96\cdot10^{-10}$	$7.31\cdot10^{-7}$	$-1.55\cdot10^{-15}$	$-1.73\cdot10^{-6}$

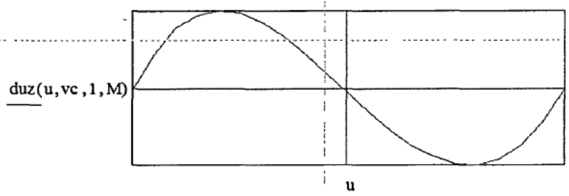
u =	Nu1(u,0,1,M)	Nv1(u,0,1,M)	S1(u,vc,1,M)	εu1(u,0,1,M)	εv1(u,0,1,M)	εuv1(u,vc,1,M)
5	-0.43344	-0.13003	-0.4772	$-9.86\cdot10^{-7}$	$0\cdot10^{0}$	$-3.1\cdot10^{-6}$
5.17	-0.35572	-0.28661	-0.44636	$-6.74\cdot10^{-7}$	$-4.5\cdot10^{-7}$	$-2.9\cdot10^{-6}$
5.34	-0.27439	-0.35197	-0.4184	$-4.22\cdot10^{-7}$	$-6.74\cdot10^{-7}$	$-2.72\cdot10^{-6}$
5.51	-0.18559	-0.30794	-0.39299	$-2.33\cdot10^{-7}$	$-6.31\cdot10^{-7}$	$-2.55\cdot10^{-6}$
5.68	-0.09088	-0.18751	-0.36982	$-8.66\cdot10^{-8}$	$-4.01\cdot10^{-7}$	$-2.4\cdot10^{-6}$
5.85	0.00477	-0.03694	-0.34864	$3.96\cdot10^{-8}$	$-9.59\cdot10^{-8}$	$-2.27\cdot10^{-6}$
6.02	0.0952	0.09986	-0.32924	$1.63\cdot10^{-7}$	$1.78\cdot10^{-7}$	$-2.14\cdot10^{-6}$
6.19	0.1747	0.18919	-0.31141	$2.95\cdot10^{-7}$	$3.42\cdot10^{-7}$	$-2.02\cdot10^{-6}$
6.36	0.23927	0.21246	-0.29499	$4.39\cdot10^{-7}$	$3.52\cdot10^{-7}$	$-1.92\cdot10^{-6}$
6.53	0.28754	0.17123	-0.27981	$5.9\cdot10^{-7}$	$2.12\cdot10^{-7}$	$-1.82\cdot10^{-6}$
6.7	0.32118	0.09636	-0.26576	$7.31\cdot10^{-7}$	$0\cdot10^{0}$	$-1.73\cdot10^{-6}$

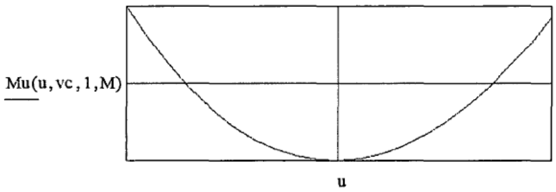
u =	σNu(u,0,1,M)	σNv(u,0,1,M)	τS(u,vc,1,M)	σMu(u,vc,1,M)	σMv(u,vc,1,M)	τH(u,0,1,M) =
5	-21.672	-6.502	-23.85987	$3.851\cdot10^{3}$	$1.155\cdot10^{3}$	0
5.17	-17.786	-14.33	-22.31786	$1.7\cdot10^{3}$	589.845	579.32404
5.34	-13.719	-17.598	-20.92014	93.021	127.641	658.91862
5.51	-9.279	-15.397	-19.64926	$-1.008\cdot10^{3}$	-221.2	503.42165
5.68	-4.544	-9.375	-18.49075	$-1.631\cdot10^{3}$	-448.631	239.74708
5.85	0.239	-1.847	-17.432	$-1.802\cdot10^{3}$	-548.09	-56.55442
6.02	4.76	4.993	-16.46192	$-1.544\cdot10^{3}$	-514.281	-330.51915
6.19	8.735	9.46	-15.57065	-876.625	-342.932	-532.83015
6.36	11.964	10.623	-14.74937	183.618	-30.542	-607.72833
6.53	14.377	8.561	-13.99048	$1.622\cdot10^{3}$	425.794	-475.78881
6.7	16.059	4.818	-13.28813	$3.427\cdot10^{3}$	$1.028\cdot10^{3}$	0

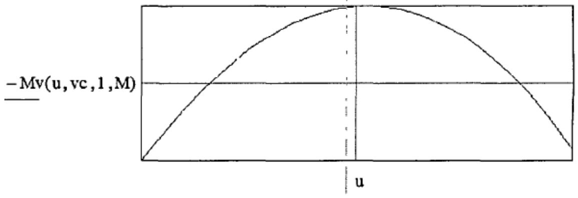
Для графиков используем меньший шаг

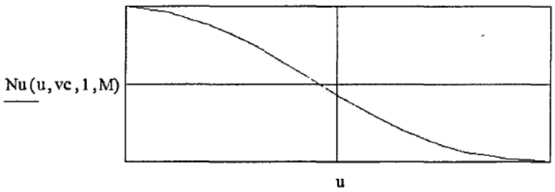
$N1 := 20$ $\quad du := \dfrac{R - r}{N1}$ $\quad u := r, r + du .. R + 0.1du$

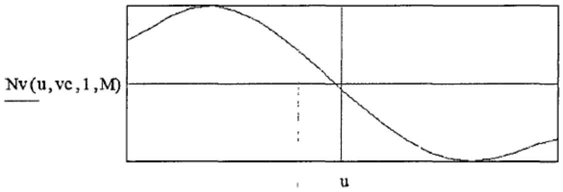


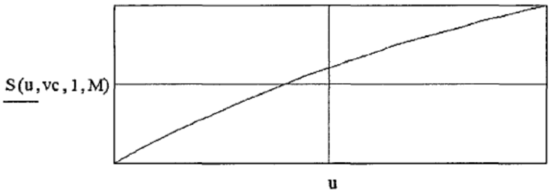


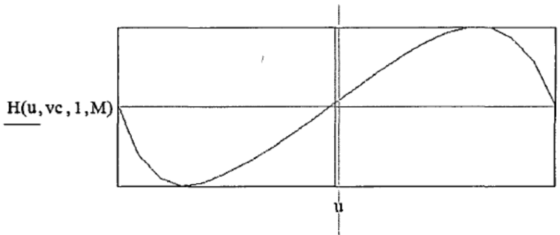


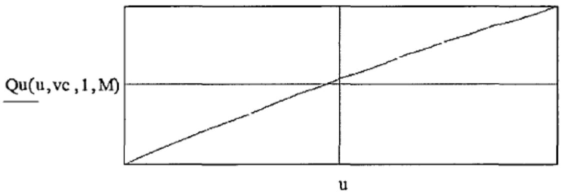


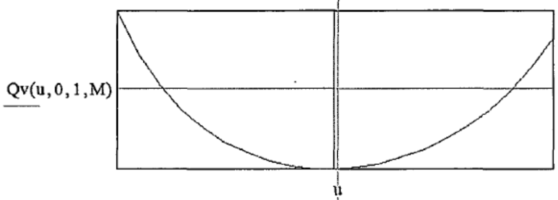


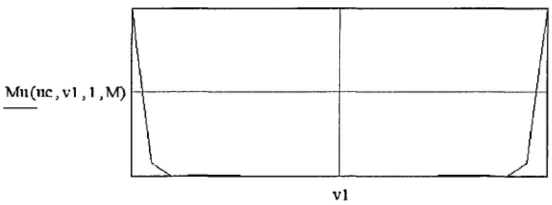


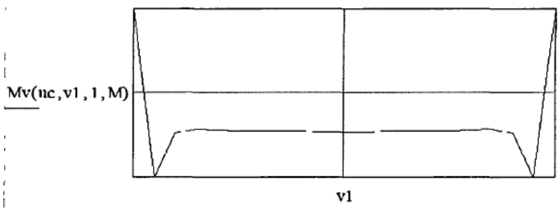


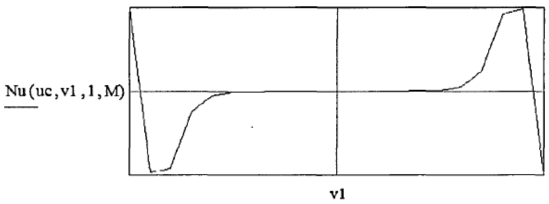


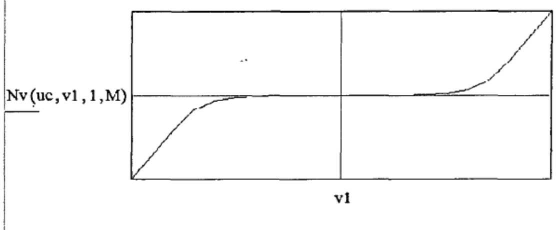


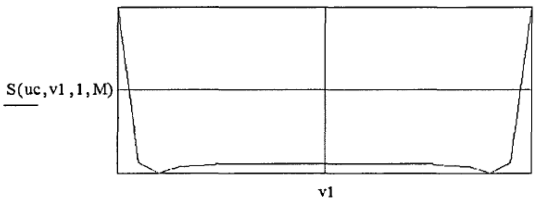


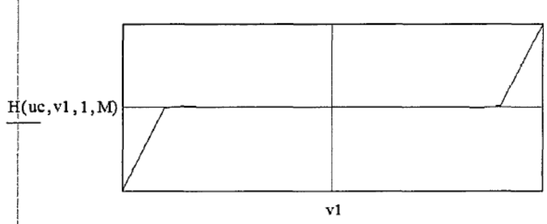


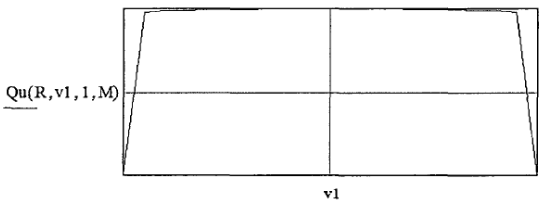


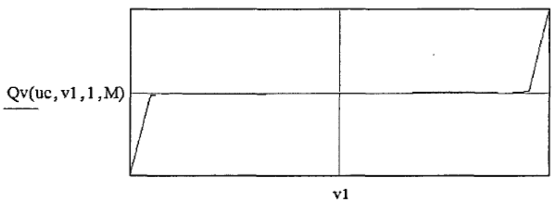

Nu(uc, v1, 1, M)
v1


Nv(uc, v1, 1, M)
v1


S(uc, v1, 1, M)
v1


H(uc, v1, 1, M)
v1


Qu(R, v1, 1, M)
v1


Qv(uc, v1, 1, M)
v1

Приложение 5

Таблица 5.

Управление		
Тип	Наименование	Данные
1	Шифр задачи	1
2	Признак системы	5
16	Допустимое количество крановых и тормозных нагрузок	2 1
33	Параметры расчета	тип оптимизации ленты уравнений: 10 метод решения системы уравнений: 2 точность разложения матрицы: 12 точность решения собственной проблемы: 4 точность контроля решения системы уравнений: 10 учет равномерно-распределенных нагрузок на жестких вставках: 1
33	Единицы измерения	Линейные единицы измерения: м Единицы измерения размеров сечения: мм Единицы измерения сил: кН Единицы измерения температуры: С

Таблица 6.

Имена загружений	
Номер	Наименование
1	1

Таблица 7.

Комбинации загружений	
Номер	Формула
1	(L1)*1.1

Таблица 8.

Нагрузки					
№ загружения	№ строки	Вид	Направление	Список	Значения
1	1	16	3	Элементы: 7 r 11 2 12 13 r 19 3 20-24 31-45 50 51 53-56 62-71 75 81 85-109 116-120 125 126 129-177 182-188 190-286 288-549 551-566 571 572 575-641 643-647 651-664 667 671-944 950-952 954 r 958 2 961-1002 1004 1005 1009-1011 1018 1021-1573 1577-1581 1583 1587-1614 1619 1622 1623 r 1629 3	33.6000

Нагрузки					
№ загружения	№ строки	Вид	Направление	Список	Значения
				1630-1724 1726 1729-1745 1747-1752 1754 1759 1769 1771 1779-1949 1956 1961 1962 1972-1984 1990 1992 1993 2001-2012 2020	

Таблица 9.

Жесткости	
Тип	Жесткости
1	ЖЕСТКОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛАСТИНЫ : E=30018600. NU=0.2 DELTA=0.4 плотность : ro=24.525 Погрешность контроля координат : .01 Имя : "vlad"

Минимакс перемещений

Единицы измерений: мм.

Параметры выборки:

Список узлов/элементов: все

Список загружений/комбинаций: все

Список факторов: все

Таблица 10.

Минимакс перемещений						
Наименование	Максимальные значения			Минимальные значения		
	Значение	Номер узла	Номер загружения	Значение	Номер узла	Номер загружения
X	0	20	1	0	20	1
Y	0	20	1	0	20	1
Z	-0,001	866	1	-0,045	33	1
Ux	0,045	41	1	-0,048	24	1
Uy	0,047	151	1	-0,044	134	1
Uz	0	20	1	0	20	1

Минимакс усилий и напряжений

Единицы измерений: Т, м.

Параметры выборки:

Список узлов/элементов: все

Список загружений/комбинаций: все

Список факторов: все

Таблица 11.

Минимакс усилий и напряжений								
Наименование	Максимальные значения				Минимальные значения			
	Значение	Номер эл-та	Номер сечен.	Номер загруж.	Значение	Номер эл-та	Номер сечен.	Номер загруж.
NX	0	6	1	1	0	6	1	1
NY	0	6	1	1	0	6	1	1
TXY	0	6	1	1	0	6	1	1
MX	1,313	1154	1	1	-2,767	18	1	1
MY	1,274	356	1	1	-2,881	122	1	1
MXY	1,068	10	1	1	-1,076	6	1	1
QX	7,699	179	1	1	-9,976	6	1	1
QY	9,09	189	1	1	-12,836	48	1	1