На правах рукописи
УДК 517.95

Жуйков Константин Николаевич

ОБ ИНДЕКСЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ГРУППАМИ СДВИГОВ

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2022

Работа выполнена в Математическом институте им. С.М. Никольского
факультета физико-математических и естественных наук
Российского университета дружбы народов

Научный руководитель:	Савин Антон Юрьевич, д.ф.-м.н., профессор Математического института имени С.М. Никольского Российского университета дружбы народов
Официальные оппоненты:	Кордюков Юрий Аркадьевич, д.ф.-м.н., главный научный сотрудник Института математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук
	Мануйлов Владимир Маркович, д.ф.-м.н., профессор кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова
Ведущая организация	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Санкт-Петербургский государственный университет

Защита диссертации состоится 25.10.2022 в 15:00 на заседании диссертационного совета ПДС 0200.005 при Российском университете дружбы народов (адрес: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6).

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов) по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6 и на сайте РУДН в сети интернет (https://www.rudn.ru/science/dissovet).

Автореферат разослан __ ________ 2022г.

Учёный секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук А.Ю. Савин

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень её разработанности

В 1960 году Гельфанд в своей статье[1] поставил задачу вычисления индекса эллиптических псевдодифференциальных операторов (ПДО). В 1963 году проблема индекса была решена Атьёй и Зингером[2], которые получили теорему об индексе эллиптических псевдодифференциальных операторов на гладком замкнутом многообразии. Эта теорема выражает аналитический индекс оператора в терминах топологических инвариантов. В дальнейшем стали появляться различные обобщения теоремы об индексе — эквивариантная теорема об индексе[3], индекс семейства эллиптических операторов[4], индекс эллиптических операторов на некомпактных многообразиях[5], теорема об индексе на многообразии с краем[6], индекс тёплицевых операторов[7] и т.д. Также теория индекса нашла интересные применения в физике, например, в квантовой теории поля.

Под G-теорией понимается теория эллиптических операторов, ассоциированных с действием группы G на многообразии. Более точно, для данного представления группы G в пространстве функций на многообразии M рассматривается класс операторов, порождённых операторами из представления и псевдодифференциальными операторами. Такие операторы были названы *G-операторами.* Впервые G-операторы появились в работе Карлемана[8] 1932 г., который рассматривал эллиптическую граничную задачу с нелокальными краевыми условиями, отвечающим инволюции границы. При этом задача сводится к изучению G-оператора на границе. Эта работа мотивировала изучение нелокальных операторов со сдвигами аргументов на гладких замкнутых многообразиях.

Теория эллиптических дифференциально-разностных уравнений была построена Скубачевским[9], теория краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений с растяжениями и сжатиями переменных была построена в работах Россовского[10].

Естественным обобщением граничного оператора из работы Карлемана является оператор вида

$$D = \sum_{g\in G} D_g T_g \colon C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M), \tag{1}$$

где G — некоторая дискретная группа диффеоморфизмов гладкого замкнутого многообразия M, $[T_g u](x) = u(g^{-1}(x))$ — оператор сдвига, отвечающий диффеоморфизму $g\colon M \to M$, $\{D_g\}$ — набор псевдодифференциальных операторов порядка $\le m$. Суммирование ведётся по конечному числу элементов $g \in G$, при этом сама группа G может быть как конечной, так и бесконечной.

[1] Гельфанд И. М. Об эллиптических уравнениях // *Успехи матем. наук*, **15**(3): 121–132 (1960).

[2] Atiyah M. F., Singer I. M. The index of elliptic operators on compact manifold // *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69**: 422–433 (1963).

[3] Atiyah M. F., Segal G. B. The index of elliptic operators II // *Ann. Math.*, **87**: 531–545 (1968).

[4] Atiyah M. F., Singer I. M. The index of elliptic operators IV // *Ann. Math.*, **93**: 119–138 (1971).

[5] Atiyah M. F. Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras // *Astérisque*, **32–33**: 43–72 (1976).

[6] Boutet de Monvel L. Boundary problems for pseudodifferential operators // *Acta Math.*, **126**: 11–51 (1971).

[7] Boutet de Monvel L. On the index of Toeplitz operators of several complex variables // *Invent. math.*, **92**(2): 243–254 (1988).

[8] Carleman T. Sur la théorie des équations intégrales et ses applications // *Mathem. Kongr. Zürich*, **1**: 138–151 (1932).

[9] Skubachevskii A. L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications // *Operator Theory: Advances and Applications*, **91**, Basel: Birkhäuser Verlag, 1997.

[10] Россовский Л. Е.. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции. *СМФН*, **54**: 3–138 (2014).

К изучению операторов (1) сводятся нелокальные краевые задачи для эллиптических дифференциальных уравнений в областях $\mathbb{R}^n$, отвечающих диффеоморфизмам границы. Результаты о фредгольмовости операторов (1) в случаях конечной и бесконечной группы диффеоморфизмов приведены в основополагающих работах Антоневича[11,12] и Антоневича и Лебедева[13,14] (см. также цитированную в них литературу), Рабиновича[15]. При этом как методы, так и результаты существенно зависели от свойств группы (конечной или бесконечной), порождаемой преобразованиями переменных. Было введено понятие траекторного символа для оператора (1), а именно, траекторный символ можно определить как семейство конечно-разностных операторов, параметризованное кокасательным расслоением многообразия без нулевого сечения T_0^*M. Указанные операторы действуют ограниченно в пространствах $\ell^2(G) \to \ell^2(G)$ квадратично суммируемых функций на группе. Кроме того, символ можно определить как элемент скрещенного произведения[16] алгебры непрерывных функций на косферическом расслоении S^*M многообразия и группы G. Условие эллиптичности определяется как обратимость символа оператора (1) и влечёт фредгольмовость оператора в подходящих пространствах Соболева. При весьма общих предположениях установлена эквивалентность условий эллиптичности для этих двух символов. Важно отметить, что, в отличие от теории псевдодифференциальных операторов, эллиптичность (и, следовательно, фредгольмовость) оператора (1) существенно зависит от показателя гладкости s пространств Соболева H^s, в которых оператор действует (см., напр., работы[17,18,19]).

Первая формула индекса для нелокальных операторов была получена Антоневичем[20] для случая конечной группы G. Индекс нелокального оператора выражается через числа Лефшеца некоторого вспомогательного эллиптического псевдодифференциального оператора на многообразии M. В случае конечной группы для чисел Лефшеца имеется формула, аналогичная формуле Атьи–Зингера[21], что решает проблему индекса. В случае бесконечной группы проблема оказалась намного более сложной и потребовала привлечения новых методов, связанных с некоммутативной геометрией.

Первое продвижение получено в работе Конна[22], который рассматривал операторы на прямой, порождённые дифференциальными операторами с коэффициентами из некоммутативной алгебры. Дальнейшее продвижение в решении проблемы индекса для эллиптических G-

[11] Антоневич А. Б. Об индексе и нормальной разрешимости общей эллиптической задачи с конечной группой сдвигов на границе // *Дифф. уравн.*, **8**: 309–317 (1972).

[12] Антоневич А. Б. Операторы со сдвигом, порожденным действием компактной группы Ли // *Сиб. матем. журн.*, **20**(3): 467–468 (1979).

[13] Антоневич А. Б., Лебедев А. В. О нётеровости функционально-дифференциального оператора с частными производными, содержащего линейное преобразование аргумента // *Дифф. уравн.*, **18**: 987–996 (1982).

[14] Antonevich A., Lebedev A. Functional-Differential Equations. I. C^*-Theory. // *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics*, **70**, Harlow: Longman, 1994.

[15] Рабинович В. С. О разрешимости дифференциально-разностных уравнений на R^n и в полупространстве // *Докл. АН СССР*, **243**(5): 1134–1137 (1978).

[16] Zeller-Meier G. Produits croisés d'une C^*-algébre par un groupe d'automorphismes // *J. Math. Pures. Appl.*, **47**: 101–239 (1968).

[17] Россовский Л. Е. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции. *СМФН*, **54**: 3–138 (2014).

[18] Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.. Об индексе эллиптических операторов для группы растяжений. *Матем. сб.*, **202**(10): 99–130 (2011).

[19] Izvarina N. R., Savin A. Yu. Ellipticity of operators associated with Morse-Smale diffeomorphisms. In *Differential equations on manifolds and mathematical physics*, Trends Math., pages 202–220. Birkhäuser/Springer, Cham, 2021.

[20] Антоневич А. Б. Эллиптические псевдодиффереициальные операторы с конечной группой сдвигов // *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **37**(3): 663–675 (1973).

[21] Atiyah M. F., Singer I. M. The index of elliptic operators III // *Ann. Math.*, **87**: 546–604 (1968).

[22] Connes A. *Noncommutative geometry*, San Diego, CA: Academic Press Inc., 1994.

операторов было сделано в работах Назайкинского, Савина и Стернина[23], Савина и Стернина[24,25], Савина[26]. Также G-операторы на контактных многообразиях изучались в работе[27], на многообразиях с особенностями — в работе[28], в $\mathbb{R}^n$ — в работе[29].

Проблема индекса для G-операторов на некомпактных многообразиях изучалась мало. В локальном случае (т.е. без сдвигов) в работах Атьи, Патоди и Зингера[30] изучалась проблема индекса операторов Дирака на многообразиях с краем (или, эквивалентно, на некомпактных многообразиях с цилиндрическими концами). В цитируемой серии работ введено важное понятие η-инварианта, описывающего вклад границы в формулу индекса. Он определяется как регуляризация типа ζ-функции сигнатуры квадратичной формы, ассоциированной с рассматриваемым самосопряжённым оператором, и по своему определению является спектральным инвариантом. Исследованием η-инвариантов и их приложений в дальнейшем занимались такие авторы, как Бисмю, Чигер, Мюллер, Виттен и др.

Важное обобщение η-инварианта Атьи–Патоди–Зингера было найдено Мельроузом[31], который рассматривал ПДО с параметром, и η-инвариант определялся как специальная регуляризация числа вращения для таких семейств. А именно, в цитированной работе было предложено рассматривать семейства $D(p)$ ПДО с параметром $p \in \mathbb{R}$, и η-инвариант семейства определялся как специальная регуляризация числа вращения, представимого выражением

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{tr}\left(D^{-1}(p)\frac{dD(p)}{dp}\right) dp, \tag{2}$$

где tr — след оператора и предполагается, что семейство $D(p)$ является эллиптическим с параметром в смысле Аграновича–Вишика[32] и обратимым при всех $p \in \mathbb{R}$. Заметим, что регуляризация в (2) требуется как для следа tr (поскольку он применяется к оператору $D^{-1}dD/dp$, след которого, вообще говоря, не определён), так и для интеграла (который, как правило, расходится на бесконечности). Мельроуз определил как регуляризованный след (используя дифференцирование семейства по параметру), так и регуляризованный интеграл (используя регуляризацию типа главного значения), исследовал свойства η-инварианта, в частности, показал, что η-инвариант Атьи-Патоди-Зингера совпадает с η-инвариантом некоторого семейства с параметром. В дальнейшем η-инвариант семейств использовался в формулах индекса на многообразиях

[23] Nazaikinskii V. E., Savin A. Yu., Sternin B. Yu. Elliptic theory and noncommutative geometry // *Operator Theory: Advances and Applications*, **183**, Basel: Birkhäuser Verlag, 2008.

[24] Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. Об индексе некоммутативных эллиптических операторов над C^*-алгебрами // *Матем. сб.*, **201**(3): 63–106 (2010).

[25] Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. Об индексе нелокальных эллиптических операторов для группы растяжений // *ДАН*, **433**(1): 21–24 (2010).

[26] Савин А. Ю. Об индексе нелокальных эллиптических операторов, отвечающих неизометрическому диффеоморфизму // *Матем. заметки*, **90**(5): 712–726 (2011).

[27] Perrot D., Rodsphon R. An equivariant index theorem for hypoelliptic operators // *ArXiv* (2014) arXiv:1412.5042v2.

[28] Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. Эллиптические G-операторы на многообразиях с изолированными особенностями // *СМФН*, **59**: 173–191 (2016).

[29] Арутюнов А. А. Редукция нелокальных псевдодифференциальных операторов на некомпактном многообразии к классическим псевдодифференциальным операторам на компактном многообразии удвоенной размерности. *Матем. заметки*, **97**(4): 493–502 (2015).

[30] Atiyah M, Patodi V., Singer I. Spectral asymmetry and Riemannian geometry I,II,III // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **77**: 43–69 (1975), **78**: 405–432 (1976), **79**: 71–99 (1976).

[31] Melrose R. The eta invariant and families of pseudodifferential operators // *Math. Research Letters*, **2**(5): 541–561 (1995).

[32] Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. *Успехи матем. наук*, **19**(3): 53–161 (1964).

с коническими точками[33,34] как вклад в формулу индекса от особой точки; кроме этого, были определены η-формы[35]. Отметим, что η-инварианты для G-операторов не изучались.

Во многих задачах возникают эллиптические уравнения с периодическими коэффициентами на некомпактных многообразиях. В частности, они играют важную роль в квантовой механике и физике твердого тела (см., например, обзор[36] и ссылки в нём), а также в геометрии и топологии (см., например, работы[37,38,39]). В то же время ряд геометрических задач (например, задача о гладких структурах в $(\mathbb{R}^4)$[40], задача изучения пространств модулей метрик Ямабе[41] и др.) и анализа[42,43]приводят к изучению операторов с коэффициентами, периодическими на бесконечности (в отличие от рассмотренной выше ситуации, когда условие периодичности выполняется всюду). В литературе эта теория называется эллиптической теорией на многообразиях с периодическими концами.

На многообразиях с периодическими концами получены[40,44] критерии фредгольмовости для операторов в пространствах Соболева. Формула индекса для операторов типа Дирака на многообразиях с периодическими концами получена в работе[45]. Авторы цитированной работы нашли обобщение η-инварианта Атьи–Патоди–Зингера, в терминах которого дана формула индекса. Следует отметить, что проблема индекса для эллиптических операторов общего вида на многообразиях с периодическими концами остается открытой. Задача изучалась в одномерном случае, т. е. для ПДО на прямой. В частности, K-группа C^*-алгебры символов псевдодифференциальных операторов вычислена в работе[46], формулы индекса для некоторых примеров приведены в работах[47,48,49]. Однако формула индекса для общих операторов не была дана даже в одномерном случае.

В G-теории также возникает интересный класс задач, где в качестве сдвига рассматривается представление группы G ограниченными операторами, действующими в пространстве $L^2(M)$

---

[33] Nazaikinskii V., Savin A., Schulze, B.-W., Sternin B. *Elliptic Theory on Singular Manifolds*, Boca Raton: CRC-Press, 2005.

[34] Fedosov B. V., Schulze B.-W., Tarkhanov N.The Index of Higher Order Operators on Singular Surfaces // The Index of Higher Order Operators on Singular Surfaces // *Pacific J. of Math.*, **191**(1): 25–48 (1999).

[35] Melrose R., Rochon F. Eta forms and the odd pseudodifferential families index // *Surveys in differential geometry. Volume XV. Perspectives in mathematics and physics*, 279–322, *Surv. Differ. Geom* **15**, *Int. Press, Somerville, MA* (2011).

[36] Kuchment P. An Overview of Periodic Elliptic Operators // *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53**(3): 343–414 (2016).

[37] Atiyah M. F. Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras // *Astérisque*, **32–33**: 43–72 (1976).

[38] Мищенко А. С. Банаховы алгебры, псевдодифференциальные операторы и их приложения к K-теории // *УМН*, **34**(6): 67–79 (1979).

[39] Шубин М. А. Спектральная теория и индекс эллиптических операторов с почти-периодическими коэффициентами // *УМН*, **34**(2): 95–135 (1979).

[40] Taubes C. H. Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds // *J. Differential Geom.*, **25**(3): 363–430 (1987).

[41] Mazzeo R., Pollack D., Uhlenbeck K. Moduli spaces of singular Yamabe metrics // *J. Amer. Math. Soc.*, **9**(2): 303–344 (1996).

[42] Böttcher A., Karlovich Yu. I., Spikovski I. M. *Convolution Operators and Factorization of Almost Periodic Matrix Functions*, Birkhäuser, Basel, 2002.

[43] Inoue H., Richard S. Index theorems for Fredholm, semi-Fredholm and almost-periodic operators: all in one example // *J. Noncommut. Geom.*, **13**(4): 1359–1380 (2019).

[44] Рабинович В. С. Об алгебре, порожденной псевдодифференциальными операторами на $\mathbb{R}^n$, операторами умножения на почти-периодические функции и операторами сдвига // *Докл. АН СССР*, **263**(5): 1066–1070 (1982).

[45] Mrowka T., Ruberman D., Saveliev N. An index theorem for end-periodic operators // *Compositio Math.*, **152**(2): 399–444 (2016).

[46] Melo S. T. K-theory of pseudodifferential operators with semi-periodic symbols // *K-theory*, **37**(3): 235–248 (2006).

[47] Böttcher A., Karlovich Yu. I., Spikovski I. M. *Convolution Operators and Factorization of Almost Periodic Matrix Functions*, Birkhäuser, Basel, 2002.

[48] Inoue H., Richard S. Index theorems for Fredholm, semi-Fredholm and almost-periodic operators: all in one example // *J. Noncommut. Geom.*, **13**(4): 1359–1380 (2019).

[49] Bogveradze G., Castro L. P. On the Fredholm property and index of Wiener-Hopf plus/minus Hankel operators with piecewise almost periodic symbols // *Appl. Math. Inform. Mech.*, **12**(1): 25–40 (2007).

как *квантованные канонические преобразования*, которые являются квантованиями однородных канонических преобразований $g\colon T_0^*M \to T_0^*M$. Основное отличие от рассматриваемых выше G-операторов состоит в том, что здесь оператор ассоциирован с действием группы G на T_0^*M (а не на самом многообразии M). Данная структура включает операторы сдвига как частный случай, но также позволяет рассмотреть множество новых интересных примеров: граничные задачи для гиперболических уравнений уравнений с краевыми условиями на всей границе[50,51], операторы, ассоциированные с волновой группой на римановых многообразиях, и, наконец, метаплектические операторы. Для операторов, ассоциированных с квантованными каноническими преобразованиями, получен[52] критерий фредгольмовости. Однако открытой проблемой является получение явных выражений для условий эллиптичности таких операторов в зависимости от показателя гладкости пространств Соболева, в которых оператор действует.

Цели и задачи

Целью работы является исследование эллиптических G-операторов на некоторых некомпактных пространствах и получение соответствующих формул индекса. Более точно, в работе изучаются дифференциально-разностные операторы на бесконечном цилиндре. Конормальный символ таких операторов на бесконечности представляет собой семейство операторов с параметром и периодическими коэффициентами на гладком замкнутом многообразии, для которых надо построить η-инвариант, отвечающий вкладу бесконечности в формулу индекса. Также изучаются операторы на прямой с коэффициентами, периодическими на бесконечности. В этом случае возникает необходимость построения η-инварианта для операторов со сдвигами. Наконец, изучаются операторы в $\mathbb{R}^N$, ассоциированные с метаплектической группой. Интерес представляет получение явных условий эллиптичности, гарантирующих фредгольмовость рассматриваемого оператора.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Построен η-инвариант, обобщающий η-инвариант Мельроуза на случай операторов с параметром и периодическими коэффициентами. Для эллиптических дифференциально-разностных операторов на бесконечном цилиндре получена формула индекса, обобщающая формулу Федосова–Шульце–Тарханова на случай нелокальных операторов. Для дифференциальных операторов на прямой с периодическими коэффициентами построен η-инвариант, а также получена формула индекса для операторов с коэффициентами, периодическими на бесконечности. Наконец, для операторов в $\mathbb{R}^N$, ассоциированных с метаплектической группой, получен явный критерий фредгольмовости. Установленные результаты обобщают и расширяют некоторые результаты в теории эллиптических операторов на некомпактных многообразиях, и являются новыми в теории G-операторов.

[50] Bär Ch., Strohmaier A. An index theorem for Lorentzian manifolds with compact spacelike Cauchy boundary // *Amer. J. Math.*, **290**(141): 1421–1455 (2019).

[51] Boltachev A.V., Savin A.Yu. Class of Fredholm boundary value problems for the wave equation with conditions on the entire boundary. // *Differential equations on manifolds and mathematical physics—dedicated to the memory of Boris Sternin*, 48–59, Trends Math., Birkhäuser/Springer, Cham (2021).

[52] Savin A., Schrohe E., Sternin B. Elliptic Operators Associated with Groups of Quantized Canonical Transformations // *Bull. Sci. Math.*, **155**: 141–167 (2019).

Теоретическая значимость

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в исследованиях по теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Методология и методы исследования

В работе широко используется аппарат классических ПДО и ПДО с параметром. η-инвариант определяется как некоторая регуляризация числа вращения, построенная при помощи конечно-разностных методов и асимптотических методов. При доказательстве теорем об индексе используются методы K-теории и C^*-алгебр, теории характеристических классов.

Положения, выносимые на защиту

1) Для обратимых семейств операторов с параметром и периодическими коэффициентами на гладком замкнутом многообразии построен η-инвариант и установлены его основные свойства. Получена формула для производной η-инварианта.
2) Для эллиптических дифференциально-разностных операторов на бесконечном цилиндре получена формула индекса, включающая η-инвариант как вклад бесконечности.
3) Для ПДО на прямой, периодических на бесконечности, дано понятие η-инварианта, установлены его основные свойства, предъявлена соответствующая формула индекса. Получены формулы индекса и η-инварианта для дифференциальных операторов в терминах соответствующих матриц монодромии.
4) Исследованы нелокальные операторы в $\mathbb{R}^N$, ассоциированные с метаплектической группой. Даны явные условия на коэффициенты таких операторов, гарантирующие фредгольмовость.

Степень достоверности и апробация результатов

Степень достоверности результатов, полученных в диссертации, обеспечивается строгостью приведенных доказательств, многочисленными выступлениями на семинарах, конференциях и школах, а также имеющимися публикациями в изданиях, которые индексируются в международных базах данных.

Результаты диссертации докладывались на следующих международных конференциях:

- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов”, Москва, 10–27 ноября 2020, 12–23 апреля 2021, 11–22 апреля 2022.
- Международная конференция “Понтрягинские чтения” в рамках Международной Воронежской весенней школы “Современные методы теории краевых задач” (ВВМШ), Воронеж, 3–9 мая 2020, 3–9 мая 2021, 3–9 мая 2022.
- Международная конференция “Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis” (OTHA), Ростов-на-Дону, 22–27 августа 2021, 21–26 августа 2022.
- Международная студенческая конференция “Science and Progress”, Санкт-Петербург, 10–12 ноября 2020, 9–11 ноября 2021.
- Летняя школа по спектральной теории в рамках тематической программы “Spectral Theory and Mathematical Physics” (STMP), Санкт-Петербург, 20–30 июня 2021.

- Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ), пос. Сатера, Крым, 17–26 сентября 2021.
- “The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations” (DFDE), Москва, 28 июня – 5 июля 2022.

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах:

- Научный студенческий семинар по дифференциальным уравнениям, рук. А.Ю. Савин, П.А. Сипайло, РУДН (неоднократно, 2019–2021)
- Общематематический семинар молодых ученых Математического института им. С.М. Никольского, рук. Ю.О. Беляева, РУДН, 23.03.2021.
- Научный семинар Математического института им. С.М. Никольского РУДН по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям, рук. А.Л. Скубачевский, РУДН, 12.10.2021, 07.06.2022.
- Научный семинар “Некоммутативная геометрия и топология”, рук. А.С. Мищенко, И.К. Бабенко, В.М. Мануйлов, А.А. Ирматов, А.А. Арутюнов, Ф.Ю. Попеленский, МГУ, 17.03.2022.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 14 работах, из них 4 статьи в научных журналах, индексируемых в международных базах данных (Scopus, MathSciNet) и 10 — в тезисах докладов на международных конференциях. Их список приведён в конце автореферата. Результаты совместных работ, включённые в диссертацию, получены автором самостоятельно.

Основное содержание работы

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы из 70 наименований. Общий объём диссертации составляет 108 страниц.

Глава 1 состоит из 5 параграфов и посвящена построению η-инварианта для операторов с параметром и периодическими коэффициентами на гладком замкнутом многообразии.

В **§1.1** напоминается определение топологии Фреше на пространстве псевдодифференциальных операторов с параметром, вводится основной объект исследования — операторы с параметром и периодическими коэффициентами. Более точно, рассматривается факторпространство

$$\Phi_p^m(X) = \mathcal{S}\big(\mathbb{Z}, \Psi_p^m(X)\big)/L$$

пространства Фреше $\mathcal{S}\big(\mathbb{Z}, \Psi_p^m(X)\big)$ быстро убывающих последовательностей операторов из пространства псевдодифференциальных операторов с параметром $\Psi_p^m(X)$ по замкнутому подпространству

$$L = \Big\{ \{D_k(p)\} \in \mathcal{S}\big(\mathbb{Z}, \Psi_p^{-\infty}(X)\big) \;\Big|\; \sum_k D_k(p) e^{2\pi i k p} = 0 \,\forall p \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Произвольному элементу $D = \{D_k(p)\} \in \Phi_p^m(X)$ сопоставим оператор

$$D(p) = \sum_k D_k(p) e^{2\pi i k p} \colon C^\infty(X) \longrightarrow C^\infty(X). \tag{3}$$

Очевидно, что этот оператор корректно определён, т.е. если $D \in L$, то $D(p) \equiv 0$. Далее элементы пространства $\Phi_p^m(X)$ будем записывать в виде (3). Введём обозначение $\Phi_p(X) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \Phi_p^m(X)$.

В **§1.2** вводится пространство $S_{as}(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\mathbb{R})$ функций со специальной асимптотикой на бесконечности:

$$f(x) \sim \sum_{i \le N} c_i^\pm(x) x^i + \sum_{j=0}^{N} d_j^\pm(x) x^j \ln|x| \quad \text{при } x \to \pm\infty$$

для некоторого $N \in \mathbb{Z}_+$, где $c_i^\pm$, $d_j^\pm$ — гладкие периодические функции периода 1. Следующая теорема представляет собой основной технический результат главы.

Теорема 1. *Оператор разностного дифференцирования*

$$\begin{aligned} \delta\colon S_{as}(\mathbb{R}) &\longrightarrow S_{as}(\mathbb{R}) \\ f(x) &\longmapsto (\delta f)(x) = f(x+1) - f(x) \end{aligned}$$

корректно определён и является изоморфизмом линейных пространств

$$\delta\colon S_{as}(\mathbb{R})/\ker\delta \longrightarrow S_{as}(\mathbb{R}).$$

В **§1.3** строится регуляризация следа операторов с параметром и периодическими коэффициентами.

Определение 2. *Регуляризованным следом* оператора с параметром $D(p) \in \Phi_p^m(X)$ называется функция

$$(\operatorname{TR} D)(p) = \delta^{-\ell}\big[\operatorname{tr}(\delta^\ell D(p))\big] \in S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P}, \tag{4}$$

где $\ell > m + \dim X$, $[f(p)]$ — класс эквивалентности функции $f(p)$, а

$$\mathcal{P} = \left\{ f(p) \in C^\infty(\mathbb{R}) \;\middle|\; \exists N > 0\colon f(p) = \sum_{j=0}^{N} f_j(p) p^j \right\}.$$

В **§1.4** строится регуляризация интеграла функции из пространства $S_{as}(\mathbb{R})$.

Предложение 3. *Пусть $f(p) \in S_{as}(\mathbb{R})$. Тогда при $T \to +\infty$ существует асимптотическое разложение*

$$\int_{-T}^{T} f(p)dp \sim \sum_{j \le N} c_j(T) T^j + \sum_{0 \le r \le N} d_r(T) T^r \ln T, \tag{5}$$

где $c_j(T)$, $d_r(T)$ — гладкие периодические функции.

Определение 4. *Регуляризованным интегралом* функции $f \in S_{as}(\mathbb{R})$ будем называть среднее значение коэффициента $c_0(T)$ в асимптотическом разложении (5) и будем обозначать его через

$$⨍_{\mathbb{R}} f(p)dp \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 c_0(T)dT. \tag{6}$$

Следствие 5. *Функционал* $\operatorname{Tr}\colon \Phi_p(X) \to \mathbb{C}$, *определяемый формулой*

$$\operatorname{Tr} D \stackrel{\text{def}}{=} ⨍_{\mathbb{R}} \operatorname{TR} D(p)dp,$$

корректно определён и является следом, т.е. $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$ *для любых* $A, B \in \Phi_p(X)$.

В **§1.5** вводится понятие η-инварианта и доказываются его основные свойства.

Определение 6. Пусть $D(p) \in \Phi_p^m(X)$ — обратимый элемент, т.е. существует обратный элемент $D^{-1}(p) \in \Phi_p^{-m}(X)$. Тогда число

$$\eta(D) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Tr}\left(D^{-1}\partial_p D\right)$$

называется *η-инвариантом* оператора с параметром $D(p)$.

Предложение 7 (Свойства η-инварианта).

1. *η-инвариант удовлетворяет логарифмическому свойству:*
$$\eta(AB) = \eta(A) + \eta(B)$$
для любых обратимых элементов $A, B \in \Phi_p(X)$;

2. *η-инвариант (6) является обобщением η-инварианта Мельроуза, а именно, если $D(p) \in \Psi_p(X)$ — обратимый ПДО с параметром, то*
$$\eta(D) = \eta_M(D), \quad \textit{где} \quad \eta_M(D) = \frac{1}{2\pi i} \int\!\!\!\!\!\!-_{\mathbb{R}} \operatorname{TR}_M\left(D^{-1}\partial_p D\right) dp.$$

Предложение 8. *Пусть $D_t(p) \in \Phi_p^m(X)$, $t \in [0,1]$ — гладкая гомотопия семейств обратимых операторов с параметром. Тогда*

1) *производная η-инварианта семейства D_t по параметру t равна*
$$\partial_t \eta(D_t) = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Tr}\big(\partial_p (D_t^{-1}\partial_t D_t)\big);$$

2) *композиция $\widetilde{\operatorname{Tr}} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Tr} \circ \partial_p$ является следом на алгебре $\Phi_p(X)$, т.е. $\widetilde{\operatorname{Tr}}(AB) = \widetilde{\operatorname{Tr}}(BA)$ для всех семейств $A, B \in \Phi_p(X)$;*

3) *для оператора с параметром $D(p) = \sum_k D_k(p)e^{2\pi i k p} \in \Phi_p^m(X)$ имеем*
$$\widetilde{\operatorname{Tr}}\, D(p) = \int_{T^*X} \left[d_{0,-n}(x,\xi,1) - d_{0,-n}(x,\xi,-1)\right] \frac{\omega^n}{n!}, \quad n = \dim X, \tag{7}$$
где $(x,\xi) \in T^*X$, $\omega = \sum dx_j \wedge d\xi_j$ — симплектическая форма на T^*X, а $d_{0,j}$ — однородная компонента степени j полного символа ПДО с параметром $D_0(p)$, при этом интеграл в (7) абсолютно сходится.

Глава 2 состоит из 5 параграфов и посвящена проблеме индекса дифференциально-разностных операторов на бесконечном цилиндре.

В **§2.1** вводятся основные определения и даётся постановка задачи. На цилиндре $M = \mathbb{S}^1_x \times \mathbb{R}_t$ рассматривается оператор вида

$$D = \sum_k D_k T^k \colon H^{s,\gamma^-,\gamma^+}(M, \mathbb{C}^N) \longrightarrow H^{s-m,\gamma^-,\gamma^+}(M, \mathbb{C}^N), \tag{8}$$

где D_k — матричный дифференциальный оператор порядка $\le m$ на M, $T^k u(x,t) = u(x, t-2\pi k)$ — оператор сдвига по переменной t, а $H^{s,\gamma^-,\gamma^+}(M)$ — весовое пространство Соболева. При этом мы предполагаем, что только конечное число слагаемых в сумме (8) не равно нулю, а коэффициенты оператора D_k не зависят от t при больших t.

Определение 9. *Внутренним символом* оператора (8) в точке $(x,t,\xi,p)\in T_0^*M=\{(x,t,\xi,p)\mid \xi^2+p^2\neq 0\}$ кокасательного расслоения без нулевого сечения называется оператор

$$\sigma(D)(x,t,\xi,p)=\sum_k \sigma(D_k)(x,t+2\pi n,\xi,p)\mathcal{T}^k\colon \ell^2(\mathbb{Z},\mu)\otimes\mathbb{C}^N\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z},\mu)\otimes\mathbb{C}^N, \tag{9}$$

где $\sigma(D_k)$ — главный символ оператора D_k, $\mathcal{T}w(n)=w(n-1)$ — оператор сдвига последовательности. Наконец

$$\ell^2(\mathbb{Z},\mu)=\left\{w(n)\,\Big|\,\sum_n |w(n)|^2\mu(n)<\infty\right\}, \text{ где вес } \mu(n)=\begin{cases} e^{-2\gamma_+ n} & \text{при } n\geq 1,\\ e^{-2\gamma_- n} & \text{при } n\leq -1.\end{cases} \tag{10}$$

Определение 10. *Конормальным символом* оператора (8) называется пара $\big(\sigma_c^+(D),\sigma_c^-(D)\big)$ операторов с параметром и периодическими коэффициентами:

$$\sigma_c^{\pm}(D)(p)=\sum_k D_k^{\pm}(p)e^{ikp}\colon H^s(\mathbb{S}^1,\mathbb{C}^N)\longrightarrow H^{s-m}(\mathbb{S}^1,\mathbb{C}^N). \tag{11}$$

Отметим, что операторы с параметром $\sigma_c^{\pm}(D)(p)\in\Phi_p(\mathbb{S}^1)$ рассматривались в главе 1 в случае 1-периодических коэффициентов (см. (3)).

Определение 11. Оператор (8) называется *эллиптическим*, если

1) оператор (9) обратим при всех $(x,t,\xi,p)\in T_0^*M$;

2) операторы (11) обратимы на весовых прямых $L_{\gamma^\pm}=\{p\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im} p=\gamma^\pm\}$.

Из эллиптичности оператора (8) следует его фредгольмовость.

В **§2.2** определяется топологический индекс задачи. Далее используются следующие обозначения:

- σ — внутренний символ оператора (8) (см. (9));
- $\sigma_c^{\pm}$ — конормальные символы оператора (8) на плюс и минус бесконечности (см. (11));
- $M_0=\mathbb{S}^1\times[0,2\pi]\subset M$ — фундаментальная область действия группы $\mathbb{Z}$ на M;
- $\Omega^*\big(S^*M_0,\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z},\mu)\otimes\mathbb{C}^N)\big)$ — алгебра дифференциальных форм на косферическом расслоении $S^*M_0\subset S^*M$ со значениями в алгебре ограниченных операторов в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z},\mu)\otimes\mathbb{C}^N$;
- d — продолжение внешнего дифференциала на S^*M_0 на указанную алгебру дифференциальных форм.

Определим функционал

$$\tau_{S^*M}\colon \Omega^*\big(S^*M_0,\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z},\mu)\otimes\mathbb{C}^N)\big)\longrightarrow\mathbb{C},\quad \omega\longmapsto\int\limits_{S^*M_0}\operatorname{Tr}\omega,$$

где Tr — операторный след, определённый на идеале форм со значениями в ядерных операторах.

Определение 12. *Полным символом* семейства $\sigma_c^+(p)$ называется функция

$$\widetilde{\sigma}(\sigma_c^+) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{\sigma}(D_k^+)z^k \in \mathrm{Mat}_N\left(C^\infty\big(\mathbb{S}^1_\varphi, S_\rho(\mathbb{S}^1_x\times\mathbb{R}^2_{\xi,\rho})\big)\right),$$

где $\widetilde{\sigma}(D_k^+)$ — полный символ семейства $D_k^+(p)$, $z = e^{i\varphi}\in\mathbb{S}^1_\varphi$, а $S_\rho(\mathbb{S}^1_x\times\mathbb{R}^2_{\xi,\rho})$ — пространство Фреше классических символов с параметром.

Определим функционал $\tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}$ на алгебре $\mathrm{Mat}_N\left(C^\infty(\mathbb{S}^1, S_\rho(\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}^2))\right)$:

$$\tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}\left(\widetilde{\sigma}\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}} \mathrm{tr}\left(\int\limits_0^{2\pi} \sigma_{-1}\Big|_{\rho=-1}^{\rho=1} d\varphi\right) dx d\xi,$$

где $\widetilde{\sigma} = \widetilde{\sigma}(\sigma_c^+)$, $\sigma_j = \widetilde{\sigma}_j(\sigma_c^+)$ — j-ая компонента полного символа конормального символа σ_c^+. Аналогичные обозначения вводятся для семейства σ_c^-.

Определение 13. *η-инвариантом* эллиптического семейства $\sigma_c(p)$ вида (11), обратимого при $\mathrm{Im}\, p = \gamma$, называется число

$$\eta_\gamma(\sigma_c) = \frac{1}{2\pi i}\fint\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{TR}\Big(\sigma_c^{-1}(\rho+i\gamma)\partial_\rho\sigma_c(\rho+i\gamma) - i\gamma\partial_\rho\big(\sigma_c^{-1}(\rho+i\gamma)\partial_\rho\sigma_c(\rho+i\gamma)\big)\Big)d\rho,$$

где TR — регуляризованный след (4), а $\fint_{\mathbb{R}}$ — регуляризованный интеграл (6) в случае 2π-периодических функций.

В терминах введённых выше функционалов предъявляется формула индекса — основной результат данной главы:

Теорема 14. *Индекс эллиптического оператора* (8) *равен*

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}^{\gamma^-,\gamma^+} D = \frac{1}{24\pi^2}\tau_{S^*M}\big((\sigma^{-1}d\sigma)^3\big) + \eta_{\gamma^+}(\sigma_c^+) - \eta_{\gamma^-}(\sigma_c^-) + \\ + \frac{1}{4\pi^2 i}\tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}\left(\frac{i}{2}\sigma_-^{-1}\partial_\xi\sigma_-\sigma_-^{-1}\partial_x\sigma_- + \sigma_-^{-1}\sigma_{m-1,-}\right) - \\ - \frac{1}{4\pi^2 i}\tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}\left(\frac{i}{2}\sigma_+^{-1}\partial_\xi\sigma_+\sigma_+^{-1}\partial_x\sigma_+ + \sigma_+^{-1}\sigma_{m-1,+}\right),\end{aligned} \quad (12)$$

где $\sigma_\pm = \widetilde{\sigma}_m(\sigma_c^\pm)$ — главные символы конормальных символов $\sigma_c^\pm$, а $\sigma_{m-1,\pm}$ — компоненты степени $m-1$ полных символов конормальных символов $\sigma_c^\pm$.

Правую часть в (12) будем называть *топологическим индексом.*

В **§2.3** доказывается гомотопическая инвариантность топологического индекса.

В **§2.4** предъявлены вспомогательные результаты о сведении рассматриваемых операторов к операторам с постоянными коэффициентами при помощи гомотопии, играющие важную роль в доказательстве теоремы 14.

Наконец, в **§2.5** представлено доказательство теоремы 14.

Глава 3 состоит из 5 параграфов и посвящена проблеме индекса дифференциальных операторов на прямой с коэффициентами, периодическими на бесконечности.

В **§3.1** вводится пространство периодических псевдодифференциальных операторов:

Определение 15. *Пространством* Ψ^m_{per} *периодических ПДО порядка* $\leq m$ называется пространство операторов вида

$$D = \sum_{k\in\mathbb{Z}} D_k(-i\partial_t)e^{ikt}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Здесь предполагается, что элементы $D_k(-i\partial_t) \in \Psi^m$ из пространства ПДО порядка m быстро стремятся к нулю в следующем смысле: при заданных $k \in \mathbb{Z}$ и $N \geq 1$ справедлива оценка

$$\|D_k(-i\partial_t)\|_\ell \leq C_{\ell N}(1+|k|)^{-N},$$

где $\|\cdot\|_\ell$ — произвольная полунорма в пространстве Фреше Ψ^m.

В **§3.2** вводится понятие регуляризованного следа. Определим оператор усреднения $\mathrm{Av}\colon \Psi_{\mathrm{per}} \longrightarrow \Psi$, где $\Psi_{\mathrm{per}} = \bigcup_m \Psi^m_{\mathrm{per}}$, а $\Psi = \bigcup_m \Psi^m$, действующий по формуле

$$\mathrm{Av}\colon D \longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_\varphi D T_{-\varphi} d\varphi, \quad \text{где} \quad T_\varphi u(t) = u(t-\varphi).$$

Лемма 16. *Для функционала* $\alpha\colon \Psi^{-1} \longrightarrow \mathbb{C}$, $D(-i\partial_t) \longmapsto \displaystyle⨍_{\mathbb{R}} D(p)dp$, *где* $D(p) = \mathcal{F}D(-i\partial_t)\mathcal{F}^{-1}$, *имеет место равенство*

$$\alpha\big(D(-i\partial_t)\big) = \sqrt{2\pi}\lim_{t\to 0}\left[\frac{K_D(t,0)+K_D(-t,0)}{2} - c_1(\ln|t|+\gamma)\right].$$

Здесь $K_D(t,t')$ *— ядро Шварца оператора* $D(-i\partial_t)$, $c_1 = \lim\limits_{t\to 0}(K_D(t,0)/\ln|t|)$, $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n 1/k - \ln n\right)$ *— константа Эйлера, а* $⨍_{\mathbb{R}}$ *— регуляризованный интеграл* (6).

Предложение 17. *Функционал* $\mathrm{Tr} \overset{\mathrm{def}}{=} \alpha \circ \mathrm{Av}\colon \Psi^{-1}_{\mathrm{per}} \to \mathbb{C}$ *является следом. Более точно, для всех таких* $A, B \in \Psi_{\mathrm{per}}$, *что* $\mathrm{ord}\, A + \mathrm{ord}\, B \leq -1$, *выполняется следующее равенство:*

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

В **§3.3** вводится понятие η-инварианта, доказываются его основные свойства.

Определение 18. Пусть $D \in \Psi^m_{\mathrm{per}} \otimes \mathrm{Mat}_N$ — обратимый матричный оператор. Предположим, что существует обратный оператор $D^{-1} \in \Psi^{-m}_{\mathrm{per}} \otimes \mathrm{Mat}_N$. Тогда *$\eta$-инвариантом* оператора D называется число

$$\eta(D) \overset{\mathrm{def}}{=} -\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Tr}(D^{-1}[t,D]).$$

Предложение 19. *η-инвариант* (18) *обладает логарифмическим свойством*

$$\eta(AB) = \eta(A) + \eta(B)$$

для всех обратимых операторов $A, B \in \Psi_{\mathrm{per}} \otimes \mathrm{Mat}_N$.

Предложение 20. *Пусть* $D_\varepsilon \in \Psi^m_{\mathrm{per}} \otimes \mathrm{Mat}_N$, $\varepsilon \in [0,1]$ *— гладкая гомотопия обратимых операторов. Тогда производная* η*-инварианта* D_ε *по переменной* ε *равна*

$$\partial_\varepsilon \eta(D_\varepsilon) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{tr}\left[\sigma_+^{-1}(D_\varepsilon)\partial_\varepsilon \sigma_+(D_\varepsilon) - \sigma_-^{-1}(D_\varepsilon)\partial_\varepsilon \sigma_-(D_\varepsilon)\right] d\varphi,$$

где $\sigma_\pm(D)(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sigma_\pm\big(D_k(-i\partial_t)\big)e^{ik\varphi}$ *— символ оператора* D, $\sigma_\pm\big(D_k(-i\partial_t)\big) = \lim_{p\to\pm\infty} |p|^{-m} D_k(p)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Далее в качестве примера приведено вычисление η-инарианта для периодического оператора первого порядка. Пусть

$$D = -i\partial_t + a(t)\colon H^s(\mathbb{R}) \longrightarrow H^{s-1}(\mathbb{R}), \tag{13}$$

где $a(t)$ — гладкая 2π-периодическая комплекснозначная функция.

Предложение 21. 1. *Оператор* (13) *обратим тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Im} \int_0^{2\pi} a(t)dt \neq 0$.

2. η*-инвариант обратимого оператора* (13) *равен* $\eta(D) = -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{sgn}\,\mathrm{Im} \displaystyle\int_0^{2\pi} a(t)dt$.

В **§3.4** предъявлены критерии обратимости периодических дифференциальных операторов произвольного порядка и формула индекса дифференциальных операторов с периодическими на бесконечности коэффициентами в терминах матриц монодромии предельных операторов.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор с периодическими коэффициентами (период равен 2π)

$$D = \sum_{0\le k\le n} d_k(t)(-i\partial_t)^k\colon H^s(\mathbb{R},\mathbb{C}^N) \longrightarrow H^{s-n}(\mathbb{R},\mathbb{C}^N). \tag{14}$$

Предложение 22. *Дифференциальный оператор* (14) *обратим тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Spec}\, M \cap \mathbb{S}^1_\lambda = \emptyset$. *Здесь* $\mathrm{Spec}\, M \subset \mathbb{C}$ *— спектр матрицы монодромии* M, *а* $\mathbb{S}^1_\lambda = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| = 1\}$.

Пусть коэффициенты дифференциального оператора порядка n

$$D = \sum_{0\le k\le n} d_k(t)(-i\partial_t)^k\colon H^s(\mathbb{R},\mathbb{C}^N) \longrightarrow H^{s-n}(\mathbb{R},\mathbb{C}^N) \tag{15}$$

суть гладкие периодические функции с периодом 2π при $|t| > T$. Обозначим

$$d_k^\pm(t) = \lim_{j\to+\infty} d_k(t \pm 2\pi j), \qquad D_\pm = \sum_k d_k^\pm(t)(-i\partial_t)^k.$$

Теорема 23. *Пусть главный символ оператора* (15) *обратим, а операторы* $D_+, D_-\colon H^s(\mathbb{R},\mathbb{C}^N) \to H^{s-n}(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)$ *обратимы. Тогда оператор* (15) *является фредгольмовым и его индекс равен*

$$\mathrm{ind}\, D = \frac{1}{2}\big(\mathrm{sign}\, M_- - \mathrm{sign}\, M_+\big).$$

Здесь $M_\pm$ *— матрицы монодромии операторов* $D_\pm$, *а* $\mathrm{sign}\, M = \#\{|\lambda_M| > 1\} - \#\{|\lambda_M| < 1\}$, *где* λ_M *пробегает множество* $\mathrm{Spec}\, M$, *есть сигнатура матрицы* M.

В **§3.5** в качестве примере вычисляется индекс оператора первого порядка на прямой.

Глава 4 состоит из 3 параграфов и посвящена эллиптическим операторам в $\mathbb{R}^N$, ассоциированным с метаплектической группой.

В **§4.1** приводятся предварительные сведения о псевдодифференциальных операторах Шубина в $\mathbb{R}^N$, метаплектических операторах, а также строятся эргодические меры на сфере.

В **§4.2** вводятся двучленные операторы, ассоциированные с метаплектической группой, и определяется символ таких операторов:

$$\mathcal{D} = D_0 + D_1\Phi \colon \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{H}^{s-d}(\mathbb{R}^N), \tag{16}$$

где D_0 и D_1 — псевдодифференциальные операторы порядка d на $\mathbb{R}^N$, а $\Phi = \Phi(S)$ — метаплектический оператор, ассоциированный с симплектической матрицей $S = \pi^{\mathrm{Mp}}(\Phi) \in \mathrm{Sp}(N)$.

Определение 24. *Траекторным символом* $\sigma_{\mathrm{tr}}(\mathcal{D})$ оператора (16) называется операторнозначная функция $\sigma_{\mathrm{tr}}(\mathcal{D})(x,\xi)\colon \ell^2(\mathbb{Z}, \mu_{x,\xi,s}) \to \ell^2(\mathbb{Z}, \mu_{x,\xi,s-d})$, на $\mathbb{R}^{2N}_0 \overset{\mathrm{def}}{=} \mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}$, заданная для каждого $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2N}_0$ формулой

$$\left[\sigma_{\mathrm{tr}}(\mathcal{D})(x,\xi)\right] w(n) = \sigma(D_0)\big(S^n(x,\xi)\big)\, w(n) + \sigma(D_1)\big(S^n(x,\xi)\big)\, w(n-1).$$

Здесь пространство $\ell^2(\mathbb{Z}, \mu_{x,\xi,s})$ определено формулой (10) для веса

$$\mu_{x,\xi,s}(n) = |S^n(x,\xi)|^{2s}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Определение 25. Оператор (16) называется *эллиптическим*, если его траекторный символ $\sigma_{\mathrm{tr}}(\mathcal{D})$ определяет обратимый оператор для всех $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2N}_0$.

Основной результат главы — явные критерии фредгольмовости рассматриваемых операторов.

Теорема 26. *1. Пусть оператор* (16) *эллиптичен. Тогда он фредгольмов.*

2. Пусть для оператора (16) *действие группы* $\mathbb{Z}$ *на* $\mathbb{S}^{2N-1}$, *индуцированное матрицей* $S = \pi^{\mathrm{Mp}}(\Phi)$, *топологически свободно. В этом случае оператор является фредгольмовым, если выполнено одно из следующих условий*:

(a) $\sigma(D_0)(x,\xi) \neq 0$ *для всех* $(x,\xi) \in \mathbb{S}^{2N-1}$ *и*

$$\mathcal{M}_\mu\big(\sigma(D_0)(x,\xi)\big) > \mathcal{M}_\mu\big(|S^{-1}(x,\xi)|^{-s}\sigma(D_1)(x,\xi)\big) \quad \forall\, \mu \in \mathrm{Meas}_S(\mathbb{S}^{2N-1});$$

(b) $\sigma(D_1)(x,\xi) \neq 0$ *для всех* $(x,\xi) \in \mathbb{S}^{2N-1}$ *и*

$$\mathcal{M}_\mu\big(\sigma(D_0)(x,\xi)\big) < \mathcal{M}_\mu\big(|S^{-1}(x,\xi)|^{-s}\sigma(D_1)(x,\xi)\big) \quad \forall\, \mu \in \mathrm{Meas}_S(\mathbb{S}^{2N-1}).$$

Здесь $\mathcal{M}_\mu(a) = \exp\big(\int_{\mathbb{S}^{2N-1}} \ln|a(\omega)|d\mu(\omega)\big)$, *а через* $\mathrm{Meas}_S(\mathbb{S}^{2N-1})$ *обозначено множество всех нормированных* S*-инвариантных эргодических мер на* $\mathbb{S}^{2N-1}$.

Наконец, в **§4.3** в качестве примера даны явные условия фредгольмовости двучленных операторов, ассоциированных с симплектической матрицей специального вида.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Для обратимых операторов с параметром и периодическими коэффициентами на гладком замкнутом многообразии введено понятие η-инварианта, установлены его основные свойства. Для гладких гомотопий семейств получена формула производной η-инварианта.

2. Для эллиптических дифференциально-разностных операторов на бесконечном цилиндре получена формула индекса. Более точно, получено выражение аналитического индекса в терминах внутреннего и конормальных символов на бесконечности, последние при этом представляют собой операторы с параметром и периодическими коэффициентами.

3. Для операторов на прямой, периодических на бесконечности, введено понятие η-инварианта, установлены его основные свойства, выражена его связь с η-инвариантом соответствующих операторов с параметром. Установлена формула индекса в случае дифференциальных операторов в терминах матриц монодромии предельных операторов на бесконечности. Получено выражение для η-инварианта через спектр матрицы монодромии.

4. Для операторов в $\mathbb{R}^N$, ассоциированных с метаплектической группой, получены явные условия эллиптичности, гарантирующие фредгольмовость оператора, в терминах эргодических мер, в зависимости от показателя гладкости пространств Соболева, в которых оператор действует.

В заключение автор выражает глубокую благодарность и большую признательность научному руководителю Савину А. Ю. за постановку задачи, поддержку и внимание к работе. Также автор благодарит Сипайло П. А. за помощь и плодотворные обсуждения в ходе работы над диссертацией. Автор является победителем конкурса “Молодая математика России” и выражает благодарность его спонсорам и жюри.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания: соглашение № 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах

1. Sipailo P. A., Zhuikov K. N. Elliptic $\mathbb{Z}$-operators assosiated with the metaplectic group // *Russ. J. Math. Phys.* — 2021. — Vol. 28, no. 3. — Pp. 377–388.
2. Savin A. Yu., Zhuikov K. N. η-invariant and index for operators on the real line periodic at infinity // *Eurasian Math J.* — 2021. — Vol. 12, no. 3. — Pp. 57–77.
3. Zhuikov K. N., Savin A. Yu. Eta-invariant for parameter-dependent families with periodic coefficients // *Ufa. Math. J.* — 2022. — Vol. 14, no 2. — Pp. 35–55.
4. Zhuikov K. N. Index of differential-difference operators on an infinite cylinder // *Russ. J. Math. Phys.* — 2022. — Vol. 29, no. 2. — Pp. 280–290.

Тезисы конференций

1. Жуйков К.Н. “Об эллиптических операторах, ассоциированных с метаплектической группой,” *Материалы Международного молодежного научного форума “ЛОМОНОСОВ-2020”*, МАКС Пресс, 2020, ISBN 978-5-317-06519-5.
2. Zhuikov K.N., Savin A.Yu. “Eta-invariant for Elliptic Operators with Shifts on Manifolds with Cylindrical Ends,” *CONFERENCE ABSTRACTS. International Student Conference “Science and Progress”*, SPb.: SBORKA, 2020, ISBN 978-5-85263-224-1.
3. Жуйков К.Н., Сипайло П.А. “Об эллиптических операторах, ассоциированных с метаплектической группой,” *Современные методы теории краевых задач : материалы Международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа “Понтрягинские чтения — XXXI”*, Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2020, ISBN 978-5-9273-3025-6.
4. Zhuikov K.N., Savin A.Yu. “An Index Theorem for Operators on the Real Line Periodic at Infinity,” *CONFERENCE ABSTRACTS. International Student Conference “Science and Progress”*, SPb.: SBORKA, 2021, ISBN 978-5-85263-109-1.
5. Жуйков К.Н. “Эта-инвариант для семейств с параметром и периодическими коэффициентами,” *Материалы Международного молодежного научного форума “ЛОМОНОСОВ-2021”*, МАКС Пресс, 2021, ISBN 978-5-317-06593-5.
6. Жуйков К.Н., Савин А.Ю. “Эта-инвариант для семейств с параметром и периодическими коэффициентами,” *Современные методы теории краевых задач : материалы Международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа “Понтрягинские чтения — XXXII”*, Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2021, ISBN 978–5–9273–3219–9.
7. Zhuikov K.N. “Eta-invariant for parameter-dependent families with periodic coefficients,” *Spectral Theory and Mathematical Physics. Asymptotic Methods of Mathematical Physics (Buslaev conference). 12th St. Petersburg conference in Spectral Theory (Birman conference). Summer School. St. Petersburg*, ООО "Издательство ВВМ"(Санкт-Петербург), 2021.
8. Savin A.Yu., Zhuikov K.N. “On a Generalisation of the Melrose Eta-invariant,” *Сборник материалов международной конференции КРОМШ- 2021*, Симферополь: ПОЛИПРИНТ, 2021, ISBN 978-5-6046943-4-3.
9. Жуйков К.Н. “Эта-инвариант и индекс для операторов на прямой, периодических на бесконечности,” *Материалы Международного молодежного научного форума “ЛОМОНОСОВ-2022”*, МАКС Пресс, 2022, ISBN 978-5-317-06824-0.
10. Zhuikov K.N. “On the index of differential-difference operators in an infinite cylinder,” *Девятая международная конференция по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям. Москва, Россия, 28 июня – 5 июля 2022 г.”*, Москва: РУДН, 2022, ISBN 978-5-209-11108-5.

Константин Николаевич Жуйков

Об индексе эллиптических операторов, ассоциированных с группами сдвигов

В диссертационной работе исследуются нелокальные эллиптические операторы на некомпактных многообразиях. Более точно, для дифференциально-разностных операторов на бесконечном цилиндре получена формула индекса в терминах внутреннего и конормального символов рассматриваемого оператора на бесконечности. Конормальный символ представляет собой семейство операторов с параметром на гладком замкнутом многообразии. Для таких семейств введено понятие η-инварианта, установлены его основные свойства и получена формула для производной η-инварианта гладкой гомотопии семейств операторов с параметром. Построенный η-инвариант выражает вклад бесконечности в формулу индекса. Далее рассмотрены псевдодифференциальные операторы на прямой, периодические на бесконечности, для которых определён η-инвариант и установлена формула индекса. Также исследованы операторы в $\mathbb{R}^N$, ассоциированные с метаплектической группой. Получены явные критерии фредгольмовости таких операторов в терминах симплектических матриц, отвечающих метаплектическим операторам.

Konstantin Nikolaevich Zhuikov

On the index of elliptic operators associated with groups of shifts

The dissertation is devoted to nonlocal elliptic operators on noncompact manifolds. More precisely, for differential-difference operators on an infinite cylinder, an index formula is obtained in terms of the interior and the conormal symbols of the operator in question at infinity. The conormal symbol is a family of parameter-dependent operators on a smooth closed manifold. For such families, the concept of η-invariant is introduced, its main properties are established, and a formula for the derivative of the η-invariant of a smooth homotopy of families in question is obtained. The constructed η-invariant expresses the contribution of infinity to the index formula. Next, we consider differential operators on the real line, periodic at infinity, for which the η-invariant is defined and an index formula is obtained. Finally, the operators in $\mathbb{R}^N$ associated with the metaplectic group are studied. Explicit criteria for the Fredholmness of such operators are obtained in terms of the symplectic matrices corresponding to the metaplectic operators.

Жуйков Константин Николаевич

Об индексе эллиптических операторов, ассоциированных с группами сдвигов

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___.2022. Заказ № __________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография РУДН