На правах рукописи

Иванова Ника Михайловна

Исследование вероятностно-временных характеристик моделей k-из-n с приложением к анализу надёжности привязного мультироторного летательного модуля

Специальность 1.2.3. Теоретическая информатика, кибернетика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2023

Работа выполнена на кафедре прикладной информатики и теории вероятностей Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Рыков Владимир Васильевич**

Официальные оппоненты: **Нетес Виктор Александрович**, доктор технических наук, старший научный сотрудник, профессор кафедры «Сети связи и системы коммутации» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский технический университет связи и информатики»

Зорин Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой теории вероятностей и анализа данных федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Румянцев Александр Сергеевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории телекоммуникационных систем Института прикладных математических исследований — обособленное подразделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки Федерального исследовательского центра «Карельский научный центр Российской академии наук»

Защита состоится 22 сентября 2023 г. в 15:00 на заседании диссертационного совета ПДС 0200.006 на базе РУДН по адресу: г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд. 214.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке РУДН по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6.

Автореферат разослан ______ _________________ 2023 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета ПДС 0200.006
канд. физ.-мат. наук, доц. А. В. Демидова

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Моделирование информационных процессов (сбор, передача, обработка и хранение данных и информации) и управление ими являются актуальными задачами в связи с широким внедрением цифровизации в разнообразные области человеческой деятельности (телекоммуникации, транспорт, менеджмент, медицина, сельское хозяйство). Важность задачи повышения надёжности технических систем, в том числе информационных, обусловлена тем, что неудовлетворительная надёжность зачастую порождает крупные расходы на обслуживание этих систем, а в некоторых случаях может привести к серьёзным последствиям, вплоть до отказа в выполнении своих функций.

В начале 20-го века исследование математических моделей процессов передачи информации, в том числе в телефонных сетях, привело к созданию теории массового обслуживания (ТМО) в рамках математической теории исследования операций. Появление классических моделей систем массового обслуживания (СМО) – Эрланга, Энгсета и других вызвано последующим развитием ТМО. Совершенствование современных технологий, отвечающих за информационные процессы, ставит перед исследователями и проектировщиками новые задачи. При этом требования к надёжности таких системы довольно высоки.

Одной из широко распространённых методик повышения надёжности технических систем является техника резервирования. Модель k-из-n ($1 \leq k \leq n$) является одним из примеров резервированной системы, состоящей из n компонентов и отказывающей при отказе любых k её компонентов.

Исследование надёжности моделей k-из-n представляет интерес как с теоретической, так и с практической точек зрения. С теоретической точки зрения это даёт широкие возможности для создания и применения новых математических методов и алгоритмов. С практической точки зрения модели k-из-n находят применение во многих явлениях реального мира, включая телекоммуникационную отрасль, инженерное дело, производство и сервисные приложения. В информационных процессах модель k-из-n применяется для моделирования кластеров высокой доступности (High Availability cluster), где все узлы, имеющие однородную конфигурацию программного обеспечения, выполняют одинаковые запросы, а в случае отказа одного из узлов нагрузка перераспределяется между оставшимися. В рамках исследования технических систем модели k-из-n также применяются для решения проблемы «последней мили» в системах передачи данных на базе мультироторного беспилотного летательного аппарата (БПЛА) (или беспилотного модуля) привязной высотной платформы.

Исследования в области надёжности информационных процессов и технических систем охватывают широкий спектр задач и направлений, одними из которых является исследование и анализ чувствительности их характеристик к виду распределения времени безотказной работы (в.б.р.) и ремонта её компонентов. Понятие «чувствительность» имеет разные толкования в зависимости от области, в которой используется этот термин. Это свидетельствует о том, что так называемая теория чувствительности является мультидисциплинарной. Несмотря на это, общий смысл этого термина таков. Под чувствительностью понимается некоторое свойство системы или модели, отвечающее за изменчивость выходных данных при изменении исходных параметров модели. Как упоминалось ранее моделирование систем передачи информации привело к развитию ТМО. Анализ чувствительности в свою очередь берёт своё начало из изучения моделей ТМО.

Исследование надёжности информационных процессов и технических систем является первостепенной задачей во всех областях, где они могут быть использованы. Целью анализа чувствительности моделей, которые соответствуют этим процессам и системам, является выявление влияния исходных данных на поведение всей модели и, как следствие, поддержание высоконадёжной работоспособности системы. Практическая значимость данной проблемы обусловлена и другим фактором. На практике длительности безотказной работы и ремонта компонентов зачастую либо известны из технических характеристик системы, либо оцениваются на основе имеющихся статистических данных с точностью до двух моментов. Однако для проведения вероятностного анализа надёжности и эффективности системы этой информации недостаточно, необходимо знать вид распределения соответствующего времени. В этом случае анализ чувствительности не только восполнит пробел отсутствия информации, но и послужит в качестве набора рекомендаций для инженеров, разработчиков и проектировщиков в контексте повышения надёжности технических систем и эффективности информационных процессов.

Таким образом диссертационная работа посвящена исследованию технических систем и информационных процессов на основе резервированных моделей k-из-n и анализу чувствительности показателей надёжности этих моделей к виду распределения исходной информации, что определяет её актуальность, новизну, а также тесную связь с современным уровнем развития этого направления. В качестве примера модели будет рассматриваться БПЛА привязной высотной телекоммуникационной платформы.

Степень разработанности темы. В настоящее время в России и за рубежом исследованию моделей k-из-n и их приложениям посвящено много работ. Большинство этих исследований опирается на предположение о показательно распределенном в.б.р. и ремонта компонентов системы. В отличие от известных работ в настоящей диссертации представлены математические модели k-из-n с произвольным распределением времени ремонта компонентов и всей системы.

Исследованием моделей k-из-n, в том числе в рамках анализа надёжности мультироторного летательного модуля, занимались отечественные и зарубежные ученые, В. В. Рыков, В. М, Вишневский, И. Б. Герцбах, И. Шпунгин, K. Trivedi, W. Kuo, M. Zuo, A. Krishnamoorthy, S. Chakravarthy, M. Xie, S. Amari, R. Bergman, Y. Zhang и другие. Задачам анализа систем передачи данных, осуществляемых с помощью БПЛА, посвящено значительное количество работ. Вклад в развитие теоретических основ этих исследований внесли российские ученые К. Е. Самуйлов, Ю. В. Гайдамака, В. М. Вишневский, Р. В. Киричек, А. Е. Кучерявый, Д. А. Молчанов и другие.

Важной частью исследования надёжности стохастических систем является анализ чувствительности характеристик этих систем к виду исходной информации. Значительный вклад в развитие этой области внесли многие ученые, Б. А. Севастьянов, Б. В. Гнеденко, А. Д. Соловьёв, Ю. К. Беляев, И. Н. Коваленко, И. А. Ушаков, В. А. Ивницкий, В. В. Калашников, Д. Кёниг, В. В. Рыков и другие.

Целью данной работы является анализ математических моделей k-из-n и их применение для исследования надёжности и чувствительности мультироторного беспилотного модуля привязной высотной телекоммуникационной платформы к виду функции распределения (ф.р.) в.б.р. и ремонта компонентов. Для достижения поставленной цели сформулированы и решены следующие **задачи**:

1. Исследование математических моделей k-из-n с показательным распределением в.б.р. и произвольным распределением времени ремонта компонентов и всей системы для двух сценариев восстановления системы после полного отказа.
2. Разработка методов, алгоритмов и программных средств вычисления основных вероятностно-временных характеристик надёжности моделей k-из-n на основе метода марковизации.
3. Применение теоретических результатов для вычисления основных вероятностно-временных характеристик надёжности моделей k-из-n с помощью численных методов, а также исследование чувствительности этих характеристик к виду ф.р. и коэффициенту вариации времени ремонта.
4. Разработка имитационных моделей систем k-из-n с произвольными распределениями в.б.р. и ремонта компонентов и всей системы, исследование чувствительности характеристик надёжности к виду ф.р. и коэффициенту вариации в.б.р. и ремонта компонентов и всей системы.

Научная новизна:

1. В отличие от известных исследований, изучены модели восстанавливаемой системы k-из-n с произвольными распределениями как в.б.р., так и времени восстановления её компонентов и всей систе-

мы. При этом рассмотрены два сценария для восстановления всей системы.
2. Для распределения вероятностей состояний двумерного марковского процесса с дискретно-непрерывным множеством состояний, который описывает математические модели k-из-n с произвольным распределением времени восстановления её компонентов и системы в целом, впервые выведены системы дифференциальных уравнений Колмогорова, получено их аналитическое решение в терминах преобразования Лапласа, предложен и реализован в частных случаях алгоритм его численного исследования.
3. Наряду с аналитическим исследованием чувствительности характеристик надёжности моделей k-из-n к виду ф.р. и коэффициенту вариации времени ремонта, впервые проведён анализ чувствительности моделей k-из-n к виду распределения времени безотказной работы их компонентов с помощью имитационной модели.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическую значимость представляют разработанные в диссертации математические методы и вычислительные алгоритмы анализа вероятностно-временных характеристик надёжности моделей k-из-n с произвольным распределением времени ремонта компонентов и всей системы. Созданные на основе полученных теоретических результатов программы численного исследования и имитационного моделирования представляют практическую значимость, поскольку позволяют производить расчёты характеристик надёжности мультироторного беспилотного модуля привязной высотной телекоммуникационной платформы на основе восстанавливаемых моделей k-из-n с произвольными распределениями и в.б.р., и ремонта компонентов и системы. Более того, предложенные алгоритмы и программы позволяют находить оценку скорости сходимости ф.р. в.б.р. системы к показательному распределению при быстром восстановлении её компонентов. Полученные теоретические результаты и разработанные программные средства были использованы для оценки надёжности БПЛА, а также проведения анализа чувствительности характеристик надёжности беспилотного модуля к виду исходной информации.

Результаты работы также были использованы в исследованиях, проводимых по следующим конкурсам и грантам:

- Конкурс на выполнение НИР/НИОКР аспирантами РУДН Системы грантовой поддержки научных проектов РУДН в 2022 году, НИР № 021930-2-000 «Исследование и анализ чувствительности систем k-из-n с произвольными исходными распределениями» (руководитель Иванова Н.М.).
- Грант Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) № 20-01-00575А «Эргодичность классических и конечно-адди

тивных марковских процессов и ее применение в прикладных стохастических моделях» (руководитель Веретенников А.Ю.).
- Грант Российского научного фонда (РНФ) № 22-49-02023 «Разработка и исследование методов повышения надёжности привязных высотных беспилотных телекоммуникационных платформ нового поколения» (руководитель Вишневский В.М.).

Кроме того, результаты диссертации были внедрены в учебный процесс в рамках учебной дисциплины «Прикладные стохастические модели», читаемой студентам магистратуры 1-го курса направления «Прикладная математика и информатика» РУДН.

Методы исследования. Диссертационное исследование опирается на методы теории вероятностей, случайных процессов, надёжности, численные методы решения дифференциальных уравнений. В диссертационной работе на основе метода введения дополнительных переменных разработана методика составления и решения прямых дифференциальных уравнений Колмогорова для вычисления нестационарных вероятностей состояний двумерного марковского процесса с дискретно-непрерывным множеством состояний. Эти уравнения приводят к дифференциальным уравнениям в частных производных гиперболического типа с кратными корнями характеристических уравнений. На основе метода характеристик предложен алгоритм решения систем соответствующих уравнений. Для исследования вероятностных характеристик надёжности системы, работающей в стационарном режиме, применён метод вариации постоянных. Более того, для анализа систем с произвольными распределениями как в.б.р. компонентов системы, так и их ремонта разработаны программные средства имитационного моделирования, которые использованы для анализа чувствительности характеристик надёжности этих систем к виду ф.р. и коэффициенту вариации в.б.р. и ремонта их компонентов.

Положения, выносимые на защиту:

1. Двумерный марковский процесс с дискретно-непрерывным множеством состояний, который позволяет вычислять характеристики надёжности математических моделей k-из-n с произвольным распределением времени ремонта компонентов и системы для двух сценариев восстановления системы после отказа.
2. Аналитическое решение дифференциальных уравнений Колмогорова в частных производных для вероятностей состояний марковского процесса с дискретно-непрерывным множеством состояний, которое позволяет вычислять нестационарные вероятности состояний системы (вероятности переходного режима) и функцию надёжности системы, алгоритм их численного исследования, а также решение и численное исследование уравнений баланса для стационарного режима.

3. Анализ надёжности моделей k-из-n и исследование чувствительности их характеристик к виду функции распределения и значению коэффициента вариации времени ремонта, который осуществляется как аналитическими методами (для показательно распределённых длительностей безотказной работы компонентов модели), так и с помощью имитационного моделирования в случае произвольного распределения в.б.р. компонентов.

Степень достоверности полученных результатов обеспечивается их строгими доказательствами, а также подтверждается численными расчётами и вычислительными экспериментами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях: 9-я конференция с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» (ИТТММ 2019; Москва, РФ), 23-я и 25-я Международные конференции «Распределённые компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» (DCCN 2020, DCCN 2022; Москва, РФ), the 30th European Safety and Reliability Conference and 15th Probabilistic Safety Assessment and Management Conference (ESREL 2020 PSAM15; Venice, Italy), 17-я Всероссийская школа-конференция молодых учёных «Управление большими системами» (УБС 2021, Москва, РФ), 21-я Международная конференция им. А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (ИТММ 2022; Карши, Узбекистан), the 20th Conference of the Applied Stochastic Models and Data Analysis International Society (ASMDA 2023; Heraklion, Crete, Greece).

Соответствие паспорту специальности. Диссертационное исследование соответствует следующим разделам паспорта специальности 1.2.3 Теоретическая информатика, кибернетика, а именно **п. 9** «Математическая теория исследования операций», **п. 12** «Модели информационных процессов и структур», **п. 26** «Теория надёжности и безопасности использования информационных технологий».

Личный вклад. Основные результаты диссертационной работы получены автором самостоятельно. В монографии [1] автором получены аналитические и численные результаты, содержащиеся в главах 2, 3. В работе [2] автору принадлежит участие в разработке и реализации алгоритма вычисления функции надёжности модели k-из-n. В работах [3—5] – аналитические результаты и численные эксперименты. В [6; 7] – разработка имитационной модели для оценки вероятностных характеристик надёжности модели k-из-n. Работы [8—14] выполнены без соавторов.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 13 печатных изданиях, включая 1 монографию, 1 публикацию в журнале, рекомендованном ВАК, 6 — в изданиях, индексируемых Web of Science и Scopus, 5 — в тезисах докладов. Зарегистрирована 1 программа для ЭВМ.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, изложены научная новизна и практическая значимость.

Первая глава посвящена аналитическому исследованию восстанавливаемых моделей k-из-n и их характеристик надёжности с показательно распределённым в.б.р. и произвольно распределённым временем ремонта компонентов в случае двух сценариев восстановления системы после отказа. Под восстанавливаемой моделью понимается следующее.

1) Любой i-ый компонент системы, $i = \overline{1, n}$, может отказать, после чего он восстанавливается в течение некоторого случайного времени, при этом не отказавшие компоненты продолжают функционировать в прежнем режиме; по завершению восстановления отремонтированный компонент заново функционирует, и начинается ремонт следующего отказавшего ранее компонента (если таков есть);
2) Отказ любых k компонентов приводит к отказу системы и её восстановлению, для которого возможны как минимум два сценария:
   – при *частичном восстановлении* системы восстанавливается лишь один отказавший компонент, после его ремонта система функционирует в прежнем режиме;
   – *полное восстановление* системы подразумевает восстановление всех отказавших компонентов в течение некоторого случайного времени, по истечении которого система функционирует как новая, все её компоненты становятся работоспособными.

Для упрощения записи исследуемой модели введена расширенная символика Кендалла-Башарина, $\langle GI_{k<n}|GI|1\rangle$, где угловые скобки $\langle\rangle$ означают замкнутую систему обслуживания с ограниченным числом источников заявок. Символ GI (General Independent) используется для обозначения рекуррентного потока (или обслуживания) с произвольным (абсолютно непрерывным) законом распределения для в.б.р. компонентов системы, в которой $k < n$, и времени ремонта этих компонентов для первого и второго места в обозначении соответственно. Последний символ указывает на число ремонтных единиц. В первой главе диссертации рассматривается модель $\langle M_{k<n}|GI|1\rangle$, что означает показательное распределение в.б.р. компонентов системы и произвольное распределение времени их ремонта.

В разделе 1.1 сформулирована постановка исследуемой задачи, введены обозначения и предположения.

Раздел 1.2. посвящен методу введения дополнительных переменных и его применению к поставленной задачи.

Для того чтобы аналитически исследовать вероятностно-временные характеристики надёжности исходного немарковского процесса предложено использовать метод введения дополнительных переменных, где в качестве дополнительной переменной выбрано время, затраченное к моменту t на ремонт отказавшего компонента.

Рассматривается двумерный марковский процесс $Z(t)$,

$$Z(t) = \{J(t), X(t)\}, \quad t \geq 0,$$

где $J(t) = j$ – число компонентов, находящихся в состоянии отказа в момент времени t, $j \in \mathbf{E} = \{0,1,2,...,k-1,k\}$, и $X(t)$ – прошедшее время ремонта отказавшего компонента. Тогда $\overline{\mathbf{E}} = \{0,(i,x) \mid i = \overline{1,k},\ x \in \mathbb{R}_+\}$ – фазовое пространство состояний процесса $Z(t)$.

Замечание 1.1. Поскольку процесс $Z(t)$ описывает поведение модели k-из-n, то вычисленные для процесса $Z(t)$ характеристики будут тождественны характеристикам модели k-из-n.

Раздел 1.3 посвящен вычислению нестационарных вероятностей состояний системы (вероятностей переходного режима),

$$\pi_0(t) = \mathbb{P}\{J(t) = 0\}, \quad \pi_i(t) = \int_0^\infty \pi_i(t,x)dx,\ i = \overline{1,k},$$

где $\pi_i(t,x)dx = \mathbb{P}\{J(t) = i, x < X(t) \leq x + dx\}$ $(i = \overline{1,k})$ – плотности распределения (п.р.) вероятностей микро-состояний процесса $Z(t)$. Составлен граф интенсивностей переходов процесса $Z(t)$ на множестве состояний $\overline{\mathbf{E}}$, с помощью которого выписаны системы конечно-разностных уравнений методом сравнения соответствующих вероятностей состояний процесса в близкие моменты времени t и $t + \Delta$.

Теорема 1.1. Система дифференциальных уравнений Колмогорова для вычисления нестационарных вероятностей состояний модели k-из-n в случае частичного ремонта, где k – любое значение в интервале $\overline{2,n}$, принимает вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\pi_0(t) = -\lambda_0\pi_0(t) + \int_0^t \beta(x)\pi_1(t,x)dx,\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_1(t,x) = -(\lambda_1 + \beta(x))\pi_1(t,x),\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_i(t,x) = -(\lambda_i + \beta(x))\pi_i(t,x) + \lambda_{i-1}\pi_{i-1}(t,x),\ i = \overline{2,k-1},\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_k(t,x) = -\beta(x)\pi_k(t,x) + \lambda_{k-1}\pi_{k-1}(t,x),
\end{aligned} \tag{1}$$

вместе с начальными

$$\pi_0(0) = 1, \quad \pi_i(0,x) = 0, \quad i = \overline{1,k}, \quad \forall x \geq 0, \tag{2}$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned}
&\pi_1(t,0) = \lambda_0\pi_0(t) + \int_0^t \beta(x)\pi_2(t,x)dx,\\
&\pi_i(t,0) = \int_0^t \beta(x)\pi_{i+1}(t,x)dx, \quad i=\overline{2,k-1},\\
&\pi_k(t,0) = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $\lambda_i = (n-i)\alpha$ $(i=\overline{0,k-1})$ – интенсивность отказа компонента системы, находящейся в состоянии i, α – интенсивность отказа одного компонента, $\beta(x) = \dfrac{b(x)}{1-B(x)}$ – интенсивность восстановления отказавшего компонента с учётом времени x, затраченного на его ремонт, где $B(x) = \mathbb{P}\{B \le x\}$ – ф.р. случайной величины (с. в.) B времени ремонта компонента с конечным математическим ожиданием b, $b(x)$ – соответствующая п. р. Предполагается, что $B(0)=0$.

Для аналитического решения системы уравнений (1) с начальными (2) и граничными условиями (3) для вычисления преборазования Лапласа (ПЛ) нестационарных вероятностей состояний

$$\tilde{\pi}_0(s) = \int_0^\infty e^{-st}\pi_0(t)dt, \quad \tilde{\pi}_i(s) = \int_0^\infty e^{-st}\int_0^t \pi_i(t,x)dxdt,\ i=\overline{1,k},$$

используется метод характеристик решения системы дифференциальных уравнений в частных производных.

Метод характеристик заключается в приведении уравнения в частных производных к семейству обыкновенных дифференциальных уравнений. В общем случае решение дифференциального уравнения в частных производных

$$k_1\frac{\partial\pi}{\partial x} + k_2\frac{\partial\pi}{\partial t} = f(x,t)$$

состоит в том, чтобы путём замены

$$\frac{dx}{du} = k_1, \quad \frac{dt}{du} = k_2 \tag{4}$$

превратить дифференциальное уравнение в частных производных в обыкновенное дифференциальное уравнение,

$$\frac{d\pi}{du} = \frac{\partial\pi}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial\pi}{\partial t}\frac{dt}{du} = f(x,t),$$

вдоль кривой, определяемой уравнениями (4) и называемой характеристикой исходного дифференциального уравнения в частных производных.

Так как коэффициенты при частных производных уравнений (1) равны $k_1 = k_2 = 1$, для построения общего решения этой системы уравнений метод характеристик будет заключаться в построении семейства кривых по параметру u в области определения $0 \le x \le t < \infty$ системы (1), удовлетворяющих системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dt}{du} = 1, \ \ \frac{dx}{du} = 1. \tag{5}$$

В качестве параметра u выбрана переменная x. Подставляя коэффициенты перед каждым уравнением в частных производных системы (1) для их представления (5) по параметру x, получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих функции $\pi_i(x)$, $i = \overline{1, k-1}$, по характеристикам,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\pi_1(x) = -(\lambda_1 + \beta(x))\pi_1(x),\\
&\frac{d}{dx}\pi_i(x) = -(\lambda_i + \beta(x))\pi_i(x) + \lambda_{i-1}\pi_{i-1}(x), \ i = \overline{2, k-1},\\
&\frac{d}{dx}\pi_k(x) = -\beta(x)\pi_k(x) + \lambda_{k-1}\pi_{k-1}(x).
\end{aligned} \tag{6}$$

Начальные (2) и граничные условия (3) использованы для распространения решения данных уравнений с характеристик на всю область определения системы уравнений в частных производных.

На основе этой идеи предложен алгоритм решения системы дифференциальных уравнений в частных производных для вычисления нестационарных вероятностей состояний в терминах ПЛ, $\tilde{\pi}_j(s)$, $j = \overline{0, k}$.

Замечание 1.2. Вычисление обратного ПЛ $\tilde{\pi}_j(s)$ для произвольного распределения времени покомпонентного ремонта $B(t)$ является отдельной задачей и остается за рамками данной диссертационной работы, поэтому будет рассмотрено в Главе 2 только численно.

Для случая $k = 1$ (т.е. модель системы последовательного соединения 1-из-n) из теоремы 1.1 получено следующее следствие.

Следствие 1.1. Нестационарные вероятности состояний модели 1-из-n в терминах ПЛ с произвольным распределением времени ремонта её компонентов принимают следующий вид,

$$\tilde{\pi}_0(s) = \left(s + \lambda_0(1 - \tilde{b}(s))\right)^{-1}, \quad \tilde{\pi}_1(s) = \frac{\lambda_0(1 - \tilde{b}(s))}{s(s + \lambda_0(1 - \tilde{b}(s)))}.$$

Здесь $\tilde{b}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} b(x)dx$ – ПЛ п.р. времени покомпонентного и частичного восстановления системы.

Аналогично в **<u>разделе 1.3.2</u>** исследована модель k-из-n в случае полного ремонта, получены и доказаны следующие результаты.

Теорема 1.2. Система дифференциальных уравнений Колмогорова для вычисления нестационарных вероятностей состояний модели k-из-n в случае полного ремонта, где k – любое значение в интервале $\overline{3,n}$, принимает вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\pi_0(t) = -\lambda_0\pi_0(t) + \int_0^t \beta(x)\pi_1(t,x)dx + \int_0^t \phi(x)\pi_k(t,x)dx,\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_1(t,x) = -(\lambda_1 + \beta(x))\pi_1(t,x),\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_i(t,x) = -(\lambda_i + \beta(x))\pi_i(t,x) + \lambda_{i-1}\pi_{i-1}(t,x),\ i = \overline{2,k-1},\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_k(t,x) = -\phi(x)\pi_k(t,x),
\end{aligned}
\tag{7}
$$

вместе с начальными

$$
\pi_0(0) = 1, \quad \pi_i(0,x) = 0,\, i = \overline{1,k}, \quad \forall x \geq 0, \tag{8}
$$

и граничными условиями

$$
\begin{aligned}
\pi_1(t,0) &= \lambda_0\pi_0(t) + \int_0^t \beta(x)\pi_2(t,x)dx,\\
\pi_i(t,0) &= \int_0^t \beta(x)\pi_{i+1}(t,x)dx, \quad i = \overline{2,k-2},\\
\pi_{k-1}(t,0) &= 0,\\
\pi_k(t,0) &= \lambda_{k-1}\pi_{k-1}(t).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Здесь $\phi(x) = \dfrac{f(x)}{1-F(x)}$ – интенсивность восстановления системы с учётом времени x, затраченного на её ремонт в случае полного восстановления, где $F(x) = \mathbb{P}\{F \leq x\}$ – ф.р. с.в. F времени ремонта системы с конечным математическим ожиданием f, $f(x)$ – соответствующая п.р. Предполагается, что $F(0) = 0$. Решение систем уравнений (7)-(9) выполнено с помощью метода характеристик и представлено в виде алгоритма.

Замечание 1.3. Если в системе с полным восстановлением $k = 1$, то модель совпадает с системой с частичным ремонтом, характеристики которой рассмотрены в Следствии 1.1.

Из теоремы 1.2. вытекает следующее следствие.

Следствие 1.2. Нестационарные вероятности состояний модели 2-из-n в терминах ПЛ в случае полного ремонта и произвольных распределениях времени ремонта компонентов и всей системы принимают следующий вид,

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}_0(s) &= \frac{s+\lambda_1}{s(s+\lambda_1)+\lambda_0(1-\tilde{b}(s+\lambda_1))(s+\lambda_1(1-\tilde{f}(s)))},\\
\tilde{\pi}_1(s) &= \frac{\lambda_0(1-\tilde{b}(s+\lambda_1))}{s(s+\lambda_1)+\lambda_0(1-\tilde{b}(s+\lambda_1))(s+\lambda_1(1-\tilde{f}(s)))},\\
\tilde{\pi}_2(s) &= \frac{1}{s}\cdot\frac{\lambda_0\lambda_1(1-\tilde{b}(s+\lambda_1))(1-\tilde{f}(s))}{s(s+\lambda_1)+\lambda_0(1-\tilde{b}(s+\lambda_1))(s+\lambda_1(1-\tilde{f}(s)))}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $f(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$ – ПЛ п.р. времени восстановления системы в случае её полного ремонта после отказа, $\tilde{b}(s+\lambda_i)=\int\limits_0^\infty e^{-(s+\lambda_i)x}b(x)dx$ – ПЛ п.р. покомпонентного ремонта в точке $s+\lambda_i$.

В разделе 1.4 представлено исследование функции надёжности (вероятности безотказной работы во времени), $R(t)=\mathbb{P}\{T>t\}=1-\pi_k(t)$, где $T=\{\inf t : J(t)=k\}$ – в.б.р. модели k-из-n с покомпонентным восстановлением. Для этого рассматривается процесс $Z(t)$ с поглощением в состоянии k. Выписана и решена система дифференциальных уравнений Колмогорова.

Теорема 1.3. Система дифференциальных уравнений Колмогорова в частных производных для процесса $Z(t)$ с поглощением принимает вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\pi_0(t)=-\lambda_0\pi_0(t)+\int_0^t\beta(x)\pi_1(t,x)dx,\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_1(t,x)=-(\lambda_1+\beta(x))\pi_1(t,x),\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_i(t,x)=-(\lambda_i+\beta(x))\pi_i(t,x)+\lambda_{i-1}\pi_{i-1}(t,x),\ i=\overline{2,k-1},\\
&\frac{d}{dt}\pi_k(t)=\lambda_{k-1}\int\limits_0^t\pi_{k-1}(t,x)dx,
\end{aligned} \tag{11}$$

вместе с начальными

$$\pi_0(0)=1,\ \ \pi_i(0,x)=0,\ i=\overline{1,k},\quad \forall x\geq 0, \tag{12}$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned}
\pi_1(t,0) &= \lambda_0\pi_0(t) + \int_0^t \beta(x)\pi_2(t,x)dx, \\
\pi_i(t,0) &= \int_0^t \beta(x)\pi_{i+1}(t,x)dx,\ i=\overline{2,k-2}, \\
\pi_{k-1}(t,0) &= \pi_k(t,0) = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

На основе метода характеристик также представлен алгоритм решения дифференциальных уравнений (11) с начальными (12) и граничными (13) условиями для вычисления функции надёжности в терминах ПЛ, $\tilde{R}(s) = \int_0^\infty e^{-st}R(t)dt$. С помощью ПЛ функции надёжности легко вычислить среднее в.б.р. системы $\mathbb{E}[T]$.

Следствие 1.3. Среднее в.б.р. модели k-из-n вычисляется как

$$\mathbb{E}[T] = \tilde{R}(s)|_{s=0}.$$

Раздел 1.5 посвящен вычислению стационарных характеристик надёжности системы (предельных вероятностей состояний),

$$\pi_j = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\{J(t)=j\} = \lim_{t\to\infty} \pi_j(t),\ j\in\mathbf{E}.$$

В предположении о существовании предельных вероятностей процесса $Z(t)$, которые совпадают со стационарными, с помощью предельного перехода при $t \longrightarrow \infty$ получены системы уравнений баланса, решение которых представлено с помощью метода вариации постоянных. Так, распределение стационарных вероятностей состояний модели k-из-n с частичным ремонтом при показательном распределении в.б.р. (обозначено символом M в расширенной символике Кендалла-Башарина) представлено в **разделе 1.5.1**.

Теорема 1.4. Стационарные вероятности состояний модели $< M_{k<n}|GI|1 >$ в случае частичного восстановления системы для любых $k>2$ в терминах ПЛ п.р. времени восстановления компонентов $\tilde{b}(\lambda_i)$ в точке λ_i, $i=\overline{1,k-1}$, имеют вид:

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \frac{1}{\lambda_0}C_1\tilde{b}(\lambda_1), \\
\pi_1 &= C_1\frac{1-\tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_1}, \\
\pi_i &= C_i\frac{1-\tilde{b}(\lambda_i)}{\lambda_i} + \mathrm{S}(i-1)\frac{1-\tilde{b}(\lambda_{i-1})}{\lambda_{i-1}}, \quad i=\overline{2,k-1}, \\
\pi_k &= C_k\cdot b - C_{k-1}\frac{1-\tilde{b}(\lambda_{k-1})}{\lambda_{k-1}} - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_{k-2}}\mathrm{S}(k-2)\frac{1-\tilde{b}(\lambda_{k-2})}{\lambda_{k-2}},
\end{aligned} \tag{14}$$

где компоненты C_i, $i=\overline{1,k}$, вычисляются рекуррентно,

$$\begin{aligned}
&C_1=\frac{C_2\tilde{b}(\lambda_2)}{1-\tilde{b}(\lambda_1)\left(1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\right)},\\
&C_i=C_{i+1}\tilde{b}(\lambda_{i+1})+\mathrm{S}(i)\tilde{b}(\lambda_i)-\mathrm{S}(i-1),\quad i=\overline{2,k-2},\\
&C_k=C_{k-1}+\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_{k-2}}\mathrm{S}(k-2),\\
&\mathrm{S}(i)=\sum_{j=1}^{i}(-1)^{i-j+1}\left(\prod_{m=j}^{i}\frac{\lambda_m}{\lambda_j-\lambda_{m+1}}\right)C_j,
\end{aligned}\tag{15}$$

а константа C_{k-1} вычисляется из условия нормировки $\sum_{i\in\mathbf{E}}\pi_i=1$.

Здесь $b=\int\limits_0^\infty(1-B(x))dx<\infty$ – среднее время восстановления компонента. Из теоремы 1.4 вытекают следующие следствия.

Следствие 1.4. Выражения стационарных вероятностей состояний модели 1-из-n не зависят от вида ф.р. времени ремонта и принимают вид

$$\pi_0=\frac{1}{1+b\lambda_0},\quad \pi_1=\frac{b\lambda_0}{1+b\lambda_0}.$$

Следствие 1.5. Стационарные вероятности состояний модели 2-из-n в случае частичного ремонта и произвольного распределения времени восстановления компонентов принимают вид,

$$\pi_0=\frac{\tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_0 b+\tilde{b}(\lambda_1)},\quad \pi_1=\frac{\lambda_0(1-\tilde{b}(\lambda_1))}{\lambda_1(\lambda_0 b+\tilde{b}(\lambda_1))},\quad \pi_2=\frac{\lambda_0(\lambda_1 b+\tilde{b}(\lambda_1)-1)}{\lambda_1(\lambda_0 b+\tilde{b}(\lambda_1))}.$$

Аналогично в **разделе 1.5.2** рассмотрена модель k-из-n в случае полного ремонта.

Теорема 1.5. Стационарные вероятности состояний модели $<M_{k<n}|GI|1>$, в случае полного восстановления системы в терминах ПЛ п.р. времени ремонта компонентов $\tilde{b}(\lambda_i)$ в точке λ_i, $i=\overline{1,k-1}$, для любых $k>2$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\pi_0=\lambda_0^{-1}\left[C_1\left(1+\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\tilde{b}(\lambda_1)\right)-C_2\tilde{b}(\lambda_2)\right],\\
&\pi_1=C_1\frac{1-\tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_1},\\
&\pi_i=C_i\frac{1-\tilde{b}(\lambda_i)}{\lambda_i}+\mathrm{S}(i-1)\frac{1-\tilde{b}(\lambda_{i-1})}{\lambda_{i-1}},\quad i=\overline{2,k-1},\\
&\pi_k=C_k\cdot f,
\end{aligned}\tag{16}$$

где компоненты C_i, $i=\overline{1,k}$, вычисляются рекуррентно,

$$\begin{aligned}
&C_i = C_{i+1}\tilde{b}(\lambda_{i+1}) + \mathrm{S}(i)\tilde{b}(\lambda_i) - \mathrm{S}(i-1),\ i=\overline{2,k-2},\\
&C_{k-1} = -\mathrm{S}(k-2),\\
&C_k = \lambda_{k-1}C_{k-1}\left(\frac{1-\tilde{b}(\lambda_{k-1})}{\lambda_{k-1}} - \frac{1-\tilde{b}(\lambda_{k-2})}{\lambda_{k-2}}\right),\\
&\mathrm{S}(i) = \sum_{j=1}^{i}(-1)^{i-j+1}\left(\prod_{m=j}^{i}\frac{\lambda_m}{\lambda_j-\lambda_{m+1}}\right)C_j,
\end{aligned}\tag{17}$$

с учётом условия нормировки $\sum_{i\in\mathbf{E}}\pi_i = 1$.

Здесь $f=\int\limits_0^\infty(1-F(x))dx<\infty$ – среднее время ремонта системы. Из теоремы 1.5 получено следующее следствие.

Следствие 1.6. Стационарные вероятности состояний модели 2-из-n в случае полного ремонта и произвольного распределения времени восстановления компонентов принимают вид,

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_0(1-\tilde{b}(\lambda_1))(1+\lambda_1 f)},\\
\pi_1 &= \frac{\lambda_0(1-\tilde{b}(\lambda_1))}{\lambda_1+\lambda_0(1-\tilde{b}(\lambda_1))(1+\lambda_1 f)},\\
\pi_2 &= \frac{\lambda_0\lambda_1 f(1-\tilde{b}(\lambda_1))}{\lambda_1+\lambda_0(1-\tilde{b}(\lambda_1))(1+\lambda_1 f)}.
\end{aligned}$$

В **разделе 1.6** сформулированы основные выводы по результатам первой главы.

Во **второй главе** приведено численное исследование надёжности математической модели мультироторного беспилотного модуля (гексакоптера) привязной высотной телекоммуникационной платформы с использованием моделей восстанавливаемых систем 2-из-6 и 3-из-6.

Раздел 2.1 посвящен описанию системы и объекта исследования, приведена структура привязной высотной платформы, рассмотрены различные сценарии функционирования мультироторного модуля, перегрев двигателей которого может привести к остановке работы БПЛА.

В **разделе 2.2** представлено численное исследование нестационарных характеристик надёжности гексакоптера. В **разделах 2.2.1 и 2.2.2** рассмотрены сценарии частичного и полного ремонта соответственно. Получено ПЛ нестационарных вероятностей состояний модели 2-из-6. Численные примеры показали, что при распределении Эрланга времени ремонта нестационарные вероятности состояний слабо чувствительны к значению коэффициента вариации времени ремонта компонентов при фиксированном среднем и продемонстрировали их очевидную сходимость к стационарному распределению при $t \to \infty$.

В **разделе 2.2.3** приведено численное исследование функции надёжности и среднего в.б.р. системы. С помощью приведённого в главе 1 алгоритма выписано ПЛ функции надёжности модели 2-из-n. Показано, что при произвольном распределении времени ремонта компонентов функция надёжности имеет вид смеси двух показательных функций. Для марковского случая приведены выражения в явном виде, а также получена оценка скорости сходимости функции надёжности к показательной.

Следствие 2.1. Функция надёжности $R(t)$ и среднее в.б.р. $\mathbb{E}[T]$ модели $\langle M_{2<n}|M|1\rangle$ с экспоненциальным распределением в.б.р. и ремонта вычисляются как

$$R(t) = 1 - \frac{n(n-1)\alpha^2}{s_1 - s_2} \cdot \left[\frac{1-e^{s_2 t}}{s_2} - \frac{1-e^{s_1 t}}{s_1}\right], \quad \mathbb{E}[T] = \frac{\beta + \alpha(2n-1)}{n(n-1)\alpha^2},$$

где

$$s_{1,2} = \frac{1}{2}\left[-\alpha(2n-1) - \beta \pm \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta(2n-1) + \beta^2}\right].$$

Здесь α и β – интенсивности отказа и восстановления компонентов системы.

Пусть $\rho = \frac{\beta}{\alpha}$ – относительная скорость восстановления компонентов системы.

Теорема 2.1. При $\rho = \frac{\beta}{\alpha} \to \infty$ имеет место равномерная сходимость функции надёжности модели 2-из-n в масштабе её среднего в.б.р.: $\hat{R}(t) \to e^{-t}$, причём скорость сходимости имеет порядок ε:

$$|\hat{R}(t) - e^{-t}| < \varepsilon,$$

где $\varepsilon = \dfrac{n(n-1)}{(\rho + 2n - 1)^2}$.

С помощью численного примера для случая распределения Эрланга времени ремонта показано, что функция надёжности гексакоптера в масштабе его среднего в.б.р. сходится к показательной при $\rho \to \infty$, что говорит о нечувствительности вероятности безотказной работы модели 2-из-6 к значению коэффициента вариации времени ремонта компонентов в масштабе её среднего в.б.р. При этом среднее в.б.р. системы чувствительно к значению коэффициента вариации времени ремонта.

В **разделе 2.3** представлено численное исследование стационарных вероятностных характеристик надёжности гексакоптера. В **разделах 2.3.1 и 2.3.2** рассмотрены сценарии частичного и полного ремонта соответственно. Получены стационарное распределение вероятностей состояний и коэффициент готовности модели 3-из-6, представлены асимптотические выражения стационарных вероятностей в условиях редких отказов компонентов.

Теорема 2.2. В условии редких отказов компонентов, когда $\alpha \to 0$, стационарные вероятности состояний и коэффициент готовности модели 3-из-6 для сценария частичного ремонта системы принимают вид

$$\begin{aligned}
\pi_1 &\approx \frac{6\alpha(2b-5\alpha b_2)}{2-5\alpha(2b-5\alpha b_2)}\pi_0,\\
\pi_2 &\approx \frac{30\alpha^2 b_2}{(1-4\alpha(b-2\alpha b_2))(2-5\alpha(2b-5\alpha b_2))}\pi_0,\\
\pi_3 &\approx \frac{240\alpha^4 b_2^2}{(1-4\alpha(b-2\alpha b_2))(2-5\alpha(2b-5\alpha b_2))}\pi_0,\\
\pi_0 &\approx \frac{(1-4\alpha(b-2\alpha b_2))(2-5\alpha(2b-5\alpha b_2))}{2(1-\alpha b(3+4\alpha b))+\alpha^2 b_2(41+4(50+9\alpha b)))},\\
K_{av} &\approx \frac{2(1-\alpha b(3+4\alpha b))+\alpha^2 b_2(41-4(10-9\alpha b))}{2(1-\alpha b(3+4\alpha b))+\alpha^2 b_2(41+4(50+9\alpha b))}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Здесь b_2 – второй момент времени ремонта компонентов.

Теорема 2.3. При редких отказах компонентов, когда $\alpha \to 0$, стационарные вероятности состояний и коэффициент готовности модели 3-из-6 для сценария полного ремонта системы принимают вид

$$\begin{aligned}
\pi_1 &\approx \frac{6\alpha(2b-5\alpha b_2)}{2-5\alpha(2b-9\alpha b_2)}\pi_0,\\
\pi_2 &\approx \frac{30\alpha^2 b_2}{2-5\alpha(2b-9\alpha b_2)}\pi_0,\\
\pi_3 &\approx \frac{120\alpha^3 f b_2}{2-5\alpha(2b-9\alpha b_2)}\pi_0,\\
\pi_0 &\approx \frac{2-5\alpha(2b-9\alpha b_2)}{2(1+\alpha b)+5\alpha^2 b_2(9+24\alpha f)},\\
K_{av} &\approx \frac{2+\alpha(2b+45\alpha b_2)}{2(1+\alpha b)+5\alpha^2 b_2(9+24\alpha f)}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Теоремы 2.2 и 2.3 показывают, что вид ф.р. времени ремонта влияет на стационарные вероятности состояний с точностью до второго момента времени ремонта компонентов. При сценарии полного ремонта время восстановления системы представлено средним значением.

Представлено численное исследование коэффициента готовности, где в качестве распределения времени ремонта взяты распределения Гамма и Гнеденко-Вейбулла. Полученные результаты свидетельствуют о наличии асимптотической нечувствительности стационарной вероятности безотказной работы модели 3-из-6 с частичным и полным восстановлением к виду распределения времени ремонта и его коэффициенту вариации при фиксированных среднем, коэффициенте вариации и $\rho = \frac{a}{b} \to \infty$.

Раздел 2.4 содержит основные выводы по результатам второй главы.

Третья глава посвящена построению имитационной модели системы k-из-n с произвольными исходными распределениями в.б.р. и ремонта компонентов для исследования характеристик надёжности мультироторного беспилотного модуля с непоказательным в.б.р.

Раздел 3.1 содержит описание разработанной имитационной модели. В **разделе 3.1.1** изложена процедура моделирования системы k-из-n на основе метода дискретно-событийного моделирования для вычисления оценки стационарных и нестационарных характеристик надёжности системы. Алгоритм процесса моделирования представлен с помощью блок-схемы. В **разделе 3.1.2** приведены основные исходные данные, используемые в последующих экспериментах. Определены виды распределений в.б.р. и ремонта компонентов и их параметры в зависимости от значений среднего времени и коэффициента вариации.

В **разделах 3.2 и 3.3** представлены эксперименты по вычислению оценки функции надёжности и коэффициента готовности гексакоптера с помощью имитационного моделирования. В качестве распределений в.б.р. и ремонта рассмотрены распределения Гамма, Гнеденко-Вейбулла, Логнормальное, Парето. Введены обозначения v_a и v_b для коэффициентов вариации в.б.р. и ремонта компонентов соответственно.

В **разделе 3.2.1** на примере модели 2-из-6 с показательным распределением в.б.р. и распределением Эрланга времени ремонта показана сопоставимость результатов оценки функции надёжности с помощью имитационного моделирования и численного расчёта из главы 2 путём графического сравнения этих результатов. Оценка среднего в.б.р. системы также оказалась достаточно близкой к результатам, полученным с помощью аналитической модели. Аналогично в **разделе 3.3.1** с помощью имитационного моделирования показана оценка коэффициента готовности моделей $\langle M_{3<6}|M|1\rangle$ и $\langle M_{3<6}|GI|1\rangle$. Результаты сравнения полученных оценок с вычисленными в главе 2 характеристиками подтвердили адекватность предложенной имитационной модели и сопоставимость вычисленных характеристик надёжности.

В **разделе 3.2.2** проведено исследование чувствительности функции надёжности модели $\langle M_{2<6}|GI|1\rangle$ к виду ф.р. и коэффициенту вариации времени ремонта. Вычислены квантили надёжности $q_{0.9}$ и $q_{0.99}$, а также значения среднего в.б.р. системы для различных распределений и значений коэффициента вариации времени ремонта компонентов.

В **разделах 3.2.3 и 3.2.4** исследована чувствительность функции надёжности моделей k-из-n с непоказательным распределением в.б.р. и ремонта компонентов. **Раздел 3.2.3** содержит вычисления оценки функции надёжности, квантилей и среднего в.б.р. модели $\langle GI_{2<6}|M|1\rangle$ и исследование чувствительности этих характеристик к виду ф.р. и значению коэффициента вариации в.б.р. компонентов при показательном распределении времени их восстановления. **Раздел 3.2.4** содержит аналогичные результаты исследования модели $\langle GI_{2<6}|GI|1\rangle$, где в качестве распределения в.б.р. компонентов рассмотрены распределения Гамма и Гнеденко-Вейбулла. Результаты вычисления функции надёжности, квантилей и среднего в.б.р. моделей $\langle GI_{2<6}|GI|1\rangle$, а также исследование их чувствительности к виду исходной информации показали следующее.

- В масштабе среднего времени ремонта компонентов b функция надёжности модели 2-из-6 нечувствительна к виду ф.р. и коэффициенту вариации v_b времени ремонта при коэффициенте вариации времени ремонта $v_b \leq 1$ и чувствительна к виду этой ф.р. и значению v_b при $v_b > 1$. Квантили и среднее в.б.р. системы чувствительны к виду ф.р. времени ремонта и значению коэффициента вариации v_b.
- Функция надёжности, квантили и среднее в.б.р. системы в масштабе среднего времени ремонта компонентов чувствительны к виду ф.р. в.б.р. и коэффициенту вариации v_a.
- При относительно малых значениях v_a модель k-из-n может иметь высокий квантиль $q_{0.9}$, но в окрестностях $t \approx a$ стать ненадёжной при рассмотренных ф.р. в.б.р. и ремонта, а также значениях коэффициента вариации времени ремонта $v_b \leq 1$.
- Эксперименты по оценке функции надёжности также показали, что при фиксированных средних значениях в.б.р. a и ремонта b компонентов системы вероятность безотказной работы по времени нечувствительна к виду ф.р. и коэффициентам вариации в.б.р. и ремонта в масштабе её среднего в.б.р и к моменту $\mathbb{E}[T]$ все вероятности близки к значению e^{-1}.

Аналогичные результаты по вычислению стационарных характеристик надёжности и исследованию чувствительности стационарного коэффициента готовности моделей $\langle GI_{3<6}|M|1\rangle$ и $\langle GI_{3<6}|GI|1\rangle$ представлены в **разделах 3.3.2 и 3.3.3**. По результатам экспериментов сформулированы следующие выводы. При $\rho = \frac{a}{b} \to \infty$ и фиксированном среднем в.б.р. компонентов a, т.е. для сценария быстрого восстановления компонентов системы

- стационарный коэффициент готовности модели 3-из-6 нечувствителен к виду ф.р. и значению коэффициента вариации времени ремонта для рассмотренных ф.р. в.б.р. и значений коэффициента вариации $v_a \leq 1$ компонентов;
- коэффициент готовности нечувствителен к виду ф.р. в.б.р. компонентов при коэффициенте вариации $v_a \leq 1$, рассмотренных ф.р. и значениях v_b времени ремонта. При этом если коэффициент вариа-

ции в.б.р. $v_a > 1$, то коэффициент готовности чувствителен к виду ф.р. в.б.р. компонентов при рассмотренных ф.р. времени ремонта.

Раздел 3.4 содержит основные выводы по результатам третьей главы.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Разработаны математические модели системы k-из-n с произвольным распределением времени ремонта компонентов и всей системы для двух сценариев её восстановления, которые представлены в виде двумерного марковского процесса с дискретно-непрерывным множеством состояний. Получено аналитическое решение дифференциальных уравнений Колмогорова для вычисления нестационарных вероятностей состояний и функции надёжности в терминах ПЛ. Найдено стационарное распределение вероятностей состояний.
2. Проведён анализ скорости сходимости функции распределения времени безотказной работы системы к показательному распределению при сценарии быстрого восстановления её компонентов. Выполнено численное исследование скорости сходимости. Получены асимптотические выражения стационарных вероятностей состояний в случае редких отказов.
3. На основе полученных теоретических результатов выполнены численное исследование надёжности моделей k-из-n и анализ чувствительности их характеристик к виду ф.р. и коэффициенту вариации времени ремонта компонентов и системы. Результаты применены к анализу надёжности мультироторного летательного модуля привязной высотной телекоммуникационной платформы.
4. Созданные имитационные модели позволили провести анализ чувствительности вероятностно-временных характеристик надёжности моделей k-из-n к виду исходной информации в случае произвольного распределения в.б.р. компонентов.

Публикации автора по теме диссертации

1. Моделирование надёжности привязных высотных беспилотных телекоммуникационных платформ / В. М. Вишневский, В. В. Рыков, Д. В. Козырев, Н. М. Иванова. — М. : РИЦ Техносфера, 2022. — 194 с.
2. On Reliability Function of a k-out-of-n System With General Repair Time Distribution / V. Rykov, D. V. Kozyrev, A. Filimonov, N. M. Ivanova // Probability in the Engineering and Informational Sciences. — 2021. — Vol. 35. — P. 885–902.
3. *Rykov V.*, *Ivanova N.*, *Kozyrev D.* Sensitivity Analysis of a k-out-of-n:F System Characteristics to Shapes of Input Distribution // In: Vishnevskiy, V.M., Samouylov, K.E., Kozyrev, D.V. (eds) Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications. DCCN 2020. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 12563. — 2021. — P. 485–496.
4. *Иванова Н. М.*, *Вишневский В. М.* Оценка надежности привязных высотных беспилотных платформ с использованием моделей систем K-из-N и методов машинного обучения // Проблемы информатики. — 2021. — № 4. — с. 16—39.
5. *Rykov V.*, *Ivanova N.*, *Kozyrev D.* Sensitivity Analysis of Characteristics of a k-out-of-n:F System to Shapes of Life and Repair Times Distributions of Its Components // Материалы 23-й Международной научной конференции «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» (DCCN-2020, Москва). — 2020. — с. 268—275.
6. *Rykov V.*, *Ivanova N.* Reliability and sensitivity analysis of a repairable k-out-of-n:F system with general life- and repair times distributions // In proceedings of the 30th European Safety and Reliability Conference and the 15th Probabilistic Safety Assessment and Management Conference. Edited by Piero Baraldi, Francesco Di Maio and Enrico Zio. — 2020.
7. *Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.* Расчёт характеристик надёжности восстанавливаемой системы k-из-$n : F$ с разными сценариями ремонта системы и произвольными исходными распределениями / В. В. Рыков, Н. М. Иванова ; федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов» (РУДН). — № 2021663864 ; заявл. 16.08.2021 ; опубл. 25.08.2021, 2021662893 (Российская Федерация).

8. *Иванова Н. М.* Аналитическая модель восстанавливаемой системы типа k-из-n с произвольным распределением времени восстановления // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: Материалы Всероссийской конференции с международным участием. — 2019. — с. 54—57.
9. *Ivanova N.* Modeling and Simulation of Reliability Function of a k-out-of-n:F System // In: Vishnevskiy, V.M., Samouylov, K.E., Kozyrev, D.V. (eds) Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications. DCCN 2020. Communications in Computer and Information Science. Vol. 1337. — 2021. — P. 271–285.
10. *Ivanova N.* On Importance of Sensitivity Analysis on an Example of a k-out-of-n System // Mathematics. — 2023. — Vol. 11, issue 5.
11. *Ivanova N.* On Steady State Reliability and Sensitivity Analysis of a k-out-of-n System under Full Repair Scenario // In: Vishnevskiy, V.M., Samouylov, K.E., Kozyrev, D.V. (eds) Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications. DCCN 2022. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 13766. — 2023. — P. 422–434.
12. *Ivanova N.* Modeling and Simulation of Reliability Function of a k-out-of-n:F System with Partial Repair // Материалы 23-й Международной научной конференции «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» (DCCN-2020, Москва). — 2020. — с. 156—163.
13. *Иванова Н. М.* О чувствительности характеристик надежности системы k-out-of-n к форме распределения длительностей жизни и ремонта её компонент // Труды 17-й Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами». — 2021. — с. 54—65.
14. *Ivanova N.* Reliability Analysis of a k-out-of-n System in Case of Full Repair After Its Failure // Материалы 25-й Международной научной конференции «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» (DCCN-2022, Москва). — 2022. — с. 345—351.

Иванова Н.М. (Россия)

Исследование вероятностно-временных характеристик моделей k-из-n с приложением к анализу надёжности привязного мультироторного летательного модуля

Диссертационная работа посвящена исследованию восстанавливаемых моделей k-из-n и их вероятностно-временных характеристик. Рассмотрены два сценария восстановления модели после полного отказа в предположении о произвольных распределениях времени ремонта компонентов и системы. Исследован двумерный марковский процесс с дискретно-непрерывным множеством состояний, для которого выписаны дифференциальные уравнения Колмогорова. Предложен подход к вычислению нестационарных характеристик надёжности моделей k-из-n на основе метода характеристик, а также стационарных вероятностей состояний с помощью метода вариации постоянных. Предложена методика проведения анализа чувствительности характеристик надёжности моделей k-из-n к виду функции распределения и коэффициенту вариации времени ремонта компонентов. Разработаны программные средства для расчета характеристик надёжности моделей k-из-n с произвольными исходными распределениями и анализа их чувствительности к виду функции распределения и коэффициенту вариации времени безотказной работы компонентов.

Ivanova N. M. (Russia)

Analysis of probability-time characteristics of k-out-of-n models with application to reliability analysis of a tethered multi-rotor flight module

The thesis is devoted to the study of repairable k-out-of-n models and their time and probabilistic characteristics. Two scenarios for restoring the model after a complete failure are considered under the assumption of an arbitrary distribution of components' and system's repair time. A two-dimensional Markov process with a discrete-continuous set of states is studied, for which Kolmogorov differential equations are obtained. Some approaches for calculating time-dependent reliability characteristics of k-out-of-n models based on the method of characteristics, as well as steady-state probabilities using the method of constant variation are proposed. A technique for analyzing the sensitivity of the reliability characteristics of k-out-of-n models to the shape of components' repair time distribution and its coefficient of variation is suggested. Software tools for calculating the reliability characteristics of k-out-of-n models with arbitrary initial distributions and analyzing their sensitivity to the shape of components' lifetime distribution and its coefficient of variation have been developed.