Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

На правах рукописи

Джосеф Дарил Джеймс

Теоремы вложения и теоремы о следах для пространств Никольского-Бесова-Морри

Специальность 1.1.1.

«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор

Буренков Виктор Иванович

Москва 2025

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности.

В последние десятилетия российские и зарубежные математики активно изучают пространства типа Морри и их свойства. Одним из направлений исследований является приближение целыми функциями.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\nu > 0$. Функция $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ называется целой функцией экспоненциального типа ν, если выполняются следующие свойства:

1) она разлагается в степенной ряд для любых $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$: для некоторых $a_{k_1,...,k_n} \in \mathbb{C}$

$$g(z) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} a_{k_1,...,k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$$

для любых $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$,

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A_\varepsilon > 0$ такое, что для всех $z \in \mathbb{C}^n$ выполняется неравенство

$$|g(z)| \leq A_\varepsilon e^{(\nu+\varepsilon)(|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|)}.$$

Обозначим через $E_\nu(\mathbb{C}^n)$ множество всех целых функции экспоненциального типа ν и пусть $E_\nu(\mathbb{R}^n)$ – это множество всех функций g, заданных на $\mathbb{R}^n$, для каждой из которых $g(x) = G(x + iy)|_{y=0}$, $x \in \mathbb{R}^n$, для некоторй функции $G \in E_\nu(\mathbb{C}^n)$.

В дальнейшем мы всегда считаем, что $\nu > 0$, не оговаривая этого в каждом утверждении.

Пусть $1 \leq p \leq \infty$. Положим $\mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^n) = E_\nu(\mathbb{R}^n) \cap L_p(\mathbb{R}^n)$, где $L_p(\mathbb{R}^n)$ – пространство Лебега всех измеримых по Лебегу функций f, для которых

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

при $1 \le p < \infty$ и

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty,$$

при $p = \infty$.

В [34] и [36] доказаны следующие неравенства для целых функции экспоненциального типа $g \in \mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^n)$. (Подробное изложение в книге [36].)

1. (Неравенство Бернштейна) Пусть $1 \le p \le \infty$, тогда для любой функция $g \in \mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^n)$ выполняются неравенства

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial x_j}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le \nu \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

2. (Неравенство разных метрик) Пусть $1 \le p \le q \le \infty$, тогда для любой функции $g \in \mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\|g\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \le 2^n \nu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{2}$$

3. (Неравенство разных измерений) Пусть $m, n \in \mathbb{N},\ 1 \le p \le \infty, 1 \le m < n$, $x = (u, v),\ u = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m,\ v = (x_{m+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-m}$, тогда для любой функции $g \in \mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^n)$ имеет место неравенство

$$\Big\| \|g(u,v)\|_{L_{\infty,v}(\mathbb{R}^{n-m})} \Big\|_{L_{p,u}(\mathbb{R}^m)} \le 2^{n-m} \nu^{\frac{n-m}{p}} \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \tag{3}$$

в частности,

$$\|g(u,0)\|_{L_p(\mathbb{R}^m)} \le 2^{n-m} \nu^{\frac{n-m}{p}} \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Пусть $n \in \mathbb{N},\ \mu \in \mathbb{N}_0$. Обозначим через $\mathfrak{M}^*_\mu$ множество всех тригонометрических многочленов порядка, не превышающего μ по каждой переменной

$$T_\mu(x) = T_\mu(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{-\mu \le k_j \le \mu \\ j=1,\ldots,n}} c_{k_j} e^{ik\cdot x}$$

$$= \sum_{-\mu\le k_1\le\mu} \cdots \sum_{-\mu\le k_n\le\mu} c_{k_1,\ldots,k_n} e^{i(k_1x_1+\ldots k_nx_n)},$$

где $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$, $c_{k_1,\ldots,k_n} \in \mathbb{C}$– постоянные коэффициенты, такие что $c_{-k} = \bar{c}_k$ (при этом $T_\mu(x) \in \mathbb{R}$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$).

Пусть далее $1 \le p \le \infty$. Снабдим линейное пространство $\mathfrak{M}^*_\mu$ нормой

$$\|f\|^*_{L_p} = \|f\|_{L_p(Q(0,\pi))} < \infty,$$

где $Q(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x_j - y_j| < r, j = 1,\ldots,n\}$. Обозначим получившееся нормированное пространство через $\mathfrak{M}^*_{\mu,p}$.

В книге [36] доказаны следующие неравенства для тригонометрических многочленов $T_\mu \in \mathfrak{M}^*_{\mu,p} = \mathfrak{M}^*_\mu \cap (L_p)^*$.

1. (Неравенство Бернштейна) Пусть $1 \le p \le \infty$, тогда для любых тригонометрических многочленов $T_\mu \in \mathfrak{M}^*_{\mu,p}$ выполняется неравенство
$$\left\|\frac{\partial T_\mu}{\partial x_j}\right\|^*_{L_p} \le \mu\|T_\mu\|^*_{L_p}, \quad j = 1,\ldots,n. \tag{4}$$

2. (Неравенство разных метрик) Пусть $1 \le p < q \le \infty$, тогда для любых тригонометрических многочленов $T_\mu \in \mathfrak{M}^*_{\mu,p}$ выполняется неравенство
$$\|T_\mu\|^*_{L_q} \le 3^n\mu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|T_\mu\|^*_{L_p}. \tag{5}$$

3. (Неравенство разных измерений) Пусть $1 \le p \le \infty$, $1 \le m < n$, $x = (u,v)$, $u = (x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{R}^m$, $v = (x_{m+1},\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-m}$, тогда для любоых тригонометрических многочленов $T_\mu \in \mathfrak{M}^*_{\mu,p}$ выполняется неравенство
$$\left\|\|T_\mu(u,v)\|_{L_{\infty,v}(\mathbb{R}^{n-m})}\right\|^*_{L_{p,u}} \le 3^{n-m}\mu^{\frac{n-m}{p}}\|T_\mu\|^*_{L_p}, \tag{6}$$
в частности,
$$\|T_\mu(u,0)\|^*_{L_p} \le 3^{n-m}\mu^{\frac{n-m}{p}}\|T_\mu\|^*_{L_p}. \tag{7}$$

Неравенства (5) - (7) были доказаны в книге [36] с помощью эквивалентной нормы $((T_\mu))^*_{L_p}$, определяемой следующим образом: пусть

$$1 \le p \le \infty,\ x_{k_i} = k_i \frac{2\pi}{N}, N \in \mathbb{N},\ k_i \in 1, \dots, N, i = 1, \dots, n$$

$$((T_\mu))^*_{L_p} = \max_{u \in Q(0,\pi)} \left(\left(\frac{2\pi}{N}\right)^n \sum_{k_1=1}^{N} \cdots \sum_{k_n=1}^{N} |T_\mu(x_{k_1} - u_1, \dots, x_{k_n} - u_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Неравенства (5) - (7) можно также доказать, используя предствления тригонометрических многочленов в виде свертки его с некоторым ядром, см., например, книгу [21], где используется представление в виде свертки с ядром Валле-Пуссенна $\mathcal{V}_\mu$:

$$T_\mu = \mathcal{V}_\mu * T_\mu.$$

Пусть $1 \le p, \theta \le \infty,\ l \in \mathbb{N}$. Говорят, что функция f принадлежит пространству Соболева $W^l_p(\mathbb{R}^n)$, если f измерима на $\mathbb{R}^n$ и

$$\|f\|_{W^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{w^l_p(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

где

$$\|f\|_{w^l_p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{h \ne 0, h \in \mathbb{R}^n} \frac{\|\Delta^l_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l}$$

и

$$\Delta_h f = f(x+h) - f(x),$$

$$\Delta^\alpha_h f = \Delta_h(\Delta^{\alpha-1}_h f),\ \Delta^0_h f = f,\ \Delta^1_h f = \Delta_h f.$$

Приведение выше неравенства (1), (2),(3),(4),(5) и (6) играют важную роль при изучении так называемых пространств Никольского-Бесова.

Пусть $1 \le p, \theta \le \infty,\ \alpha \in \mathbb{N},\ \alpha > r > 0$. Говорят, что функция f принадлежит пространству Никольского-Бесова $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$, если f измерима на $\mathbb{R}^n$ и

$$\|f\|_{B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{b^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

где

$$\|f\|_{b^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\frac{\|\Delta^\alpha_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^r} \Big)^\theta \frac{dh}{|h|^n} \Big)^{\frac{1}{\theta}}.$$

В частности, говорят что функция принадлежит пространству Никольского $f \in H^r_p(\mathbb{R}^n)$, если f измерима на $\mathbb{R}^n$ и

$$\|f\|_{H^r_p(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{h^r_{p,}(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

где

$$\|f\|_{h^r_p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{h \neq 0, h \in \mathbb{R}^n} \frac{\|\Delta^\alpha_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^r}.$$

Пространства Никольского-Бесова $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$, при $\theta = \infty$ были введены С.М. Никольским, а при $\theta < \infty$ О.В. Бесовым. Теория этих пространств подобно изложена в книгах [24] и [36]. Пространства $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ характеризуются параметрами p , θ и r, которые определяют интегрируемость и гладкость функций. Они имеют прямую связь с пространствами Соболева, а именно, при $p = 2$, $\theta = 2$ и $l \in \mathbb{N}$, пространства Никольского-Бесова $B^l_{2,2}(\mathbb{R}^n)$ совпадают с пространств Соболева $W^l_2(\mathbb{R}^n)$. В общем случае $1 \leq p, \theta \leq \infty$

$$B^l_{p,\theta_1}(\mathbb{R}^n) \subset W^l_p(\mathbb{R}^n) \subset B^l_{p,\theta_2}(\mathbb{R}^n),$$

где $\theta_1 = \min\{p, 2\}$, $\theta_2 = \max\{p, 2\}$, причем при $p \neq 2$ включения строгие.

Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$

$$B^{l+\varepsilon}_{p,\theta_1}(\mathbb{R}^n) \subset W^l_p(\mathbb{R}^n) \subset B^l_{p,\theta_2}(\mathbb{R}^n),$$

в частности,

$$H^{l+\varepsilon}_p(\mathbb{R}^n) \subset W^l_p(\mathbb{R}^n) \subset H^l_p(\mathbb{R}^n).$$

По сравнению с пространством Соболева, пространства Никольского-Бесова предоставляют более тонкую основу для анализа функций с различными степенями гладкости. Ключевой особенностью пространств $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ является тот факт, что они могут быть определены с помощью нескольких эквивалентных норм (см, например [36]). Одна из таких норм определяется с помощью наилучших приближений целыми функциями экспоненциального типа.

Обозначим через $E_\nu(f)_{L_p(\mathbb{R}^n)}$ наилучшее приближение целыми функциями экспоненциального типа:

$$E_\nu(f)_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \inf_{Q_\nu \in E_\nu} \|f - Q_\nu\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Пусть $1 \leq p, \theta \leq \infty,\ r > 0$. Говорят, что функция принадлежит пространству Никольского-Бесова $f \in B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$, если для некоторого $a > 1$

$$\|f\|_{B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{s=0}^{\infty} a^{r\theta s} E^\theta_{a^s}(f)_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right)^{1/\theta} < \infty.$$

Обозначим через g_{a^s} целую функцию экспоненциального типа a^s такую, что

$$\|f - g_{a^s}\| \leq 2E_{a^s}(f)_{L_p(\mathbb{R}^n)},\ s = 0, 1, \ldots$$

и положим

$$Q_{a^0} = g_{a^0},\ Q_{a^s} = g_{a^s} - g_{a^{s-1}},\ s = 0, 1, \ldots.$$

Еще одна эквивалентная норма имеет следующий вид.

Пусть $1 \leq p, \theta \leq \infty,\ r > 0$. Говорят, что функция принадлежит пространству Никольского-Бесова $f \in B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$, если для некоторого $a > 1$

$$\|f\|_{B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \inf \left(\sum_{s=0}^{\infty} a^{r\theta s} \|Q_{a^s}\|^\theta_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right)^{1/\theta} < \infty, \tag{8}$$

где f представима в виде ряда

$$f = \sum_{s=0}^{\infty} Q_{a^s}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

члены которого целые функции экспоненциального типа a^s, а инфимум берется по всем разложениям (9).

В периодическом случае аналогом этого определения является следующие определение.

Пусть $1 \le p, \theta \le \infty,\ r > 0$. Говорят, что функция принадлежит периодическому пространству Никольского-Бесова $(B^r_{p,\theta})^*(\mathbb{R}^n)$ если

$$\|f\|^*_{B^r_{p,\theta}} = \inf \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{r\theta k} \|T_{2^k}\|^{*^\theta}_{L_p} \right)^{1/\theta}, \tag{10}$$

где f представима в виде ряда

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} T_{2^k}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{11}$$

члены которого тригонометрические многочлены порядка не выше 2^k, а инфимум берется по всем разложениям (11).

Двумя важными результатами теории пространства Никольского-Бесова являются теорема вложения и теорема о следах.

Пусть Z_1, Z_2- нормированные пространства. Говорят, что Z_1 непрерывно вложено в Z_2(кратко $Z_1 \to Z_2$), если $Z_1 \subset Z_2$ и существует $c > 0$ такое, что

$$\|f\|_{Z_2} \le c\|f\|_{Z_1},$$

для всех $f \in Z_1$.

Теорема вложения разных метрик для пространствах Никольского-Бесова имеет следующий вид:

$$B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n) \to B^{r'}_{q,\theta}(\mathbb{R}^n),$$

где

$$1 \le p < q \le \infty,\ 1 \le \theta \le \infty,\ r' = r - n\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big) > 0,$$

то есть, $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n) \subset B^{r'}_{q,\theta}(\mathbb{R}^n)$ и существует $c > 0$ такое, что

$$\|f\|_{B^{r'}_{q,\theta}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\|_{B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)},$$

для любых $f \in B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$.

Прямая теорема о следах (теорема вложения разных измерений) описывает поведение функций из пространств Никольского-Бесова при их сужении на подпространства меньшей размерности.

Пусть $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ и $g \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^m)$. Функция g называется следом функции f, если существует функция h, эквивалентная f на $\mathbb{R}^n$, такая, что $h(\cdot, v)$ сходится к $g(\cdot)$ в $L_1^{loc}(\mathbb{R}^m)$, при v стремящемся к 0.

Теорема о следах для пространствах Никольского-Бесова устанавливает связь между функцией $f \in B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$, заданной на n-мерном пространстве, и ее следом на m-мерном пространстве $\mathbb{R}^m$,

$$B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n) \to B^{r'}_{p,\theta}(\mathbb{R}^m), \tag{12}$$

где

$$1 \leq p,\ \theta \leq \infty,\ 1 \leq m < n,\ r' = r - \frac{n-m}{p} > 0.$$

Утверждается, что если $r - \frac{n-m}{p} > 0$, то функция $f \in B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ имеет след $f|_{\mathbb{R}^m}$ на $\mathbb{R}^m$, принадлежащий пространству $B^{r-\frac{n-m}{p}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^m)$ и выполняется неравенство

$$\|f|_{\mathbb{R}^m}\|_{B^{r-\frac{n-m}{p}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^m)} \leq c\|f\|_{B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)},$$

где >0 не зависит от f. Теорема вложения разных измерений для пространства $B^r_{p,\theta}$ обратима, то есть справедлива обратная теоремао следах

$$B^{r'}_{p,\theta}(\mathbb{R}^m) \to B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n), \tag{13}$$

что означает, что для любой функции $f \in B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^m)$ существует функция $F \in B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ такое, что $F|_{\mathbb{R}^m} = f$, причем

$$||F||_{B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} \leq c||f||_{B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^m)},$$

где $c > 0$ не зависит от f. Теоремы (12) и (13) дают полное описание пространства следов на $\mathbb{R}^m$ функций из пространства $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$, то есть

$$Tr_{\mathbb{R}^m} B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n) = \{f|_{\mathbb{R}^m} : f \in B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)\} = B^{r'}_{p,\theta}(\mathbb{R}^m).$$

Для пространства $(B^r_{p,\theta})^*(\mathbb{R}^n)$ справедливы теоремы, аналогичные теоремам (12) и (13).

В результате изучения этих пространств О.В. Бесовым было доказано, что пространства Никольского-Бесова являются следами пространств Соболева, то есть если f принадлежит пространству Соболева $W^l_p(\mathbb{R}^n)$, то существует след g в $B^{l-\frac{n-m}{p}}_{p,p}(\mathbb{R}^m)$, а также обратная теорема о следах (теорема о продолжении), утверждающая, что если g принадлежит $B^{l-\frac{n-m}{p}}_{p,p}(\mathbb{R}^m)$, то существует функция f в $W^l_p(\mathbb{R}^n)$, такая, что $f|_{\mathbb{R}^m} = g$, то есть

$$Tr_{\mathbb{R}^m} W^l_p(\mathbb{R}^n) = \{f|_{\mathbb{R}^m} : f \in W^l_p(\mathbb{R}^n)\} = B^{l-\frac{n-m}{p}}_{p,p}(\mathbb{R}^m).$$

Пусть $0 < p \leq \infty$ и $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, тогда $f \in M^\lambda_p(\mathbb{R}^n)$, если

$$f \in L^{loc}_p(\mathbb{R}^n)$$

и

$$\|f\|_{M^\lambda_p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{r>0} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty.$$

Предположение $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$ связано с тем. что при $\lambda < 0$ и при $\lambda > \frac{n}{p}$ эти пространства тривиальны, то есть состоят только из функций, эквивалентых нулю на $\mathbb{R}^n$. Очевидно, что $M^0_p(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$. Если $0 < \lambda \leq \frac{n}{p}$, то

$$L_p(\mathbb{R}^n) \not\subset M^\lambda_p(\mathbb{R}^n) \not\subset L_p(\mathbb{R}^n),$$

поэтому наряду с пространствами $M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$ полезно рассмотрение пространств $\widehat{M_p^\lambda}(\mathbb{R}^n) = M_p^\lambda(\mathbb{R}^n) \bigcap L_p(\mathbb{R}^n)$.

Подробное изложение свойств этих пространств будет дано в следующей главе. Пространства $M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, называемые теперь пространствами Морри были впервые расмотрены Чарльз Морри [13] в 1938 году в связы с исследованием регулярность решений дифференцальных уравнений с частными производными. Их периодический аналог был рассмотрен в [26].

Интерес к этим пространствам возрос, когда он установил следующую теперь хорошо известную лемму.

Лемма Морри. Пусть функция $u \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $\nabla u \in M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, где $\frac{n}{p} - 1 < \lambda < \frac{n}{p}$. Тогда функция u эквивалентно функции $\tilde{u} \in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ с показателем $\alpha = 1 - \frac{n - \lambda p}{p}$, где $C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ пространство Гёльдера, т.е. существует $c > 0$ такое, что $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq c|x - y|^\alpha.$$

В последнее время большое внимание уделяется изучению более общих пространств Никольского-Бесова-Морри, получаемых, если в определении пространств Никольского-Бесова базовое пространство $L_p(\mathbb{R}^n)$ заменено на пространство Морри $M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$. Подробное изложение результатов полученных к настоящему времени для этих пространств можно найти в обзорных статьях [3], [4], [8], [10],[15], [19], [20]. При этом пространства Никольского-Бесова-Морри строились с использованием различных эквивалентных норм в пространствах Никольского-Бесова.

Данная работа посвящена исследованию интегральных неравенств в пространствах Морри для целых функций экспоненциального типа и тригонометрических многочленов их приложениям к пространству Никольского-Бесова.

Степень ее разработанности.

Обеспечивается строгостью приведенных доказательств, выступлениями на научных семинарах, конференциях и школах, а также имеющимися публикациями в рецензируемых изданиях, которые индексируются международными базами данных.

Цели и задачи.

Целью настоящей диссертации является доказательство аналогов неравенств Бернштейна, неравенства разных метрик и неравенства разных измерений для пространств Морри (гл. 1), аналогов неравенств Бернштейна, неравенства разных метрик и неравенства разных измерений для периодических пространств Морри (гл. 2) и доказательство теоремы вложения и теорем о следах для пространств Никольского-Бесова-Морри, построенных, исходя из определения нормы (8) в непериодическом случае (гл. 3) и построенных исходя из определения нормы (10) периодическом случае (гл. 4).

Научная новизна.

В данной работе

1) получены интегральные неравенства для целых функций экспоненциального типа и тригонометрических многочленов для пространств Морри, включая аналоги неравенств Бернштейна, неравенства разных метрик и неравенства разных измерений.

2) на основе применения доказанных неравенств установлены теоремы вложения и теоремы о следах для пространств Никольского-Бесова-Морри и их периодических аналогов.

Теоретическая и практическая значимость.

Результаты работы носят теоретический характер. Полученные результаты:

Интегральные неравенства для целых функций экспоненциального типа и тригонометрических многочленов в пространствах Морри и теоремы вложения и теоремы о следах для пространств Никольского-Бесова-Морри и их аналоги для периодических пространств Никольского-Бесова-Морри могут найти применение в задачах теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Методология и методы исследования.

Исследования основываются на общих методах функционального анализа и на методах, используемых в теоремы приближений с помощью целых функций экспоненциального типа и их периодических аналогов тригонометрических многочленов. Эти методы надлежащим образом модифицируются и развиваются так, чтобы их можно было применить к рассматриваемым в диссертационной работе для пространств Морри.

Положения, выносимые на защиту

1. Установлены неравенства Бернштейна в пространствах Морри для целых функций экспоненциального типа и тригонометрических многочленов.

2. Установлены неравенства разных метрик в пространствах Морри для целых функций экспоненциального типа и тригонометрических многочленов.

3. Установлены неравенства разных измерений в пространствах Морри для целых функций экспоненциального типа и тригонометрических многочленов.

4. Установлены теоремы вложения для пространства Никольского-Бесова-Морри и их периодические аналоги.

5. Установлены теоремы о следах для пространств Никольского-Бесова-Морри и их периодические аналоги.

Степень достоверности

Достоверность полученних результатов обеспечивается строгостью проведенных доказательств, выступлениями на научных семинарах, конференциях и школах, а также имеющимися публикациями в рецензируемых изданиях, которые индексируются международными базами данных.

Апробация результатов

Результаты, полученные в рамках работы над диссертацией, неоднократно излагались на научном семинаре Математического института РУДН по функциональному анализу и его приложениям под руководством профессоров В. И. Буренкова и М.Л. Гольдмана; на научном семинаре Математического института РУДН по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям под руководством профессора А.Л. Скубачевского; на научном семинаре по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики в Математическом институте РАН им. В.А. Стеклова (семинар Никольского, руководитель член-корреспондент РАН О.В. Бесов); на научно-исследовательском семинаре по математическому анализу в МГУ им. М. В. Ломоносова, факультет ВМК, под руководством профессоров Г.Г. Брайчева, И.В. Тихонова и В.Б. Шерстюкова; на семинаре «Задачи дифференциальных уравнений, анализа и управления: теория и приложения» МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет под руководством профессоров А.В. Горшкова, М.И. Зеликина, В.Ю. Протасова, В.М. Тихомирова и А.В. Фурсикова; на научном семинаре кафедры «Дифференциальных и интегральных уравнений ЮФУ» под руководством доцента О.Г. Авсянкина.

Полученные результаты представлялись и обсуждались на следующих научных конференциях: Воронежская Зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (28 января 2023 г.), конференция «Владикавказской молодежной математической школы» (22-25 мая 2023 г.), конференция по теории функций многих действительных переменных, посвященная 90-летию со дня рождения чл.- корр. РАН О. В. Бесова, в Математическом институте им. В.А Стеклова (29 мая 2023 г.).

Основные определения и результаты.

Глава 1 состоит из четырех параграфов.

Основными результатами первой главы являются теоремы 1,3,4 и 5.

В параграфе 1.1 даются необходимые обозначения и определения.

Определение 1. *Пусть* $0 < p \leq \infty$ *и* $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, *тогда* $f \in M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, *если*

$$f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$$

и

$$\|f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{r>0} r^{-\lambda}\|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty.$$

В параграфе 1.2 получено неравенство Бернштейна для целых функций экспоненциального типа ν для пространств Морри.

Теорема 1. *Пусть* $Z(\mathbb{R}^n)$ *– нормированное пространство функций* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, *причем норма* $\|\cdot\|_{Z(\mathbb{R}^n)}$ *инвариантна относительно сдвига: для любой функции* $f \in Z(\mathbb{R}^n)$

$$\|f(x+h)\|_{Z(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{Z(\mathbb{R}^n)} \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда для любой функции $g \in E_\nu(\mathbb{R}^n) \cap Z(\mathbb{R}^n)$

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial x_j}\right\|_{Z(\mathbb{R}^n)} \leq \nu\|g(x)\|_{Z(\mathbb{R}^n)},\ j = 1,\dots,n.$$

Следствие 1. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$, *тогда*

$\forall g \in E_\nu(\mathbb{R}^n) \cap M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial x_j}\right\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \le \nu \|g\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Это неравенство также имеет место, если заменить $M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$ *на* $\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$.

В параграфе 1.3 даются необходимые определения и получены неравенства разных метрик для целых функций экспоненциального типа ν для пространства Морри.

Определение 2. *Пусть функции* $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, *тогда сверткой называется функция* $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *определенная равенством*

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t - \tau) g(\tau) d\tau, \ t \in \mathbb{R}^n.$$

Лемма 1. *Пусть* $1 \le p \le q \le \infty$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, $f \in L_{q'}(\mathbb{R}^n)$ *и* $g \in \mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда для любых* $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|(f * g)(x) - (f * g)(y)| \le M \|f\|_{L_{q'}(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} |x - y|,$$

где $M = 2^n n \nu^{1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}}$.

Определение 3. *Преобразование Фурье функции* $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *задаётся следующей формулой:*

$$(Ff)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx, \ \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{14}$$

$\xi \cdot x = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n$.

Определение 4. *Если* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, *где* $1 < p \le 2$, *то преобразование Фурье задается равенством*

$$(Ff)(\xi) = \lim_{r \to \infty} \big(F(f \chi_{B(0,r)})\big)(\xi) \ \ L_{p'}(\mathbb{R}^n),$$

где $p' = \frac{p}{p-1}$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$. *(Это равенство справедливо и при p=1 для преобразования Фурье* Ff, *задаваемого равенством* (14).*)*

Замечание 1. *Пусть сначала* $\Delta_\nu = \{|x_j| < \nu,\ j = 1, \dots, n\}$. *Напомним, что для* $\varphi, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$

$$(F(\varphi * g))(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}(F\varphi)(\xi)(Fg)(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{15}$$

Из (15) *сразу следует, что если* $(F\varphi)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ *для любого* $\xi \in \operatorname{supp} Fg$, *то* $F(\varphi * g) = Fg$ *и*

$$g(x) = (\varphi * g)(x) \tag{16}$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. *Если* $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n), g \in \mathfrak{M}_{\nu,1}(\mathbb{R}^n)$ *и* $(F\varphi)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ *для любых* $\xi \in \Delta_\nu$, *то обе функции* g *и, согласно лемме* 1 *с* $f = \varphi$, $p = 1$, $q = \infty$, *свертка* $\varphi * g$ *непрерывны на* $\mathbb{R}^n$, *поэтому равенство* (16) *имеет место для любых* $x \in \mathbb{R}^n$.

Определение 5. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $\nu > 0$. *Будем говорить, что* $\varphi \in J_{\nu,p}(\mathbb{R}^n)$, *если* $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$ *и преобразование Фурье* $F\varphi$, *понимаемое, вообще говоря, в смысле теории обобщенных функций из пространства* $S'(\mathbb{R}^n)$, *равно* $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ *на* Δ_ν.

Теорема 2. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $\varphi \in J_{\nu,p'}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда равенство* (16) *справедливо для всех* $x \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 3. *Пусть* $1 \le p \le q \le \infty$, $\quad 1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$, $\quad 0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$, *тогда*

$$\|g\|_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}(\mathbb{R}^n)} \le c\nu^{n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}\|g\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{q}}\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{p}{q}}$$

для любых $\nu > 0$ *и* $g \in E_\nu(\mathbb{R}^n) \cap \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, *где*

$$c = c(n, p, q) = \inf_{\psi \in J_{1,p'}(\mathbb{R}^n)} \|\psi\|_{L_r(\mathbb{R}^n)},$$

в предположении, что $c < \infty$.

Следствие 2. *В предположениях теоремы* 3

$$\|g\|_{\widehat{M}_q^{\frac{p\lambda}{q}}(\mathbb{R}^n)} \le c\nu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|g\|_{\widehat{M}_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)}$$

для любых $\nu > 0$ *и* $g \in E_\nu(\mathbb{R}^n) \cap \widehat{M}_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Следствие 3. *Если в дополнение к предположениям теоремы* 3,

$$1 \le p \le \min\{2, q\} \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \ge \frac{1}{2} \Longleftrightarrow q \ge \frac{2p}{2-p},$$

то

$$\|g\|_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}(\mathbb{R}^n)} \le \left(\frac{(r')^{\frac{1}{r'}}}{r^{\frac{1}{r}}}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|g\|^{\frac{p}{q}}_{M_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)} \|g\|^{1-\frac{p}{q}}_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

и

$$\|g\|_{\widehat{M}_q^{\frac{p\lambda}{q}}(\mathbb{R}^n)} \le \left(\frac{(r')^{\frac{1}{r'}}}{r^{\frac{1}{r}}}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|g\|_{\widehat{M}_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)},$$

в частности, при $q = \infty$, *для любых* $1 \le p \le 2$ *и* $g \in \mathfrak{M}_{p,\nu}(\mathbb{R}^n)$

$$\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \le \left(\frac{p^{\frac{1}{p}}}{(p')^{\frac{1}{p'}}}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{p}} \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

а при $p = 2$ *и* $p = 1$

$$\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \le \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \|g\|_{L_2(\mathbb{R}^n)},$$

$$\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \le \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{n} \|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}.$$

Замечание 2. (*Неулучшаемость показателя* $\frac{p}{q}\lambda$ *в неравенстве разных метрик*) *Предположим, что для некоторых* $\mu \ge 0$ *и* $c > 0$, *для любых* $\nu > 0$ *и* $g \in E_\nu(\mathbb{R}^n) \cap \widehat{M}_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)$ *выполнятся неравенство*

$$\|g\|_{M_q^{\mu}(\mathbb{R}^n)} \le c\nu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|g\|^{\frac{p}{q}}_{M_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)} \|g\|^{1-\frac{p}{q}}_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Тогда $\mu = \frac{\lambda p}{q}$.

В параграфе 1.4 даются необходимые обозначения и определения и получены неравенства разных измерений для целых функций экспоненциального типа ν для пространств Морри.

Определение 6. *Пусть*

$$0 < p_1, p_2 \le \infty, \quad m_1, m_2 \in \mathbb{N}, \quad 0 \le \lambda_1 \le \frac{m_1}{p_1}, \ \ 0 \le \lambda_2 \le \frac{m_2}{p_2}.$$

Определим пространство

$$M_{p_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1}) \times M_{p_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})$$

со смешанной квазинормой как множество всех измеримых на $\mathbb{R}^{m_1+m_2}$ *функций* f*, для которых*

$$\|f\|_{M_{p_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1}) \times M_{p_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})} = \big\| \|f(u_1, u_2)\|_{M_{p_1,u_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})} \big\|_{M_{p_2,u_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})} < \infty.$$

Аналогично определяются пространства

$$\widehat{M}_{p_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1}) \times \widehat{M}_{p_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2}).$$

Теорема 4. *Пусть* $1 \le p < \infty, \ m, n \in \mathbb{N}, \ m < n, \ 0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$, *тогда*

$$\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-m}) \times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} \le 2^{n-m} \nu^{\frac{n-m}{p}} \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)},$$

в частности, если $x = (u, v), \ u = (x_1 \dots x_m), \ v = (x_{m+1}, \dots, x_n)$, *то*

$$\|g(u, 0)\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} \le 2^{n-m} \nu^{\frac{n-m}{p}} \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}$$

для любых $g \in E_\nu(\mathbb{R}^{n-m}) \cap (L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m))$, *и существует такое* $c_4 = c_4(m, n, \lambda) > 0$, *что*

$$\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} \le c_4 \nu^{\frac{n-m}{p}} \max\{1, \nu^\lambda\} \|g\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)},$$

в частности,

$$\|g(u,0)\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} \le c_4 \nu^{\frac{n-m}{p}} \max\{1,\nu^\lambda\} \|g\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}$$

для любых $\nu > 0$ *и* $g \in E_\nu(\mathbb{R}^n) \cap \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 5. *Пусть* $1 \le p < \infty,\ m,n \in \mathbb{N},\ m < n,\ 0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$, *тогда существует* $c_5 = c_5(m,n) > 0$ *и для любой функции* $g \in E_\nu(\mathbb{R}^m) \cap M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)$ *существует функция* $G \in E_\nu(\mathbb{R}^n) \cap M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$ *такая, что* $G(u,0) = g(u)$ *для любых* $u \in \mathbb{R}^m$,

$$\|G\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} \le c_5 \nu^{-\frac{n-m}{p}} \|g\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}$$

для любых $g \in M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)$ *и*

$$\|G\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \le c_5 \nu^{-\frac{n-m}{p}} \|g\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}$$

для любых $g \in \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)$.

Глава 2 состоит из четырех параграфов.

Основными результатами второй главы являются теоремы 6,8,9, 10 и 11.

В параграфе 2.1 даются необходимые обозначения и определения.

Определение 7. *Пусть* $0 < p \le \infty$ *и* $0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$, *тогда функция* $f \in (M_p^\lambda)^*$, *если она имеет период* 2π, *измерима по лебегу на* $\mathbb{R}^n$ *и*

$$\|f\|^*_{M_p^\lambda} = \sup_{x \in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\le\pi} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(Q(x,r))} < \infty.$$

В параграфе 2.2 получено неравенство Бернштейна для тригонометрических многочленов для периодических пространств Морри.

Теорема 6. *Пусть* Z^*-*нормированное пространство периодических функций периода* 2π *по каждой переменной, причем норма* $\|\cdot\|^*_Z$ *инвариантна относительно сдвига, т.е. для любой функции* $f \in Z^*$

$$\|f(x+h)\|^*_Z = \|f\|^*_Z \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда для любых тригонометрических многочленов $T_\mu \in Z^*$ *порядка* $\mu \in \mathbb{N}$ *по каждой переменной*

$$\left\|\frac{\partial T_\mu}{\partial x_j}\right\|_Z^* \le \mu \|T_\mu\|_Z^*,\ j = 1, \dots, n.$$

Следствие 4. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$, $T_\mu \in (M_p^\lambda)^*$, *тогда имеет место неравенство*

$$\left\|\frac{\partial T_\mu}{\partial x_j}\right\|_{M_p^\lambda}^* \le \mu \|T_\mu\|_{M_p^\lambda}^*, \quad j = 1, \dots, n.$$

В параграфе 2.3 даются необходимые определения и получены неравенства разных метрик для тригонометрических многочленов для периодических пространств Морри с помощью эквивалентных норм и представления в виде сверток.

Определение 8. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$, $\mu, N \in \mathbb{N}$, $T_\mu \in \mathfrak{M}_{\mu,p}^*$ *и*

$$((T_\mu))_{M_{p,N}^\lambda}^* = \sup_{x \in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\le\pi} r^{-\lambda} \Bigg(\left(\frac{r}{N}\right)^n \sum_{k_1=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1}$$

$$\left| T_\mu\left(x_1 + \frac{r}{N}k_1, \dots, x_n + \frac{r}{N}k_n \right) \right|^p \Bigg)^{1/p}.$$

Теорема 7. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $n, \mu, N \in \mathbb{N}$, $0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$, $T_\mu \in \mathfrak{M}_\mu^*$, *тогда имеет место неравенство*

$$\|T_\mu\|_{M_p^\lambda}^* \le ((T_\mu))_{M_{p,N}^\lambda}^* \le (1 + \frac{\pi}{N}\mu)^n \|T_\mu\|_{M_p^\lambda}^*.$$

Теорема 8. *Пусть* $1 \le p \le q \le \infty$, $n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \le \lambda \le \frac{n}{p}$, $T_\mu \in \mathfrak{M}_\mu^*$. *Тогда*

$$\|T_\mu\|_{M_q^{\lambda - n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}}^* \le (1+\pi)^n \mu^{n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|T_\mu\|_{M_p^\lambda}^*.$$

Лемма 2. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{N}, \varphi \in L_1(Q(0,\pi))$ – 2π*-периодическая функция по каждой переменной. Для того, чтобы для любого тригонометрического* *многочлена T_μ порядка, не превышающего μ по каждой переменной, выполнялось равенство*

$$T_\mu = \varphi * T_\mu, \tag{17}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$c_k(\varphi) = (2\pi)^{-n} \ \forall k \in \mathbb{Z}^n : |k_j| \leq \mu, \ j = 1, \ldots, n.$$

Замечание 3. *Если φ – тригонометрический многочлен порядка μ по каждой переменной, то равенство* (17) *выполняется для любых тригонометрических многочленов T_μ порядка, не превышающего μ по каждой переменной тогда и только тогда, когда*

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\substack{|k_j| \leq \mu \\ j=1,\ldots,n}} e^{ik\cdot x} = \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{j=1}^{n} \sum_{|k_j| \leq \mu} e^{ik_j x_j} = \frac{1}{\pi^n} \prod_{j=1}^{n} D_\mu(x_j) = \prod_{j=1}^{n} \widetilde{D}_\mu(x_j).$$

Определение 9. *Пусть $\mu, \ \nu \in \mathbb{N}$ и $\nu > \mu$. Ядро Валле Пуссена определяется следующим образом*

$$\mathfrak{V}_{\mu,\nu}(x) = (\nu - \mu)^{-1} \sum_{l=\mu}^{\nu-1} D_l(x),$$

в частности,

$$\mathfrak{V}_\mu(x) = \mathfrak{V}_{\mu,2\mu}(x), \quad \mu \geq 1, \quad \mathfrak{V}_0(x) = 1.$$

Положим

$$\widetilde{\mathfrak{V}}_{\mu,\nu}(x) = \frac{1}{\pi}\mathfrak{V}_{\mu,\nu}(x), \quad \widetilde{D}_{\mu,\nu}(x) = \frac{1}{\pi}D_{\mu,\nu}(x),$$

тогда

$$\widetilde{\mathfrak{V}}_{\mu,\nu}(x) = \widetilde{D}_\mu(x) + \frac{1}{\nu - \mu} \sum_{l=\mu+1}^{\nu-1} \widetilde{D}_{\mu,\nu}(x).$$

Теорема 9. *Пусть $1 \leq r, p < q \leq \infty$, $n, \mu \in \mathbb{N}$ $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, $1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$. Тогда*

$$\|T_\mu\|^*_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}} \leq c(\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda})^{\frac{p}{q}}(\|T_\mu\|^*_{L_p})^{1-\frac{p}{q}}$$

$$\leq c\pi^{\lambda(1-\frac{p}{q})}\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda}$$

для любого $T_\mu \in (M_p^\lambda)^*$, *где*

$$c = c(n,\mu,r) = \inf_{\varphi\in J_\mu^*}\|\varphi\|^*_{L_r}.$$

Следствие 5. *Пусть* $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $n,\mu \in \mathbb{N}$, $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$. *Если* $\varphi = \widetilde{\mathfrak{V}}_\mu(x)$, $T_\mu \in (M_p^\lambda)^*$, *тогда*

$$\|T_\mu\|^*_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}} \leq (3(2\pi)^{\frac{1}{p}-1})^n \mu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\pi^{\lambda(1-\frac{p}{q})}(\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda})^{\frac{p}{q}}(\|T_\mu\|^*_{L_p})^{1-\frac{p}{q}}$$

$$\leq (3(2\pi)^{\frac{1}{p}-1})^n \pi^{\lambda(1-\frac{p}{q})}\mu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda}.$$

Следствие 6. *Пусть* $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $n,\mu \in \mathbb{N}$, $n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}) \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$. *Если* $T_\mu \in (M_p^\lambda)^*$, *тогда*

$$\|T_\mu\|^*_{M_q^{\lambda-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}} \leq \pi^{\frac{\lambda p}{q}-\lambda+n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|T_\mu\|^*_{M_q^{\frac{\lambda p}{q}}} \leq (3(2\pi)^{\frac{1}{p}-1})^n \pi^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})(\lambda p-n)}\mu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda}.$$

Следствие 7. *Если* $1 \leq p \leq 2$, $q \geq \frac{2p}{2-p}$, *то для любого* $T_\mu \in (M_p^\lambda)^*$

$$\|T_\mu\|^*_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}} \leq \left(\frac{2\mu+1}{2\pi}\right)^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda})^{\frac{p}{q}}(\|T_\mu\|^*_{L_p})^{1-\frac{p}{q}},$$

в частности, для $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{2}$

$$\|T_\mu\|^*_{M_2^{\frac{\lambda}{2}}} \leq \left(\frac{2\mu+1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}(\|T_\mu\|^*_{M_1^\lambda}\|T_\mu\|^*_{L_1})^{\frac{1}{2}},$$

и при $\lambda = 0$, $q = 2$ *и* $p = 1$

$$\|T_\mu\|^*_{L_2} \leq \left(\frac{2\mu+1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\|T_\mu\|_{L_1},$$

а при $\lambda = 0$, $q = \infty$, $p = 2$

$$\|T_\mu\|^*_{L_\infty} \leq \left(\frac{2\mu+1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\|T_\mu\|^*_{L_2}.$$

В последнем неравенстве постоянная точная, равенство достигается для $T_\mu(x) = \prod_{l=1}^n \widetilde{D}_\mu(x_l)$.

В параграфе 2.4 даются необходимые обозначения и определения и получены неравенства разных измерений для тригонометрических многочленов для периодических пространств Морри.

Определение 10. *Пусть*

$$0 < p_1, p_2 \leq \infty,\ m_1, m_2 \in\ \mathbb{N},\ 0 \leq \lambda_1 \leq \frac{m_1}{p_1},\ 0 \leq \lambda_2 \leq \frac{m_2}{p_2}.$$

Определим пространство

$$(M_{p_1}^{\lambda_1})^*(\mathbb{R})^{m_1} \times (M_{p_2}^{\lambda_2})^*(\mathbb{R}^{m_2})$$

со смешанной квазинормой как множество всех измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}^{m_1+m_2}$ *функций* f, *для которых*

$$\begin{aligned}\|T_\mu\|^*_{M_{p_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})\times M_{p_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})} &= \|\|T_\mu(u_1,u_2)\|^*_{M^{\lambda_1}_{p_1,u_1}}\|^*_{M^{\lambda_2}_{p_2,u_2}} \\ &= \sup_{y\in Q(0,\pi)(\mathbb{R}^{m_2})} \sup_{0<\rho\leq\pi} \rho^{-\lambda_2}\| \sup_{x\in Q(0,\pi)(\mathbb{R}^{m_1})} \sup_{0<r\leq\pi} r^{-\lambda_1} \\ &\quad \|T_\mu(u_1,u_2)\|_{L_{p_1,u_1}(Q(x,r))}\|_{L_{p_2,u_2}(Q(x,r))} < \infty.\end{aligned}$$

Лемма 3. *Пусть* $0 < p \leq \infty,\ m_1, m_2 \in \mathbb{N},\ 0 \leq \lambda_1 \leq \frac{m_1}{p},\ 0 \leq \lambda_2 \leq \frac{m_2}{p}$. *Тогда*

$$(M_p^{\lambda_1})^*(\mathbb{R}^{m_1}) \times (M_p^{\lambda_2})^*(\mathbb{R}^{m_2}) \subset (M_p^{\lambda_1+\lambda_2})^*(\mathbb{R}^{m_1+m_2}),$$

причем

$$\|T_\mu\|^*_{M_p^{\lambda_1+\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_1+m_2})} \leq \|T_\mu\|^*_{M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})\times M_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})}$$

для любых $f \in M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1}) \times M_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})$.

Теорема 10. *Пусть* $1 \le p < \infty,\ m, n \in \mathbb{N},\ m < n,\ 0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$, *тогда*

$$\|T_\mu\|^*_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-m}) \times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} \le 3^{n-m} \mu^{\frac{n-m}{p}} \|T_\mu\|^*_{L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}.$$

Теорема 11. *Пусть* $1 \le p < \infty,\ 1 \le \theta \le \infty,\ \mu, m, n \in \mathbb{N},\ m < n,\ 0 \le \lambda \le \frac{m}{p}$, *тогда для любого* $\mathfrak{T}_\mu \in (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^m)$ *существует* $T_\mu \in (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n)$ *такое что* $T_\mu(u, 0) = \mathfrak{T}_\mu(u)$ *для любых* $u \in \mathbb{R}^m$ *и*

$$\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \le c\mu^{-\frac{n-m}{p}} \|\mathfrak{T}_\mu\|^*_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}.$$

Основные результаты опубликованы в работах [7] и [29].

Глава 3 состоит из четырех параграфов.

Основными результатами третьей главы являются теоремы 12 – 14.

В параграфе 3.1 даются необходимые обозначения и определения.

Определение 11. *Пусть* $1 \le p, \theta \le \infty,\ r > 0,\ 0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$. *Будем говорить, что функция принадлежит пространству Никольского-Бесова-Морри* $f \in B_\theta^r(\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n))$, *если для некоторого* $a > 1$

$$\|f\|_{B_\theta^r(\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n))} = \inf \left(\sum_{s=0}^{\infty} a^{r\theta s} \|Q_{a^s}\|^\theta_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \right)^{1/\theta} < \infty,$$

где f *представима в виде ряда*

$$f = \sum_{s=0}^{\infty} Q_{a^s}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{18}$$

члены которого целые функции экспоненциального типа a^s, *то есть* $Q_{a^s} \in E_{a^s}(\mathbb{R}^n) \cap M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, *а инфимум берется по всем разложениям* (18).

В параграфе 3.2 доказана теорема вложения для пространств Никольского-Бесова-Морри.

Теорема 12. *Пусть* $1 \le p < q \le \infty,\ 1 \le \theta \le \infty,\ r > 0,\ 0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$ *и*

$$r' = r - n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) > 0.$$

Тогда

$$B_\theta^r(\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)) \to B_\theta^{r'}(\widehat{M}_q^{\frac{p\lambda}{q}}(\mathbb{R}^n)).$$

В параграфе 3.3 доказана прямая теорема о следах для пространств Никольского-Бесова-Морри.

Теорема 13. *Пусть* $1 < p \le \infty$, $1 \le m < n$, *и* $r' = r - \frac{n-m}{p} > 0$. *Тогда имеет место вложение*

$$B_\theta^r(L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)) \to B_\theta^{r'}(L_\infty(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)),$$

в частности,

$$B_\theta^r(L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)) \to B_\theta^{r'}(\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)), \tag{19}$$

В параграфе 3.4 доказана обратная теорема о следах для пространств Никольского-Бесова-Морри.

Теорема 14. *Пусть* $1 \le p, \theta \le \infty$, $n, m \in \mathbb{N}$, $m < n,\ 0 \le \lambda \le \frac{m}{p}$,

$r' = r - \frac{n-m}{p} > 0$. *Тогда*

$$B_\theta^{r'}(\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)) \to B_\theta^r(\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n))$$

и

$$B_\theta^{r'}(\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)) \to B_\theta^r(L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)). \tag{20}$$

Замечание 4. *Из прямой теоремы о следах* (19) *и обратной теоремы о следах* (20) *следует утверждение об полном описании пространства следов на* $\mathbb{R}^m$ *функций из пространства* $B_\theta^r(L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m))$.

Теорема 15. *Пусть* $1 \le p, \theta \le \infty$, $n, m \in \mathbb{N}$, $m < n$, $r > \frac{n-m}{p}$, $0 \le \lambda \le \frac{m}{p}$. *Тогда*

$$Tr_{\mathbb{R}^m}(B^r_\theta(L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}^\lambda_p(\mathbb{R}^m))) = \{f|_{\mathbb{R}^m} : f \in B^r_\theta(L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}^\lambda_p(\mathbb{R}^m))\}$$

$$= B^{r'}_\theta(\widehat{M}^\lambda_p(\mathbb{R}^m)).$$

Глава 4 состоит из четырех параграфов.

Основными результатами четвертой главы являются теоремы 16 – 18.

В параграфе 4.1 даются необходимые обозначения и определения.

Определение 12. *Пусть* $1 \le p, \theta \le \infty$, $r > 0$, $0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$. *Будем говорить, что функция* f *принадлежит периодическому пространству Никольского-Бесова-Морри* $B^r_\theta((M^\lambda_p)^*(\mathbb{R}^n))$, *если* $f - 2\pi$*-периодическая измеримая функция, для которой*

$$\|f\|^*_{B^r_\theta(M^\lambda_p)} = \inf\left(\sum_{k=0}^\infty 2^{r\theta k}(\|T_{2^k}\|^*_{M^\lambda_p})^\theta\right)^{1/\theta} < \infty,$$

где f *представима в виде ряда*

$$f = \sum_{k=0}^\infty T_{2^k}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{21}$$

члены которого тригонометрические многочлены порядка не выше 2^k, *а инфимум берется по всем разложениям* (21).

В параграфе 4.2 доказана теорема вложения для периодических пространств Никольского-Бесова-Морри.

Теорема 16. *Пусть* $1 \le p < q \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $r > 0$ *и*

$$r' = r - n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) > 0.$$

Тогда

$$B^r_\theta((M^\lambda_p)^*(\mathbb{R}^n)) \to B^{r'}_\theta((M^{p\lambda/q}_q)^*(\mathbb{R}^n)).$$

В параграфе 4.3 доказана прямая теорема о следах для периодических пространств Никольского-Бесова-Морри.

Теорема 17. *Пусть* $1 < p \le \infty$, $r > 0$, $1 \le m < n$. *Тогда имеет место вложение*

$$B_\theta^r((L_p)^*(\mathbb{R}^{n-m}) \times (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^m)) \to B_\theta^{r'}((L_\infty)^*(\mathbb{R}^{n-m}) \times (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^m)), \qquad (22)$$

где $r' = r - \frac{n-m}{p} > 0$, *в частности неравенство, аналогичное* (22), *но в правой части* $B_\theta^{r'}((M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^m))$.

В параграфе 4.4 доказана обратная теорема о следах для периодических пространств Никольского-Бесова-Морри.

Теорема 18. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$, $m < n$, $x = (u, v)$, $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^{n-m}$ *и* $r' = r - \frac{n-m}{p} > 0$. *Тогда*

$$B_\theta^{r'}((M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^m)) \to B_\theta^r((L_p)^*(\mathbb{R}^{n-m}) \times (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^m)) \qquad (23)$$

и

$$B_\theta^{r'}((M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^m)) \to B_\theta^r((M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n)).$$

Замечание 5. *Из прямой теоремы о следах* (22) *и обратной теоремы о следах* (23) *следует утверждение об полном описании пространства следов на* $\mathbb{R}^m$ *функций из пространства* $B_\theta^r((L_p)^*(\mathbb{R}^{n-m}) \times (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^m))$.

Теорема 19. *Пусть* $1 \le p, \theta \le \infty$, $n, m \in \mathbb{N}$,$m < n$, $r > \frac{n-m}{p}$,
$0 \le \lambda \le \frac{m}{p}$. *Тогда*

$$Tr_{\mathbb{R}^m}(B_\theta^r((L_p)^*(\mathbb{R}^{n-m}) \times (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^m))) = B_\theta^{r'}((M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^m)).$$

Глава 1

Неравенства для целых функций экспоненциального типа для пространств Морри $M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$

1.1. Пространства Морри $M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$

Определение 1.1. *Пусть* $0 < p \le \infty$ *и* $0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$, *тогда* $f \in M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, *если*

$$f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$$

и

$$\|f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{r>0} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty.$$

Отметим некоторые свойства этих пространств.

1. Из определения сразу видно, что при $\lambda = 0$, $M_p^0(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|f\|_{M_p^0(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

2. При $\lambda = \frac{n}{p}$, $M_p^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n) = L_\infty(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|f\|_{M_p^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} = v_n^{\frac{n}{p}} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)},$$

   где v_n- объём единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

3. Если $\lambda < 0$ или $\lambda > \frac{n}{p}$, то пространства $M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$ состоят только из функций, эквивалентных 0 на $\mathbb{R}^n$.

4. Пусть $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\eta(x) = 1$ для любого $x \in B(0,1)$, $0 < p < \infty$, $0 < \lambda < \frac{n}{p}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда

$$|x|^\alpha \eta(x) \in L_p(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \alpha > -\frac{n}{p},$$

$$|x|^\alpha \eta(x) \in M_p^\lambda(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \alpha \geq \lambda - \frac{n}{p}$$

и

$$|x|^\alpha (1-\eta(x)) \in L_p(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \alpha < -\frac{n}{p},$$

$$|x|^\alpha (1-\eta(x)) \in M_p^\lambda(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \alpha \leq \lambda - \frac{n}{p},$$

$$|x|^\alpha \in M_p^\lambda(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \alpha = \lambda - \frac{n}{p}.$$

Функция $|x|^{\lambda-\frac{n}{p}}$ является "крайней"в $M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, так как $|x|^{\lambda-\frac{n}{p}} \in M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, но $|x|^{\lambda-\frac{n}{p}} \notin M_p^{\lambda+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$ для любого $\varepsilon > 0$ и $|x|^{\lambda-\frac{n}{p}} \notin M_p^{\lambda-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$ для любого $0 < \varepsilon < \lambda$. Отсюда, в частности, следует, что $L_p(\mathbb{R}^n) \not\subset M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$ и также $M_p^\lambda(\mathbb{R}^n) \not\subset L_p(\mathbb{R}^n)$.

В связи с этим бывает полезно рассмотрение пространств

$$\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n) \cap M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$$

с квазинормой

$$\|f\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} = \max\{\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \|f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}\}. \tag{1.1}$$

Для этих пространств

$$|x|^\alpha \eta(x) \in \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \alpha \geq \lambda - \frac{n}{p},$$

$$|x|^\alpha (1-\eta(x)) \in \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \alpha < -\frac{n}{p}.$$

Функция $|x|^{\lambda-\frac{n}{p}}\eta(x)$ является "крайней"в $\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, так как $|x|^{\lambda-\frac{n}{p}}\eta(x) \in \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, но для любого $\varepsilon > 0 \quad |x|^{\lambda-\frac{n}{p}}\eta(x) \notin \widehat{M}_p^{\lambda+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$.

5. Для любых $\varepsilon > 0$

$$\|f(\varepsilon x)\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} = \varepsilon^{\lambda-\frac{n}{p}}\|f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \tag{1.2}$$

и

$$\varepsilon^{-\frac{n}{p}} \min\{1, \varepsilon^{\lambda}\} \|f\|_{\widehat{M}_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)} \le \|f(\varepsilon x)\|_{\widehat{M}_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)}$$

$$= \varepsilon^{-\frac{n}{p}} \Big(\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \varepsilon^{\lambda} \|f(\varepsilon x)\|_{M_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)} \Big)$$

$$\le \varepsilon^{-\frac{n}{p}} \max\{1, \varepsilon^{\lambda}\} \|f\|_{\widehat{M}_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)}.$$

6. Отметим, что пространство $\widehat{M}_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)$ (в отличие от пространства $M_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)$) обладает свойством монотонности по параметру λ:

$$\widehat{M}_p^{\mu}(\mathbb{R}^n) \subset \widehat{M}_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n),\ 0 < \lambda < \mu < \frac{n}{p},\ 0 < p < \infty.$$

Действительно,

$$\|g\|_{M_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \max\{\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{0 < r \le 1} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(B(x,r))}, \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{1 < r < \infty} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(B(x,r))}\}$$

$$\le \max\{\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{0 < r \le 1} r^{-\mu} \|f\|_{L_p(B(x,r))}, \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\}$$

$$\le \max\{\|f\|_{M_p^{\mu}(\mathbb{R}^n)}, \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\} = \|f\|_{\widehat{M}_p^{\mu}(\mathbb{R}^n)},$$

следовательно,

$$\|f\|_{\widehat{M}_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{\widehat{M}_p^{\mu}(\mathbb{R}^n)}.$$

7. (Инвариантность относительно сдвига) Для любых $0 < p \le \infty,\ 0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$

$$\|f(y+h)\|_{M_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \|f(y)\|_{M_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)} \quad \forall h \in \mathbb{R}^n. \tag{1.3}$$

Действительно,

$$\|f(y+h)\|_{M_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{r > 0} r^{-\lambda} \|f(y+h)\|_{L_p(B(x,r))}$$

$(z = y + h)$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{r > 0} r^{-\lambda} \|f(z)\|_{L_p(B(x+h,r))}$$

$(x+h=u)$

$$= \sup_{u\in\mathbb{R}^n} \sup_{r>0} r^{-\lambda} \|f(z)\|_{L_p(B(u,r))} = \|f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}.$$

Согласно (1.1) и (1.3) также

$$\|f(y+h)\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} = \|f(y)\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

8. По поводу других свойств пространств Морри и общих локальных и глобальных пространств типа Морри и их применений см. обзорные статьи [3], [4], [8], [10], [15], [19], [20].

1.2. Неравенство Бернштейна для пространств Морри $M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$

В одномерном случае интерполяционная формула для производной целой функции g экспоненциального типа $\nu > 0$ имеет вид

$$g'(x) = \frac{\nu}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-\frac{1}{2})^2}g\Big(x+\frac{\pi}{\nu}\big(k-\frac{1}{2}\big)\Big), \quad x\in\mathbb{R}, \tag{1.4}$$

где ряд сходится равномерно (см, например, книгу [36]).

Если положить $\nu = 1$, $g(x) = \sin x \in \mathfrak{M}_{1,\infty}(\mathbb{R})$, то полагая $x = 0$, получим, что

$$\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(k-\frac{1}{2})^2} = 1\ . \tag{1.5}$$

Теорема 1.1. *Пусть $Z(\mathbb{R}^n)$ – нормированное пространство функций $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$, причем норма $\|\cdot\|_{Z(\mathbb{R}^n)}$ инвариантна относительно сдвига: для любой функции $f\in Z(\mathbb{R}^n)$*

$$\|f(x+h)\|_{Z(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{Z(\mathbb{R}^n)} \quad \forall h\in\mathbb{R}^n. \tag{1.6}$$

Тогда для любой функции $g\in E_\nu(\mathbb{R}^n)\cap Z(\mathbb{R}^n)$

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial x_j}\right\|_{Z(\mathbb{R}^n)} \le \nu\|g(x)\|_{Z(\mathbb{R}^n)},\ j=1,\dots,n.$$

Доказательство. Пусть сначала $n = 1$. Согласно формулам (1.4) и (1.5)

$$\|g'(x)\|_{Z(\mathbb{R})} = \left\|\frac{\nu}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-\frac{1}{2})^2}g\Big(x+\frac{\pi}{\nu}\big(k-\frac{1}{2}\big)\Big)\right\|_{Z(\mathbb{R})}$$

$$\le \frac{\nu}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(k-\frac{1}{2})^2}\left\|g\Big(x+\frac{\pi}{\nu}\big(k-\frac{1}{2}\big)\Big)\right\|_{Z(\mathbb{R})}$$

$$= \frac{\nu}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(k-\frac{1}{2})^2}\|g(x)\|_{Z(\mathbb{R})} = \nu\|g(x)\|_{Z(\mathbb{R})}$$

В многомерном случае при фиксированных $x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n$ функция $g(x) = g(x_1,\dots,x_n)$ является целой функцией экспоненциального типа ν

по переменной x_j, поэтому согласно (1.4)

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x_1,\ldots,x_n)=\frac{\nu}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-\frac{1}{2})^2}g\Big(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j+\frac{\pi}{\nu}(k-\frac{1}{2}),x_{j+1},\ldots,x_n\Big)$$

$$=\frac{\nu}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-\frac{1}{2})^2}g\Big(x+\frac{\pi}{\nu}(k-\frac{1}{2})e_j\Big),\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

где $e_j=\underbrace{(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)}_{\text{j}}$. Следовательно, согласно (1.6)

$$\Big\|\frac{\partial g}{\partial x_j}\Big\|_{Z(\mathbb{R}^n)}\le\frac{\nu}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(k-\frac{1}{2})^2}\Big\|g\Big(x+\frac{\pi}{\nu}(k-\frac{1}{2})e_j\Big)\Big\|_{Z(\mathbb{R}^n)}=\nu\|g\|_{Z(\mathbb{R}^n)}.$$

□

Следствие 1.1. *Пусть* $1\le p\le\infty$, $0\le\lambda\le\frac{n}{p}$, *тогда*

$\forall g\in E_\nu(\mathbb{R}^n)\cap M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$

$$\Big\|\frac{\partial g}{\partial x_j}\Big\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}\le\nu\|g\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)},\quad j=1,\ldots,n.$$

Это неравенство также имеет место, если заменить $M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$ *на* $\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1.2. *Пусть* $1\le p\le\infty$, $n\in\mathbb{N}$, $0\le\lambda\le\frac{n}{p}$, $\nu>0$. *Тогда*

$$E_\nu(\mathbb{R}^n)\cap M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)\subset\mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^n),\tag{1.7}$$

$$E_\nu(\mathbb{R}^n)\cap\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)=\mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^n),\tag{1.8}$$

причем существует $c_1=c_1(n,\lambda)>0$ *такое, что*

$$\|g\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}\le c_1\nu^\lambda\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\tag{1.9}$$

и

$$\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\le\|g\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}\le c_1\max\{1,\nu^\lambda\}\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\tag{1.10}$$

для любых $\nu>0$ *и* $g\in\mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Докажем неравенство (1.9). Пусть $g \in E_\nu(\mathbb{R}^n) \cap L_p(\mathbb{R}^n)$ и $0 \leq \gamma \leq 1$. Тогда

$$\|g\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} = \max\{J_1, J_2\},$$

где

$$J_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{0<r<1} r^{-\lambda} \|g\|_{L_p(B(x,r))}$$

$$J_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{r\geq 1} r^{-\lambda} \|g\|_{L_p(B(x,r))}.$$

Очевидно, что

$$J_2 \leq \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.11}$$

Оценим J_1 :

$$J_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{0<r<1} r^{-\lambda} \|g\|^{\gamma}_{L_p(B(x,r))} \|g\|^{1-\gamma}_{L_p(B(x,r))}$$

$$\leq \Big(\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{0<r<1} r^{-\lambda} (v_n r^n)^{\frac{\gamma}{p}} \|g\|^{\gamma}_{L_\infty(B(x,r))} \Big) \|g\|^{1-\gamma}_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Пусть $\gamma = \frac{\lambda p}{n}$, тогда согласно неравенству (2) с $q = \infty$

$$J_1 \leq v_n^{\frac{\lambda}{n}} \|g\|^{\frac{\lambda p}{n}}_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \|g\|^{1-\frac{\lambda p}{n}}_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq v_n^{\frac{\lambda}{n}} 2^{\lambda p} \nu^\lambda \|g\|^{\frac{\lambda p}{n}}_{L_p(\mathbb{R}^n)} \|g\|^{1-\frac{\lambda p}{n}}_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq 2^n v_n^{\frac{\lambda}{n}} \nu^\lambda \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.12}$$

Неравенства (1.9) и (1.10) (и, значит, соотношения (1.7) и (1.8)) следуют из (1.11) и (1.12) с $c_1 = \max\{1, 2^n v_n^{\frac{\lambda}{n}}\}$. □

Замечание 1.1. *Следующий пример показывает, что в* (1.2) *при* $p = 1$ *и* $0 < \lambda \leq n$ *равенство не имеет места:*

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{\sin \nu x_j}{x_j} \in M_1^\lambda(\mathbb{R}^n), \quad \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin \nu x_j}{x_j} \notin L_1(\mathbb{R}^n).$$

Второе утверждение очевидно. Докажем первое. Пусть сначала $n = 1$. *Тогда*

$$\Big\| \frac{\sin \nu x}{x} \Big\|_{M_1^\lambda(\mathbb{R})} = \max\{J_1, J_2\},$$

где

$$J_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}}\sup_{0<r\le 1} r^{-\lambda}\Big\|\frac{\sin\nu y}{y}\Big\|_{L_1(x-r,x+r)} \le \nu\sup_{x\in\mathbb{R}}\sup_{0<r\le 1} r^{-\lambda}(2r) = 2\nu,$$

$$J_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}}\sup_{r\ge 1} r^{-\lambda}\Big\|\frac{\sin\nu y}{y}\Big\|_{L_1(x-r,x+r)} = \max\{J_{21}, J_{22}\},$$

где

$$J_{21} = \sup_{x\in\mathbb{R}}\sup_{r\ge 1} r^{-\lambda}\Big\|\frac{\sin\nu y}{y}\Big\|_{L_1((x-r,x+r)\cap(-1,1))} \le \nu\sup_{x\in\mathbb{R}}\sup_{r\ge 1} r^{-\lambda}2 = 2\nu,$$

$$J_{22} = \sup_{x\in\mathbb{R}}\sup_{r\ge 1} r^{-\lambda}\Big\|\frac{\sin\nu y}{y}\Big\|_{L_1((x-r,x+r)\cap^c(-1,1))} = \max\{J_{221}, J_{222}\},$$

где

$$J_{221} = \sup_{r\ge 1}\sup_{|x|\le 2r}\Big\|\frac{\sin\nu y}{y}\Big\|_{L_1((x-r,x+r)\cap^c(-1,1))}$$

$$\le \nu\sup_{r\ge 1} r^{-\lambda}\Big(\int_{-3r}^{-1} + \int_1^{3r}\Big)\frac{dy}{|y|} = 2\nu\sup_{r\ge 1} r^{-\lambda}\ln 3r = \frac{2\nu 3^\lambda}{e\lambda},$$

$$J_{222} = \sup_{r\ge 1}\sup_{|x|>2r}\Big\|\frac{\sin\nu y}{y}\Big\|_{L_1((x-r,x+r)\cap^c(-1,1))} \le \sup_{r\ge 1}\sup_{|x|\ge 2r}\Big\|\frac{1}{|y|}\Big\|_{L_1(x-r,x+r)}$$

$$= \sup_{r\ge 1} r^{-\lambda}\sup_{x\ge 2r}\int_{x-r}^{x+r}\frac{dy}{y} = \sup_{r\ge 1} r^{-\lambda}\sup_{x\ge 2r}\ln\frac{x+r}{x-r} = \ln 3.$$

Если $n>1$, то достаточно учесть, что согласно неравенству (1.39), которое будет доказано в разделе 5,

$$\Big\|\prod_{j=1}^{n}\frac{\sin\nu x_j}{x_j}\Big\|_{M_1^\lambda(\mathbb{R}^n)} \le \Big\|\frac{\sin\nu x}{x}\Big\|^n_{M_1^\lambda(\mathbb{R})}.$$

Замечание 1.2. *Неравенство (1.9) (особенно при $\lambda = 1$) является еще одним аналогом неравенства Бернштейна для пространств Морри.*

Замечание 1.3. *Для пространств Никольского справедливы неравенства Бернштейна, аналогичные неравенству (1.9) с заменой $\|g\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}$ на $\|g\|_{h_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}$ и неравенству (1.10) с заменой $\|g\|_{\widehat{M_p^\lambda}(\mathbb{R}^n)}$ на $\|g\|_{H_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}$ (см. книгу [34], раздел 4.4.4).*

1.3. Неравенство разных метрик для пространств Морри $M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$

Прежде всего мы приведем необходимые для дальнейшего определения и факты, относящиеся к теории преобразований Фурье.

Определение 1.2. *Пусть функции $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, тогда сверткой называется функция $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, определенная равенством*

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t-\tau)g(\tau)d\tau, \; t \in \mathbb{R}^n.$$

Лемма 1.1. *Пусть $1 \le p \le q \le \infty$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, $f \in L_{q'}(\mathbb{R}^n)$ и $g \in \mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^n)$. Тогда для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$*

$$|(f * g)(x) - (f * g)(y)| \le M\|f\|_{L_{q'}(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}|x-y|,$$

где $M = 2^n n\nu^{1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$.

Доказательство. Применяя неравенство Гёльдера, следствие 7 из книги [26], а также неравенства (1) и (2), получим, что

$$|(f*g)(x) - (f*g)(y)| = |(g*f)(x) - (g*f)(y)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} (g(x-z) - g(y-z))f(z)dz\right|$$

$$\le \|g(x-z) - g(y-z)\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L_{q'}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\le \left(\sum_{j=1}^{n} \left\|\frac{\partial g}{\partial x_j}\right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}\right)\|f\|_{L_{q'}(\mathbb{R}^n)}|x-y|$$

$$\le n\nu\|g\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L_{q'}(\mathbb{R}^n)}|x-y|$$

$$\le 2^n n\nu^{1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|f\|_{L_{q'}(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}|x-y|.$$

$\square$

Определение 1.3. *Преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ задаётся следующей формулой:*

$$(Ff)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi\cdot x} dx, \ \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.13}$$

$\xi \cdot x = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n$.

Определение 1.4. *Если $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, где $1 < p \leq 2$, то преобразование Фурье задается равенством*

$$(Ff)(\xi) = \lim_{r\to\infty} \big(F(f\chi_{B(0,r)})\big)(\xi) \quad L_{p'}(\mathbb{R}^n), \tag{1.14}$$

где $p' = \frac{p}{p-1}$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$. (Это равенство справедливо и при p=1 для преобразования Фурье Ff, задаваемого равенством (1.13).)

Замечание 1.4. *При этом $Ff \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|Ff\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)},$$

(равенство Парсеваля), при $1 \leq p < 2$

$$\|Ff\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \left(\frac{p^{\frac{1}{p}}}{p'^{\frac{1}{p'}}}\right)^{\frac{n}{2}} \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.15}$$

(неравенство Хаусдорфа-Юнга-Бекнера, постоянная $(2\pi)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \left(\frac{p^{\frac{1}{p}}}{p'^{\frac{1}{p'}}}\right)^{\frac{n}{2}}$ является точной).

Определение 1.5. *Если $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, где $1 \leq p \leq \infty$, то преобразование Фурье $\mathcal{F}f$ определяется в пространстве обобщенных функций Шварца $S'(\mathbb{R}^n)$ как линейный непрерывный функционал на $S(\mathbb{R}^n)$, задаваемый равенством*

$$(\mathcal{F}f, \varphi) = (f, F\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)(F\varphi)(x) dx \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Замечание 1.5. *Если* $1 \le p \le 2$, *то, поскольку* $fF\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$, *согласно теореме Фубини*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)(F\varphi)(x)dx = \lim_{r\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi_{B(0,r)}(x)(F\varphi)(x)dx$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi_{B(0,r)}(x)\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(\xi)e^{-i\xi\cdot x}d\xi\Bigg)dx$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi_{B(0,r)}(x)e^{-i\xi\cdot x}dx\Bigg)\varphi(\xi)d\xi$$

$$= \lim_{r\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\big(F(f(x)\chi_{B(0,r)}\big)(\xi)\varphi(\xi)d\xi$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n}(Ff)(\xi)\varphi(\xi)d\xi,$$

так как согласно (1.15) $Ff \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$ *и согласно* (1.14)

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\big(F(f\chi_{B(0,r)})(\xi) - (Ff)(\xi)\big)\varphi(\xi)d\xi\right|$$

$$\le \big\|\big(F(f\chi_{B(0,r)}))(\xi) - (Ff)(\xi)\big\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)}\big\|\varphi(\xi)\big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \to 0$$

при $r \to \infty$. *Таким образом, при* $1 \le p \le 2$

$$(\mathcal{F}f,\varphi) = (f,F\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}(Ff)(\xi)\varphi(\xi)d\xi \quad \forall\varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Следовательно, $\mathcal{F}f$ *является регулярной обобщенной функцией, порождаемой преобразованием Фурье* $Ff \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$, *задаваемым равенством* (1.13) *при p=1 и равенством* (1.14) *при* $1 < p \le 2$.

Теорема 1.3. *(Теорема Л. Шварца, см., например, книгу* [36]*) Если* $g \in \mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^n)$ *и* $1 \le p \le \infty$, *то преобразование Фурье* Fg, *понимаемое в смысле теории обобщенных функций из пространства Шварца* $S'(\mathbb{R}^n)$, *равно нулю вне замыкания куба*

$$\Delta_\nu = \{|x_j| < \nu,\ j = 1,\dots,n\}.$$

Замечание 1.6. *Напомним, что для* $\varphi, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$

$$(F(\varphi * g))(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}(F\varphi)(\xi)(Fg)(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.16}$$

Из (1.16) *сразу следует, что если* $(F\varphi)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ *для любого* $\xi \in \operatorname{supp} Fg$, *то* $F(\varphi * g) = Fg$ *и*

$$g(x) = (\varphi * g)(x) \tag{1.17}$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. *Если* $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n), g \in \mathfrak{M}_{\nu,1}(\mathbb{R}^n)$ *и* $(F\varphi)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ *для любых* $\xi \in \Delta_\nu$, *то обе функции* g *и, согласно лемме* 1.1 *с* $f = \varphi$, $p = 1$, $q = \infty$, *свертка* $\varphi * g$ *непрерывны на* $\mathbb{R}^n$, *поэтому равенство* (1.17) *имеет место для любых* $x \in \mathbb{R}^n$.

Определение 1.6. *Пусть* $1 \le p \le \infty, \nu > 0$. *Будем говорить, что* $\varphi \in J_{\nu,p}(\mathbb{R}^n)$, *если* $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$ *и преобразование Фурье* $F\varphi$, *понимаемое, вообще говоря, в смысле теории обобщенных функций из пространства* $S'(\mathbb{R}^n)$, *равно* $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ *на* Δ_ν.

Пример. При $1 < p \le \infty$ функция

$$\varphi_{\nu.n}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}F^{-1}(\chi_{\Delta_\nu})(x) = \pi^{-n}\prod_{j=1}^{n}\frac{\sin \nu x_j}{x_j} \tag{1.18}$$

принадлежит пространству $J_{\nu,p}(\mathbb{R}^n)$. Отметим, что

$$\|\varphi_{\nu,n}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} = \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^n, \quad \|\varphi_{\nu,n}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \|F\varphi_{\nu,n}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Теорема 1.4. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $\varphi \in J_{\nu,p'}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда равенство* (1.17) *справедливо для всех* $x \in \mathbb{R}^n$.

Замечание 1.7. *При других предположениях относительно функции* φ *это утверждение доказано в книге* [36], *лемма* 8.5.2 *и в статье* [28], *раздел* 3, *лемма* 1.

Доказательство. 1. Пусть сначала преобразование Фурье $F\varphi$ равно $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ на Δ_μ для некоторого $\mu > \nu$.

1.1. Предположим, что $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ и $g \in \mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^n) \bigcap S(\mathbb{R}^n)$. Тогда $Fg \in S(\mathbb{R}^n)$ и для любых $x \in \mathbb{R}^n$

$$g(x) = (F^{-1}Fg)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}(Fg)(\xi)d\xi = \big((2\pi)^{-\frac{n}{2}}, e^{ix\cdot\xi}(Fg)(\xi)\big).$$

Так как $\operatorname{supp} e^{ix\cdot\xi}(Fg)(\xi) \subset \bar{\Delta}_\nu \subset \Delta_\mu$, то согласно определению равенства обобщенных функций и преобразования Фурье в $S'(\mathbb{R}^n)$

$$g(x) = \big((2\pi)^{-\frac{n}{2}}, e^{ix\cdot\xi}(Fg)(\xi)\big)$$

$$= (\mathcal{F}\varphi, e^{ix\cdot\xi}(Fg)(\xi)) = (\varphi, F(e^{ix\cdot\xi}(Fg)(\xi)))$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)(F(e^{ix\cdot\xi}(Fg)(\xi)))(y)dy.$$

Согласно свойствам преобразования Фурье

$$(F(e^{ix\cdot\xi}h(\xi)))(y) = (Fh)(y-x), \ h \in L_1(\mathbb{R}^n)$$

и

$$FFg = g\_, \ g \in S(\mathbb{R}^n)$$

где $g\_(x) = g(-x), \ x \in \mathbb{R}^n$. Поэтому

$$g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)(FFg)(y-x)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)g\_(y-x)dx$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)g(x-y)dx = (g*\varphi)(x) = (\varphi*g)(x). \tag{1.19}$$

1.2. В общем случае выберем функции $\varphi_k \in S(\mathbb{R}^n)$ и $g_k \in \mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^n) \bigcap S(\mathbb{R}^n), \ k \in \mathbb{N}$, такие, что $\varphi_k \to \varphi$ и $g_k \to g$ слабо в $S'(\mathbb{R}^n)$, т.е.

$$\lim_{k\to\infty} (\varphi_k, \psi) = (\varphi, \psi), \ \lim_{k\to\infty} (g_k, \psi) = (g, \psi) \ \ \forall \psi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Способ построения таких функций φ_k и g_k приведен в книге [36], раздел 1.5.8. Применяя равенство (1.19) к функциям φ_k и g_k и переходя к пределу при $k \to \infty$, получим, что

$$(g, \psi) = (\varphi * g, \psi) \quad \forall \psi \in S(\mathbb{R}^n) \iff$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\psi(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\varphi * g)(x)\psi(x)dx \quad \forall \psi \in S(\mathbb{R}^n), \tag{1.20}$$

поскольку $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$ и $\varphi * g \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ (так как согласно неравенству Гельдера

$$|(\varphi * g)(x)| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)g(y)dy \right| \leq \|\varphi\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \big).$$

Согласно основной лемме вариационного исчисления из равенства (1.20) следует равенство (1.17) для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. Функция g и согласно лемме 1.1 функция $\varphi * g$ непрерывны на $\mathbb{R}^n$, откуда следует, что равенство (1.20) выполняется для любых $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Пусть теперь преобразование Фурье $F\varphi$ равно $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ на Δ_ν.

Пусть T_α, $\alpha > 0$, - оператор растяжения: $(T_\alpha f)(x) = f(\alpha x)$ для $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ и $(T_\alpha f, \psi) = \frac{1}{\alpha^n}(f, T_{\frac{1}{\alpha}}\psi)$ для $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ для любых $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$. Отметим, что $F(T_\alpha f) = \frac{1}{\alpha^n} T_{\frac{1}{\alpha}}(Ff)$ для $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ (см., например, [27], глава 2, раздел 9.3е).

2.1. Пусть теперь $\varphi_\mu = (\frac{\mu}{\nu})^n T_{\frac{\mu}{\nu}}\varphi$. Докажем, что $F\varphi_\mu = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ на Δ_μ. Действительно, для любых $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$

$$(F\varphi_\mu, \psi) = \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^n (F(T_{\frac{\mu}{\nu}}\varphi), \psi) = (T_{\frac{\mu}{\nu}}(F\varphi), \psi) = \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^n ((F\varphi), T_{\frac{\mu}{\nu}}\psi).$$

Предположим, что supp $\psi \subset \Delta_\mu$. Тогда существует $0 < \varepsilon < \mu$ (ε зависит от supp ψ) такое, что supp $\psi \subset \overline{\Delta_{\mu-\varepsilon}}$. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ любая точка такая, что $(T_{\frac{\mu}{\nu}}\psi)(x) \neq 0$, т.е. $\psi(\frac{\mu x}{\nu}) \neq 0$. Тогда $\frac{\mu x}{\nu} \in$ supp $\psi \subset \overline{\Delta_{\mu-\varepsilon}}$, значит $x \in \frac{\nu}{\mu}\overline{\Delta_{\mu-\epsilon}} = \overline{\Delta_{\nu-\frac{\nu\varepsilon}{\mu}}}$. Следовательно, supp $T_{\frac{\mu}{\nu}}\psi \subset \overline{\Delta_{\nu-\frac{\nu\varepsilon}{\mu}}} \subset \Delta_\nu$. Так как $F\varphi = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ на Δ_ν и

$\operatorname{supp} T_{\frac{\mu}{\nu}}\psi \subset \Delta_\nu$, то

$$(F\varphi, T_{\frac{\mu}{\nu}}\psi) = ((2\pi)^{-\frac{n}{2}}, T_{\frac{\mu}{\nu}}\psi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi\Big(\frac{\mu x}{\nu}\Big) dx$$

$$= \Big(\frac{\nu}{\mu}\Big)^n (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(y) dy = \Big(\frac{\nu}{\mu}\Big)^n ((2\pi)^{-\frac{n}{2}}, \psi),$$

значит, $(F\varphi_\mu, \psi) = ((2\pi)^{-\frac{n}{2}}, \psi)$ для любых $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ таких, что $\operatorname{supp} \psi \subset \Delta_\mu$, т.е. $F\varphi_\mu = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ на Δ_μ.

Согласно пункту 1 доказательства для любых $x \in \mathbb{R}^n$

$$g(x) = (\varphi_\mu * g)(x) = \Big(\frac{\mu}{\nu}\Big)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\Big(\frac{\mu}{\nu}(x-y)\Big) g(y) dy = \Big(\frac{\mu}{\nu} y = z\Big)$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\Big(\frac{\mu x}{\nu} - z\Big) g\Big(\frac{\nu z}{\mu}\Big) dz.$$

Положим $g_\mu(z) = g(\frac{\nu}{\mu} z), z \in \mathbb{R}^n$ и $x = \frac{\nu u}{\mu}$. Тогда

$$g_\mu(u) = (\varphi * g_\mu)(u), u \in \mathbb{R}^n.$$

2.2. Очевидно, что $\lim_{\mu \to \nu + 0} g_\mu(u) = g(u)$. Докажем, что

$$\lim_{\mu \to \nu + 0} (\varphi * g_\mu)(u) = (\varphi * g)(u).$$

Согласно неравенству Гёльдера для любых $u \in \mathbb{R}^n$

$$|(\varphi * g_\mu)(u) - (\varphi * g)(u)| = |(\varphi * (g_\mu - g))(u)| \le \|\varphi\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)} \|g_\mu - g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

где для любых $r > 0$ при $\nu < \mu \le 2\nu$

$$\|g_\mu - g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le \|g_\mu - g\|_{L_p(B(0,r))} + \|g_\mu - g\|_{L_p({}^c B(0,r))}$$

$$\le (v_n r^n)^{\frac{1}{p}} \Big\| g_\mu - g \Big\|_{L_\infty(B(0,r))} + \|g_\mu\|_{L_p({}^c B(0,r))} + \|g\|_{L_p({}^c B(0,r))}. \tag{1.21}$$

Далее

$$\|g_\mu\|_{L_p({}^cB(0,r))} = \Big\|g\Big(\frac{\nu u}{\mu}\Big)\Big\|_{L_p({}^cB(0,r))} = \Big(\frac{\mu}{\nu}\Big)^{\frac{n}{p}}\|g\|_{L_p({}^cB(0,\frac{\nu r}{\mu}))} \leq 2^{\frac{n}{p}}\|g\|_{L_p({}^cB(0,\frac{r}{2}))}$$

и, согласно формуле Лагранжа и неравенству Бернштейна (1) с $p = \infty$ для любых $u \in B(0,r)$ для некоторых $\xi \in (\frac{\nu u}{\mu}, u)$

$$|g_\mu(u) - g(u)| = \Big|g\Big(\frac{\nu u}{\mu}\Big) - g(u)\Big| = \Big|\sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j}(\xi)\Big(\frac{\nu u_j}{\mu} - u_j\Big)\Big|$$

$$\leq \Big(1 - \frac{\nu}{\mu}\Big)\sum_{j=1}^n \Big\|\frac{\partial g}{\partial x_j}\Big\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}|u_j| \leq \Big(1 - \frac{\nu}{\mu}\Big)\nu nr\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Таким образом, используя еще неравенство (5) с $q = \infty$, получим, что

$$\|g_\mu - g\|_{L_\infty(B(0,r))} \leq$$

и, согласно (1.21),

$$\|g_\mu - g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq M_1\Big(1 - \frac{\nu}{\mu}\Big)\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + M_2\|g\|_{L_p({}^cB(0,\frac{r}{2}))},$$

где $M_1 = (v_n r^n)^{\frac{1}{p}} n 2^n \nu^{1+\frac{n}{p}} r,\ M_2 = 2^{\frac{n}{p}} + 1$.

Переходя в этом неравенстве к пределу сначала при $\mu \to \nu + 0$, а потом, учитывая, что $p < \infty$, при $r \to \infty$, получим, что[1] $\lim_{\mu\to\nu+0}\|g_\mu - g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = 0$, откуда и следует равенство (1.17) для любых $x \in \mathbb{R}^n$.

□

Следствие 1.2. *В частности, равенство* (1.17) *имеет место при любых* $1 \leq p < \infty$ *и* $g \in \mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^n)$ *для функции* $\varphi_{\nu,n}$*, определенной равенством* (1.18).

Замечание 1.8. *Условие* $p < \infty$ *использовалось только во второй части доказательства. При* $p = \infty$ *согласно первой части доказательства равенство* (1.17) *справедливо, если* $g \in \mathfrak{M}_{\nu,\infty}$ *и* $\varphi \in J_{\mu,1}$ *для некоторого* $\mu > \nu$.

[1] Если $p = \infty$, то это равенство имеет место при дополнительном предположении $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Теорема 1.5. *(Неравенство типа Юнга для пространств Морри, см.* [26]*)*

Пусть

$$1 \le r, p \le q \le \infty, \quad 0 \le \beta_1, \beta_2 \le 1,$$
$$\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{1}{q} + 1, \quad \frac{\beta_1}{r} + \frac{\beta_2}{p} = \frac{1}{q}, \quad 0 \le \lambda_1 \le \frac{n}{r}, \quad 0 \le \lambda_2 \le \frac{n}{p}$$

и

$$f_1 \in \widehat{M}_r^{\lambda_1}(\mathbb{R}^n)\ ,\ f_2 \in \widehat{M}_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^n).$$

тогда

$$\|f_1 * f_2\|_{M_q^{\beta_1\lambda_1+\beta_2\lambda_2}(\mathbb{R}^n)} \le \|f_1\|^{\beta_1}_{M_r^{\lambda_1}(\mathbb{R}^n)} \|f_1\|^{1-\beta_1}_{L_r(\mathbb{R}^n)} \|f_2\|^{\beta_2}_{M_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^n)} \|f_2\|^{1-\beta_2}_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Следствие 1.3. *Пусть*

$$1 \le p < q \le \infty, \quad 1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p},$$

$f_1 \in L_r(\mathbb{R}^n)$ *и* $f_2 \in \widehat{M}_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда*

$$\|f_1 * f_2\|_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}(\mathbb{R}^n)} \le \|f_1\|_{L_r(\mathbb{R}^n)} \|f_2\|^{\frac{p}{q}}_{M_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)} \|f_2\|^{1-\frac{p}{q}}_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.22}$$

Теорема 1.6. *Пусть* $1 \le p \le q \le \infty, \quad p < \infty, \quad 1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}, \quad 0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$, *тогда*

$$\|g\|_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}(\mathbb{R}^n)} \le c_2 \nu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|g\|^{\frac{p}{q}}_{M_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)} \|g\|^{1-\frac{p}{q}}_{L_p(\mathbb{R}^n)} \tag{1.23}$$

для любых $\nu > 0$ *и* $g \in E_\nu(\mathbb{R}^n) \cap \widehat{M}_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)$, *где*

$$c_2 = c_2(n, p, q) = \inf_{\psi \in J_{1,p'}(\mathbb{R}^n)} \|\psi\|_{L_r(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.24}$$

в предположении, что $c_2 < \infty$.

Доказательство. 1. Пусть сначала $\nu = 1$. Рассмотрим фиксированную функцию $\psi \in J_{1,p'}(\mathbb{R}^n)$. Тогда согласно равенству (1.17) и неравенству (1.22) с $f_1 = \psi,\ f_2 = g$

$$\|g\|_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}(\mathbb{R}^n)} = \|\psi * g\|_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}(\mathbb{R}^n)} \le \|\psi\|_{L_r(\mathbb{R}^n)} \|g\|^{\frac{p}{q}}_{M_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)} \|g\|^{1-\frac{p}{q}}_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.25}$$

Взяв инфимум по всем $\psi \in J_{1,p'}(\mathbb{R}^n)$, получим искомое неравенство для $\nu = 1$.

2. Если $\nu > 0,\ \nu \neq 1$ и $g \in E_\nu(\mathbb{R}^n) \cap \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, то $g(\frac{x}{\nu}) \in E_1(\mathbb{R}^n) \cap \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, поэтому согласно равенству (1.2) и неравенству (1.25)

$$\|g(x)\|_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}(\mathbb{R}^n)} = \left(x = \frac{y}{\nu}\right) = \nu^{\frac{p\lambda}{q} - \frac{n}{q}} \left\| g\left(\frac{y}{\nu}\right) \right\|_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq c_2 \nu^{\frac{p\lambda}{q} - \frac{n}{q}} \left\| g\left(\frac{y}{\nu}\right) \right\|^{\frac{p}{q}}_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \left\| g\left(\frac{y}{\nu}\right) \right\|^{1-\frac{p}{q}}_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

$$= (y = \nu x) = c_2 \nu^{\frac{p\lambda}{q} - \frac{n}{q}} \nu^{(\frac{n}{p} - \lambda)\frac{p}{q}} \|g\|^{\frac{p}{q}}_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \nu^{(1-\frac{p}{q})\frac{n}{p}} \|g\|^{1-\frac{p}{q}}_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

$$= c_2 \nu^{n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|g\|^{\frac{p}{q}}_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \|g\|^{1-\frac{p}{q}}_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

□

Следствие 1.4. *В предположениях теоремы* 1.6

$$\|g\|_{\widehat{M}_q^{\frac{p\lambda}{q}}(\mathbb{R}^n)} \leq c \nu^{n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|g\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \tag{1.26}$$

для любых $\nu > 0$ *и* $g \in E_\nu(\mathbb{R}^n) \cap \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. В силу формулы (1.23) с $\lambda = 0$ и с $0 < \lambda \leq \frac{n}{p}$

$$\|g\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq c_2 \nu^{n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|g_\nu\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq c_2 \nu^{n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|g\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}$$

и

$$\|g\|_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}(\mathbb{R}^n)} \leq c_2 \nu^{n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|g\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)},$$

откуда и следует неравенство (1.26). □

Следствие 1.5. *Если в дополнение к предположениям теоремы* 1.6,

$$1 \leq p \leq \min\{2, q\} \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \geq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow q \geq \frac{2p}{2-p},$$

то

$$\|g\|_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{(r')^{\frac{1}{r'}}}{r^{\frac{1}{r}}} \right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|g\|^{\frac{p}{q}}_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \|g\|^{1-\frac{p}{q}}_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

и

$$\|g\|_{\widehat{M}_q^{\frac{p\lambda}{q}}(\mathbb{R}^n)} \le \left(\frac{(r')^{\frac{1}{r'}}}{r^{\frac{1}{r}}}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|g\|_{\widehat{M}_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)},$$

в частности, при $q = \infty$ *для любых* $1 \le p \le 2$ *и* $g \in \mathfrak{M}_{p,\nu}(\mathbb{R}^n)$

$$\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \le \left(\frac{p^{\frac{1}{p}}}{(p')^{\frac{1}{p'}}}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{p}} \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.27}$$

а при $p = 2$ *и* $p = 1$

$$\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \le \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \|g\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.28}$$

$$\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \le \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{n} \|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.29}$$

Доказательство. Рассмотрим в качестве функции ψ в (1.24) функцию $\varphi_{\nu,n}$, определенную равенством (1.18). Тогда согласно (1.24) и неравенству (1.15) с p, замененным на r' (в силу сделанных предположений $1 \le r' \le 2$)

$$\begin{aligned} c_2(n,p,q) &\le \|\varphi_{\nu,n}\|_{L_r(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|F\chi_{\Delta_\nu}\|_{L_r(\mathbb{R}^n)} \\ &\le (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (2\pi)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{r'})} \left(\frac{(r')^{\frac{1}{r'}}}{r^{\frac{1}{r}}}\right)^{\frac{n}{2}} \|\chi_{\Delta_\nu}\|_{L_{r'}(\mathbb{R}^n)} \\ &= \left(\frac{(r')^{\frac{1}{r'}}}{r^{\frac{1}{r}}}\right)^{\frac{n}{2}} (2\pi)^{-\frac{1}{r'}} (2\nu)^{\frac{1}{r'}} = \left(\frac{(r')^{\frac{1}{r'}}}{r^{\frac{1}{r}}}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{1}{r'}}, \end{aligned}$$

откуда и следуют искомые неравенства.

□

Замечание 1.9. *Постоянная* $\left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}$ *в неравенстве* (1.28) *является точной. Равенство достигается для функции* $g = \varphi_{\nu,n}$.

Замечание 1.10. *В статьях* [30] *и* [31] *при* $1 \le p \le 2$ *другим способом доказано неравенсто*

$$\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \le \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{p}} \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \tag{1.30}$$

для любых $g \in \mathfrak{M}_{\nu,p}$, *в частности, неравенства* (1.28) *и* (1.29). *Если* $1 < p < 2$, *то постоянная в неравенстве* (1.27) *меньше, чем постоянная в неравенстве*

(1.30). *В* [33] *неравенство вида* (1.27) *также доказано с некоторой (другой) постоянной, меньшей, чем* $\left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{p}}$. *Подобные неравенства при* $2 < p < \infty$ *установлены в* [37], [31], [32], [32].

Следствие 1.6. *Если в дополнение к предположениям теоремы* 1.6,

$$1 \le p \le 2 \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow q = \frac{2p}{2-p} \Longleftrightarrow r = 2,$$

то

$$\|g\|_{M_{\frac{2p}{2-p}}^{(1-\frac{p}{2})\lambda}(\mathbb{R}^n)} \le \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \|g\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{p}{2}} \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{2}},$$

$$\|g\|_{\widehat{M}_{\frac{2p}{2-p}}^{(1-\frac{p}{2})\lambda}(\mathbb{R}^n)} \le \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \|g\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)},$$

в частности,

$$\|g\|_{M_2^{\frac{\lambda}{2}}(\mathbb{R}^n)} \le \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\|g\|_{M_1^\lambda(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|g\|_{\widehat{M}_2^{\frac{\lambda}{2}}(\mathbb{R}^n)} \le \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \|g\|_{\widehat{M}_1^\lambda(\mathbb{R}^n)},$$

Замечание 1.11. (*Неулучшаемость показателя* $\frac{p}{q}\lambda$ *в неравенстве разных метрик) Предположим, что для некоторых* $\mu \ge 0$ *и* $c > 0$ *для любых* $\nu > 0$ *и* $g \in E_\nu(\mathbb{R}^n) \cap \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$ *выполнятся неравенство*

$$\|g\|_{M_q^\mu(\mathbb{R}^n)} \le c\nu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|g\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{q}} \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{p}{q}}. \tag{1.31}$$

Тогда $\mu = \frac{\lambda p}{q}$.

Действительно, это неравенство также выполняется и для функций $g_\varepsilon(x) = g(\varepsilon x), x \in \mathbb{R}^n$ *для любого* $\varepsilon > 0$. *Будем считать, что функция* g *не эквивалентна 0 на* $\mathbb{R}^n$. *Так как* $g_\varepsilon \in E_{\varepsilon\nu} \cap M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, *то согласно* (1.31) *и равенству* (1.2)

$$\varepsilon^{\mu-\frac{n}{q}} \|g\|_{M_q^\mu(\mathbb{R}^n)} \le c\varepsilon^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \nu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \varepsilon^{(\lambda-\frac{n}{p})\frac{p}{q}} \|g\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{q}} \varepsilon^{-\frac{n}{p}(1-\frac{p}{q})} \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{p}{q}},$$

значит, для любого $\varepsilon > 0$

$$\varepsilon^{\mu-\frac{n}{q}} \leq \tilde{c}\varepsilon^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})+(\lambda-\frac{n}{p})\frac{p}{q}+-\frac{n}{p}(1-\frac{p}{q})},$$

где

$$\tilde{c} = c\|g\|^{-1}_{M^{\mu}_{q}(\mathbb{R}^n)}\nu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|g\|^{\frac{p}{q}}_{M^{\lambda}_{p}(\mathbb{R}^n)}\|g\|^{1-\frac{p}{q}}_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

или

$$\varepsilon^{\mu-\frac{\lambda p}{q}} \leq \tilde{c},$$

что возможно, только если $\mu = \frac{\lambda p}{q}$.

1.4. Неравенство разных измерений для пространств Морри $M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$

Определение 1.7. *Пусть*

$$0 < p_1, p_2 \leq \infty, \quad m_1, m_2 \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \lambda_1 \leq \frac{m_1}{p_1}, \;\; 0 \leq \lambda_2 \leq \frac{m_2}{p_2}. \tag{1.32}$$

Определим пространство

$$M_{p_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1}) \times M_{p_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})$$

со смешанной квазинормой как множество всех измеримых на $\mathbb{R}^{m_1+m_2}$ *функций* f*, для которых*

$$\|f\|_{M_{p_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1}) \times M_{p_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})} = \big\|\|f(u_1,u_2)\|_{M_{p_1,u_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})}\big\|_{M_{p_2,u_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})} < \infty.$$

Аналогично определяются пространства

$$\widehat{M}_{p_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1}) \times \widehat{M}_{p_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2}).$$

Отметим некоторые свойства этих пространств.

Лемма 1.2. *Пусть выполнены условия* (1.32), $f_1 \in M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})$ $f_2 \in M_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})$. *Тогда* $f_1 f_2 \in M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1}) \times M_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})$ *и*

$$\|f_1 f_2\|_{M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1}) \times M_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})} = \|f_1\|_{M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})} \|f_2\|_{M_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})}. \tag{1.33}$$

Доказательство. Действительно,

$$\|f_1 f_2\|_{M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1}) \times M_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})} = \big\|\|f_1(u_1) f_2(u_2)\|_{M_{p,u_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})}\big\|_{M_{p,u_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})}$$

$$= \big\| \, |f_2(u_2)| \, \|f_1(u_1)\|_{M_{p,u_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})}\big\|_{M_{p,u_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})}$$

$$= \|f_1\|_{M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})} \|f_2\|_{M_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})}.$$

□

Замечание 1.1. *Аналогично доказывается, что утвеждение леммы 1.2 справедливо при замене $M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})$, $M_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})$ на $\widehat{M}_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})$, $\widehat{M}_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})$:*

$$\|f_1 f_2\|_{\widehat{M}_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})\times \widehat{M}_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})} = \|f_1\|_{\widehat{M}_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})}\|f_2\|_{\widehat{M}_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})}. \tag{1.34}$$

Лемма 1.3. *Пусть выполнены условия* (1.32). *Тогда*

$$M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1}) \times M_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2}) \subset M_p^{\lambda_1+\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_1+m_2}), \tag{1.35}$$

причем

$$\|f\|_{M_p^{\lambda_1+\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_1+m_2})} \le \|f\|_{M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})\times M_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})} \tag{1.36}$$

для любых $f \in M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1}) \times M_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})$.

Если $0 < \lambda_1 + \lambda_2 < \frac{m_1+m_2}{p}$, то включение (1.35) *строгое.*

Доказательство. 1. Пусть $u_1 \in \mathbb{R}^{m_1},\ u_2 \in \mathbb{R}^{m_2}, r > 0$, тогда

$$B_{\mathbb{R}^{m_1+m_2}}((u_1, u_2), r) \subset B_{\mathbb{R}^{m_1}}(u_1, r) \times B_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2, r). \tag{1.37}$$

Действительно, если $z \in B_{\mathbb{R}^{m_1+m_2}}((u_1, u_2), r)$, то

$$|(z_1, z_2) - (u_1, u_2)| = \sqrt{|z_1 - u_1|^2 + |z_2 - u_2|^2} < r,$$

откуда следует, что $|z_1 - u_1| < r$ и $|z_2 - u_2| < r$, значит, $z_1 \in B_{\mathbb{R}^{m_1}}(u_1, r)$, $z_2 \in B_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2, r)$ и $z = (z_1, z_2) \in B_{\mathbb{R}^{m_1}}(u_1, r) \times B_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2, r)$.

Используя включение (1.37), получим, что

$$\|f\|_{M_p^{\lambda_1+\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_1+m_2})} = \sup_{u_1\in\mathbb{R}^{m_1}} \sup_{u_2\in\mathbb{R}^{m_2}} \sup_{r>0} r^{-\lambda_1-\lambda_2}\|f\|_{L_p(B_{\mathbb{R}^{m_1+m_2}}((u_1,u_2),r))}$$

$$\le \sup_{u_1\in\mathbb{R}^{m_1}} \sup_{u_2\in\mathbb{R}^{m_2}} \sup_{r>0} r^{-\lambda_1-\lambda_2}\|f(v_1, v_2)\|_{L_p(B_{\mathbb{R}^{m_1}}(u_1,r)\times B_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2,r))}$$

$$= \sup_{u_1\in\mathbb{R}^{m_1}} \sup_{u_2\in\mathbb{R}^{m_2}} \sup_{r>0} r^{-\lambda_2}\|r^{-\lambda_1}\|f(v_1, v_2)\|_{L_{p,v_1}(B_{\mathbb{R}^{m_1}}(u_1,r)}\|_{L_{p,v_2}(B_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2,r))}$$

$$\le \sup_{u_2\in\mathbb{R}^{m_2}} \sup_{r>0} r^{-\lambda_2}\| \sup_{u_1\in\mathbb{R}^{m_1}} r^{-\lambda_1}\|f(v_1, v_2)\|_{L_{p,v_1}(B_{\mathbb{R}^{m_1}}(u_1,r)}\|_{L_{p,v_2}(B_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2,r))}$$

$$\leq \sup_{u_2\in\mathbb{R}^{m_2}} \sup_{r>0} r^{-\lambda_2} \| \sup_{u_1\in\mathbb{R}^{m_1}} \sup_{\rho>0} \rho^{-\lambda_1} \|f(v_1,v_2)\|_{L_{p,v_1}(B_{\mathbb{R}^{m_1}}(u_1,\rho)} \|_{L_{p,v_2}(B_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2,r))}$$

$$\leq \sup_{u_2\in\mathbb{R}^{m_2}} \sup_{r>0} r^{-\lambda_2} \| \, \|f(v_1,v_2)\|_{M^{\lambda_1}_{p,v_1}(\mathbb{R}^{m_1})} \|_{L_{p,v_2}(B_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2,r))}$$

$$= \| \, \|f(v_1,v_2)\|_{M^{\lambda_1}_{p,v_1}(\mathbb{R}^{m_1})} \|_{M^{\lambda_2}_{p,v_2}(\mathbb{R}^{m_2})} = \|f\|_{M^{\lambda_1}_p(\mathbb{R}^{m_1})\times M^{\lambda_2}_p(\mathbb{R}^{m_2})}.$$

2. Предположим, что $0 < \lambda_1 + \lambda_2 < \frac{m_1+m_2}{p}$, например, $0 < \lambda_1 < \frac{m_1}{p}$, $0 \leq \lambda_2 \leq \frac{m_2}{p}$, и что

$$M^{\lambda_1}_p(\mathbb{R}^{m_1}) \times M^{\lambda_2}_p(\mathbb{R}^{m_2}) = M^{\lambda_1+\lambda_2}_p(\mathbb{R}^{m_1+m_2}). \tag{1.38}$$

Пусть $\mu_1, \mu_2 > 0$, $\mu_1 \neq \lambda_1$, $\mu_2 \neq \lambda_2$ и $\mu_1 + \mu_2 = \lambda_1 + \lambda_2$. Тогда, согласно включению (1.35) с λ_1, замененным на μ_1, а λ_2, на μ_2 и равенству (1.38), имеем

$$M^{\mu_1}_p(\mathbb{R}^{m_1}) \times M^{\mu_2}_p(\mathbb{R}^{m_2}) \subset M^{\mu_1+\mu_2}_p(\mathbb{R}^{m_1+m_2})$$

$$= M^{\lambda_1+\lambda_2}_p(\mathbb{R}^{m_1+m_2}) = M^{\lambda_1}_p(\mathbb{R}^{m_1}) \times M^{\lambda_2}_p(\mathbb{R}^{m_2}).$$

Если $f(u_1,u_2) = f_1(u_1)f_2(u_2)$, где $f_1 \in M^{\lambda_1}_p(\mathbb{R}^{m_1})$ и $f_2 \in M^{\lambda_2}_p(\mathbb{R}^{m_2})$, то согласно этому включению и лемме 1.2 $f_1 \in M^{\mu_1}_p(\mathbb{R}^{m_1})$ и $f_2 \in M^{\mu_2}_p(\mathbb{R}^{m_2})$, что невозможно, если, например, $f_1(u_1) = |u_1|^{\lambda_1 - \frac{m_1}{p_1}}$ (см. свойство 4 в разделе 2). Противоречие, следовательно, включение (1.35) строгое. □

Замечание 1.12. *Равенство* (1.33) *не имеет места, если пространство* $M^{\lambda_1}_p(\mathbb{R}^{m_1}) \times M^{\lambda_2}_p(\mathbb{R}^{m_2})$ *заменить на пространство* $M^{\lambda_1+\lambda_2}_p(\mathbb{R}^{m_1+m_2})$.

Действительно, с одной стороны, согласно неравенству (1.36) *и равенству* (1.33) *с* $f(u_1,u_2) = f_1(u_1)f_2(u_2)$, *где* $f_1 \in M^{\lambda_1}_p(\mathbb{R}^{m_1})$, $f_2 \in M^{\lambda_1}_p(\mathbb{R}^{m_2})$,

$$\|f_1 f_2\|_{M^{\lambda_1+\lambda_2}_p(\mathbb{R}^{m_1+m_2})} \leq \|f_1\|_{M^{\lambda_1}_p(\mathbb{R}^{m_1})} \|f_2\|_{M^{\lambda_2}_p(\mathbb{R}^{m_2})} < \infty. \tag{1.39}$$

С другой стороны, если $0 \leq \lambda_1 \leq \frac{m_1}{p}$, $0 \leq \lambda_2 \leq \frac{m_2}{p}$, *то, за исключением случаев, когда* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ *и когда одновременно* $\lambda_1 = \frac{m_1}{p}$ *и* $\lambda_2 = \frac{m_2}{p}$, *ни для какой постоянной* $c > 0$ *неравенство*

$$c\,\|f_1\|_{M^{\lambda_1}_p(\mathbb{R}^{m_1})} \|f_2\|_{M^{\lambda_2}_p(\mathbb{R}^{m_2})} \leq \|f_1 f_2\|_{M^{\lambda_1+\lambda_2}_p(\mathbb{R}^{m_1+m_2})}$$

для любых $f_1 \in M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})$, $f_2 \in M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_2})$ *невозможно. В частности, если* $0 < p < \infty$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $0 < \lambda_1, \mu_1 < \frac{m_1}{p}$, $0 < \lambda_2, \mu_2 < \frac{m_2}{p}, \lambda_1 \neq \mu_1, \lambda_2 \neq \mu_2, \lambda_1 + \lambda_2 = \mu_1 + \mu_2$, $f_1 \in M_p^{\mu_1}(\mathbb{R}^{m_1}) \setminus M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})$ *(например,* $f_1(u_1) = |u_1|^{\mu_1 - \frac{m_1}{p}}$*),* $f_2 \in M_p^{\mu_2}(\mathbb{R}^{m_2}), f_2 \not\sim 0$ *on* $\mathbb{R}^{m_2}$ *(например,* $f_2(u_2) = |u_2|^{\mu_2 - \frac{m_2}{p}}$*), то это неравенство невозможно, так как согласно неравенству* (1.36) *с* λ_1, λ_2 *замененными на* μ_1, μ_2,

$$\|f_1 f_2\|_{M_p^{\lambda_1+\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_1+m_2})} = \|f_1 f_2\|_{M_p^{\mu_1+\mu_2}(\mathbb{R}^{m_1+m_2})} \leq \|f_1\|_{M_p^{\mu_1}(\mathbb{R}^{m_1})} \|f_2\|_{M_p^{\mu_2}(\mathbb{R}^{m_2})} < \infty,$$

но $\|f_1\|_{M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})} \|f_2\|_{M_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})} = \infty$.

Замечание 1.13. *Включение* (1.35) *и неравенство* (1.36) *справедливы и при замене* $M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})$, $M_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})$ *и* $M_p^{\lambda_1+\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_1+m_2})$ *на* $\widehat{M}_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})$, $\widehat{M}_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})$ *и* $\widehat{M}_p^{\lambda_1+\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_1+m_2})$*:*

$$\|f\|_{\widehat{M}_p^{\lambda_1+\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_1+m_2})} \leq \|f\|_{\widehat{M}_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1}) \times \widehat{M}_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})}. \tag{1.40}$$

Лемма 1.4. *Пусть* $1 \leq p \leq \infty$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $0 \leq \lambda_1 \leq \frac{m_1}{p}$, $0 \leq \lambda_2 \leq \frac{m_2}{p}$*. Тогда существует* $c_3 = c_3(m_1, m_2, \lambda_1, \lambda_2) > 0$ *такое, что*

$$\|g\|_{M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1}) \times M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_2})} \leq c_3 \nu^{\lambda_1+\lambda_2} \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^{m_1+m_2})} \tag{1.41}$$

и

$$\|g\|_{\widehat{M}_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1}) \times \widehat{M}_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})} \leq c_3 \max\{1, \nu^{\lambda_1+\lambda_2}\} \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^{m_1+m_2})} \tag{1.42}$$

для любых $\nu > 0$ *и* $g \in \mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^{m_1+m_2})$.

Доказательство. 1. Согласно неравенству (1.9) из теоремы 1.2 для любых $g \in \mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^{m_1+m_2})$ и любых $v_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$

$$\|g(v_1, v_2)\|_{M_{p,v_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})} \leq c_1(m_1, \lambda_1) \nu^{\lambda_1} \|g(v_1, v_2)\|_{L_{p,v_1}(\mathbb{R}^{m_1})},$$

поэтому

$$\|g\|_{M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})\times M_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})} = \big\|\|g(v_1,v_2)\|_{M_{p,v_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})}\big\|_{M_{p,v_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})}$$

$$\leq c_1(m_1,\lambda_1)\nu^{\lambda_1}\big\|\|g(v_1,v_2)\|_{L_{p,v_1}(\mathbb{R}^{m_1})}\big\|_{M_{p,v_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})}$$

$$= c_1(m_1,\lambda_1)\nu^{\lambda_1}\sup_{u_2\in\mathbb{R}^{m_2}}\sup_{r>0} r^{-\lambda_2}\big\|\|g(v_1,v_2)\|_{L_{p,v_1}(\mathbb{R}^{m_1})}\big\|_{L_{p,v_2}(B_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2,r))}$$

$$= c_1(m_1,\lambda_1)\nu^{\lambda_1}\sup_{u_2\in\mathbb{R}^{m_2}}\sup_{r>0} r^{-\lambda_2}\big\|\|g(v_1,v_2)\|_{L_{p,v_2}(B_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2,r))}\big\|_{L_{p,v_1}(\mathbb{R}^{m_1})}$$

$$\leq c_1(m_1,\lambda_1)\nu^{\lambda_1}\big\|\sup_{u_2\in\mathbb{R}^{m_2}}\sup_{r>0} r^{-\lambda_2}\|g(v_1,v_2)\|_{L_{p,v_2}(B_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2,r))}\big\|_{L_{p,v_1}(\mathbb{R}^{m_1})}$$

$$= c_1(m_1,\lambda_1)\nu^{\lambda_1}\big\|\|g(v_1,v_2)\|_{M_{p,v_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})}\big\|_{L_{p,v_1}(\mathbb{R}^{m_1})}$$

$$\leq c_1(m_1,\lambda_1)c_2(m_2,\lambda_2)\nu^{\lambda_1+\lambda_2}\big\|\|g(v_1,v_2)\|_{L_{p,v_2}(\mathbb{R}^{m_2})}\big\|_{L_{p,v_1}(\mathbb{R}^{m_1})}$$

$$= c_3\nu^{\lambda_1+\lambda_2}\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^{m_1+m_2})},$$

где $c_3 = c_1(m_1,\lambda_1)c_2(m_2,\lambda_2)$.

2. Согласно неравенствам (1.10) и (1.9) из теоремы 1.2 для любых $g \in \mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^{m_1+m_2})$ и любых $u_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$

$$\|g(v_1,v_2)\|_{\widehat{M}_{p,v_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})} \leq c_1(m_1,\lambda_1)\max\{1,\nu^{\lambda_1}\}\|g(v_1,v_2)\|_{L_{p,v_1}(\mathbb{R}^{m_1})},$$

поэтому

$$\|g\|_{\widehat{M}_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})\times \widehat{M}_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})} = \big\|\|g(v_1,v_2)\|_{\widehat{M}_{p,v_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})}\big\|_{\widehat{M}_{p,v_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})}$$

$$\leq c_1(m_1,\lambda_1)\max\{1,\nu^{\lambda_1}\}\big\|\|g(v_1,v_2)\|_{L_{p,v_1}(\mathbb{R}^{m_1})}\big\|_{\widehat{M}_{p,v_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})}$$

$$\leq c_1(m_1,\lambda_1)\max\{1,\nu^{\lambda_1}\}\max\{\big\|\|g(v_1,v_2)\|_{L_{p,v_1}(\mathbb{R}^{m_1})}\big\|_{L_{p,v_2}(\mathbb{R}^{m_2})},$$

$$\big\|\|g(v_1,v_2)\|_{L_{p,v_1}(\mathbb{R}^{m_1})}\big\|_{M_{p,v_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})}\}$$

$$= c_1(m_1,\lambda_1)\max\{1,\nu^{\lambda_1}\}\max\{\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^{m_1+m_2})},$$

$$\big\|\|g(v_1,v_2)\|_{L_{p,v_1}(\mathbb{R}^{m_1})}\big\|_{M_{p,v_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})}\}. \tag{1.43}$$

Далее, еще раз применяя неравенство (1.9), получим, что

$$\|\|g(v_1,v_2)\|_{L_{p,v_1}(\mathbb{R}^{m_1})}\|_{M^{\lambda_2}_{p,v_2}(\mathbb{R}^{m_2})}$$

$$= \sup_{u_2\in\mathbb{R}^{m_2}} \sup_{r>0} r^{-\lambda_2}\|\|g(v_1,v_2)\|_{L_{p,v_1}(\mathbb{R}^{m_1})}\|_{L_{p,v_2}(B_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2,r))}$$
$$= \sup_{u_2\in\mathbb{R}^{m_2}} \sup_{r>0} r^{-\lambda_2}\|\|g(v_1,v_2)\|_{L_{p,v_2}(B_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2,r))}\|_{L_{p,v_1}(\mathbb{R}^{m_1})}$$
$$\leq \| \sup_{u_2\in\mathbb{R}^{m_2}} \sup_{r>0} r^{-\lambda_2}\|g(v_1,v_2)\|_{L_{p,v_2}(B_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2,r))}\|_{L_{p,v_1}(\mathbb{R}^{m_1})}$$
$$\leq \|\|g(v_1,v_2)\|_{M^{\lambda_2}_{p,u_2}}\|_{L_{p,v_1}(\mathbb{R}^{m_1})}$$
$$\leq c_1(m_2,\lambda_2)\nu^{\lambda_2}\|\|g(v_1,v_2)\|_{L_{p,v_2}(\mathbb{R}^{m_2})}\|_{L_{p,v_1}(\mathbb{R}^{m_1})}\}$$
$$= c_1(m_2,\lambda_2)\nu^{\lambda_2}\|g(v_1,v_2)\|_{L_p(\mathbb{R}^{m_1+m_2})}\}. \tag{1.44}$$

Неравенство (1.42) следует из (1.43) и (1.44) с $c_3 = c_1(m_1,\lambda_1)c_1(m_2,\lambda_2)$ (было учтено, что $c_1(m_2,\lambda_2)\geq 1$) □

Лемма 1.5. *Пусть $1\leq p\leq\infty$, $m_1,\ m_2\in\mathbb{N}$, $0\leq\lambda_1\leq\frac{m_1}{p}$, $0\leq\lambda_2\leq\frac{m_2}{p}$. Тогда*

$$E_\nu(\mathbb{R}^{m_1+m_2})\cap\left(\widehat{M}^{\lambda_1}_p(\mathbb{R}^{m_1})\times\widehat{M}^{\lambda_2}_p(\mathbb{R}^{m_2})\right) = E_\nu(\mathbb{R}^{m_1+m_2})\cap\widehat{M}^{\lambda_1+\lambda_2}_p(\mathbb{R}^{m_1+m_2}),$$

причем

$$\|g\|_{\widehat{M}^{\lambda_1+\lambda_2}_p(\mathbb{R}^{m_1+m_2})} \leq \|g\|_{\widehat{M}^{\lambda_1}_p(\mathbb{R}^{m_1})\times\widehat{M}^{\lambda_2}_p(\mathbb{R}^{m_2})}$$
$$\leq c_3\max\{1,\nu^{\lambda_1+\lambda_2}\}\|g\|_{\widehat{M}^{\lambda_1+\lambda_2}_p(\mathbb{R}^{m_1+m_2})} \tag{1.45}$$

для любых $\nu>0$ и $g\in E_\nu(\mathbb{R}^{m_1+m_2})\cap\widehat{M}^{\lambda_1+\lambda_2}_p(\mathbb{R}^{m_1+m_2})$.

Доказательство. Достаточно доказать неравенство (1.45). Левое неравенство следует из леммы 1.3 (неравенство (1.36) и замечание 1.13). Правое неравенсто следует из леммы 5.3 (неравенство(1.42)) .

□

Используя определение 1.7 с $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, неравенство (3) можно переписать в виде

$$\|g\|_{L_{\infty,v}(\mathbb{R}^{n-m})\times L_p(\mathbb{R}^m)} \le 2^{n-m}\nu^{\frac{n-m}{p}}\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Теорема 1.7. *Пусть* $1 \le p < \infty,\ m, n \in \mathbb{N},\ m < n,\ 0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$, *тогда*

$$\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-m})\times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} \le 2^{n-m}\nu^{\frac{n-m}{p}}\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-m})\times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}, \tag{1.46}$$

в частности, если $x = (u, v),\ u = (x_1 \dots x_m),\ v = (x_{m+1}, \dots, x_n)$, *то*

$$\|g(u,0)\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} \le 2^{n-m}\nu^{\frac{n-m}{p}}\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-m})\times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}$$

для любых $g \in E_\nu(\mathbb{R}^{n-m}) \cap (L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m))$. *Неравенства* (172) *и* (173) *справедливы также при замене* M_p^λ *на* $\widehat{M}_p^\lambda$.

Кроме того, существует такое $c_4 = c_4(m, n, \lambda) > 0$, *что*

$$\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-m})\times \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} \le c_4\nu^{\frac{n-m}{p}}\max\{1, \nu^\lambda\}\|g\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)},$$

в частности,

$$\|g(u,0)\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} \le c_4\nu^{\frac{n-m}{p}}\max\{1, \nu^\lambda\}\|g\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}$$

для любых $\nu > 0$ *и* $g \in E_\nu(\mathbb{R}^n) \cap \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. 1. Пусть $x = (u, v)$. Так как для любого $u \in \mathbb{R}^m$ $g(u, v) \in \mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^{n-m})$, то согласно неравенству (2) с $q = \infty$

$$\|g(u,v)\|_{L_{\infty,v}(\mathbb{R}^{n-m})} \le 2^{n-m}\nu^{\frac{n-m}{p}}\|g(u,v)\|_{L_{p,v}(\mathbb{R}^{n-m})},$$

в частности,

$$|g(u,0)| \le 2^{n-m}\nu^{\frac{n-m}{p}}\|g(u,v)\|_{L_{p,v}(\mathbb{R}^{n-m})}.$$

Следовательно,

$$\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-m})\times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} = \big\|\|g(u,v)\|_{L_{\infty,v}(\mathbb{R}^{n-m})}\big\|_{M^\lambda_{p,u}(\mathbb{R}^m)}$$

$$\le 2^{n-m}\nu^{\frac{n-m}{p}}\big\|\|g(u,v)\|_{L_{p,v}(\mathbb{R}^{n-m})}\big\|_{M^\lambda_{p,u}(\mathbb{R}^m)}$$

$$= 2^{n-m}\nu^{\frac{n-m}{p}}\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-m})\times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}$$

и

$$\|g(u,0)\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} \le 2^{n-m}\nu^{\frac{n-m}{p}}\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-m})\times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}.$$

Также

$$\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-m})\times \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} = \big\|\|g(u,v)\|_{L_{\infty,v}(\mathbb{R}^{n-m})}\big\|_{\widehat{M}^\lambda_{p,u}(\mathbb{R}^m)}$$

$$\le 2^{n-m}\nu^{\frac{n-m}{p}}\big\|\|g(u,v)\|_{L_{p,v}(\mathbb{R}^{n-m})}\big\|_{\widehat{M}^\lambda_{p,u}(\mathbb{R}^m)}$$

$$= 2^{n-m}\nu^{\frac{n-m}{p}}\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-m})\times \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}$$

и

$$\|g(u,0)\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} \le 2^{n-m}\nu^{\frac{n-m}{p}}\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-m})\times \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}.$$

2. Далее согласно неравенству (2) с $q=\infty$ и n, замененным на $n-m$, следуют неравенства (172) и (173) с M_p^λ замененным на $\widehat{M}_p^\lambda$. Кроме того, согласно, и неравенству (1.41) с $m_1 = n-m,\ m_2 = m,\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda$

$$\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-m})\times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} = \big\|\|g(u,v)\|_{L_{\infty,v}(\mathbb{R}^{n-m})}\big\|_{M^\lambda_{p,u}(\mathbb{R}^m)}$$

$$\le 2^{n-m}\nu^{\frac{n-m}{p}}\big\|\|g(u,v)\|_{L_{p,u}(\mathbb{R}^{n-m})}\big\|_{M^\lambda_{p,v}(\mathbb{R}^m)}$$

$$= 2^{n-m}\nu^{\frac{n-m}{p}}\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-m})\times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}$$

$$\le 2^{n-m}c_3(n-m,m,0,\lambda)\nu^{\frac{n-m}{p}+\lambda}\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Кроме того, согласно неравенству (3)

$$\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-m})\times L_p(\mathbb{R}^m)} \le 2^{n-m}\nu^{\frac{n-m}{p}}\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Следовательно,

$$\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-m})\times\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} = \|\|g(u,v)\|_{L_{\infty,v}(\mathbb{R}^{n-m})}\|_{\widehat{M}_{p,u}^\lambda(\mathbb{R}^m)}$$

$$= \max\{\|\|g(u,v)\|_{L_{\infty,v}(\mathbb{R}^{n-m})}\|_{L_{p,u}(\mathbb{R}^m)}, \|\|g(u,v)\|_{L_{\infty,v}(\mathbb{R}^{n-m})}\|_{M_{p,u}^\lambda(\mathbb{R}^m)}\}$$

$$\leq c_4\nu^{\frac{n-m}{p}}\max\{1,\nu^\lambda\}\|g\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)},$$

где

$$c_4 = c_4(n,m,\lambda) = 2^{n-m}c_3(n-m,m,0,\lambda)$$

(было учтено, что $c_3(n-m,m,0,\lambda)\geq 1$). $\square$

Теорема 1.8. *Пусть* $1\leq p<\infty$, $m,n\in\mathbb{N}$, $m<n$, $0\leq\lambda\leq\frac{n}{p}$, *тогда существует* $c_5 = c_5(m,n)>0$ *и для любой функции* $g\in E_\nu(\mathbb{R}^m)\cap M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)$ *существует функция* $G\in E_\nu(\mathbb{R}^n)\cap M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$ *такая, что* $G(u,0)=g(u)$ *для любых* $u\in\mathbb{R}^m$,

$$\|G\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-m})\times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}\leq c_5\nu^{-\frac{n-m}{p}}\|g\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} \tag{1.47}$$

для любых $g\in M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)$ *и*

$$\|G\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}\leq c_5\nu^{-\frac{n-m}{p}}\|g\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} \tag{1.48}$$

для любых $g\in\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)$.

Доказательство. Пусть $x=(u,v)$, $g\in M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)$. Положим $G(u,v)=g(u)h(v)$ для любых $u\in\mathbb{R}^m$ и $v\in\mathbb{R}^{n-m}$, где

$$h(v) = \prod_{j=m+1,\dots,n}\frac{\sin^2\left(\frac{\nu x_j}{2}\right)}{\left(\frac{\nu x_j}{2}\right)^2}. \tag{1.49}$$

Согласно неравенству (1.36) и равенству(1.33) с $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda,m_1=n-m,m_2=m$

$$\|G\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}\leq\|G\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-m})\times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} = \|h\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-m})}\|g\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)},$$

$$\|h\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-m})} = \Big\| \prod_{j=m+1,\dots,n} \frac{\sin^2\left(\frac{\nu x_j}{2}\right)}{\left(\frac{\nu x_j}{2}\right)^2} \Big\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-m})} = \left(\Big\| \frac{\sin^2(\frac{\nu t}{2})}{(\frac{\nu t}{2})^2} \Big\|_{L_p(\mathbb{R})} \right)^{n-m}$$

$$= \left(\frac{\nu t}{2} = \tau \right) = \left(\frac{2}{\nu}\right)^{\frac{n-m}{p}} \left(\Big\| \frac{\sin^2 \tau}{\tau^2} \Big\|_{L_p(\mathbb{R}} \right)^{n-m} \leq \left(\frac{2}{\nu}\right)^{\frac{n-m}{p}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin \tau}{\tau} \right)^2 d\tau \right)^{\frac{n-m}{p}}$$

$$= \left(\frac{2\pi}{\nu}\right)^{\frac{n-m}{p}} = (2\pi)^{\frac{n-m}{p}} \nu^{-\frac{n-m}{p}}, \qquad (1.50)$$

откуда и следует неравенство (1.47) с $c_5 = (2\pi)^{\frac{n-m}{p}}$ (было учтено, что $\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin \tau}{\tau}\right)^2 d\tau = \pi$). Неравенство (1.48) следует из неравенства (1.47) с $\lambda = 0$ и с $0 < \lambda \leq \frac{n}{p}$.

$\square$

Глава 2

Неравенства для тригонометрических многочленов для периодических пространств Морри $(M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n)$

2.1. Периодические пространства Морри $(M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n)$

Определение 2.1. [26] *Пусть* $0 < p \leq \infty$ *и* $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, *тогда функция* $f \in (M_p^\lambda)^*$, *если она имеет период* 2π, *измерима по лебегу на* $\mathbb{R}^n$ *и*

$$\|f\|^*_{M_p^\lambda} = \sup_{x \in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\leq\pi} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(Q(x,r))} < \infty.$$

Отметим некоторые свойства этих пространств.

1. Из определения сразу видно, что при $\lambda = 0$

$$\|f\|^*_{M_p^0} = \|f\|^*_{L_p}.$$

2. При $\lambda = \frac{n}{p}$

$$\|f\|^*_{M_p^{\frac{n}{p}}} = \|f\|^*_{L_\infty},$$

3. Если $\lambda < 0$ или $\lambda > \frac{n}{p}$, то пространства $(M_p^\lambda)^*$ состоят только из функций, эквивалентных 0 на $\mathbb{R}^n$.

4. Отметим, что пространство $(M_p^\lambda)^*$ обладает свойством монотонности по параметру λ:

$$(M_p^\mu)^* \subset (M_p^\lambda)^*,\ 0 \leq \lambda < \mu \leq \frac{n}{p},\ 0 < p < \infty.$$

Действительно,

$$\|g\|^*_{M_p^\lambda} = \sup_{x \in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\leq\pi} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(Q(x,r))}$$

$$= \pi^{-\lambda} \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\le\pi} \left(\frac{\pi}{r}\right)^{\lambda} \|f\|_{L_p(Q(x,r))}$$

$$\le \pi^{-\lambda} \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\le\pi} \left(\frac{\pi}{r}\right)^{\mu} \|f\|_{L_p(Q(x,r))}$$

$$= \pi^{\mu-\lambda} \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\le\pi} r^{-\mu}\|f\|_{L_p(Q(x,r))}$$

$$= \pi^{\mu-\lambda}\|f\|^*_{M_p^\mu},$$

следовательно,

$$\|f\|^*_{M_p^\lambda} \le \pi^{\mu-\lambda}\|f\|^*_{M_p^\mu}. \tag{2.1}$$

5. В [26] доказано, что для любых $p>0$ и $f\in(M_p^\lambda)^*$

$$\|f\|^*_{M_p^\lambda} = \|f\|^{**}_{M_p^\lambda} \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{0<r\le\pi} r^{-\lambda}\|f\|^*_{L_p(Q(x,r))}.$$

6. Инвариантность относительно сдвига: для любых $f\in(M_p^\lambda)^*$

$$\|f(y+h)\|^*_{M_p^\lambda} = \|f(y)\|^*_{M_p^\lambda} \quad \forall h\in\mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

Действительно,

$$\|f(y+h)\|^*_{M_p^\lambda} = \|f(y+h)\|^{**}_{M_p^\lambda} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{0<r\le\pi} r^{-\lambda}\|f(y+h)\|^*_{L_p(Q(x,r))}$$

$(z=y+h)$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{0<r\le\pi} r^{-\lambda}\|f(z)\|^*_{L_p(Q(x+h,r))}$$

$(x+h=u)$

$$= \sup_{u\in\mathbb{R}^n} \sup_{0<r\le\pi} r^{-\lambda}\|f(z)\|^*_{L_p(Q(u,r))} = \|f\|^*_{M_p^\lambda}.$$

7. $(M_p^\lambda)^*\subset(L_p)^*$, причем для любых $f\in(M_p^\lambda)^*$

$$\|f\|^*_{L_p} \le \pi^\lambda\|f\|^*_{M_p^\lambda}. \tag{2.3}$$

Действительно,

$$\|f\|^*_{M_p^\lambda} \geq \sup_{0<r<\pi} r^{-\lambda}\|f\|_{L_p(Q(0,r))} \geq \pi^{-\lambda} \sup_{0<r<\pi} \|f\|_{L_p(Q(0,r))}$$

$$\geq \pi^{-\lambda}\|f\|_{L_p(Q(0,\pi))} = \pi^{-\lambda}\|f\|^*_{L_p}.$$

2.2. Неравенство Бернштейна для пространств $(M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n)$

В одномерном случае интерполяционная формула для произвольного тригонометрического многочлена T_μ порядка $\mu \in \mathbb{N}$ имеет вид (см.[36]):

$$T'_\mu(x) = \frac{1}{4\mu}\sum_{k=1}^{2\mu}(-1)^{k+1}\frac{1}{\sin^2\frac{x_k}{2}}T_\mu(x+x_k), \tag{2.4}$$

где x_k–нули многочлена $\cos(\mu - x)$.

Если положить здесь $T_\mu(x) = \sin(\mu x)$ и $x = 0$, то получим

$$\mu = \frac{1}{4\mu}\sum_{k=1}^{2\mu}\frac{1}{\sin^2\frac{x_k}{2}}. \tag{2.5}$$

Теорема 2.1. *Пусть Z^*–нормированное пространство периодических функций периода 2π по каждой переменной, причем норма $\|\cdot\|_Z^*$ инвариантна относительно сдвига, т.е. для любой функции $f \in Z^*$*

$$\|f(x+h)\|_Z^* = \|f\|_Z^* \quad \forall h \in \mathbb{R}^n. \tag{2.6}$$

Тогда для любых тригонометрических многочленов $T_\mu \in Z^*$ порядка $\mu \in \mathbb{N}$ по каждой переменной

$$\left\|\frac{\partial T_\mu}{\partial x_j}\right\|_Z^* \leq \mu\|T_\mu\|_Z^*,\ j = 1,\dots,n.$$

Доказательство. Согласно формулам (2.4) и (2.5)

$$\|T'_\mu\|_Z^* = \left\|\frac{1}{4\mu}\sum_{k=1}^{2\mu}(-1)^k\frac{1}{\sin^2\frac{x_k}{2}}T_\mu(x+x_k)\right\|_Z^*$$

$$\leq \frac{1}{4\mu}\sum_{k=1}^{2\mu}\frac{1}{\sin^2\frac{x_k}{2}}\|T_\mu(x+x_k)\|_Z^* = \mu\|T_\mu\|_Z^*.$$

В многомерном случае при фиксированных $x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n$ функция $T_\mu(x) = T_\mu(x_1,\dots,x_n)$ является тригонометрическим многочленом по переменной x_j, поэтому согласно (2.4) имеем

$$\frac{\partial T_\mu}{\partial x_j}(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{4\mu}\sum_{k=1}^{2\mu}(-1)^k\frac{1}{\sin^2\frac{x_k}{2}}T_\mu\Big(x_1,\dots,x_{j-1},x_j+\frac{\pi}{\mu}(k-\frac{1}{2}),x_{j+1},\dots,x_n\Big)$$

$$=\frac{1}{4\mu}\sum_{k=1}^{2\mu}(-1)^k\frac{1}{\sin^2\frac{x_k}{2}}T_\mu\Big(x+\frac{\pi}{\mu}(k-\frac{1}{2})e_j\Big),\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

где $e_j=\underbrace{(0,\dots,0,1,0,\dots,0)}_{\text{j}}$. Следовательно, согласно (2.6)

$$\left\|\frac{\partial T_\mu}{\partial x_j}\right\|_Z^*\le\frac{1}{4\mu}\sum_{k=1}^{2\mu}\frac{1}{\sin^2\frac{x_k}{2}}\left\|T_\mu\Big(x+\frac{\pi}{\mu}(k-\frac{1}{2})e_j\Big)\right\|_Z^*=\mu\|T_\mu\|_Z^*.$$

□

Следствие 2.1. *Пусть* $1\le p\le\infty$, $0\le\lambda\le\frac{n}{p}$, *тогда согласно* (2.2) $\forall\ T_\mu\in(M_p^\lambda)^*$

$$\left\|\frac{\partial T_\mu}{\partial x_j}\right\|_{M_p^\lambda}^*\le\mu\|T_\mu\|_{M_p^\lambda}^*,\quad j=1,\dots,n.$$

2.3. Неравенство разных метрик для пространств $(M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n)$

Определение 2.2. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$, $\mu, N \in \mathbb{N}$, $T_\mu \in \mathfrak{M}^*_{\mu,p}$ *и*

$$((T_\mu))^*_{M^\lambda_{p,N}} = \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\le\pi} r^{-\lambda}\Bigg(\Big(\frac{r}{N}\Big)^n \sum_{k_1=-N}^{N-1}\cdots\sum_{k_n=-N}^{N-1}$$

$$\Big|T_\mu\Big(x_1+\frac{r}{N}k_1,\dots,x_n+\frac{r}{N}k_n\Big)\Big|^p\Bigg)^{1/p}.$$

Лемма 2.1. *Пусть* $n=1$, $1 \le p \le \infty$, $r>0$, $x\in\mathbb{R}, N\in\mathbb{N}$, $x_k = x+\frac{r}{N}k$, $x_k < \xi_k < x_{k+1}, ,$ $k=-N,\dots,N-1$. *Тогда для любых функций* $f: Q(x,r) \to \mathbb{R}^n$ *таких, что* $f' \in L_p(Q(x,r))$

$$\left|\Big(\frac{r}{N}\sum_{k=-N}^{N-1}|f(\xi_k)|^p\Big)^{1/p} - \Big(\frac{r}{N}\sum_{k=-N}^{N-1}\Big|f\Big(x+\frac{r}{N}k\Big)\Big|^p\Big)^{1/p}\right| \le$$

$$\le \frac{r}{N}\|f'\|_{L_p(Q(x,r))}.$$

Доказательство. Положим $x_k = x+\frac{r}{N}k$, $k=-N,\dots,N-1$. Применяя обратное неравенство треугольника и неравенство Гёльдера, получим что

$$\left|\Big(\frac{r}{N}\sum_{k=-N}^{N-1}|f(\xi_k)|^p\Big)^{1/p} - \Big(\frac{r}{N}\sum_{k=-N}^{N-1}|f(x_k)|^p\Big)^{1/p}\right|$$

$$= \Big(\frac{r}{N}\Big)^{1/p}\left|\Big(\sum_{k=-N}^{N-1}|f(\xi_k)|^p\Big)^{1/p} - \Big(\sum_{k=-N}^{N-1}|f(x_k)|^p\Big)^{1/p}\right|$$

$$\le \Big(\frac{r}{N}\Big)^{1/p}\Big(\sum_{k=-N}^{N-1}|f(\xi_k)-f(x_k)|^p\Big)^{1/p}$$

$$= \Big(\frac{r}{N}\Big)^{1/p}\Big(\sum_{k=-N}^{N-1}\Big|\int_{x_k}^{\xi_k} f'(t)dt\Big|^p\Big)^{1/p}$$

$$\le \Big(\frac{r}{N}\Big)^{1/p}\Bigg(\sum_{k=-N}^{N-1}\Bigg|\Big(\int_{x_k}^{\xi_k}|f'(t)|^p dt\Big)^{1/p}\Big(\int_{x_k}^{\xi_k}dt\Big)^{1/p'}\Bigg|^p\Bigg)^{1/p}$$

$$\leq \left(\frac{r}{N}\right)^{1/p} \left(\sum_{k=-N}^{N-1} \left| \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f'(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} dt \right)^{1/p'} \right|^p \right)^{1/p}$$

$$= \left(\frac{r}{N}\right)^{1/p} \left(\sum_{k=-N}^{N-1} \left| \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f'(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\frac{r}{N} \right)^{1/p'} \right|^p \right)^{1/p}$$

$$= \frac{r}{N} \left(\sum_{k=-N}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(t)|^p dt \right)^{1/p} = \frac{r}{N} \|f'\|_{L_p(Q(x,r))}.$$

□

Лемма 2.2. *Пусть* $1 \leq p \leq \infty$, $r > 0$, $N \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – *измеримая, 2π-периодическая функция по каждой переменной такая, что*

$$\sup_{x \in Q(0,\pi)} \left(\left(\frac{r}{N}\right)^n \sum_{k=-N}^{N-1} \left| f(x_1 + \frac{r}{N}k, \ldots, x_n + \frac{r}{N}k) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Тогда

$$\sup_{x \in Q(0,\pi)} \|f\|_{L_p(Q(0,r))} \leq \sup_{x \in Q(0,\pi)} \left(\left(\frac{r}{N}\right)^n \sum_{k=-N}^{N-1} \left| f(x_1, \ldots, x_n) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство. Действительно, при $n = 1$

$$\sup_{-\pi<x<\pi} \|f\|_{L_p(x-r,x+r)} = \sup_{-\pi<x<\pi} \left(\sum_{k=-N}^{N-1} \int\limits_{x+\frac{r}{N}k}^{x+\frac{r}{N}(k+1)} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \{t = x + \frac{r}{N}k + \tau\}$$

$$= \sup_{-\pi<x<\pi} \left(\sum_{k=-N}^{N-1} \int\limits_0^{\frac{r}{N}} \left| f(x + \frac{r}{N}k + \tau) \right|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_{-\pi<x<\pi} \left(\sup_{0<\tau<\frac{r}{N}} \frac{r}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} \left| f(x + \frac{r}{N}k + \tau) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \{y = x + \tau\}$$

$$= \sup_{-\pi<x<\pi} \left(\sup_{x<y<x+\frac{r}{N}} \frac{r}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} \left| f(y + \frac{r}{N}k) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\sup_{-\pi<y<\pi+\frac{r}{N}} \frac{r}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} \left| f(y + \frac{r}{N}k) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$=$\{в силу 2π–периодичности f\}

$$= \Big(\sup_{-\pi<y<\pi} \frac{r}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} \Big| f(y+\frac{r}{N}k) \Big|^p \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Многомерный случай следует n–кратным применением одномерного случая.

$\square$

Лемма 2.3. *Пусть* $n=1, N, \mu \in \mathbb{N},\ 1 \le p \le \infty,\ 0 \le \lambda \le \frac{1}{p}$*, тогда для любых* $T_\mu \in \mathfrak{M}_\mu^*$ *имеет место неравенство*

$$\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda} \le ((T_\mu))^*_{M_{p,N}^\lambda} \le (1+\frac{\pi}{N}\mu)\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda}. \tag{2.7}$$

Доказательство. Пусть $r>0,\ k=-N,\dots,N-1,\ u \in Q(0,\pi), x_k = x+\frac{r}{N}k-u$ и $x_k < \xi_k < x_{k+1}$, таковы, что

$$\int_{x-r}^{x+r} |T_\mu(y)|^p dy = \sum_{k=-N}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |T_\mu(y)|^p dy = \frac{r}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} |T_\mu(\xi_k)|^p. \tag{2.8}$$

Согласно лемме 2.1, неравенству Бернштейна для пространств $(M_p^\lambda)^*$ и равенству (2.8)

$$\sup_{-\pi<x<\pi} \sup_{0<r\le\pi} r^{-\lambda} \Big(\frac{r}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} |T_\mu(x_k)|^p \Big)^{1/p}$$

$$= \sup_{-\pi<x<\pi} \sup_{0<r\le\pi} r^{-\lambda} \Big[\Big(\frac{r}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} |T_\mu(x_k)|^p \Big)^{1/p} - \Big(\frac{r}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} |T_\mu(\xi_k)|^p \Big)^{1/p} +$$

$$+ \Big(\frac{r}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} |T_\mu(\xi_k)|^p \Big)^{1/p} \Big]$$

$$\le \sup_{-\pi<x<\pi} \sup_{0<r\le\pi} r^{-\lambda} \Big[\frac{r}{N} \|T'_\mu\|_{L_p(Q(x,r))} + \Big(\frac{r}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} |T_\mu(\xi_k)|^p \Big)^{1/p} \Big]$$

$$= \sup_{-\pi<x<\pi} \sup_{0<r\le\pi} r^{-\lambda} \Big[\frac{\pi}{N} \|T'_\mu\|_{L_p(Q(x,r))} + \|T_\mu\|_{L_p(x-r,x+r)} \Big]$$

$$\le \frac{\pi}{N} \|T'_\mu\|^*_{M_p^\lambda} + \|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda} = (1+\frac{\pi}{N}\mu)\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda}.$$

Доказательство левого неравенства (2.7) следует непосредственно из леммы 2.2. □

Теорема 2.2. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $n, \mu, N \in \mathbb{N}$, $0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$, $T_\mu \in \mathfrak{M}^*_\mu$, *тогда имеет место неравенство*

$$\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda} \le ((T_\mu))^*_{M_{p,N}^\lambda} \le (1+\frac{\pi}{N}\mu)^n \|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Согласно лемме 2.2

$$\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda} = \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\le\pi} r^{-\lambda}\left(\int_{x_1-r}^{x_1+r}\cdots\int_{x_n-r}^{x_n+r} |T_\mu(x_1\dots x_n)|^p dx_1\dots dx_n\right)^{1/p}$$

$$\le \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\le\pi} r^{-\lambda}\left(\left(\frac{r}{N}\right)^n \sum_{k_1=-N}^{N-1}\cdots\sum_{k_n=-N}^{N-1} |T_\mu(x_1+\frac{r}{N}k_1\dots x_n+\frac{r}{N}k_n)|^p du\right)^{1/p}$$
$$= ((T_\mu))^*_{M_{p,N}^\lambda},$$

то доказано первое неравенство.

Докажем второе неравенств (2.9) по индукции. При n=1 оно было доказано в лемме 2.3. Пусть $n>1$ допустим теперь, что оно верно для n-1. Зафиксируем x_1, то функция T по-прежнему будет тригонометрической по $x_2\dots x_n$ и верно неравенство

$$(1+\frac{\pi}{N}\mu)^{p(n-1)} \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r<\pi} r^{-p\lambda}\int_{x_2-r}^{x_2+r}\cdots\int_{x_n-r}^{x_n+r} |T_\mu(x_1\dots x_n)|^p dx_2\dots dx_n \tag{2.10}$$

$$\ge \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r<\pi} r^{-p\lambda}\int_{x_2-r}^{x_2+r}\cdots\int_{x_n-r}^{x_n+r} |T_\mu(x_1\dots x_n)|^p dx_2\dots dx_n$$

$$\ge \left(\frac{r}{N}\right)^{n-1} \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r<\pi} r^{-p\lambda} \sum_{k_2=-N}^{N-1}\cdots\sum_{k_n=-N}^{N-1} |T_\mu(x_1, x_{k_2}\dots x_{k_n})|^p. \tag{2.11}$$

Интегрируя (2.10)-(2.11) по x_1 и возводя в степень 1/p, получим что,

$$(1+\frac{\pi}{N}\mu)^{n-1} \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r<\pi} r^{-\lambda}\left(\int_{x_1-r}^{x_1+r}\cdots\int_{x_n-r}^{x_n+r} |T_\mu(x_1\dots x_n)|^p dx_1\dots dx_n\right)^{1/p}$$

$$\geq \left(\frac{r}{N}\right)^{\frac{n-1}{p}} \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r<\pi} r^{-\lambda}\Bigg(\sum_{k_2=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1} \int_{x_1-r}^{x_1+r} |T_\mu(x_1, x_{k_2} \dots x_{k_n})|^p dx_1\Bigg)^{1/p}$$

$$\geq \left(\frac{r}{N}\right)^{\frac{n-1}{p}} \frac{1}{(1+\frac{\pi}{N}\mu)} \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r<\pi} r^{-\lambda}\Bigg(\sum_{k_1=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1} \int_{x_1-r}^{x_1+r} |T_\mu(x_1, x_{k_1} \dots x_{k_n})|^p dx_1\Bigg)$$

$$\geq \left(\frac{r}{N}\right)^{\frac{n-1}{p}} \frac{1}{(1+\frac{\pi}{N}\mu)} \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r<\pi} r^{-\lambda}\Bigg(\frac{\pi}{N} \sum_{k_1=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1} |T_\mu(x_1, x_{k_1} \dots x_{k_n})|^p \Bigg)^{1/p}$$

$$\geq \frac{1}{(1+\frac{\pi}{N}\mu)} \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r<\pi} r^{-\lambda}\Bigg(\left(\frac{r}{N}\right)^{n} \sum_{k_1=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1} |T_\mu(x_{k_1} \dots x_{k_n})|^p \Bigg)^{1/p}.$$

$\square$

Лемма 2.4. *При* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ $n, \mu, N \in \mathbb{N}$, $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{q}$, $T_\mu \in \mathfrak{M}^*_\mu$

$$((T_\mu))^*_{M_{q,N}^{\lambda-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}} \leq N^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} ((T_\mu))^*_{M_{p,N}^{\lambda}}.$$

Доказательство. В силу неравенства Йенсена и определения 2.2:

$$((T_\mu))^*_{M_{q,N}^{\lambda-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}} = \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\leq\pi} r^{-(\lambda-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))} \Bigg(\left(\frac{r}{N}\right)^{n} \sum_{k_1=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1}$$

$$\left| T_\mu\left(x_1 + \frac{r}{N}k_1, \dots, x_n + \frac{r}{N}k_n\right)\right|^q \Bigg)^{1/q}$$

$$\leq \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\leq\pi} r^{-(\lambda-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))} \left(\frac{r}{N}\right)^{\frac{n}{q}} \Bigg(\sum_{k_1=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1}$$

$$\left| T_\mu\left(x_1 + \frac{r}{N}k_1, \dots, x_n + \frac{r}{N}k_n\right)\right|^p \Bigg)^{1/p}$$

$$= \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\leq\pi} r^{-(\lambda-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))} \left(\frac{r}{N}\right)^{\frac{n}{q}-\frac{n}{p}} \Bigg(\left(\frac{r}{N}\right)^{n} \sum_{k_1=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1}$$

$$\left| T_\mu\left(x_1 + \frac{r}{N}k_1, \dots, x_n + \frac{r}{N}k_n\right)\right|^p \Bigg)^{1/p}$$

$$= N^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}} \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\leq\pi} r^{-\lambda} \Bigg(\left(\frac{r}{N}\right)^{n} \sum_{k_1=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1}$$

$$\left|T_\mu\left(x_1+\frac{r}{N}k_1,\dots,x_n+\frac{r}{N}k_n\right)\right|^p\Bigg)^{1/p}=N^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}((T_\mu))^*_{M^\lambda_{p,N}}.$$

□

Теорема 2.3. *Пусть* $1\le p\le q\le\infty$, $n\big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\big)\le\lambda\le\frac{n}{p}$, $T_\mu\in\mathfrak{M}^*_\mu$. *Тогда*

$$\|T_\mu\|^*_{M_q^{\lambda-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}}\le(1+\pi)^n\mu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|T_\mu\|^*_{M^\lambda_p}. \tag{2.12}$$

Доказательство. Для любого $N\in\mathbb{N}$

$$\|T_\mu\|^*_{M_q^{\lambda-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}}\le((T_\mu))^*_{M_{q,N}^{\lambda-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}}\le N^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}((T_\mu))^*_{M^\lambda_{p,N}}$$

$$\le N^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(1+\frac{\pi}{N}\mu)^n\|T_\mu\|^*_{M^\lambda_p}$$

$$\le\left(\frac{\mu}{N}\right)^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}(1+\frac{\pi}{N}\mu)^n\mu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|T_\mu\|^*_{M^\lambda_p}.$$

Полагая здесь $N=\mu$, получим неравенство (2.12). □

Рассмотрим свёртку функций $\varphi,g\in L_1(Q(0,\pi))$, 2π-периодических по каждой переменной

$$(\varphi*g)(x)=\int_{Q(0,\pi)}\varphi(x-y)g(y)dy,\ x\in\mathbb{R}^n.$$

Определение 2.3. *Коэффициент Фурье функции* $\varphi\in L_1(\mathbb{R}^n)$ *задаётся следующей формулой:*

$$c_k(\varphi)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{Q(0,\pi)}\varphi(x)e^{-ik\cdot x}dx,\ k\in\mathbb{Z}^n,$$

$k\cdot x=k_1x_1+\dots+k_nx_n$.

Напомним, что $\forall k\in\mathbb{Z}^n$

$$c_k(\varphi*g)=(2\pi)^nc_k(\varphi)c_k(g). \tag{2.13}$$

Если $c_k(\varphi) = (2\pi)^{-n}$ для $k \in \mathbb{Z}^n$, для которых $c_k(g) \neq 0$, то

$$c_k(g) = c_k(\varphi * g).$$

Лемма 2.5. *Пусть $n, \mu \in \mathbb{N}, \varphi \in L_1(Q(0,\pi)) - 2\pi$-периодическая функция по каждой переменной. Для того, чтобы для любого тригонометрического многочлена T_μ порядка, не превышающего μ по каждой переменной, выполнялось равенство*

$$T_\mu = \varphi * T_\mu, \tag{2.14}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$c_k(\varphi) = (2\pi)^{-n} \ \forall k \in \mathbb{Z}^n : |k_j| \leq \mu, \ j = 1, \ldots, n. \tag{2.15}$$

Доказательство. Необходимость, Пусть равенство (2.14) выполняется для любых тригонометрических многочленов T_μ порядка, не превышающего μ по каждой переменной. Согласно (2.13)

$$(2\pi)c_k(\varphi)c_k(T_\mu) = c_k(T_\mu)$$

для любых $k \in \mathbb{Z}^n$ таких, что $|k_j| \leq \mu, \ j = 1, \ldots, n$. Для каждого такого k существует тригонометрический многочлен T_μ порядка, не превышающего μ по каждой переменной, для которого $c_k(T_\mu) \neq 0$, откуда следует, что выполняется равенство (2.15).

Достаточность. Пусть выполняется равенство (2.15) для любых тригонометрических многочленов T_μ порядка, не превышающего μ по каждой переменной:

$$T_\mu(x) = \sum_{\substack{|k_j| \leq \mu \\ j=1,\ldots,n}} c_k e^{ik\cdot x} = \sum_{\substack{|k_j| \leq \mu \\ j=1,\ldots,n}} c_k(T_\mu) e^{ik\cdot x}.$$

Тогда

$$(\varphi * T_\mu)(x) = \sum_{\substack{|k_j| \leq \mu \\ j=1,\ldots,n}} c_k(T_\mu)(\varphi * e^{ik\cdot x})(x)$$

$$= \sum_{\substack{|k_j|\le\mu\\ j=1,\dots,n}} c_k(T_\mu)\Big(\int_{Q(0,\pi)} \varphi(x-\xi)e^{ik\cdot\xi}d\xi\Big)$$

$$= \sum_{\substack{|k_j|\le\mu\\ j=1,\dots,n}} c_k(T_\mu)\Big(\int_{Q(0,\pi)} \varphi(x-\xi)e^{ik\cdot(x-\xi)}d\xi\Big)e^{ik\cdot x}$$

$$= \sum_{\substack{|k_j|\le\mu\\ j=1,\dots,n}} c_k(T_\mu)\Big(\int_{Q(x,\pi)} \varphi(y)e^{ik\cdot y}dy\Big)e^{ik\cdot x}$$

$$= \sum_{\substack{|k_j|\le\mu\\ j=1,\dots,n}} c_k(T_\mu)(2\pi)^n c_k(\varphi)e^{ik\cdot x}$$

$$= \sum_{\substack{|k_j|\le\mu\\ j=1,\dots,n}} c_k(T_\mu)e^{ik\cdot x} = (T_\mu)(x).$$

□

Определение 2.4. *(Ядро Дирихле) Для* $\mu \in \mathbb{N}$

$$D_\mu(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\mu}^{\mu} e^{ikx} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\mu}\cos(kx) = \frac{\sin(\mu+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

$$\widetilde{D}_\mu(x) = \frac{1}{\pi}D_\mu(x).$$

Отметим, что

$$\|\widetilde{D}_\mu\|^*_{L_2} = \sqrt{\frac{2\mu+1}{2\pi}} \tag{2.16}$$

и

$$\|\widetilde{D}_\mu\|^*_{L_\infty} = \frac{2\mu+1}{2\pi}. \tag{2.17}$$

Из неравенств (2.16) *и* (2.17) *следует, что для любых* $2 \le p \le \infty$

$$\|\widetilde{D}_\mu\|^*_{L_p} \le \left(\frac{2\mu+1}{2\pi}\right)^{1-\frac{1}{p}} \tag{2.18}$$

так как согласно интерполяционному неравеству для лебеговых пространств

$$\|\widetilde{D}_\mu\|^*_{L_p} \le \Big(\|\widetilde{D}_\mu\|^*_{L_2}\Big)^{\frac{2}{p}}\Big(\|\widetilde{D}_\mu\|^*_{L_\infty}\Big)^{1-\frac{2}{p}}.$$

Частным случаем равенства (2.14) является хорошо известное равенство

$$T_\mu(x) = \widetilde{D}_\mu(x) * T_\mu(x).$$

Замечание 2.1. *Если φ – тригонометрический многочлен порядка μ по каждой переменной, то равенство (2.14) выполняется для любых тригонометрических многочленов T_μ порядка, не превышающего μ по каждой переменной тогда и только тогда, когда*

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\substack{|k_j|\le\mu \\ j=1,\dots,n}} e^{ik\cdot x} = \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{j=1}^n \sum_{|k_j|\le\mu} e^{ik_jx_j} = \frac{1}{\pi^n} \prod_{j=1}^n D_\mu(x_j) = \prod_{j=1}^n \widetilde{D}_\mu(x_j).$$

Замечание 2.2. *Пусть для $\alpha, n \in \mathbb{N}$*

$$\Delta_\alpha(j) = \{k \in \mathbb{Z}^n, |k_j| \le \alpha\}$$

и

$$\Delta_\alpha = \Delta_\alpha(1) \times \dots \times \Delta_\alpha(n).$$

Если φ – тригонометрический многочлен порядка $\nu > \mu$ по каждой переменной, то равенство (2.14) выпольняется для любых тригонометрических многочленов T_μ порядка, не превышающего μ по каждой переменной тогда и только тогда, когда

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\Delta_\nu} c_k e^{ik\cdot x} = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{k\in\Delta_\mu} e^{ik\cdot x} + \sum_{k\in\Delta_\nu\setminus\Delta_\mu} c_k e^{ik\cdot x}$$

$$= \prod_{j=1}^n \widetilde{D}_\mu(x_j) + \sum_{k\in\Delta_\nu\setminus\Delta_\mu} c_k e^{ik\cdot x}. \tag{2.19}$$

$\Big($*В частности, при $n = 1$ $\varphi(x) = \widetilde{D}_\mu(x) + \big(\sum_{k=-\nu}^{-\mu-1} + \sum_{k=\mu+1}^{\nu}\big) c_k e^{ik\cdot x}$.*$\Big)$

Определение 2.5. *Пусть для* $\mu \in \mathbb{N}$, *Обозначим через* J_μ^* *множество всех* 2π*-периодических функций* $\varphi \in L_1(Q(0,\pi))$, *удовлетворяющих условию* (2.15) *(следовательно, имеющих вид* (2.19) *для некоторого* $\nu \in N,\ \nu \geq \mu$*).*

Согласно лемме 2.5 *для таких функии* φ *справедлива равенство* (2.14).

Определение 2.6. *(см.* [21]*) Пусть* $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ *и* $\nu > \mu$. *Ядро Валле Пуссена определяется следующим образом*

$$\mathfrak{V}_{\mu,\nu}(x) = (\nu-\mu)^{-1}\sum_{l=\mu}^{\nu-1} D_l(x),$$

в частности,

$$\mathfrak{V}_\mu(x) = \mathfrak{V}_{\mu,2\mu}(x), \quad \mu \geq 1, \quad \mathfrak{V}_0(x) = 1.$$

Замечание 2.3. *Для* $\nu > \mu$ *представим ядро Дирихле в виде*

$$D_\nu(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \dots + \cos \mu x + (\cos(\mu+1)x + \dots + \cos \nu x)$$

$$= D_\mu(x) + D_{\mu,\nu}(x),$$

где

$$D_{\mu,\nu}(x) = \sum_{l=\mu+1}^{\nu} \cos lx.$$

Тогда

$$\mathfrak{V}_{\mu,\nu}(x) = \frac{1}{\nu-\mu}\sum_{l=\mu}^{\nu-1} D_l(x) = \frac{1}{\nu-\mu}\Big(D_\mu(x) + \sum_{l=\mu+1}^{\nu-1} D_l(x)\Big)$$

$$= \frac{1}{\nu-\mu}\Big(D_\mu(x) + \sum_{l=\mu+1}^{\nu-1}\Big(D_\mu(x) + D_{\mu,l}(x)\Big)\Big)$$

$$= \frac{1}{\nu-\mu}\Big((\nu-\mu)D_\mu(x) + \sum_{l=\mu+1}^{\nu-1} D_{\mu,l}(x)\Big)$$

$$= D_\mu(x) + \frac{1}{\nu-\mu}\sum_{l=m+1}^{\mu-1} D_{\mu,l}(x).$$

Положим

$$\widetilde{\mathfrak{V}}_{\mu,\nu}(x) = \frac{1}{\pi}\mathfrak{V}_{\mu,\nu}(x), \quad \widetilde{D}_{\mu,\nu}(x) = \frac{1}{\pi}D_{\mu,\nu}(x),$$

в частности,

$$\widetilde{\mathfrak{V}}_{\mu} = \widetilde{\mathfrak{V}}_{\mu,2\mu}(x),$$

тогда

$$\widetilde{\mathfrak{V}}_{\mu,\nu}(x) = \widetilde{D}_{\mu}(x) + \frac{1}{\nu-\mu}\sum_{l=\mu+1}^{\nu-1}\widetilde{D}_{\mu,l}(x).$$

Частным случаем равенства (2.14) является равенство

$$T_{\mu}(x) = \widetilde{\mathfrak{V}}_{\mu,\nu}(x) * T_{\mu}(x),$$

в частности,

$$T_{\mu}(x) = \widetilde{\mathfrak{V}}_{\mu}(x) * T_{\mu}(x).$$

Теорема 2.4. *Пусть* $\mu \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$, *тогда*

$$\|\widetilde{\mathfrak{V}}_{\mu}\|^{*}_{L_p} \le 3(2\pi)^{1/p-1}\mu^{1-1/p}. \tag{2.20}$$

Это неравенство следует из одномерных оценок для ядра Валле-Пуссена, приведенных в книге В.Н. Темлякова [21] на стр.10, с учетом принятого в этой книге определения нормы $||\cdot||_{L_p}$ (см. стр. 500):

$$\|\mathcal{V}_{\mu}\|^{*}_{L_1} \le 6\pi$$

и

$$\|\mathcal{V}_{\mu}\|^{*}_{L_\infty} \le 3\mu$$

и интерполяционного неравенства

$$\|\mathcal{V}_{\mu}\|^{*}_{L_p} \le (\|\mathcal{V}_{\mu}\|^{*}_{L_1})^{\frac{1}{p}}(\|\mathcal{V}_{\mu}\|^{*}_{L_\infty})^{1-\frac{1}{p}},$$

если учесть, что в наших обозначениях $\widetilde{\mathfrak{V}}_{\mu} = \frac{\mathcal{V}_{\mu}}{2\pi}$.

Теорема 2.5. *(Следствие из неравенство типа Юнга для периодических пространств Морри, см. [26])*

Пусть

$$0 \le \lambda \le \frac{n}{p}, \quad 1 \le r, p < q \le \infty, \quad 1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p},$$

$f_1 \in (L_r)^*$ *и* $f_2 \in (M_p^\lambda)^*$. *Тогда*

$$\|f_1 * f_2\|^*_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}} \le \|f_1\|^*_{L_r} (\|f_2\|^*_{M_p^\lambda})^{\frac{p}{q}} (\|f_2\|^*_{L_p})^{1-\frac{p}{q}}. \tag{2.21}$$

Теорема 2.6. *Пусть* $1 \le r, p < q \le \infty, \quad n, \mu \in \mathbb{N},\ 0 \le \lambda \le \frac{n}{p},\ 1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$. *Тогда*

$$\begin{aligned} \|T_\mu\|^*_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}} &\le c (\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda})^{\frac{p}{q}} (\|T_\mu\|^*_{L_p})^{1-\frac{p}{q}} \\ &\le c \pi^{\lambda(1-\frac{p}{q})} \|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda} \end{aligned} \tag{2.22}$$

для любого $T_\mu \in (M_p^\lambda)^*$, *где*

$$c = c(n, \mu, r) = \inf_{\varphi \in J_\mu^*} \|\varphi\|^*_{L_r}.$$

Доказательство. Используя равенство (2.14) и неравенства (2.21) и (2.3), получим, что для любой функции $\varphi \in J_\mu^*$ и для любого $T_\mu \in (M_p^\lambda)^*$

$$\begin{aligned} \|T_\mu\|^*_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}} = \left\|\varphi * T_\mu\right\|^*_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}} &\le \|\varphi\|^*_{L_r} (\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda})^{\frac{p}{q}} (\|T_\mu\|^*_{L_p})^{1-\frac{p}{q}} \\ &\le \pi^{\lambda(1-\frac{p}{q})} \|\varphi\|^*_{L_r} \|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda}. \end{aligned}$$

Переходя к инфимуму по $\varphi \in J_\mu^*$, получим утверждение теоремы. □

Следствие 2.2. *Пусть* $1 \le p \le q \le \infty,\ n, \mu \in \mathbb{N},\ 0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$. *Тогда для любых* $T_\mu \in (M_p^\lambda)^*$

$$\begin{aligned} \|T_\mu\|^*_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}} &\le (3(2\pi)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}})^n \mu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda})^{\frac{p}{q}} (\|T_\mu\|^*_{L_p})^{1-\frac{p}{q}} \\ &\le (3(2\pi)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}})^n \pi^{\lambda(1-\frac{p}{q})} \mu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Доказательство. В качестве функции $\varphi \in J_\mu^* \cap L_r^*$ в теореме 2.6 возьмем фукнцию

$$\varphi(x) = \prod_{j=1}^{n} \widetilde{\mathfrak{V}}_\mu(x_j).$$

Тогда согласно неравенству (2.20)

$$\|\varphi\|_{L_r}^* = \|\varphi\|_{L_r(Q(0,\pi))} = \prod_{j=1}^{n} \|\widetilde{\mathfrak{V}}_\mu(x_j)\|_{L_r(-\pi,\pi)} \le (3(2\pi)^{\frac{1}{r}-1})^n \mu^{n(1-\frac{1}{r})}$$

$$= (3(2\pi)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}})^n \mu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

$\square$

Следствие 2.3. *Пусть* $1 \le p \le q \le \infty,\ n, \mu \in \mathbb{N},\ n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) \le \lambda \le \frac{n}{p}$. *Если* $T_\mu \in (M_p^\lambda)^*$, *то из неравенства* (2.1) *и следствия* 2.2 *следует, что*

$$\|T_\mu\|^*_{M_q^{\lambda-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}} \le \pi^{\frac{\lambda p}{q}-\lambda+n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|T_\mu\|^*_{M_q^{\frac{\lambda p}{q}}} \le 3(2^n\pi^{\lambda p})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\mu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda}.$$

Следствие 2.4. *Если* $1 \le p \le 2,\ q \ge \frac{2p}{2-p}$, *то для любого* $T_\mu \in (M_p^\lambda)^*$

$$\|T_\mu\|^*_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}} \le \left(\frac{2\mu+1}{2\pi}\right)^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda})^{\frac{p}{q}} (\|T_\mu\|^*_{L_p})^{1-\frac{p}{q}},$$

в частности, для $0 \le \lambda \le \frac{n}{2}$

$$\|T_\mu\|^*_{M_2^{\frac{\lambda}{2}}} \le \left(\frac{2\mu+1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} (\|T_\mu\|^*_{M_1^\lambda}\|T_\mu\|^*_{L_1})^{\frac{1}{2}},$$

и при $q = \infty,\ p = 2$

$$\|T_\mu\|^*_{L_\infty} \le \left(\frac{2\mu+1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \|T_\mu\|^*_{L_2}. \tag{2.24}$$

В последнем неравенстве постояная точная, равенство достигается для $T_\mu(x) = \prod_{l=1}^n \widetilde{D}_\mu(x_l)$.

Доказательство. В рассматриваемом случае $r \geq 2$, в качестве функции $\varphi \in J_\mu^* \cap L_r^*$ в теореме 2.6 берется функция

$$\varphi(x) = \prod_{l=1}^{n} \widetilde{D}_\mu(x_l)$$

и используются равенство (2.18). То, что для функции φ неравенство (2.24) обращается в равенство, следует из формул (2.16) и (2.17). □

Замечание 2.4. *Неравенство* (2.23) *– это периодический аналог неравенства разных метрик для целых функций экспоненциального типа* (1.23).

2.4. Неравенство разных измерений для пространств $(M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n)$

Определение 2.7. *Пусть*

$$0 < p_1, p_2 \le \infty,\ m_1, m_2 \in\ \mathbb{N},\ 0 \le \lambda_1 \le \frac{m_1}{p_1},\ 0 \le \lambda_2 \le \frac{m_2}{p_2}.$$

Определим пространство

$$(M_{p_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R})^{m_1})^* \times (M_{p_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2}))^*$$

со смешанной квазинормой как множество всех измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}^{m_1+m_2}$ *функций* f*, для которых*

$$\|T_\mu\|^*_{M_{p_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})\times M_{p_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})} = \|\|T_\mu(u_1,u_2)\|^*_{M^{\lambda_1}_{p_1,u_1}(\mathbb{R}^{m_1})}\|^*_{M^{\lambda_2}_{p_2,u_2}(\mathbb{R}^{m_2})}$$

$$= \sup_{y\in Q(0,\pi)(\mathbb{R}^{m_2})}\ \sup_{0<\rho\le\pi} \rho^{-\lambda_2}\| \sup_{x\in Q(0,\pi)(\mathbb{R}^{m_1})}\ \sup_{0<r\le\pi} r^{-\lambda_1}$$
$$\|T_\mu(u_1,u_2)\|_{L_{p_1,u_1}(Q(x,r))}\|_{L_{p_2,u_2}(Q(x,r))} < \infty.$$

Отметим некоторые свойства этих пространств.

Лемма 2.6. *Пусть выполнены условия* (1.32), $f_1 \in (M_p^{\lambda_1})^*(\mathbb{R}^{m_1})$ $f_2 \in (M_p^{\lambda_2})^*(\mathbb{R}^{m_2})$. *Тогда* $f_1 f_2 \in (M_p^{\lambda_1})^*(\mathbb{R}^{m_1}) \times (M_p^{\lambda_2})^*(\mathbb{R}^{m_2})$ *и*

$$\|f_1f_2\|^*_{M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})\times M_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})} = \|f_1\|^*_{M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})}\|f_2\|^*_{M_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})}. \tag{2.25}$$

Доказательство. Действительно,

$$\|f_1f_2\|^*_{M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})\times M_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})} = \|\|f_1(u_1)f_2(u_2)\|^*_{M^{\lambda_1}_{p,u_1}(\mathbb{R}^{m_1})}\|^*_{M^{\lambda_2}_{p,u_2}(\mathbb{R}^{m_2})}$$

$$= \|\ |f_2(u_2)|\ \|f_1(u_1)\|^*_{M^{\lambda_1}_{p,u_1}(\mathbb{R}^{m_1})}\|^*_{M^{\lambda_2}_{p,u_2}(\mathbb{R}^{m_2})}$$

$$= \|f_1\|^*_{M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})}\|f_2\|^*_{M_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})}.$$

$\square$

Лемма 2.7. *Пусть* $0 < p \le \infty,\ m_1, m_2 \in \mathbb{N},\ 0 \le \lambda_1 \le \frac{m_1}{p},\ 0 \le \lambda_2 \le \frac{m_2}{p}$. *Тогда*

$$(M_p^{\lambda_1})^*(\mathbb{R}^{m_1}) \times (M_p^{\lambda_2})^*(\mathbb{R}^{m_2}) \subset (M_p^{\lambda_1+\lambda_2})^*(\mathbb{R}^{m_1+m_2}), \tag{2.26}$$

причем

$$\|T_\mu\|^*_{M_p^{\lambda_1+\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_1+m_2})} \le \|T_\mu\|^*_{M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1}) \times M_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})} \tag{2.27}$$

для любых $f \in M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1}) \times M_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})$.

Доказательство. 1. Пусть $u_1 \in \mathbb{R}^{m_1},\ u_2 \in \mathbb{R}^{m_2},\ r > 0$, тогда

$$Q_{\mathbb{R}^{m_1+m_2}}((u_1, u_2), r) = Q_{\mathbb{R}^{m_1}}(u_1, r) \times Q_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2, r) \tag{2.28}$$

Используя равенство (2.28), получим, что

$$\|T_\mu\|^*_{M_p^{\lambda_1+\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_1+m_2})} = \sup_{u_1 \in \mathbb{R}^{m_1}} \sup_{u_2 \in \mathbb{R}^{m_2}} \sup_{r>0} r^{-\lambda_1-\lambda_2} \|T_\mu\|^*_{L_p(Q_{\mathbb{R}^{m_1+m_2}}((u_1,u_2),r))}$$

$$= \sup_{u_1 \in \mathbb{R}^{m_1}} \sup_{u_2 \in \mathbb{R}^{m_2}} \sup_{r>0} r^{-\lambda_1-\lambda_2} \|T_\mu(v_1, v_2)\|^*_{L_p(Q_{\mathbb{R}^{m_1}}(u_1,r) \times Q_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2,r))}$$

$$= \sup_{u_1 \in \mathbb{R}^{m_1}} \sup_{u_2 \in \mathbb{R}^{m_2}} \sup_{r>0} r^{-\lambda_2} \| r^{-\lambda_1} \|T_\mu(v_1, v_2)\|^*_{L_{p,v_1}(Q_{\mathbb{R}^{m_1}}(u_1,r)} \|^*_{L_{p,v_2}(Q_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2,r))}$$

$$= \sup_{u_2 \in \mathbb{R}^{m_2}} \sup_{r>0} r^{-\lambda_2} \| \sup_{u_1 \in \mathbb{R}^{m_1}} r^{-\lambda_1} \|T_\mu(v_1, v_2)\|^*_{L_{p,v_1}(Q_{\mathbb{R}^{m_1}}(u_1,r)} \|^*_{L_{p,v_2}(Q_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2,r))}$$

$$\le \sup_{u_2 \in \mathbb{R}^{m_2}} \sup_{r>0} r^{-\lambda_2} \| \sup_{u_1 \in \mathbb{R}^{m_1}} \sup_{\rho>0} \rho^{-\lambda_1} \|T_\mu(v_1, v_2)\|^*_{L_{p,v_1}(Q_{\mathbb{R}^{m_1}}(u_1,\rho)} \|^*_{L_{p,v_2}(Q_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2,r))}$$

$$= \sup_{u_2 \in \mathbb{R}^{m_2}} \sup_{r>0} r^{-\lambda_2} \| \, \|T_\mu(v_1, v_2)\|^*_{M_{p,v_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})} \|^*_{L_{p,v_2}(Q_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2,r))}$$

$$= \| \, \|T_\mu(v_1, v_2)\|^*_{M_{p,v_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})} \|^*_{M_{p,v_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})} = \|T_\mu\|^*_{M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1}) \times M_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})}.$$

□

Теорема 2.7. *Пусть* $1 \le p < \infty,\ m, n \in \mathbb{N},\ m < n,\ 0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$, *тогда*

$$\|T_\mu\|^*_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-m}) \times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} \le 3^{n-m} \mu^{\frac{n-m}{p}} \|T_\mu\|^*_{L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}. \tag{2.29}$$

Доказательство. Пусть $x = (u,v)$. Так как для любого $u \in Q_{\mathbb{R}^m}(0,\pi)$ $T_\mu(u,v) \in \mathfrak{M}^*_{\mu,p}(\mathbb{R}^{n-m})$, то согласно неравенству (2.22) с $q=\infty$

$$\|T_\mu(u,v)\|^*_{L_{\infty,v}(\mathbb{R}^{n-m})} \le 3^{n-m}\mu^{\frac{n-m}{p}}\|T_\mu(u,v)\|^*_{L_{p,v}(\mathbb{R}^{n-m})}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\|T_\mu\|^*_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-m})\times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} &= \|\|T_\mu(u,v)\|^*_{L_{\infty,v}(\mathbb{R}^{n-m})}\|^*_{M^\lambda_{p,u}(\mathbb{R}^m)}\\ &\le 3^{n-m}\mu^{\frac{n-m}{p}}\|\|T_\mu(u,v)\|^*_{L_{p,v}(\mathbb{R}^{n-m})}\|^*_{M^\lambda_{p,u}(\mathbb{R}^m)}\\ &= 3^{n-m}\mu^{\frac{n-m}{p}}\|T_\mu\|^*_{L_p(\mathbb{R}^{n-m})\times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}.\end{aligned}$$

□

Замечание 2.5. *Если $\lambda = 0$, то очевидно, что*

$$(L_p)^*(\mathbb{R}^{n-m}) \times (M_p^0)^*(\mathbb{R}^m) = (L_p)^*(\mathbb{R}^{n-m}) \times (L_p)^*(\mathbb{R}^m) = (L_p)^*(\mathbb{R}^n),$$

однако, при $0 < \lambda \le \frac{m}{p}$ согласно лемме 2.7

$$(L_p)^*(\mathbb{R}^{n-m}) \times (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^m) \subset (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n),$$

но

$$(L_p)^*(\mathbb{R}^{n-m}) \times (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^m) \ne (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n).$$

Теорема 2.8. *Пусть $1 \le p < \infty,\ 1 \le \theta \le \infty,\ \mu, m, n \in \mathbb{N},\ m < n,\ 0 \le \lambda \le \frac{m}{p}$, тогда для любого $\mathfrak{T}_\mu \in (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^m)$ существует $T_\mu \in (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n)$ такое что $T_\mu(u,0) = \mathfrak{T}_\mu(u)$ для любых $u \in \mathbb{R}^m$ и*

$$\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \le c\mu^{-\frac{n-m}{p}}\|\mathfrak{T}_\mu\|^*_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}.$$

Доказательство. Пусть $x = (u,v)$, $\mathfrak{T}_\mu \in (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^m)$, $V_\mu(v) = \prod_{j=m+1}^n \frac{\mathfrak{V}_\mu(x_j)}{\mathfrak{V}_\mu(0)}$ и $T_\mu(u,v) = \mathfrak{T}_\mu(u)V_\mu(v)$ для любых $u \in \mathbb{R}^m$ и $v \in \mathbb{R}^{n-m}$.

В силу неравенств (2.20) и (2.26) при $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda, m_1 = n - m, m_2 = m$

$$\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \leq \|T_\mu\|^*_{L_p(\mathbb{R}^{n-m})\times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} = \|V_\mu\|^*_{L_p(\mathbb{R}^{n-m})}\|\mathfrak{T}_\mu\|^*_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}$$

$$\leq c\mu^{-\frac{n-m}{p}}\|\mathfrak{T}_\mu\|^*_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}.$$

$\square$

Глава 3

Теорема вложения и теоремы о следах для пространств Никольского-Бесова-Морри $B_\theta^r(\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n))$

3.1. Пространство Никольского-Бесова-Морри $B_\theta^r(\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n))$

Определение 3.1. *Пусть* $1 \le p, \theta \le \infty$, $r > 0$, $0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$. *Будем говорить, что функция принадлежит пространству Никольского-Бесова-Морри* $f \in B_\theta^r(\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n))$, *если для некоторого* $a > 1$

$$\|f\|_{B_\theta^r(\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n))} = \inf\left(\sum_{s=0}^{\infty} a^{r\theta s}\|Q_{a^s}\|^\theta_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}\right)^{1/\theta} < \infty,$$

где f *представима в виде ряда*

$$f = \sum_{s=0}^{\infty} Q_{a^s}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.1}$$

члены которого целые функции экспоненциального типа a^s, *а инфимум берется по всем разложениям* (3.1).

Замечание 3.1. *Аналогично определяются пространства* $B_\theta^r(M_p^\lambda(\mathbb{R}^n))$, $B_\theta^{r'}(L_{\infty,v}(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}_{p,u}^\lambda(\mathbb{R}^m))$.

3.2. Теорема вложения для пространств $B_\theta^r(\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n))$

Теорема 3.1. *Пусть* $1 \le p < q \le \infty,\ 1 \le \theta \le \infty,\ r > 0,\ 0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$ *и*

$$r' = r - n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) > 0.$$

Тогда

$$B_\theta^r(\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)) \to B_\theta^{r'}(\widehat{M}_q^{\frac{p\lambda}{q}}(\mathbb{R}^n)) \tag{3.2}$$

Доказательство. Пусть $f \in B_\theta^r(\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n))$ и $a > 1$. Представим функция f в виде ряда

$$f = \sum_{s=0}^{\infty} Q_{a^s}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

члены которого целые функции экспоненциального типа a^s. Согласно неравенству (1.26)

$$\left(\sum_{s=0}^{\infty} a^{r'\theta s}\|Q_{a^s}\|^\theta_{\widehat{M}_q^{\frac{p\lambda}{q}}(\mathbb{R}^n)}\right)^{1/\theta} \le c\left(\sum_{s=0}^{\infty} a^{r'\theta s}a^{s\theta n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|Q_{a^s}\|^\theta_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}\right)^{1/\theta}$$

$$= c\left(\sum_{s=0}^{\infty} a^{r\theta s}\|Q_{a^s}\|^\theta_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}\right)^{1/\theta}.$$

Следовательно, переходя к инфимумам по всем разложениям , получим

$$\|f\|_{B_\theta^{r'}(\widehat{M}_q^{\frac{p\lambda}{q}}(\mathbb{R}^n))} \le c\|f\|_{B_\theta^r(\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n))},$$

откуда и следует вложение (3.2). □

Замечание 3.1. (*Транзитивность*) *Пусть*

$$r > 0,\ 1 \le p < \infty$$

и

$$1 \le p \le q < q^* \le \infty,\quad r' = r - n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) > 0.$$

Тогда имеет место теорема вложение (3.2), *которое можно рассматривать как переход от* r *и* p *к* r' *и* q.

Если положим, что пространство $B_\theta^{r'}(\widehat{M}_q^{\frac{p\lambda}{q}}(\mathbb{R}^n))$ *является исходным, при* $r'' = r' - n\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q^*}\right) > 0$, *тогда*

$$B_\theta^{r'}(\widehat{M}_q^{\frac{p\lambda}{q}}(\mathbb{R}^n)) \to B_\theta^{r''}(\widehat{M}_{q^*}^{\frac{q\frac{p\lambda}{q}}{q^*}}(\mathbb{R}^n)) = B_\theta^{r''}(\widehat{M}_{q^*}^{\frac{p\lambda}{q^*}}(\mathbb{R}^n)).$$

Но если $r_*'' = r - n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q^*}\right) > 0$, *тогда имеем место вложение*

$$B_\theta^{r}(\widehat{M}_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)) \to B_\theta^{r_*''}(\widehat{M}_{q^*}^{\frac{p\lambda}{q^*}}(\mathbb{R}^n))$$

и имеем место равенство

$$r_*'' = r''.$$

Это следует, что вложения из первого пространства во второе, а затем из второго в третье можно заменить одним вложением из первого в третье.

3.3. Прямая теорема о следах для пространств $B^r_\theta(L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}^\lambda_p(\mathbb{R}^m))$

Определение 3.2. (см. [2]) *Пусть* $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ *и* $g \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^m)$. *Говорят, что функция* g *является следом функции* f, *кратко,* $g = tr_{\mathbb{R}^m} f$, *если существует функция* h, *эквивалентная* f *на* $\mathbb{R}^n$, *которая такова, что*
$h(\cdot, v) \to g(\cdot)$ *в* $L_1^{loc}(\mathbb{R}^m)$ *при* $v \to 0$.

Теорема 3.2. *Пусть* $1 < p, \theta \le \infty$, $1 \le m < n$, $0 \le \lambda \le \frac{m}{p}$. *Тогда имеет место вложение*

$$B^r_\theta(L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}^\lambda_p(\mathbb{R}^m)) \to B^{r'}_\theta(L_\infty(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}^\lambda_p(\mathbb{R}^m)), \tag{3.3}$$

в частности,

$$B^r_\theta(L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}^\lambda_p(\mathbb{R}^m)) \to B^{r'}_\theta(\widehat{M}^\lambda_p(\mathbb{R}^m)), \tag{3.4}$$

где $r' = r - \frac{n-m}{p} > 0$, *то есть, для любых* $G \in B^r_\theta(L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}^\lambda_p(\mathbb{R}^m))$ *существует след* $g \in B^{r'}_\theta(\widehat{M}^\lambda_p(\mathbb{R}^m))$ *на* $\mathbb{R}^m$: $G|_{\mathbb{R}^m} = g$.

Доказательство. Представим g в виде ряда

$$g = \sum_{s=0}^{\infty} Q_{a^s}$$

где Q_{a^s} — целая функция экспоненциального типа a^s, $a > 1$.

1. Согласно неравенству (1.46), получаем

$$\|g(u,v)\|_{B^{r'}_\theta(L_{\infty,v}(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}^\lambda_{p,u}(\mathbb{R}^m))} = \inf \left(\sum_{s=0}^{\infty} a^{r'\theta s} \|Q_{a^s}\|^\theta_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}^\lambda_p(\mathbb{R}^m)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \le$$

$$\le \inf \left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{\theta(n-m)} a^{r'\theta s} a^{s(\frac{n-m}{p})} \|Q_{a^s}\|^\theta_{L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}^\lambda_p(\mathbb{R}^m)} \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$= 2^{n-m} \inf \left(\sum_{s=0}^{\infty} a^{s\theta r} \|Q_{a^s}\|^\theta_{L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}^\lambda_p(\mathbb{R}^m)} \right)^{\frac{1}{\theta}} = 2^{n-m} \|g\|_{B^r_\theta(L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}^\lambda_p(\mathbb{R}^m))}.$$

откуда и следует вложение (3.3). □

3.4. Обратная теорема о следах для пространств $B_\theta^r(\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m))$

Теорема 3.3. *Пусть* $1 < p \le \infty,\ 1 \le m < n,\ 0 \le \lambda \le \frac{m}{p},\ r' = r - \frac{n-m}{p} > 0.$ *Тогда имеет место вложение*

$$B_\theta^{r'}(\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)) \to B_\theta^r(\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)) \tag{3.5}$$

и

$$B_\theta^{r'}(\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)) \to B_\theta^r(L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)). \tag{3.6}$$

Доказательство. Пусть $x = (u, v)$, $u \in \mathbb{R}^m,\ v \in \mathbb{R}^{n-m}$. Рассмотрим произвольное разложение $f \in B_\theta^{r'}(\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m))$

$$f(u) = \sum_{s=0}^{\infty} Q_{a^s}(u),\ u \in \mathbb{R}^m,$$

где Q_{a^s}– целая функция экспоненциального типа a^s, $\ a > 1$.

Рассмотрим функцию h_{a^s} определяемую равенством (1.49) и определим новую функцию от $x \in \mathbb{R}^n$, имеющую следующий вид

$$g(x) = \sum_{s=0}^{\infty} q_{a^s}(x),$$

где

$$q_{a^s}(x) = Q_{a^s}(u) h_{a^s}(v).$$

(Это специальное разложение $g(x)$ по целым функциям от x экспоненциального типа a^s.)

Согласно неравенству (1.40) и равенству (1.34) с $\lambda_1 = \lambda,\ \lambda_2 = 0,\ m_1 = m,\ m_2 = n - m$ и неравенству (1.50)

$$\|g\|_{B_\theta^r(\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n))} \le \|g\|_{B_\theta^r(L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m))}$$

$$\le \inf \left(\sum_{s=0}^{\infty} a^{s\theta r} \|q_{a^s}\|^\theta_{L_{p,v}(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}_{p,u}^\lambda(\mathbb{R}^m)} \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$= \inf \left(\sum_{s=0}^{\infty} a^{s\theta r} \|Q_{a^s}(u) h_{a^s}(v)\|^{\theta}_{L_{p,v}(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}^{\lambda}_{p,u}(\mathbb{R}^m)} \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$= \inf \left(\sum_{s=0}^{\infty} a^{s\theta r} \|Q_{a^s}\|^{\theta}_{\widehat{M}^{\lambda}_{p}(\mathbb{R}^m)} \|h_{a^s}\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^{n-m})} \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\leq \inf \left(\sum_{s=0}^{\infty} a^{s\theta r} (2\pi)^{\theta \frac{n-m}{p}} a^{-s\theta \frac{n-m}{p}} \|Q_{a^s}\|^{\theta}_{\widehat{M}^{\lambda}_{p}(\mathbb{R}^m)} \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$= (2\pi)^{\frac{n-m}{p}} \inf \left(\sum_{s=0}^{\infty} a^{s\theta r'} \|Q_{a^s}\|^{\theta}_{\widehat{M}^{\lambda}_{p}(\mathbb{R}^m)} \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$= (2\pi)^{\frac{n-m}{p}} \|f\|_{B^{r'}_{\theta}(\widehat{M}^{\lambda}_{p}(\mathbb{R}^m))},$$

откуда и следует вложения (3.5) и (3.6). □

Замечание 3.2. *Из прямой теоремы о следах* (3.4) *и обратной теоремы о следах* (3.6) *следует утверждение об полном описании пространства следов на* $\mathbb{R}^m$ *функций из пространства* $B^r_\theta(L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}^{\lambda}_{p}(\mathbb{R}^m))$.

Теорема 3.4. *Пусть* $1 \leq p, \theta \leq \infty$, $n, m \in \mathbb{N}$, $m < n$, $r' = r - \frac{n-m}{p} = 0$, $0 \leq \lambda \leq \frac{m}{p}$. *Тогда*

$$Tr_{\mathbb{R}^m}(B^r_\theta(L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}^{\lambda}_{p}(\mathbb{R}^m))) = \{f|_{\mathbb{R}^m} : f \in B^r_\theta(L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}^{\lambda}_{p}(\mathbb{R}^m))\}$$

$$= B^{r'}_{\theta}(\widehat{M}^{\lambda}_{p}(\mathbb{R}^m)).$$

Глава 4

Теорема вложения и теоремы о следах для периодических пространств Никольского-Бесова-Морри $B^r_\theta((M^\lambda_p)^*(\mathbb{R}^n))$

4.1. Периодические пространства Никольского-Бесова-Морри $B^r_\theta((M^\lambda_p)^*(\mathbb{R}^n))$

Определение 4.1. *Пусть* $1 \le p, \theta \le \infty$, $r > 0$, $0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$. *Будем говорить, что функция* f *принадлежит периодическому пространству Никольского-Бесова-Морри* $B^r_\theta(M^\lambda_p)^*$, *если* f *—* 2π*-периодическая измеримая функция, для которой*

$$\|f\|^*_{B^r_\theta(M^\lambda_p)} = \inf \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{r\theta k} (\|T_{2^k}\|^*_{M^\lambda_p})^\theta \right)^{1/\theta} < \infty,$$

где f *представима в виде ряда*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} T_{2^k}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.1}$$

члены которого тригонометрические многочлены порядка не выше 2^k, *а инфимум берется по всем разложениям* (4.1).

4.2. Теорема вложения для пространств $B_\theta^r((M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n))$

Теорема 4.1. *Пусть* $1 \le p < q \le \infty, 1 \le \theta \le \infty,\ r > 0,\ 0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$ *и*

$$r' = r - n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) > 0.$$

Тогда

$$B_\theta^r(M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n) \to B_\theta^{r'}(M_q^{p\lambda/q})^*(\mathbb{R}^n). \tag{4.2}$$

Доказательство. Согласно неравенству (2.23)

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{r'\theta k} \|T_{2^k}\|^{*^\theta}_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}}\right)^{1/\theta} \le c\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{r'\theta k} 2^{k\theta n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|T_{2^k}\|^{*^\theta}_{M_p^\lambda}\right)^{1/\theta} =$$

$$= c\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\theta r} \|T_{2^k}\|^{*^\theta}_{M_p^\lambda}\right)^{1/\theta}.$$

Следовательно, переходя к инфимумам по всем разложениям (4.1), получим, что

$$\|f\|^*_{B_\theta^{r'}(M_q^{p\lambda/q})} \le c\|f\|^*_{B_\theta^r(M_p^\lambda)},$$

откуда и следует вложение (4.2). $\square$

4.3. Прямая теорема о следах для пространств $B^r_\theta((L_p)^*(\mathbb{R}^{n-m}) \times (M^\lambda_p)^*(\mathbb{R}^m))$

Теорема 4.2. *Пусть* $1 \le p, \theta \le \infty$, $r > 0$, $0 \le \lambda \le \frac{m}{p}$, $1 \le m < n$. *Тогда имеет место вложение*

$$B^r_\theta((L_p)^*(\mathbb{R}^{n-m}) \times (M^\lambda_p)^*(\mathbb{R}^m)) \to B^{r'}_\theta((L_\infty)^*(\mathbb{R}^{n-m}) \times (M^\lambda_p)^*(\mathbb{R}^m)), \qquad (4.3)$$

в частности,

$$B^r_\theta((L_p)^*(\mathbb{R}^{n-m}) \times (M^\lambda_p)^*(\mathbb{R}^m)) \to B^{r'}_\theta((M^\lambda_p)^*(\mathbb{R}^m)),$$

где $r' = r - \frac{n-m}{p} > 0$.

Доказательство. Пусть $x = (u, v)$, $u = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $v = (x_{m+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-m}$. Пусть

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} T_{2^k},$$

где T_{2^k}– тригонометрические многочлены порядка не выше 2^k. Согласно неравенству (2.29)

$$\|f\|^*_{B^{r'}_\theta(L_\infty(\mathbb{R}^{n-m})\times M^\lambda_p(\mathbb{R}^m))} = \inf\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{r'\theta k}\|T_{2^k}\|^{*\theta}_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-m})\times M^\lambda_p(\mathbb{R}^m)}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\le \inf\left(\sum_{k=0}^{\infty} 3^{\theta(n-m)}2^{r'\theta k}2^{\theta k(\frac{n-m}{p})}\|T_{2^k}\|^{*\theta}_{L_p(\mathbb{R}^{n-m})\times M^\lambda_p(\mathbb{R}^m)}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$= 3^{n-m}\inf\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\theta r}\|T_{2^k}\|^{*\theta}_{L_p(\mathbb{R}^{n-m})\times M^\lambda_p(\mathbb{R}^m)}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$= 3^{n-m}\|f\|^*_{B^r_\theta(L_p(\mathbb{R}^{n-m})\times M^\lambda_p(\mathbb{R}^m))},$$

откуда и следует вложение (4.3). □

4.4. Обратная теорема о следах для пространств $B^r_\theta((M^\lambda_p)^*(\mathbb{R}^m))$

Теорема 4.3. *Пусть* $1 \le p, \theta < \infty,\ m < n$ *и* $r' = r - \frac{n-m}{p} > 0$. *Тогда*

$$B^{r'}_\theta((M^\lambda_p)^*(\mathbb{R}^m)) \to B^r_\theta((L_p)^*(\mathbb{R}^{n-m}) \times (M^\lambda_p)^*(\mathbb{R}^m))$$

и

$$B^{r'}_\theta((M^\lambda_p)^*(\mathbb{R}^m)) \to B^r_\theta((M^\lambda_p)^*(\mathbb{R}^n)).$$

Доказательство. Пусть $x = (u, v)$, $u \in \mathbb{R}^m,\ v \in \mathbb{R}^{n-m}$

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} T_{2^k},$$

где T_{2^k}– тригонометрические многочлены порядка не выше 2^k. Пусть также $x = (u, v)$, $T_{2^k}(u, 0) = \mathfrak{T}_{2^k}(u),\ V_{2^k}(v) = \prod_{j=m+1}^{n} \frac{\mathfrak{V}_{2^k}(v)}{\mathfrak{V}_{2^k}(0)}$, $\widetilde{T}_{2^k}(u, v) = \mathfrak{T}_{2^k}(u) V_{2^k}(v)$ для любых $u \in \mathbb{R}^m$ и $v \in \mathbb{R}^{n-m}$. Тогда из неравенства (2.27) при $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda,\ m_1 = n - m$ и $m_2 = m$ и неравенства (2.25)

$$\|f\|^*_{B^r_\theta(M^\lambda_p(\mathbb{R}^n))} = \inf \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{r\theta k} \|T_{2^k}\|^{*\theta}_{M^\lambda_p(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \le \inf \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{r\theta k} \|\widetilde{T}_{2^k}\|^{*\theta}_{M^\lambda_p(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\le \inf \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{r\theta k} \|\widetilde{T}_{2^k}\|^{*\theta}_{L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times M^\lambda_p(\mathbb{R}^m)} \right)^{\frac{1}{\theta}} = \inf \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{r\theta k} \|V_{2^k}\|^{*\theta}_{L_p(\mathbb{R}^{n-m})} \|\mathfrak{T}_{2^k}\|^{*\theta}_{M^\lambda_p(\mathbb{R}^m)} \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\le \inf \left(\sum_{k=0}^{\infty} c 2^{r\theta k} 2^{-\theta k \frac{n-m}{p}} \|\mathfrak{T}_{2^k}\|^{*\theta}_{M^\lambda_p(\mathbb{R}^m)} \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\le c \inf \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{r'\theta k} \|\mathfrak{T}_{2^k}\|^{*\theta}_{M^\lambda_p(\mathbb{R}^m)} \right)^{\frac{1}{\theta}} = c \|\mathfrak{T}_{2^k}\|^*_{B^{r'}_\theta(M^\lambda_p(\mathbb{R}^m))}.$$

□

Замечание 4.1. *Из прямой теоремы о следах* (3.4) *и обратной теоремы о следах* (3.6) *следует утверждение об полном описании пространства следов на* $\mathbb{R}^m$ *функций из пространства* $B^r_\theta((L_p)^*(\mathbb{R}^{n-m}) \times (M^\lambda_p)^*(\mathbb{R}^m))$.

Теорема 4.4. *Пусть* $1 \le p, \theta \le \infty$, $n, m \in \mathbb{N}$ $, m < n$, $r' = r - \frac{n-m}{p} > 0$, $0 \le \lambda \le \frac{m}{p}$. *Тогда*

$$Tr_{\mathbb{R}^m}(B^r_\theta((L_p)^*(\mathbb{R}^{n-m}) \times (M^\lambda_p)^*(\mathbb{R}^m)))$$

$$= \{f|_{\mathbb{R}^m} : f \in B^r_\theta((L_p)^*(\mathbb{R}^{n-m}) \times (M^\lambda_p)^*(\mathbb{R}^m))\}$$

$$= B^{r'}_\theta((M^\lambda_p)^*(\mathbb{R}^m)).$$

Заключение

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем.

1. Доказано неравенство Бернштейна для целых функций экспоненциального типа ν для пространств Морри.

2. Доказано неравенство разных метрик для целых функций экспоненциального типа ν для пространств Морри.

3. Доказано неравенство разных измерений для целых функций экспоненциального типа ν для пространств Морри.

4. Доказано неравенство Бернштейна для тригонометрических многочленов.

5. Доказано неравенство разных метрик для тригонометрических многочленов.

6. Доказано неравенство разных измерений для тригонометрических многочленов.

7. Доказана теорема вложения для пространств Никольского-Бесова-Морри.

8. Доказана прямая теорема о следах для пространств Никольского-Бесова-Морри.

9. Доказана обратная теорема о следах для пространств Никольского-Бесова-Морри.

10. Доказана теорема вложения для периодических пространств Никольского-Бесова-Морри.

11. Доказана прямая теорема о следах для периодических пространств Никольского-Бесова-Морри.

12. Доказана обратная теорема о следах для периодических пространств Никольского-Бесова-Морри.

Список обозначений

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел

$B(x,r)$ — открытый шар радиуса r $>$ 0 с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$

$Q(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x_j - y_j| < r, j = 1, \ldots, n\}$

$L_p(\mathbb{R}^n)$ — пространство Лебега, для которых

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

$L_\infty(\mathbb{R}^n)$ — банахово пространство функций f, измеримых на $\mathbb{R}^n$, таких, что

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty$$

$L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ — локальное пространство Лебега

$(L_p)^*$ — периодическое пространство Лебега

$M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$ — пространство Морри

$(M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n)$ — периодическое пространство Морри

$E_\nu(\mathbb{R}^n)$ — множество всех целых функции экспоненциального типа ν на $\mathbb{R}^n$

$\mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^n) = E_\nu(\mathbb{R}^n) \cap L_p(\mathbb{R}^n)$

$D_\mu(x)$ — ядро Дирихле

$\mathfrak{V}_{\mu,\nu}(x)$ — ядро Валле Пуссена

$B_\theta^r(M_p^\lambda(\mathbb{R}^n))$ — пространство Никольского-Бесова-Морри

$B_\theta^r((M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n))$ — периодическое пространство Никольского-Бесова-Морри

Список литературы

1. Adams, D.R. Morrey spaces in harmonic analysis / D.R. Adams, J. Xiao // Arkiv för Matematik. — 2012. — Vol. 50. — P. 201–230.

2. Burenkov, V.I. Sobolev spaces on domains / V.I. Burenkov. — Stuttgart : B. G. Teubner Verlagsgesellschaft mbH, 1997. — Vol. 137 of Teubner-Texte zur Mathematik. — P. 312.

3. Burenkov, V.I. Recent progress in the problem of the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces I / V.I. Burenkov // Eurasian Mathematical Journal. — 2012. — Vol. 3, no. 3. — P. 11–32.

4. Burenkov, V.I. Recent progress in the problem of the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces II / V.I. Burenkov // Eurasian Mathematical Journal. — 2013. — Vol. 4, no. 1. — P. 21–45.

5. Burenkov, V.I. Comparison of Morrey spaces and Nikol'skii spaces / V.I. Burenkov, V.S. Guliyev // Eurasian Mathematical Journal. — 2022. — Vol. 12, no. 1. — P. 9–20.

6. Burenkov, V.I. Inequalities for entire functions of exponential type in Morrey spaces / V.I. Burenkov, D.J. Joseph // Eurasian Mathematical Journal. — 2022. — Vol. 13, no. 3. — P. 92–99.

7. Burenkov, V.I. Inequalities for trigonometric polynomials in periodic Morrey spaces / V.I. Burenkov, D.J. Joseph // Eurasian Mathematical Journal. — 2024. — Vol. 15, no. 2. — P. 92–100.

8. Guliyev, V.S. Generalized weighted Morrey spaces and higher order commutators of sublinear operators / V.S. Guliyev // Eurasian Mathematical Journal. — 2012. — Vol. 3, no. 1. — P. 33–61.

9. Jawerth, B. The trace of Sobolev and Besov spaces if $0 < p < 1$ / B. Jawerth // Studia Mathematica. — 1978. — no. 62. — P. 65–71.

10. Lemarié-Rieusset, P.-G. The role of Morrey spaces in the study of Navier–Stokes and Euler equations / P.-G. Lemarié-Rieusset // Eurasian Mathematical Journal. — 2012. — Vol. 3, no. 3. — P. 62–93.

11. Mazzucato, A. Decomposition of Besov-Morrey spaces / A. Mazzucato // Journal of Functional Analysis. — 1999. — Vol. 170, no. 2. — P. 356–376.

12. Mazzucato, A. Besov-Morrey spaces: function space theory and applications to non linear PDE / A. Mazzucato // Transactions of the American Mathematical Society. — 2003. — Vol. 355. — P. 1297–1364.

13. Morrey, C.B. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations / C.B. Morrey // Transactions of the American Mathematical Society. — 1938. — Vol. 43, no. 1. — P. 126–166.

14. Nadzhafov, A.M. On some properties of functions in the Sobolev-Morrey-type spaces $W^{l}_{p,a,\kappa\tau}(G)$ / A.M. Nadzhafov // Siberian Mathematical Journal. — 2005. — Vol. 46, no. 3. — P. 634–648.

15. Ragusa, M.A. Operators in Morrey type spaces and applications / M.A. Ragusa // Eurasian Mathematical Journal. — 2012. — Vol. 3, no. 3. — P. 94–109.

16. Sawano, Y. A note on Besov-Morrey and Triebel-Lizorkin-Morrey spaces / Y. Sawano // Acta Mathematica Sinica, English Series. — 2009. — Vol. 25, no. 8. — P. 1223–1242.

17. Sawano, Y. Morrey spaces from various points of view / Y. Sawano // Mathematical Analysis and Applications–Plenary Lectures / Ed. by L. Rodino, J. Toft. — [S. l.] : Springer, 2018. — Vol. 262 of Springer Proceedings in Mathematics and Statistics.

18. Sawano, Y. Theory of Besov Spaces / Y. Sawano. — Singapore : Springer, 2018. — Vol. 56 of Developments in Mathematics. — P. 945.

19. Sickel, W. Smoothness spaces related to Morrey spaces – a survey. I / W. Sickel // Eurasian Mathematical Journal. — 2012. — Vol. 3, no. 3. — P. 110–149.

20. Sickel, W. Smoothness spaces related to Morrey spaces – a survey. II / W. Sickel // Eurasian Mathematical Journal. — 2024. — Vol. 4, no. 1. — P. 82–124.

21. Temlyakov, V. Multivariate approximation / V. Temlyakov. — Cambridge : Cambridge University Press, 2018. — Vol. 32 of Cambridge Monographs in Applied and Computational Mathematics. — P. 550.

22. Yuan, W. Morrey and Campanato Meet Besov, Lizorkin and Triebel / W. Yuan, W. Sickel, D. Yang. — [S. l.] : Springer, 2010. — Vol. 2005 of Lecture Notes in Mathematics. — P. 288.

23. Бесов, О.В. Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения / О.В. Бесов // Труды МИАН. — 1961. — Т. 60. — С. 42–81.

24. Бесов, О.В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский. — 2 изд. — Москва : Наука, 1996. — С. 480.

25. Буренков, В.И. Интегральные неравенства для целых функций экспоненциального типа в пространствах Морри / В.И. Буренков, Д.Д. Джосеф // Труды МИАН. — 2023. — Т. 323. — С. 87–106.

26. Буренков, В.И. Аналог неравенства Юнга для сверток функций для общих пространств типа Морри / В.И. Буренков, Т.В. Тарарыкова // Труды МИАН. — 2016. — Т. 293. — С. 113–132.

27. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. — 4 изд. — Москва : Наука, 1981. — С. 512.

28. Гольдман, М.Л. Описание следов для некоторых функциональных пространств / М.Л. Гольдман // Труды МИАН СССР. — 1979. — Т. 150. — С. 99–127.

29. Джосеф, Д.Д. Интегральные неравенства для тригонометрических многочленов в периодических пространствах Морри / Д.Д. Джосеф // СМФН. — 2024. — Т. 70, № 4. — С. 561–574.

30. Ибрагимов, И.И. Экстремальные задачи в классе целых функций экспоненциального типа / И.И. Ибрагимов // Успехи математических наук. — 1957. — Т. 12, № 3. — С. 323–328.

31. Ибрагимов, И.И. Некоторые неравенства для целых функций экспоненциального типа / И.И. Ибрагимов // Известия АН СССР. Серия математическая. — 1960. — Т. 24, № 4. — С. 605–616.

32. Ибрагимов, И.И. Теория приближения целыми функциями / И.И. Ибрагимов. — Баку : Элм, 1979. — С. 470.

33. Ибрагимов, И.И. О некоторых неравенствах для целой функции конечной степени и ее производных / И.И. Ибрагимов, А.С. Джафаров // Доклады АН СССР. — 1961. — Т. 138, № 4. — С. 755–758.

34. Никольский, С.М. Некоторые неравенства для целых функций конечной степени многих переменных и их применение / С.М. Никольский // Доклады АН СССР. — 1951. — Т. 76, № 6. — С. 785–788.

35. Никольский, С.М. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных / С.М. Никольский // Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его 60-летию. — Москва : Изд-во АН СССР, 1951. — Т. 38 из Труды МИАН СССР. — С. 244–278.

36. Никольский, С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С.М. Никольский. — 2, перераб. и доп. изд. — Москва : Наука, 1977. — С. 456.

37. Тиман, А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного / А.Ф. Тиман. — Москва : Физматгиз, 1960. — С. 624.