

## **ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА**

на диссертационную работу Мамонова Антона Алексеевича  
«Инволютивные алгоритмы вычисления базисов Грёбнера в приложении к исследованию модели Лотки-Вольтерры», представленную к защите в ПДС 0200.006 на базе Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

### **Актуальность темы диссертационной работы**

Тематика диссертационного исследования напрямую связана с современными вызовами в области вычислительной математики и математического моделирования. Разработка эффективных алгоритмов для решения систем нелинейных алгебраических уравнений с гарантированным нахождением всех решений остается одной из наиболее сложных и нерешенных проблем. В диссертации рассматривается проявление этой проблемы в биологических и экологических приложениях, где модели типа Лотки-Вольтерры становятся все более многомерными по ходу приближения модели к реально рассматриваемым задачам. Использование инволютивных алгоритмов для вычисления базисов Грёбнера представляет собой оригинальный и перспективный подход, который показывает лучшую временную эффективность для определенных задач. Таким образом, работа является актуальной как с фундаментальной, так и с прикладной точек зрения.

### **Характеристика содержания диссертационной работы**

Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения и приложения, содержит 131 страницу, 26 рисунков и 13 таблиц; список литературы включает более 54 наименований.

Введение выполняет конкретную постановку исследуемой задачи, обосновывает ее научную и практическую значимость, дает представление об используемых в работе научных методах.

В первой главе прослежена эволюция направления от классических моделей Лотки и Вольтерры до современных многомерных обобщений; основное внимание уделено семейству « $k$  конкурентов –  $k$  областей миграции». Для четырехмерной модели равновесные состояния найдены путем вычисления многообразия идеала над полем действительных алгебраических чисел. Для шестимерной модели построен лексикографический базис Грёбнера, содержащий однопеременный многочлен степени 33, и найдены его действительные корни. Завершается глава исследованием приближённых периодических решений кубического нелинейного осциллятора по схеме средней точки.

Во второй главе изложены теоретические основы метода: линейное деление определено как бинарное отношение с четырьмя свойствами, на этот язык перенесён алгоритм деления многочленов с остатком. Доказаны утверждения о свойствах и аддитивности остатков. Через мономиальные конусы введены конические деления, рассмотрены деления Томаса, Жане и Поммаре. Определены отношение сравнения делений, характеристические пути и петли. Доказана теорема о существовании инволютивного базиса при отсутствии характеристических петель.

Третья глава посвящена программной реализации инволютивного алгоритма. Описаны архитектура системы GInv, её основные классы Monom, Poly и GB, алгоритм построения базиса и применение к дифференциальным уравнениям. Доработанная версия системы опубликована в PyPI как пакет GInvDist. Для автоматизированной проверки создана система тестирования и сформирован набор из 135 задач в формате JSON. Сравнение с классическим алгоритмом показало, что эффективность методов зависит от класса задачи: в среднем GInv работает быстрее, однако для ряда тестов лучшие результаты демонстрирует классический алгоритм.

Четвёртая глава содержит результаты вычислительных экспериментов на сервере с двумя процессорами Intel Xeon L5630 и 100 ГБ памяти и персональном компьютере с Intel Core i3-10105F. Большинство тестов

ограничивалось двумя часами. Проверены гипотезы о влиянии мономиального порядка, типа деления и перестановки переменных. Введено понятие внешней характеристики идеала, числовой величины, вычисляемой за полиномиальное время по его образующим, и исследована связь таких характеристик со временем вычисления. Стандартный алгоритм решил 108 задач из 135, инволютивный - 100.

В заключении сформулированы основные результаты. Работа написана ясным языком и хорошо структурирована.

### **Достоверность и новизна результатов диссертации**

**Научная новизна** работы состоит в разработке численно-символьного метода нахождения стационарных и периодических режимов многомерных популяционных моделей на основе инволютивных базисов. Предложена оригинальная теория линейного деления, обобщающая и упрощающая описание инволютивных делений.

Создан программный комплекс GInvDist. Система GInv была доработана и стабилизирована, включая модули poly, gb и Janet. Комплекс объединён с системой автоматизированного тестирования и опубликован в PyPI как устанавливаемый пакет. Благодаря этому инволютивные вычисления можно проводить без самостоятельной сборки программы, в том числе в Jupyter Notebook и Google Colab.

Получены новые результаты для шестимерной модели «четыре конкурента – две области миграции». Кроме того, впервые проведён систематический анализ влияния характеристик идеала на время вычислений.

**Достоверность результатов** подтверждается строгими математическими доказательствами, приведенными в тексте диссертации, и воспроизводимыми экспериментами на представительной тестовой базе, при

этом полученные результаты согласуются с известными данными других авторов.

### **Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации**

Выводы диссертации являются обоснованными и аргументированными. Теоретические выводы о свойствах линейного и инволютивного деления базируются на доказательствах теорем. Практические выводы о выборе алгоритма и мономимального порядка основаны на результатах тестирования 135 задач. Основные вычисления проводились на сервере и персональном компьютере, причём на обеих платформах был выполнен одинаковый набор из 100 тестов. Возможность предсказания времени вычислений рассматривается как предварительная: в работе исследованы корреляции, но предсказывающая модель не построена и её точность не оценена.

### **Ценность для науки и практики результатов работы**

Результаты работы имеют высокую теоретическую и практическую значимость.

Теоретическая ценность состоит в развитии теории инволютивных базисов и введении нового понятия линейного деления. Практическая значимость выражается в создании программного комплекса GInvDist, который уже доступен научному сообществу и может быть использован в различных областях, требующих решения систем нелинейных уравнений.

База тестов и методика оценки производительности могут служить инструментом для верификации новых алгоритмов и проверки новых гипотез. Кроме того, результаты могут быть использованы в учебном процессе при чтении курсов по компьютерной алгебре и математическому моделированию.

## **Подтверждение опубликования основных результатов диссертации в научной печати**

Основные результаты диссертации опубликованы в рецензируемых научных изданиях и апробированы на международных конференциях. Автор имеет 7 публикаций по теме работы, включая 2 статьи в журналах, индексируемых в Scopus и Web of Science. Зарегистрированы 2 программы для ЭВМ.

## **Соответствие содержания автореферата основным положениям диссертации**

Автореферат адекватно отражает содержание диссертации. В нем представлены все основные разделы работы, сформулированы защищаемые положения, приведены ключевые теоремы и экспериментальные данные.

## **Замечания по диссертационной работе**

Диссертация выполнена качественно с точки зрения оформления и логичной структуры. Тем не менее, содержание работы вызывает следующие замечания:

1. Вычисление инволютивных базисов в виде комплекса программ впервые было реализовано в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ в секторе В. П. Гердта: существовали версии на Reduce (В. П. Гердт, Ю. А. Блинков, А. Ю. Жарков), на С (Д. А. Янович), на С++ и затем на Python и С++ (GInv – В. П. Гердт, Ю. А. Блинков), и лишь после этого появилась та версия GInv, на которую ссылается автор.
2. Сложность алгоритма построения базиса Грёбнера в наихудшем случае – двойная экспонента, а не одинарная, как пишет соискатель.
3. Неудачно сформулирована 4-я задача диссертационного исследования. По факту в диссертации сравниваются реализации алгоритмов, а не сами алгоритмы. Например, реализация инволютивного алгоритма на С, написанная Д. А. Яновичем, считает `cyclic7` меньше, чем за 10 секунд,

Python-версия GInv – существенно медленнее. Кроме того, вычисление базиса в Sage делегируется внешним библиотекам, реализующим не учебный алгоритм Бухбергера, а существенно оптимизированные его варианты (стратегии `std/slimgb` с критериями Гебауэра–Мёллера; в современных версиях доступны и реализации F4/F5-типа); называть это «классическим алгоритмом Бухбергера» представляется некорректным.

Указанные замечания не снижают уровня научной новизны, теоретической и практической значимости, а также общую положительную оценку выполненной диссертационной работы.

### **Заключение**

Диссертационная работа А.А. Мамонова на тему «Инволютивные алгоритмы вычисления базисов Грёбнера в приложении к исследованию модели Лотки–Вольтерры» является законченным научным исследованием, имеющим важное значение для вычислительной математики, компьютерной алгебры и математического моделирования в популяционной динамике. Полученные результаты достоверны и обоснованы; имеют как теоретическую, так и практическую значимость.

Работа соответствует требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, согласно п.2.2 раздела II Положения о присуждении ученых степеней в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы», утвержденного ученым советом РУДН 22.01.2024 г., протокол № УС-1, а её автор, Мамонов Антон Алексеевич, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

**Официальный оппонент**, Айриян Александр Сержикович, кандидат физико-математических наук (05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ), начальник сектора № 2 научного отдела вычислительной физики Объединённого института ядерных исследований,

«10» сентября 2026 г.



Айриян Александр Сержикович

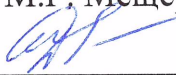
тел.: +7 496 216-35-98, email: ayriyan@jinr.ru



Подпись Айрияна А.С. заверяю

Учёный секретарь ЛИТ им. М.Г. Мещерякова

«10» сентября 2026 г.



/ О.Ю. Дерёновская

Международная межправительственная научно-исследовательская организация  
Объединённый институт ядерных исследований,

Адрес: 141980, Московская обл., Дубна, ул. Жолио-Кюри, д. 6, ОИЯИ

Тел.: +7 (496) 216-50-59

E-mail: post@jinr.ru

Страница в интернете: <http://www.jinr.ru>