На правах рукописи
УДК. 517.95

Мартынов Егор Вячеславович

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КАВАХАРЫ

АВТОРЕФЕРАТ

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2023 г.

Работа выполнена в Математическом институте им С. М. Никольского факультета физико-математических и естественных наук Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы

Научный руководитель: А.В. Фаминский, д.ф.-м.н., профессор Математического института им. С.М. Никольского РУДН

Официальные оппоненты: А. Б. Костин, д.ф.-м.н., профессор Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»

Официальные оппоненты: Е. Ю. Панов, д.ф.-м.н., профессор Новгородского государственного университета им. Ярослава Мудрого

Официальные оппоненты: О. С. Розанова, д.ф.-м.н., профессор Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Защита диссертации состоится 19.12.2023 года в 17:00 по адресу ул. Орджоникидзе, д. 3 на заседании диссертационного совета ПДС 0200.005 при Российском университете дружбы народов имени Патриса Лумумбы.

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы) по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6 и на сайте РУДН в сети интернет (https://www.rudn.ru/science/dissovet).

Автореферат разослан _ ____________ 2023 года.

Ученый секретарь диссертационного совета

д.ф.-м.н., Савин А.Ю.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

В диссертации рассматриваются свойства решений начально-краевых задач для уравнения Кавахары и его различных модификаций.

Уравнение Кавахары (в литературе также можно встретить название *уравнение Кортевега–де Фриза пятого порядка*) в общем виде записывается следующим образом:

$$u_t - u_{xxxxx} + bu_{xxx} + au_x + uu_x = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Оно было впервые выведено Т. Кавахарой в 1972 году в работе [1] для описания распространения длинных нелинейных волн в узком канале со средой со слабой дисперсией. В различных физических моделях знаки коэффициентов a и b могут быть различными.

Наряду с квадратичной нелинейностью uu_x в самом уравнении Кавахары рассматриваются уравнения с нелинейностью более высокого порядка роста, например, модифицированное уравнение Кавахары

$$u_t - u_{xxxxx} + bu_{xxx} + au_x + u^2u_x = 0. \tag{2}$$

Уравнение Кавахары является обобщением классического уравнения Кортевега–де Фриза

$$u_t + u_{xxx} + au_x + uu_x = 0. \tag{3}$$

на случай закона дисперсии более высокого порядка. Уравнение Кортевега–де Фриза широко изучалось в течение последних пятидесяти лет. В частности, на его примере был разработан так называемый метод обратной задачи рассеяния. Уравнение Кортевега–де Фриза является полностью интегрируемым и для него существует бесконечный набор законов сохранения.

В отличие от него уравнение Кавахары изучено значительно меньше. Метод обратной задачи рассеяния для него не применим, уравнение не является полностью интегрируемым и для него на данный момент известно о существовании только двух законов сохранения, а именно,

$$\int_{\mathbb{R}} u^2\,dx = const, \quad \int_{\mathbb{R}} \left(u_{xx}^2 + bu_x^2 - \frac{1}{3}u^3\right)\,dx = const. \tag{4}$$

Аналоги этих законов сохранения справедливы и для обобщений уравнения Кавахары с нелинейностью более высокого порядка роста, в частности, для уравнения (2).

[1] Kawahara T. Oscillatory solitary waves in dispersive media // J. Phys. Soc. Japan., 1972, vol. 180, pp. 260–264.

Наиболее изученной для уравнения Кавахары и его обобщений с нелинейностью более высокого порядка роста является задача Коши. В частности, для уравнения (1) в статье [2] была установлена глобальная корректность задачи Коши для начальной функции из пространства $H^s(\mathbb{R})$ при $s \geq -4/7$. В работе [3] для модифицированного уравнения Кавахары (2) при $b > 0$ аналогичный результат был получен при начальной функции из $H^2(\mathbb{R})$. Следует заметить, что наличие 1-го из законов сохранения (4) делает невозможным убывание решений задачи Коши в норме пространства $L_2(\mathbb{R})$ при больших временах. Поэтому, чтобы добиться такого убывания в работе [4] в уравнение было добавлено абсорбирующее слагаемое вида $g(x)u$, где неотрицательная функция g строго положительна на бесконечности, и было установлено экспоненциальное убывание в данной норме как для самого уравнения Кавахары (1), так и его модифицированного аналога (2). Заметим, что ранее для уравнения Кортевега–де Фриза подобная идея была использована в статье [5].

Начально-краевые задачи для уравнения Кавахары и его обобщений изучены значительно меньше, хотя в случае задачи на полуоси они имеют важный физический смысл– они описывают распространение волн в канале от начальной стенки. В работе [6] была установлена глобальная корректность этой задачи в классе бесконечно гладких функций, экспоненциально быстро убывающих при $x \to +\infty$. Существование и единственность глобальных решений данной начально-краевой задачи для уравнения Кавахары при начальной функции из пространств $L_2(\mathbb{R}_+)$ и $H^2(\mathbb{R}_+)$ со степенными весами на бесконечности установлены в статье [7]. Глобальная корректность такой задачи для начальной функции из $H^k(\mathbb{R}_+)$, $k \geq 2$, доказана в работе [8].

Следует отметить, что в случае начально-краевой задачи на полуоси $\mathbb{R}_+$ для уравнений (2) и (2) с краевыми условиями $u|_{x=0} = u_x|_{x=0} = 0$ первый из законов сохранения (4) заменяется на следующее равенство:

$$\int_{\mathbb{R}_+} u^2(t,x)\,dx + \int_0^t u_{xx}^2(\tau,0)\,d\tau = const. \tag{5}$$

[2] Chen W. , Guo Z. Global well-posedness and I-method for the fifth-order Korteweg–de Vries equation // J. Anal. Math, 2011, vol. 114, No. 1, pp. 121–156.

[3] Tao S.P., Cui S.B. Local and global existence of solutions to initial value problems of modified nonlinear Kawahara equation // Acta Math. Sinica, Engl. Ser., 2015, vol. 21, No. 5, pp. 1035–1044.

[4] Doronin G.G., Natali F. Exponential decay for a locally damped fifth-order equation posed on a line // Nonlinear Anal.: Real World Appl., 2016, vol. 30, pp. 59–72.

[5] Cavalcanti M.M., Domingos Cavalcanti V.N., Faminskii A., Natali F. Decay of solutions to damped Korteweg–de Vries equation // Appl. Math. Optim., 2012 vol. 65, pp. 221–251.

[6] К. Сангаре. Смешанная задача в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары в пространстве бесконечно дифференцируемых экспоненциально убывающих функций. *Вестн. Рос. унта дружбы народов. Сер. мат.,* 10(1): 91–107, 2003.

[7] Сангаре К. Смешанная задача в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары в пространстве бесконечно дифференцируемых экспоненциально убывающих функций // Вестн. Рос. унта дружбы народов. Сер. мат, 2003, т. 10, № 1, стр. 91–107.

[8] Кувшинов Р.В., Фаминский А.В. Смешанная задача в полуполосе для уравнения Кавахары // Дифф. уравн, 2009, т. 45, № 3, стр. 391–402.

Оно показывает, что рассматриваемая система имеет определенную внутреннюю диссипацию, но вопрос, достаточно ли ее для убывания решения при больших временах, остается открытым.

Поэтому, аналогично задаче Коши в уравнение вводятся дополнительные абсорбирующие слагаемые.

В статье [9] был установлен результат об убывании при больших временах в норме $L_2(\mathbb{R}_+)$ решений начально-краевой задачи для уравнения Кортевега–де Фриза при малых начальных данных и абсорбирующем слагаемом $g(x)u$, где положительная функция g могла стремиться к нулю при $x \to +\infty$.

В 1-ой главе диссертации рассматривается начально-краевая задача на полуоси $\mathbb{R}_+$ для обобщенного уравнения Кавахары с нелинейностью высокого порядка роста и устанавливаются результаты о существовании и единственности глобальных сильных решений и убывании этих решений при $t \to +\infty$ при добавлении абсорбирующего слагаемого. Малость начальных данных не предполагается.

Наряду с прямыми задачами изучаются и обратные, когда к задаче добавляется некоторое условие переопределения, но либо в уравнение, либо в краевые условия вводятся неизвестные параметры или функции. Наиболее исследованными для случая уравнения Кавахары и его обобщений являются обратные задачи на ограниченном интервале с финальным переопределением (которые в литературе часто именуется задачами управляемости), когда дополнительное условие выглядит следующим образом:

$$u(T, x) = u_T(x)$$

для заданных $T > 0$ и функции u_T.

Наряду с условием финального переопределения в обратных задачах также рассматриваются различные условия интегрального переопределения. Согласно книге [10] подобные условия имеют физический смысл и также заслуживают изучения. В статье [11] на основе некоторых идей вышеупомянутой книги впервые были рассмотрены обратные задачи на ограниченном интервале с интегральным переопределением для неоднородного уравнения Кортевега–де Фриза. В качестве управления выбирались либо одно из краевых условий, либо правая часть уравнения специального вида. Были получены результаты об однозначной разрешимости этих задач в классах слабых решений либо в случае малых входных данных, либо малости временного промежутка. В статье [12] была рассмотрена обратная задача с двумя интегральными условиями переопределения для обобщенного уравнения

[9] Cavalcanti M.M., Domingos Cavalcanti V.N., Faminskii A., Natali F. Decay of solutions to damped Korteweg–de Vries equation // Appl. Math. Optim., 2012 vol. 65, pp. 221–251.

[10] Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York- Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 2000.

[11] Faminskii A.V. Controllability Problems for the Korteweg-de Vries Equation with Integral Overdetermination // Differential Equations, 2019, vol. 55, No. 1, pp. 123–133.

[12] Lu S., Chen M., Lui Q. A nonlinear inverse problem of the Korteweg—de Vries equation // Bull. Math. Sci., vol. 9, No. 3, pp. 1–11.

Кортевега–де Фриза с двумя неизвестными коэффициентами в периодическом случае и установлена ее однозначная разрешимость на малом временном интервале.

Отметим, что в работе [13] обратные задачи с интегральным переопределением были рассмотрены для уравнения Кортевега–де Фриза на неограниченных интервалах. На случай уравнения Кавахары эти результаты были перенесены в работе [14].

В статье [15] обратная задача с интегральным переопределением была изучена для неоднородного уравнения Захарова–Кузнецова

$$u_t + u_{xxx} + u_{xyy} + au_x + uu_x = 0,$$

являющегося многомерным обобщением уравнения Кортевега–де Фриза.

Во 2-ой главе диссертационного исследования рассматриваются обратные задачи на ограниченном интервале для неоднородного обобщенного уравнения Кавахары с нелинейностью высокого порядка роста. В качестве управления выбираются либо одно из краевых условий, либо правая часть уравнения специального вида. Установлены результаты об однозначной разрешимости этих задач в классах слабых решений либо в случае малых входных данных, либо малости временного промежутка.

Уравнение Захарова–Кузнецова описывает процессы распространения волн, двигающихся в заданном направлении x и испытывающих деформации в поперечном направлении y. С физической точки зрения наиболее естественными областями, в которых происходят подобные волновые процессы, являются каналы, ограниченные или полуограниченные по x и конечной ширины по y. При учете дисперсии более высокого порядка возникает уравнение Кавахары–Захарова–Кузнецова

$$u_t - u_{xxxxx} + u_{xxx} + u_{xyy} + au_x + uu_x = 0. \tag{6}$$

и его обобщения на случай нелинейности более высокого порядка роста. Физические модели, приводящие к уравнениям подобного типа, приведены, например, в работе [16]. Так же, как и для случая самого уравнения Захарова–Кузнецова, наиболее естественными областями для постановки начально-краевых задач здесь являются, например, области вида $\mathbb{R}_+ \times (0, L)$ для описания распространения волн в канале конечной ширины от начальной стенки. Впервые подобные начально-краевые задачи для уравнения (6) были рассмотрены в статье [17]. В работе [18] эти

[13] Faminskii A.V. Control Problems with an Integral Condition for Korteweg–de Vries Equation on Unbounded Domains // Journal of Optimization Theory and Applications, 2019, vol. 180, No. 1, pp. 290–302.

[14] Capistrano-Filho R. A., de Sousa L. S., Gallego F. A. Control of Kawahara equation with overdetermination condition: The unbounded cases // Math. Meth. Appl. Sci., 2023, pp. 1–24.

[15] Faminskii A.V., Larkin N. A. Initial-boundary value problems for quasilinear dispersive equations posed on a bounded interval // Electronic Journal of Differential Equations, 2010, vol. 2010, No. 1, pp. 1–20.

[16] Elwakil S.A., El-Shewy E.K., Abdelwahed H.G. Solution of the perturbed Zakharov–Kuznetsov (ZK) equation describing electron-acoustic solitary waves in a magnetized plasma // Chin. J. Phys., 2011, vol. 49, pp. 732–744.

[17] Faminskii A.V., Larkin N. A. Initial-boundary value problems for quasilinear dispersive equations posed on a bounded interval // Electronic Journal of Differential Equations, 2010, vol. 2010, No. 1, pp. 1–20.

[18] Faminskii A.V. Initial-boundary value problems on a half-strip for the generalized Kawahara–Zakharov–Kuznetsov

начально-краевые задачи были изучены для случая уравнения с нелинейностью более высокого порядка роста. В этих статьях были получены результаты о существовании и единственности глобальных решений в различных функциональных пространствах и убывании решений при больших временах. Случай уравнения Кавахары–Захарова–Кузнецова для трех пространственных переменных рассмотрен в статье [19]. Вопросы гладкости решений двумерного уравнения (6) изучены в работе [20].

Однако, наряду с уравнением (6) можно рассматривать уравнение, которое и по переменной y имеет производные более высокого порядка и тогда по аналогии с уравнением Захарова–Кузнецова старшие члены которого выглядят следующим образом: $-(u_{xxxx}+u_{yyyy})_x$. Такое уравнение естественно назвать двумерным уравнением Кавахары. Именно такие уравнения с нелинейностью высокого порядка роста рассматриваются в 3-ей главе диссертации и для него изучаются начально-краевые задачи на полуполосе $\mathbb{R}_+ \times (0, L)$ с различными типами краевых условий. Устанавливаются результаты о глобальной корректности в классах слабых и сильных решений и убывании этих решений при больших временах. Ранее подобные уравнения не изучались.

Цели и задачи работы

Целями работы является изучение прямых и обратных начально-краевых задач для уравнения Кавахары и его обобщений. В 1-ой главе рассматривается начально-краевая задача на полуоси для обобщенного уравнения Кавахары с нелинейностью высокого порядка роста и исследуются вопросы существования и единственности глобальных сильных решений и убывании этих решений при больших временах при добавлении в уравнение абсорбирующего слагаемого. Во 2-ой главе рассматриваются обратные задачи на ограниченном интервале для неоднородного обобщенного уравнения Кавахары с нелинейностью высокого порядка роста с интегральным условием переопределения. В качестве управления выбираются либо одно из краевых условий, либо правая часть уравнения специального вида. Исследуются вопросы однозначной разрешимости этих задач в классах слабых решений либо в случае малых входных данных, либо малости временного промежутка. В 3-ей главе рассматриваются начально-краевые задачи на полуполосе с различными типами краевых условий для обобщенного двумерного уравнения Кавахары с нелинейностью высокого порядка роста и исследуются вопросы существования и единственности глобальных слабых и сильных решений и убывании этих решений при больших временах.

equation // Z. Angew. Math. Phys. 2022, vol. 73, No. 93, pp. 1–27.

[19]Larkin N.A., Simoes M.H. Global regular solutions for the 3D Kawahara equation posed on unbounded domains // Z. Angew. Math. Phys., 2016, vol. 67, pp. 1–21.

[20]Levandosky J. L. Smoothing properties for a two-dimensional Kawahara equation. // Journal of Differential Equations, 2022, vol 316, pp. 158–196.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Результаты о единственности, существовании и затухании решения начально-краевой задачи на полуоси для уравнения Кавахары с высоким порядком нелинейности получены впервые. Разрешимость обратной задачи для рассматриваемой модифицикации уравнения Кавахары изучено впервые. Двухмерное уравнение Кавахары ранее не изучалось.

Теоретическая значимость

Полученные в диссертации результаты могут быть использованы при изучении начально-краевых прямых и обратных задач для квазилинейных эволюционных уравнений нечетного порядка более общего вида.

Методика и методология исследования

Исследования, представленные в диссертации, имеют теоретический характер. Они основаны на современных методах теории уравнений с частными производными и нелинейного анализа. Широко используется сочетание изучения соответствующих линеаризованных задач и нелинейных оценок.

Положения выносимые на защиту

1) Теоремы о существовании и единственности глобальных сильных решений начально-краевой задачи на полуоси для обобщенного уравнения Кавахары с нелинейностью высокого порядка роста.

2) Теорема об убывании при больших временах сильных решений начально-краевой задачи на полуоси для обобщенного уравнения Кавахары с нелинейностью высокого порядка роста без условий малости начальных данных.

3) Теорема о существовании единственного слабого решения обратной начально-краевой задачи на ограниченном интервале с интегральным условием переопределения для обобщенного уравнения Кавахары с нелинейностью высокого порядка роста, когда в качестве управления выбирается одна из краевых функций, при условии малости либо входных данных, либо временного интервала.

4) Теорема о существовании единственного слабого решения обратной начально-краевой задачи на ограниченном интервале с интегральным условием переопределения для обобщенного уравнения Кавахары с нелинейностью высокого порядка роста, когда в качестве управления выбирается правая часть уравнения специального вида, при условии малости либо входных данных, либо временного интервала.

5) Теоремы о существовании и единственности глобальных слабых и сильных решений начально-краевых задач на полуполосе для обобщенного двумерного уравнения Кавахары с нелинейностью высокого порядка роста.

6) Теоремы об убывании при больших временах слабых и сильных решений начально-краевой задачи на полуполосе для обобщенного двумерного уравнения Кавахары с нелинейностью высокого порядка роста при малых начальных данных.

Степень достоверности и апробация работы

Степень достоверности результатов, полученных в диссертации, обеспечивается строгостью приведенных доказательств, многочисленными выступлениями на семинарах и конференциях, а также имеющимися публикациями в изданиях, которые индексируются в международных базах данных.

Результаты настоящей диссертации были представлены на следующих международных конференциях:

- Singularities, Blow–up, and Non–Classical Problems in Nonlinear PDEs. 10-14 ноября, 2019. Москва, Россия.

- Mathematical Physics, Dynamical Systems and Infinite–Dimensional Analysis. 30 июня- 9 июля, 2021. Долгопрудный, Россия.

- Дифференциальные уравнения и смежные вопросы. 26-30 декабря, 2021. Москва, Россия.

- Уфимская осенняя математическая школа. 28-сентября-1 октября, 2022. Уфа, Россия.

- Вторая конференция математических центров России. 7–11 ноября, 2022. Москва, Россия.

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах:

- Математические методы экономики и естественных наук. Руководители семинара — профессор Розанова О.С. и профессор Шамаев А.С. (МГУ)–21.04.2023.

- Обратные задачи математической физики и естествознания. Руководители семинара — профессор Прилепко А.И. и академик Садовничий В.А. (МГУ)–11.05.2023.

- Общематематический семинар аспирантов и молодых ученых МИ. Руководитель семинара — Беляева Ю.О. (РУДН)– 26.10.2020.

- Семинар по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям. Руководитель семинара — профессор Скубачевский А.Л. (РУДН)–03.11.2020, 26.09.2023.

- Научный семинар по нелинейным задачам уравнений в частных производных и математической физики. Руководитель семинара — профессор Шишков А.Е. (РУДН)–26.09.2023.

- Научный семинар Лаборатории дифференциальных уравнений и математической физики Центра прикладной математики НовГУ. Руководитель семинара — профессор Панов Е.Ю. (НовГУ)–02.10.2023.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 9 работах, из них 3 статьи в научных журналах, индексируемых в международных базах данных (Scopus, MathSciNet), 1 статья индексируемая в ВАК и 5 — в тезисах докладов на международных конференциях. Результаты совместных работ, включённые в диссертацию, получены автором самостоятельно.

Содержание работы

Диссертация состоит из введения, 3-х глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 100 страниц. Список литературы содержит 69 наименований.

Начально-краевая задача на полуоси для обобщенного уравнения Кавахары

В главе 1 на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ рассматривается начально-краевая задача для обобщенного уравнения Кавахары

$$u_t - u_{xxxxx} + bu_{xxx} + au_x + (F(u))_x + g(x)u = 0, \tag{7}$$

$u = u(t, x)$, a, b – действительные константы, $t > 0$, с начальными и краевыми условиями

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \geq 0, \quad u(t, 0) = u_x(t, 0) = 0, \quad t \geq 0. \tag{8}$$

Функция F удовлетворяет условию ограничения роста

$$|F'(u)| \leq c|u|^p, \quad p \in [1, 8), \tag{9}$$

для некоторой константы $c > 0$ и любых $u \in \mathbb{R}$. Без ограничения общности всегда полагаем, что $F(0) = 0$.

На интервале $I \subset \mathbb{R}$ определим пространство Соболева дробного порядка $H^s(I)$, $s \in \mathbb{R}$, как пространство сужений на I функций из пространства

$$H^s(\mathbb{R}) = \{f : \mathfrak{F}^{-1}[(1+\xi^2)^{s/2}\widehat{f}(\xi) \in L_2(\mathbb{R})\},$$

где $\widehat{f} = \mathfrak{F}[f]$ и $\mathfrak{F}^{-1}[f]$ – прямое и обратное преобразования Фурье соответственно.

Для произвольного $T > 0$ положим $\Pi_T^+ = (0,T) \times \mathbb{R}_+$. Решения рассматриваемой задачи строятся в пространстве

$$X_2(\Pi_T^+) = \{u \in C([0,T]; H_0^2(\mathbb{R}_+)); \quad \partial_x^j u \in C_b(\overline{\mathbb{R}}_+; H^{(4-j)/5}(0,T)),\ 0 \le j \le 4;$$
$$u \in L_8(0,T; C_b^2(\overline{\mathbb{R}}_+)), \quad u \in L_2(\mathbb{R}_+; C[0,T])\}$$

(индекс b здесь и далее означает ограниченность соответствующего отображения), на котором введена естественная норма. Такие решения будем называть сильными.

Для $\alpha \in \mathbb{R}$ введем пространство Лебега со степенными весами

$$L_2^\alpha(\mathbb{R}_+) = \{\varphi(x) : (1+x)^\alpha \varphi(x) \in L_2(\mathbb{R}_+)\}.$$

Положим для $\alpha > 0$

$$X_2^\alpha(\Pi_T^+) = \{u \in X_2(\Pi_T^+) \cap C([0,T]; L_2^\alpha(\mathbb{R}_+)) : u_{xx} \in L_2(0,T; L_2^{\alpha-1/2}(\mathbb{R}_+))\}$$

с естественной нормой.

Сформулируем основные результаты этой главы.

Теорема 1. *Пусть $u_0 \in H_0^2(\mathbb{R}_+)$, $g \in W_\infty^2(\mathbb{R}_+)$, $F \in C^4(\mathbb{R})$ и для функции F выполнено условие (9). Тогда для любого $T > 0$ в полуполосе Π_T^+ существует сильное решение решение задачи (7), (8) $u \in X_2(\Pi_T^+)$, которое единственно в более широком пространстве $L_\infty(0,T; H_0^2(\mathbb{R}_+))$.*

Теорема 2. *Если в дополнение к условиям Теоремы 1 известно, что $u_0 \in L_2^\alpha(\mathbb{R}_+)$ для некоторого $\alpha > 0$, то построенное решение $u \in X_2^\alpha(\Pi_T^+)$.*

Теорема 3. *Пусть выполнены условия Теорем 1 и 2 и пусть существуют положительные константы M и c_0 такие что для $x \ge 0$*

$$g(x) \ge \frac{c_0}{1+x}, \tag{10}$$

$$|g'(x)| \le M g(x), \quad |g''(x)| \le M g(x). \tag{11}$$

Тогда построенное решение u обладает следующим свойством:

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(t,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} = 0. \tag{12}$$

Обратные задачи на ограниченном интервале для обобщенного уравнения Кавахары

В главе 2 рассматривается обратная начально-краевая задача для обобщенного уравнения Кавахары:

$$u_t - u_{xxxxx} + \sum_{j=0}^{4} a_j \partial_x^j u + (F(u))_x = f(t,x), \tag{13}$$

$u = u(t,x)$, $a_j \in \mathbb{R}$, (в терминах уравнения (1) можно считать, что $a_3 = b$, $a_1 = a$) заданного на прямоугольнике $Q_T = (0,T) \times (0,R)$, где $T, R > 0$, с начальным условием

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [0,R], \tag{14}$$

и с граничными условиями:

$$\begin{gathered} u(t,0) = \mu(t), \quad u(t,R) = \nu(t), \\ u_x(t,0) = \theta(t), \quad u_x(t,R) = h(t), \\ u_{xx}(t,R) = \sigma(t), \quad t \in [0,T]. \end{gathered} \tag{15}$$

Функция $F(u) \in C^1(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию ограничения роста:

$$|F'(u)| \le c|u|^p \quad \forall u \in \mathbb{R} \tag{16}$$

для некоторых положительных констант c и p (условия на p будут уточнены далее). Без ограничения общности будем также предполагать, что $F(0) = 0$.

Условие переопределения задано в интегральном виде:

$$\int_0^R u(t,x)\omega(x)dx = \varphi(t), \quad t \in [0,T], \tag{17}$$

где ω и φ некоторые данные функции. В качестве управления выбирается либо функция σ, либо правая часть уравнения f специального вида.

Решения строятся в функциональном пространстве

$$X(Q_T) = C([0,T]; L_2(0,R)) \cap L_2(0,T; H^2(0,R)), \tag{18}$$

с нормой

$$\|u\|_{X(Q_T)} = \sup_{t \in [0,T]} \|u(t,\cdot)\|_{L_2(0,R)} + \|u_{xx}\|_{L_2(Q_T)}. \tag{19}$$

Такие решения будем называть слабыми.

На функцию ω наложим следующие ограничения:

$$\omega \in H^5(0,R), \quad \omega(0) = \omega(R) = \omega'(0) = \omega'(R) = \omega''(0) = 0. \tag{20}$$

Будем предполагать, что
$$a_4 \geq 0, \qquad a_2 \leq 0. \tag{21}$$
Теперь приведем основные результаты этой главы.

В первой обратной задаче при известных функциях u_0, μ, ν, θ, h и f, необходимо найти функцию σ такую, чтобы решение задачи (13) -(15) удовлетворяло условию (17).

Теорема 4. *Пусть $u_0 \in L_2(0,R)$, $\varphi \in W_2^1(0,T)$, $\mu, \nu \in H^{2/5}(0,T)$, $h, \theta \in H^{1/5}(0,T)$, $f \in L_2(Q_T)$, неравенство (16) выполнено для $0 < p < 5$, соблюдены условия (20) и (21), кроме того, $\omega''(R) \neq 0$, и*
$$\varphi(0) = \int_0^R u_0(x)\omega(x)dx. \tag{22}$$
Положим
$$\begin{gathered} c_0 = \|u_0\|_{L_2(0,R)} + \|\mu\|_{H^{2/5}(0,T)} + \|\nu\|_{H^{2/5}(0,T)} \\ +\|h\|_{H^{1/5}(0,T)} + \|\theta\|_{H^{1/5}(0,T)} + \|f\|_{L_2(Q_T)} + \|\varphi'\|_{L_2(0,T)}. \end{gathered} \tag{23}$$
Тогда,

1) При фиксированном $\delta > 0$ найдется $T_0 > 0$ такое, что если $c_0 \leq \delta$ и $T \in (0, T_0]$, то существует единственная функция $\sigma \in L_2(0,T)$ и соответствующее единственное решение $u \in X(Q_T)$ задачи (13)–(15) удовлетворяющее условию (17).

2) При фиксированном T найдется $\delta > 0$ такое, что если $c_0 \leq \delta$, то существует единственная функция $\sigma \in L_2(0,T)$ и соответствующее единственное решение $u \in X(Q_T)$ задачи (13)–(15), удовлетворяющее условию (17).

Пусть теперь правая часть уравнения (13) имеет вид
$$f(t,x) \equiv f_0(t)g(t,x). \tag{24}$$
Во второй обратной задаче при известных функциях $u_0, \mu, \nu, h, \theta, \sigma$ и g, необходимо найти функцию f_0, такую, чтобы соответствующее решение задачи (13)–(15) удовлетворяло условию (17).

Теорема 5. *Пусть $u_0 \in L_2(0,R)$, $\varphi \in W_1^1(0,T)$, μ, $\nu \in H^{2/5}(0,T)$, h, $\theta \in H^{1/5}(0,T)$, $\sigma \in L_2(0,T)$, $g \in C([0,T]; L_2(0,R))$, неравенство (16) выполнено для $0 < p < 6$, соблюдены условия (20), (21) и (22), кроме того, найдется положительная константа g_0 такая, что для любого $t \in [0,T]$*
$$g_0 \leq \Big| \int_0^R g(t,x)\omega(x)dx \Big|. \tag{25}$$
Положим
$$\begin{gathered} c_0 = \|u_0\|_{L_2(0,R)} + \|\mu\|_{H^{2/5}(0,T)} + \|\nu\|_{H^{2/5}(0,T)} \\ +\|h\|_{H^{1/5}(0,T)} + \|\theta\|_{H^{1/5}(0,T)} + \|\sigma\|_{L_2(0,T)} + \|\varphi'\|_{L_1(0,T)}. \end{gathered} \tag{26}$$

Пусть правая часть уравнения (13) задана формулой (24). Тогда,

1) При фиксированном $\delta > 0$ найдется $T_0 > 0$ такое, что если $c_0 \le \delta$ и $T \in (0, T_0]$, то существует единственная функция $f_0 \in L_1(0,T)$ и соответствующее единственное решение $u \in X(Q_T)$ задачи (13)–(15), удовлетворяющее условию (17).

2) При фиксированном T найдется $\delta > 0$ такое, что если $c_0 \le \delta$, то существует единственная функция $f_0 \in L_1(0,T)$ и соответствующее единственное решение $u \in X(Q_T)$ задачи (13)–(15) удовлетворяющее условию (17).

Двумерное уравнение Кавахары

В главе 3 рассматриваются начально-краевые задачи для обобщенного двумерного уравнения Кавахары:

$$u_t - (u_{xxxx} + u_{yyyy})_x + b(u_{xx} + u_{yy})_x + au_x + (F(u))_x = f(t,x,y), \tag{27}$$

$u = u(t,x,y)$, a, b – действительные константы, без ограничения общности считаем, что $F(0) = 0$, заданного в области $\Pi^+_{T,L} = (0,T) \times \Sigma_+$, где $\Sigma_+ = \mathbb{R}_+ \times (0,L) = \{(x,y) : X > 0, 0 < y < L\}$ – полуполоса произвольной ширины $L > 0$, $T > 0$ – произвольно, с начальным условием:

$$u(0,x,y) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in \Sigma_+, \tag{28}$$

граничными условиями:

$$u(t,0,y) = u_x(t,0,y) = 0, \quad (t,y) \in B_T = (0,T) \times (0,L); \tag{29}$$

и одним из двух типов граничных условий при $(t,x) \in \Omega^+_T = (0,T) \times \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} &a) u(t,x,0) = u(t,x,L) = u_{yy}(t,x,0) = u_{yy}(t,x,L) = 0, \\ &b) u_y(t,x,0) = u_y(t,x,L) = u_{yyy}(t,x,0) = u_{yyy}(t,x,L) = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Введем специальные функциональные пространства $\widetilde{H}^k(\Sigma_+)$, учитывающие граничные условия (30). Пусть $\widetilde{H}^0(\Sigma_+) = L_2(\Sigma_+)$, а для $k \ge 1$ пусть $\widetilde{H}^k(\Sigma_+)$ является подпространством пространства $H^k(\Sigma_+)$, состоящим из функций $\varphi(x,y)$ таких, что
в случае a)

$$\partial_y^{2m}\varphi|_{y=0} = \partial_y^{2m}\varphi|_{y=L} = 0 \quad \forall m \in [0, k/2),$$

в случае b)

$$\partial_y^{2m+1}\varphi|_{y=0} = \partial_y^{2m+1}\varphi|_{y=L} = 0 \quad \forall m \in [0, (k-1)/2).$$

Введем следующее обозначение:

$$\lambda^+(u;T) = \sup_{x_0 \ge 0} \int_0^T \int_{x_0}^{x_0+1} \int_0^L u^2 dydxdt. \tag{31}$$

Дадим определение допустимой весовой функции.

Определение 1. *Будем называть функцию $\psi(x)$ допустимой весовой функцией, если ψ – бесконечно гладкая положительная на $\overline{\mathbb{R}}_+$ функция такая, что для всех $j \in \mathbb{N}$ и $\forall x \geq 0$*
$$|\psi^{(j)}(x)| \leq c(j)\psi(x). \tag{32}$$

Для допустимой весовой функции $\psi(x)$ обозначим через $\widetilde{H}^{k,\psi(x)}(\Sigma_+)$ пространство функций $\varphi(x,y)$ таких, что $\varphi\psi^{1/2}(x) \in \widetilde{H}^k(\Sigma_+)$. Пусть $L_2^{\psi(x)}(\Sigma_+) = \widetilde{H}^{0,\psi(x)}(\Sigma_+) = \{\varphi(x,y) : \varphi\psi^{1/2}(x) \in L_2(\Sigma_+)\}$.

Решения рассматриваемых задач строятся в пространствах $X_w^{k,\psi(x)}(\Pi_{T,L}^+)$ для $k = 0$ (слабые решения) и $k = 2$ (сильные решения) для допустимых весовых функций $\psi(x)$, для которых $\psi'(x)$ также являются допустимыми весовыми функциями, состоящих из функций $u(t,x,y)$ таких, что
$$u \in C_w([0,T]; \widetilde{H}^{k,\psi(x)}(\Sigma_+)) \cap L_2(0,T; \widetilde{H}^{k+2,\psi'(x)}(\Sigma_+)) \tag{33}$$
(нижний индекс w означает слабую непрерывность).

Пусть $X_w^{\psi(x)}(\Pi_{T,L}^+) = X_w^{0,\psi(x)}(\Pi_{T,L}^+)$.

Далее, приведем основные результаты этой главы. Первая теорема устанавливает существование и единственность слабых решений рассматриваемых задач.

Теорема 6. *Пусть $u_0 \in L_2^{\psi(x)}(\Sigma_+)$, $f \in L_1(0,T; L_2^{\psi(x)}(\Sigma_+))$ для некоторой допустимой весовой функции $\psi(x)$, для которой $\psi'(x)$ также является допустимой весовой функцией. Пусть функция $F \in C^1(\mathbb{R})$ и для некоторых констант $p \in [0,4)$ и $c > 0$*
$$|F'(u)| \leq c|u|^p \quad \forall u \in \mathbb{R} \tag{34}$$
и, если $p > 1$, функция ψ удовлетворяет неравенству $\psi(x) \leq c(1+x)^n\psi'(x)$ для некоторых констант n и $c > 0$. Тогда существует слабое решение задачи (27)-(30) $u \in X_\omega^{\psi(x)}(\Pi_T^+)$; и, более того, $\lambda^+(u_{xx};T) + \lambda^+(u_{yy};T) < +\infty$. Если дополнительно известно, что в неравенстве (34) $p \leq 3$ и для некоторой положительной константы c_0
$$(\psi'(x))^{p+1}\psi^{p-1}(x) \geq c_0 \quad \forall x \geq 0, \tag{35}$$
то это решение единственно в пространстве $X_w^{\psi(x)}(\Pi_{T,L}^+)$.

Замечание 1. *Экспоненциальные $\psi(x) \equiv e^{2\alpha x}$ $\forall\alpha > 0$ и степенные $\psi(x) \equiv (1+x)^{2\alpha}$, $\alpha \geq (p+1)/(4p)$, $p > 0$, веса удовлетворяют условиям Теоремы 6 (включая условия для обеспечения единственности решения). Если $u_0 \in L_2(\Sigma_+)$, $f \in L_1(0,T; L_2(\Sigma_+))$, то существует слабое решение такое, что $u \in C_w([0,T]; L_2(\Sigma_+))$, $\lambda^+(u_{xx};T) + \lambda^+(u_{yy};T) < +\infty$.*

Вторая теорема устанавливает существование и единственность сильных решений рассматриваемых задач.

Теорема 7. *Пусть* $u_0 \in \widetilde{H}^{2,\psi(x)}(\Sigma_+)$, $f \in L_2(0,T;\widetilde{H}^{2,\psi(x)}(\Sigma_+))$ *для некоторой допустимой весовой функции* $\psi(x)$, *для которой* $\psi'(x)$ *также является допустимой весовой функцией,* $u_0(0,y) = u_{0x}(0,y) \equiv 0$. *Пусть функция* $F \in C^2(\mathbb{R})$ *и удовлетворяет условию (34) для* $p \in [0,4)$. *Тогда существует сильное решение рассматриваемой задачи (27)-(30)* $u \in X_w^{2,\psi(x)}(\Pi_{T,L}^+)$; *более того,* $\lambda^+(u_{xxxx};T) + \lambda^+(u_{xxyy};T) + \lambda^+(u_{yyyy};T) < +\infty$. *Если дополнительно известно, что для некоторых* $q \geq 0$ *и* $c > 0$

$$|F''(u)| \leq c|u|^q \quad \forall u \in \mathbb{R} \tag{36}$$

и для некоторых констант $c_0 > 0$ *и* $r \in (2,4]$

$$\psi'(x)^{r-2}\psi^{rq+2}(x) \geq c_0 \quad \forall x \geq 0, \tag{37}$$

то это решение единственно в пространстве $X_w^{2,\psi(x)}(\Pi_{T,L}^+)$.

Замечание 2. *Экспоненциальные* $\psi(x) \equiv e^{2\alpha x}$ $\forall \alpha > 0$ *и степенные* $\psi(x) \equiv (1+x)^{2\alpha}$, $\forall \alpha > 0$, *веса удовлетворяют условиям Теоремы 7 (включая условия для обеспечения единственности решения). Если* $u_0 \in \widetilde{H}^2(\Sigma_+)$, $u_0(0,y) = u_{0x}(0,y) \equiv 0$, $f \in L_2(0,T;\widetilde{H}^2(\Sigma_+))$, *то существует сильно решение такое, что* $u \in C_w([0,T];\widetilde{H}^2(\Sigma_+)))$, $\lambda^+(u_{xxxx};T) + \lambda^+(u_{xxyy};T) + \lambda^+(u_{yyyy};T) < +\infty$.

В следующих двух теоремах устанавливаются результаты об убывании при больших временах малых слабых и сильных решений в случае а) граничных условий (30).

Теорема 8. *Пусть функция* $F \in C^1(\mathbb{R})$ *удовлетворяет неравенству (34) для* $p \in (0,3]$. *Тогда существуют* $L_0 > 0$, $\alpha_0 > 0$ *и* $\epsilon_0 > 0$ *такие, что для любых* $L \in (0,L_0]$, $\alpha \in (0,\alpha_0]$ *и* $\beta = \pi^4/(8L^4)$, *если* $u_0 \in L_2^{e^{2\alpha x}}(\Sigma_+)$, $\|u_0\|_{L_2(\Sigma_+)} \leq \epsilon_0$, $f \equiv 0$, *то соответствующее единственное слабое решение* $u(t,x,y)$ *задачи (27)-(30) в случае а), принадлежащее пространству* $X_w^{e^{2\alpha x}}(\Pi_{T,L}^+)$ $\forall T > 0$, *удовлетворяет неравенству:*

$$\|e^{\alpha x}u(t,\cdot,\cdot)\|^2_{L_2(\Sigma_+)} \leq e^{-\alpha\beta t}\|e^{\alpha x}u_0\|^2_{L_2(\Sigma_+)} \quad \forall t \geq 0. \tag{38}$$

Теорема 9. *Пусть функция* $F \in C^2(\mathbb{R})$ *удовлетворяет неравенству (34) для* $p \in (0,4)$ *и неравенству (36). Тогда существуют* $L_0 > 0$, $\alpha_0 > 0$ *и* $\epsilon_0 > 0$ *такие, что для любых* $L \in (0,L_0]$, $\alpha \in (0,\alpha_0)$ *и* $\beta = \pi^4/(8L^4)$, *если* $u_0 \in \widetilde{H}^{2,e^{2\alpha x}}(\Sigma_+)$, $\|u_0\|_{L_2(\Sigma_+)} \leq \epsilon_0$, $u_0(0,y) = u_{0x}(0,y) \equiv 0$, $f \equiv 0$, *то соответствующее единственное сильное решение* $u(t,x,y)$ *задачи (27)-(30) в случае а), принадлежащее пространству* $X_w^{2,e^{2\alpha x}}(\Pi_{T,L}^+)$ $\forall T > 0$, *удовлетворяет неравенству:*

$$\|e^{\alpha x}u(t,\cdot,\cdot)\|^2_{H^2(\Sigma_+)} \leq c(\alpha,\beta,\|u_0\|_{H^{2,e^{2\alpha x}}(\Sigma_+)})e^{-\alpha\beta t} \quad \forall t \geq 0. \tag{39}$$

Заключение

В диссертации были изучены свойства решений начально-краевых задач для различных модификаций уравнения Кавахары.

В работе были получены результаты о существование и единственность глобального решения для начально-краевой задачи для обобщенного уравнения Кавахары с нелинейностью высокого порядка. Была доказана разрешимость обратных задач с интегральным переопределением для обобщенного уравнения Кавахары и его линейного аналога.

Кроме того, были рассмотрены начально-краевые задачи для двухмерной модификации уравнения Кавахары с высокой нелинейностью на полу-полосе конечной ширины. Были получены результаты о существование и единственности сильных и слабых решений поставленных задач, и о затухании решений на бесконечности.

Использованные в диссертации методы могут быть применены для изучения различных задач для других модификаций уравнения Кавахары.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах:

1. Martynov E.V. Initial-boundary value problems for two dimensional Kawahara equation // Прикладная Математика и Физика, 2023, vol. 55, No. 1, pp. 12–28.

2. Martynov E.V. Inverse Problems for the Generalized Kawahara Equation // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, vol. 43, No. 10, pp. 1–11.

3. Faminskii A.V., Martynov E.V. On initial-boundary value problem on semiaxis for generalized Kawahara equation // Journal of Mathematical Sciences, 2022, vol. 265, No.5, pp. 849–864.

4. Faminskii A.V., Martynov E.V. Large-time decay of solutions of the damped Kawahara equation on the half-line // In: Manuilov, V.M., et al. (eds.) Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics. Trends in Mathematics. Birkhauser, Basel, 2021, pp. 130–141.

Тезисы конференций:

1. Martynov E.V. Large-time behavior of solutions to the damped modied Kawahara equation. Singularities, Blow–up, and Non–Classical Problems in Nonlinear PDEs. P. 45–46. Moscow, Russia, 2019, ISBN 978-5-209-09616-0.

2. Martynov E.V. Decay of Solutions to Damped Kawahara Equation. International Conference. Mathematical Physics, Dynamical Systems and Infinite-Dimensional Analysis. P. 113–114. Dolgoprudny, Russia, 2021, ISBN 978-5-6043721.

3. Martynov E.V. Inverse problems for the Kawahara equation with integral overdetermination. Сборник тезисов Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы". Стр. 91–93. Москва, Россия, 2022.

4. Martynov E.V. Inverse problems for the generalized Kawahara equation. Материалы Международной Научной Конференции "Уфимская Осенняя Математическая Школа–2022 Том 2. Стр. 211–213. Уфа, Россия, 2022, ISBN 978-5-7477-5533-8.

5. Martynov E.V. Inverse problems for the generalized Kawahara equation. Вторая конференция математических центров России. Сборник Тезисов. Стр. 286–288. Москва, Россия, 2023, ISBN 978-5-19-011798-1.

Мартынов Егор Вячеславович
Свойства решений начально-краевых задач для обобщенного уравнения Кавахары

В диссертации изучаются три различные модификации уравнения Кавахары. В первой части работы рассматривается начально-краевая задача для обобщенного уравнения Кавахары, решение которого затухает при больших временах. Были получены результаты о существовании и единственности такого решения. Вторая часть работы посвящена исследованию обратных задач для обобщенного уравнения Кавахары и его линейного аналога с интегральным переопределением. В третьей части работы изучены начально-краевые задачи с разными типами граничных условий для двухмерной модификации уравнения Кавахары. Были получены результаты о существовании, единственности и о затухание решений на бесконечности сильных и слабых решений поставленной задачи.

Martynov Egor Vycheslavovich
On solutions to initial boundary value problems for the generalized Kawahara equation

The following desertion is devoted to the three problems for various modifications of the Kawahara equation. In the first part of this work we consider the large time decay of solutions of the initial boundary value problem for the damped Kawahara equation. We establish the well-posedness of such solution. The second part of the desertionis devoted to the investigation of the inverse problems for the generalized Kawahara equation with integral overdetermination and its linear analogue. The third part of this work is dedicated to the investigation of initial boundary value problems with different types of boundary conditions for a two-dimensional modification of the Kawahara equation. We establish the well-posedness and the large time decay of strong and weak solutions of the considered problem.

Мартынов Егор Вячеславович
Свойства решений начально-краевых задач для обобщенного уравнения Кавахары
Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук
Подписано в печать ____ .____. .2023. Заказ №____________
Типография РУДН