

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертации Алмохаммад Халиль

«Интегральные свойства обобщенных потенциалов

Бесселя – Рисса», представленной на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 1.1.1.

Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа посвящена двум связанным между собой актуальным задачам из разделов функционального анализа, относящимся к теории операторов, а также к исследованиям банаховых функциональных пространств обобщенной гладкости.

В первой задаче рассматриваются пространства обобщенных потенциалов в n -мерном евклидовом пространстве, построенные на базе перестановочно инвариантных пространств с помощью сверток с ядрами типа Бесселя и Рисса; изучаются их вложения в перестановочно инвариантные пространства. Исследования по данной тематике проводились многими отечественными математиками, связанными со школами С.Л. Соболева, С.М. Никольского, Ю.Г. Решетняка, П.Л. Ульянова. За рубежом развитию этой теории посвящены исследования таких известных специалистов, как Д. Адамс, Р. Адамс, Х. Брезис, Р. О'Нейл, В.Г. Мазья, Е. Стейн, Р. Стрихарц, Г. Трибель, Н. Трудингер, А. Чьянки, М. Цвिकель и другие. Результаты, представленные в данной диссертации, получены оригинальным методом, разработанным в научных статьях М.Л. Гольдмана и его учеников. Ключевым моментом этого метода является переход от сложных структур, какими являются пространства потенциалов, к эквивалентным конусам их убывающих перестановок.

При описании эквивалентных конусов убывающих перестановок возникают операторы типа Харди на подклассах функций. Исследованию связанных с ними модулярных неравенств посвящена вторая задача, представленная в диссертации. Вклад в изучение данной проблематики внесли Джим Киле Сун, Р. Керман, С. Блум, М.Л. Гольдман, Э.Г. Бахтигареева. В диссертационной работе рассматриваются обобщенные операторы Харди на двух подклассах: неотрицательных и неотрицательных невозрастающих функций.

Диссертация состоит из трех глав, введения и заключения.

Главе 1 посвящена изучению обобщенных потенциалов и их оптимальным вложениям в перестановочно-инвариантные пространства. В частности, приводятся эквивалентные описания конусов убывающих перестановок для потенциалов исследуемого вида. Также показано, каким образом при их исследовании возникают операторы типа Харди. Далее, рассматриваются свойства потенциалов, построенных на базе весовых пространств Лоренца. Важнейшими результатами первой главы являются критерии вложений обобщенных потенциалов Бесселя–Рисса в перестановочно инвариантные пространства, когда базовыми являются весовые пространства Лоренца. Критерии являются новыми и представлены в виде точных интегральных функционалов, зависящих исключительно от фиксированных параметров задачи (параметров суммирования и весовых функций).

Главы 2 и 3 посвящены модулярным неравенствам для операторов типа Харди, возникающих при изучении обобщенных потенциалов. Операторы типа Харди действуют при этом на подклассах функций из весовых пространств Орлича. В Главе 2 данная задача

рассматривается при сужении на класс неотрицательных функций. В Главе 3 такой же вопрос решается на более узком подклассе неотрицательных невозрастающих функций.

В Главе 2 устанавливаются точные критерии выполнения неравенств для интегральных операторов Харди–Копсона в весовых пространствах Орлича, возникающих при изучении конусов убывающих перестановок для обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса в случае, когда базовым выступает пространство Орлича–Лоренца. Даны приложения полученных результатов к ситуации, когда пространства Орлича совпадают с весовыми пространствами Лебега.

В Главе 3 неравенства для операторов типа Харди в пространствах Орлича охарактеризованы на подклассе неотрицательных невозрастающих функций. Такая постановка важна тем, что изучение потенциалов связано именно с убывающими перестановками. Задача решается методом редукции исходного модулярного неравенства к аналогичным неравенствам с модифицированным интегральным оператором типа Харди на подклассе неотрицательных функций. Полученные характеристики существенно отличаются от представленных в Главе 2. Результаты, установленные в Главах 2 и 3, являются новыми, имеют вид точных критериев, сформулированных в терминах заданных весовых функций. Известно, что условий для выполнения неравенства на подклассе монотонных функций f , вообще говоря, недостаточно для аналогичного неравенства для всех неотрицательных f . Таким образом, сужение на подкласс неотрицательных монотонных функций дает более тонкие характеристики. Однако, по сравнению с критериями для всех неотрицательных f ,

они могут иметь несколько более усложненную форму.

Все результаты диссертационной работы являются новыми и снабжены подробными и справедливыми доказательствами.

Научная ценность результатов диссертации состоит в описании свойств пространств обобщенных потенциалов Бесселя–Рисса через эквивалентные конусы неубывающих перестановок, в представлении их оптимальных вложений в перестановочно инвариантные пространства, в точной характеристике модулярных неравенств для операторов Харди–Копсона. Диссертация вносит существенный вклад в теорию функциональных пространств и теорию операторов.

Основные результаты диссертации представлены публикациями в 11 печатных изданиях. При этом, 5 из них — журналы из списка ВАК. Остальные материалы опубликованы в виде тезисов докладов.

Автореферат диссертации правильно отражает ее содержание.

В тексте диссертационной работы и автореферата имеются незначительные опечатки, а также имеют место небольшие стилистические ошибки. Не все источники из списка литературы процитированы в тексте работы. Статьи [15] и [23], а также [21], [30] и [35] дублируют друг друга. Некоторые публикации других авторов, изданные в российских источниках, приводятся на английском языке. Все указанные замечания носят редакционный характер и не влияют на высокую положительную оценку научного уровня диссертации.

На основании изложенного считаю, что диссертация Алмохаммад Халиль «Интегральные свойства обобщенных потенциалов Бесселя–Рисса» является законченной научно–квалификационной работой, в которой получено новое решение научной задачи об интегральных

свойствах обобщенных потенциалов Бесселя-Рисса, имеющей важное значение в теории интегральных операторов в функциональных пространствах. Работа удовлетворяет требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, согласно п. 2.2 раздела II Положения о присуждении ученых степеней в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Российский университет дружбы народов», утвержденного Ученым советом РУДН протокол № 12 от 23.09.2019 г., а ее автор Алмохаммад Халиль заслуживает присуждения ученой степени кандидата наук по специальности 1.1.1.

Официальный оппонент:

ведущий научный сотрудник Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН; 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65
доктор физико-математических наук (научная специальность 01.01.01. Вещественный, комплексный и функциональный анализ)

телефон: +7 962 586 8768, e-mail: elenau@inbox.ru

Ушакова Елена Павловна

Подпись Ушаковой Е.П.



ЗАВЕРЯЮ
ЗАВ. ОБЩИМ ОТДЕЛОМ
Дыбенко А.Н.

07.10.2022