

На правах рукописи

МАРКОВИЧ АЛЕКСЕЙ СЕМЕНОВИЧ

**РАЗВИТИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ БЕТОННЫХ И ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ
КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

2.1.9. Строительная механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук

Москва – 2024

Работа выполнена на кафедре технологий строительства и конструкционных материалов инженерной академии федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы» (РУДН)

Научный консультант:	Агапов Владимир Павлович доктор технических наук, профессор, профессор кафедры технологий строительства и конструкционных материалов инженерной академии ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»
Официальные оппоненты:	Косицын Сергей Борисович доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики ФГАОУ ВО «Российский университет транспорта» Кирсанова Наталья Анатольевна доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математики ФГБОУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации» Чепурненко Антон Сергеевич доктор технических наук, доцент, профессор кафедры строительной механики и теории сооружений ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет»
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный технический университет»

Защита состоится 27 июня 2024 г. в 11:00 часов на заседании диссертационного совета ПДС 2022.009, созданного на базе ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы», по адресу: 115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд. 368.

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке) РУДН по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д.6. Электронная версия диссертации, автореферат и объявление о защите диссертации размещены на официальном сайте Высшей аттестационной комиссии при Министерстве науки и высшего образования РФ (<https://vak.minobrnauki.gov.ru>) и на сайте <https://www.rudn.ru/science/dissovet>

Автореферат разослан «___» _____ 2024 г.

И.о. ученого секретаря диссертационного совета ПДС 2022.009
доктор технических наук, доцент

Малькова М.Ю.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Современные строительные нормы и правила, принятые в нашей стране и за рубежом, предписывают проводить расчеты железобетонных конструкций в нелинейной постановке с учетом реальных свойств бетона и арматуры. Характерно, что при этом отечественные нормы ограничиваются сведениями о прочности бетонов разных классов только на одноосное растяжение и сжатие, и не содержат данных о прочности бетонов в случае двух- и трехосного сжатия и растяжения. Соответственно, положения по расчету железобетонных конструкций, находящихся в объемном напряженном состоянии, за исключением руководства по расчету трубобетонных конструкций, также отсутствуют. Вместе с тем, предпосылки для успешного выполнения таких расчетов были созданы развитием компьютерных технологий, с одной стороны, и разработкой численных методов строительной механики, в первую очередь метода конечных элементов, с другой. Нелинейные методы расчета конструкций реализованы в ряде компьютерных программ, таких как NASTRAN, ANSYS, ABAQUS, ADINA, DIANA и другие. Общим для всех этих программ является использование алгоритмов, базирующихся на выполнении шаговых процедур. Однако, следует отметить, что расчеты физически нелинейных конструкций в вышеупомянутых программах выполняются с использованием физических соотношений, базирующихся на определенных экспериментальных данных. При этом полученные нелинейные уравнения для конструкции в целом решаются приближенными методами. Для повышения достоверности результатов такие расчеты следует проводить с использованием нескольких программ. Поэтому инженеры должны иметь в своем арсенале несколько доступных расчетных инструментов. В связи с этим разработка альтернативных вычислительных методов и соответствующих программ, особенно отечественных, является актуальной задачей. Отчасти, для решения данной задачи в настоящей работе на основании экспериментальных данных, в том числе полученных автором, разработаны различные модели деформирования бетона, включающие в себя как модель хрупкого разрушения сжатого бетона, так и упругопластические модели деформирования, а также принципы учета трещинообразования в растянутом бетоне. Приведена методика и алгоритм нелинейного расчета железобетонных конструкций, находящихся в условиях объемного напряженного состояния, в результате чего построен конечный элемент сплошной среды (тип solid). Данный конечный элемент реализован в МК ПРИНС, разработка которого ведется профессором Агаповым В.П. совместно с его учеником – автором настоящей работы. Данный вычислительный комплекс предназначен для решения широкого класса инженерных задач и позволяет выполнять статические и динамические расчеты конструкций методом конечных элементов на прочность и устойчивость.

Степень разработанности темы исследования. Значимые результаты экспериментальных исследований прочности бетона в условиях объемного напряженного состояния приведены в работах отечественных ученых: Гениева Г.А., Гвоздева А.А., Карпенко Н.И., Круглова В.М., Малашкина Ю.Н., Тябликова Б.В., Полякова А.В., Яшина А.В. и др. В этих работах испытывались образцы – призмы с соотношением сторон 1:4 на пропорционально изменяющуюся нагрузку. Примечательно, что в опытах зарубежных ученых, как правило, испытания проводились на цилиндрических образцах при осевом сжатии и боковом гидростатическом давлении (Geel van, H.J.G.M., Hu Liangming, Shi L., Wang L., Song Y., Shen L.). Исследования прочности бетона в режиме трехосного сжатия в случае, когда одно из трех напряжений – растягивающее, приведены в работах Карпенко Н.И. и Первакова В.Н. Особое внимание заслуживают работы исследователей, которые собственными силами создавали установки для проведения подобных испытаний. Так, Теличко В.Г. и Зиборов Л.А. (Тульский государственный университет) для проведения экспериментов на двухосное сжатие использовали комбинацию переоборудованного пятитонного пресса и универсальной испытательной машины

ГМС-20. Ряд аналогичных исследований проводились Корсуном В.И. и Недорезовым А.В. в Донбасской национальной академии строительства и архитектуры. Наиболее полные и широко известные результаты были получены Ричартом (Richard F.E.) и Бальмером (Balmer G.G.), Купфером (Kupfer H.) и Лоне (Launay P.), в ходе этих опытов было испытано более 1000 образцов в различных режимах нагружения. С позиций механики твердого тела нелинейное деформирование бетона с учетом реальных упругопластических свойств в условиях объемного напряженного состояния исследовались на протяжении XX века как отечественными, так и зарубежными учеными. Так, подробный анализ критериев прочности для бетонов приведен в работах Корсуна В.И. Модели Гениева Г.А. и Лейтеса Е.С., построенные на основе теории малых упругопластических деформаций, являются актуальными и по сей день. Значимые результаты в области силового сопротивления железобетона нашли отражение в работах Бондаренко В.М., Колчунова В.И., Травуша В.И., Кодыша Э.Н., Ватина Н.И. Применительно к совершенствованию численных и численно-аналитических методов расчета строительных конструкций необходимо отметить работы Агапова В.П., Косицына С.Б., Сидорова В.Н., Галишниковой В.В., Белостоцкого А.М., Акимова П.А., Трушина С.И., Якупова Н.М., Лалина В.В., Ключкова Ю.В. Значительный вклад в развитие теории ползучести железобетона внесли работы Бондаренко В.М., Ларионова Е.А., Санжаровского Р.С., Берга О.Я., Щербакова Е.Н., Прокоповича И.Е., Арутюняна Н.Х., Маслова Г.Н., Назаренко В.Г. и др.

Целью диссертационной работы является разработка достоверных, экспериментально подтвержденных моделей разрушения и упругопластического деформирования бетона на основе метода конечных элементов и их реализации в ВК ПРИНС.

Задачи исследования. Для достижения поставленной цели в настоящей диссертации были сформулированы и решены следующие задачи:

1. Предложить геометрическую интерпретацию напряженного состояния в точке твердого тела, которая в дальнейшем должна применяться для разработки как новых критериев прочности и пластичности бетона, так и для модификации существующих.

2. Провести серию испытаний бетонных образцов в условиях трехосного сжатия. С применением современных сертифицированных средств тензометрии зарегистрировать деформации образцов и получить координаты точек предельной поверхности, выраженные через напряжения на октаэдрических площадках.

3. Провести серию испытаний образцов бетонных и железобетонных балок в условиях трехточечного изгиба. Посредством тензометрии исследовать их напряженно-деформированное состояние, определить значения разрушающей нагрузки, нагрузки трещинообразования, прогибы, напряжения в продольной арматуре, построить поля деформаций и т.д.

4. Представить в удобном для практической реализации методом конечных элементов виде наиболее достоверные феноменологические критерии прочности бетона и критерии текучести для арматурной стали.

5. На основании полученных экспериментальных данных сформулировать модифицированный критерий прочности Друкера – Прагера, дополненный параметрами критерия Мора – Кулона для бетонов. Усовершенствовать критерий разрушения Виллама – Варнке для хрупких материалов путем добавления двух дополнительных параметров для описания искривленных меридианов растяжения и сжатия предельной поверхности.

6. Разработать и экспериментально подтвердить критерий разрушения бетона для случая двух- и трехосного сжатия, предельная поверхность которого в пространстве главных напряжений может рассматриваться в качестве поверхности разрушения в случае модели хрупкого раздробления бетона сжатой зоны, а также интерпретироваться как предельная поверхность текучести в случае модели бетона как упругопластического материала.

7. Сформулировать общий подход к построению идеальной упругопластической модели деформирования бетона на основании ассоциированного и неассоциированного закона течения.

8. Предложить идеально упругопластическую модель течения Мизеса – Губера для арматурной стали и бетона при высоких гидростатических напряжениях. Построить идеально упругопластическую модель течения Друкера – Прагера, дополненную постоянными Мора – Кулона для бетонов и условием растрескивания бетона при растяжении.

9. На основе усовершенствованного критерия разрушения Виллама – Варнке для хрупких материалов построить модель идеально упругопластического бетона.

10. Сформулировать общий подход к построению упругопластической модели деформирования бетона с учетом упрочнения.

11. Предложить модифицированную упругопластическую модель Друкера – Прагера (с параметрами критерия Мора – Кулона для бетонов) с учетом изотропного упрочнения и разупрочнения, позволяющую учитывать дилатацию бетона, наблюдаемую в ряде экспериментов.

12. На основе усовершенствованного критерия разрушения Виллама – Варнке разработать модифицированную модель упругопластического деформирования бетона с учетом упрочнения.

13. Подробно исследовать и критически оценить упругопластическую модель бетона с повреждениями (Concrete Damaged Plasticity), которая реализована в ряде зарубежных расчетных комплексах (например, Abaqus) и на сегодняшний день является одной из самых востребованных моделей для прочностного расчета массивных железобетонных конструкций. Сравнить результаты расчета ранее экспериментально испытанных бетонных и железобетонных балок, полученные с применением ВК ПРИНС по разработанной модели хрупкого разрушения бетона сжатой зоны, с результатами расчета в программе Abaqus по упругопластической модели бетона с повреждениями.

14. Модифицировать модель течения Мизеса – Губера для стержневой стальной арматуры и жесткого армирования в результате добавления смешанного упрочнения, позволяющего в полной мере учитывать эффект Баушингера.

15. Исследовать сопряженные с явлением ползучести вопросы теории железобетона – выводы уравнений механического состояния для идеального и стареющего бетона в приращениях путем наложения приращений мгновенных и запаздывающих деформаций.

16. Получить уравнения релаксации и ползучести бетона в приращениях для случая одномерного и объемного напряженного состояния элемента.

17. Сформулировать предпосылки для разработки на основе метода конечных элементов трехмерных моделей ползучести бетона как механических моделей вязкоупругих и вязкопластических тел, в том числе комбинированных.

18. На основании сформулированных критериев разрушения и пластичности бетона разработать для решателя ВК ПРИНС алгоритм и методику нелинейного расчета железобетонных конструкций, находящихся в условиях объемного напряженного состояния, с учетом как хрупкого разрушения, так и упругопластического деформирования бетона сжатой зоны, предложить метод ускорения сходимости решения системы нелинейных уравнений.

19. Разработать процедуру определения приведенного модуля упругости для различных моделей деформирования бетона при разгрузке из сжатой зоны с переходом в растянутую и наоборот. Предложить методику учета трещинообразования в растянутом бетоне и сопряженные с этим вопросы построения физической матрицы для элемента с трещинами в одном, двух и трех взаимно ортогональных направлениях.

20. С целью отладки разработанных алгоритмов для нелинейного решателя ВК ПРИНС выполнить верификационные расчеты бетонных и железобетонных конструкций с учетом трехосного напряженного состояния бетона, в которых для моделирования работы бетона сжатой

зоны следует рассмотреть как модель хрупкого разрушения, так и упругопластические модели деформирования. Результаты проведенных расчетов сравнить с экспериментальными данными и результатами, полученными с применением альтернативных программ, реализующих расчеты данного класса конструкций.

Объектом исследования являются феноменологические критерии прочности и упругопластичности бетона, а также математические модели, построенные на их основе.

Предметом исследования являются прочностные и деформационные характеристики бетонных и железобетонных конструкций.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1. На основании критерием Друкера – Прагера и Мора – Кулона сформулирован общий критерий прочности применительно к бетону. В результате добавления двух дополнительных параметров для описания криволинейных меридианов растяжения и сжатия предельной поверхности модифицирован критерий разрушения Виллама – Варнке для хрупких материалов, отвечающий испытаниям бетона на трехосное сжатие.

2. Разработан и экспериментально подтвержден шестипараметрический критерий разрушения бетона для случая двух- и трехосного сжатия.

3. Получены физические уравнения для идеально упругопластической модели деформирования бетона на основании ассоциированного и неассоциированного закона течения.

4. Предложена новая формулировка идеально упругопластической модели Мизеса – Губера для арматурной стали и бетона при высоких гидростатических напряжениях, а также идеально упругопластической модели Друкера – Прагера, дополненной постоянными Мора – Кулона для бетонов и условием растрескивания бетона при растяжении.

5. На основе усовершенствованного критерия разрушения Виллама – Варнке для хрупких материалов построена достоверная и эффективная модель идеально упругопластического бетона.

6. Получены физические уравнения для упругопластической модели деформирования бетона с учетом упрочнения.

7. Предложена модифицированная упругопластическая модель Друкера – Прагера (с параметрами критерия Мора – Кулона для бетонов) с учетом изотропного упрочнения и разупрочнения, позволяющая учитывать дилатацию бетона, наблюдаемую в ряде экспериментов.

8. Разработана на основе усовершенствованного критерия разрушения Виллама – Варнке для хрупких материалов эффективная модель упругопластического деформирования бетона с учетом изотропного упрочнения.

9. Сформулирована модифицированная модель течения Мизеса – Губера для стальной стержневой арматуры и жесткого армирования с учетом смешанного упрочнения, позволяющая в полной мере учитывать эффект Баушингера.

10. Получены уравнения механического состояния для идеального и стареющего бетона в приращениях путем наложения приращений мгновенных и запаздывающих деформаций.

11. Получены уравнения релаксации и ползучести бетона в приращениях для случая одномерного и объемного напряженного состояния элемента, а также сопряженные с ними физические матрицы, учитывающие влияние мгновенных и запаздывающих деформаций.

Теоретическая и практическая значимость работы. Разработанные модели хрупкого разрушения и упругопластического деформирования бетона сформулированы в удобном для практической реализации методом конечных элементов виде, алгоритмизированы и интегрированы в нелинейный решатель МК ЭЛЕМЕНТ, на основе которых построен объемный конечный элемент. Кроме того, указанные расчетные модели прошли экспериментальную проверку и позволяют получить достоверное значение прочности бетонных и железобетонных конструкций, находящихся в условиях двух- и трехосного напряженного состояния при низких и средних значениях гидростатического напряжения. С некоторых позиций данную работу следует

рассматривать как руководство для разработки упругопластических моделей «трехмерного» бетона применительно к компьютерным программам, реализующим метод конечных элементов. Так как процесс построения подобных расчетных моделей базируется на экспериментально полученных данных, на сегодняшний день полностью подтвердить достоверность некоторых разработанных моделей в широком диапазоне нагрузок не представляется возможным, например, при высоких гидростатических напряжениях или в случае циклической нагрузки. В виду чего, для дальнейшего совершенствования приведенных в работе моделей необходимо проведение трехосных испытаний бетонных и железобетонных элементов на качественно новом метрологическом уровне. Таким образом, на основании приведенных в работе теоретических положений и алгоритмов, касающихся построения указанных моделей «трехмерного» бетона, последние, в свою очередь, могут быть реализованы всеми заинтересованными лицами в компьютерных программах, предназначенных для инженерных расчетов методом конечных элементов.

Методология и методы исследования. Методологической основой исследования являются научные работы отечественных и зарубежных авторов в области теории железобетона; общие положения и принципы строительной механики, метод конечных элементов, в частности; экспериментальные методы исследования напряженно-деформированного состояния строительных конструкций; известные общенаучные методы исследования, такие как научный анализ, систематизация, математическое моделирование и эксперимент.

Положения, выносимые на защиту:

1. Модифицированный критерий прочности Друкера – Прагера, дополненный параметрами критерия Мора – Кулона для бетонов, а также усовершенствованный критерий разрушения Виллама – Варнке для хрупких материалов в результате добавления двух дополнительных параметров для описания искривленных меридианов растяжения и сжатия предельной поверхности.

2. Разработанный и экспериментально подтвержденный шестипараметрический критерий разрушения бетона для случая двух- и трехосного сжатия, предельная поверхность которого в пространстве главных напряжений может рассматриваться в качестве поверхности разрушения в случае модели хрупкого раздробления бетона сжатой зоны, а также интерпретироваться как предельная поверхность текучести в случае модели бетона как упругопластического материала.

3. Общий подход к построению идеальной упругопластической модели деформирования бетона на основании ассоциированного и неассоциированного закона течения.

4. Предложенная идеально упругопластическая модель Мизеса – Губера для арматурной стали и бетона при высоких гидростатических напряжениях, а также идеально упругопластическая модель Друкера – Прагера, дополненная постоянными Мора – Кулона для бетонов и условием растрескивания бетона при растяжении.

5. Построенная на основе усовершенствованного критерия разрушения Виллама – Варнке для хрупких материалов модель идеально упругопластического бетона.

6. Общий подход к построению упругопластической модели деформирования бетона с учетом упрочнения.

7. Модифицированная упругопластическая модель Друкера – Прагера (с параметрами критерия Мора – Кулона для бетонов) с учетом изотропного упрочнения и разупрочнения, позволяющая учитывать дилатацию бетона, наблюдаемую в ряде экспериментов.

8. Разработанная на основе усовершенствованного критерия разрушения Виллама – Варнке для хрупких материалов модель упругопластического деформирования бетона с учетом упрочнения.

9. Модифицированная модель течения Мизеса – Губера для стальной стержневой арматуры и жесткого армирования с учетом смешанного упрочнения, позволяющего в полной мере учитывать эффект Баушингера.

10. Уравнения механического состояния для идеального и стареющего бетона в приращениях, полученные путем наложения приращений мгновенных и запаздывающих деформаций.

11. Уравнения релаксации и ползучести бетона в приращениях для случая одномерного и объемного напряженного состояния элемента, а также сопряженные с ними физические матрицы, учитывающие влияние мгновенных и запаздывающих деформаций.

12. Предпосылки для разработки на основе метода конечных элементов трехмерных моделей ползучести бетона как механических моделей вязкоупругих и вязкопластических тел, в том числе комбинированных.

13. Разработанный для решателя ВК ПРИНС алгоритм и методика нелинейного расчета железобетонных конструкций, находящихся в условиях объемного напряженного состояния, с учетом как хрупкого разрушения, так и упругопластического деформирования сжатого бетона, а также трещинообразования в растянутом бетоне.

14. Результаты верификационных расчетов бетонных и железобетонных конструкций в ВК ПРИНС с учетом трехосного напряженного состояния бетона.

Степень достоверности результатов работы обеспечивается корректной постановкой задачи с использованием общепринятых гипотез и допущений, применением классических положений теории железобетона, методов строительной механики, механики деформируемого твердого тела и положений, установленных на основе обширного анализа существующих феноменологических критериев прочности и пластичности железобетона. Верификация разработанного конечного элемента сплошной среды, реализующего предлагаемые модели деформирования бетона, проводилась на основе экспериментальных данных, полученных автором в лаборатории строительных конструкций и материалов инженерной академии РУДН с применением современного аттестованного испытательного оборудования и поверенных средств измерений, а также путем сравнения результатов, полученных с применением альтернативных программ, реализующих расчеты данного класса конструкций.

Апробация результатов. Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях: International Conference on Scientists (Москва, 2017); 2nd International Congress of Scientists (Москва, 2018); Инженерные системы – 2019 (Москва, 2019); IX Международная научная конференция «Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений (Золотовские чтения)» (Москва, 2020); IV Международная научно-практическая конференция «Современные строительные материалы и технологии» (Калининград, 2021); Международная конференция по инженерным исследованиям ICER 2021 (Москва, 2021); Международная конференция по инженерным системам ICES 2022 (Москва, 2022); Международная научно-техническая конференция «Строительная наука и образование в интегрированном пространстве с новыми регионами Российской Федерации» (Москва, 2023); Международный научно-практический симпозиум «Будущее строительной отрасли: Вызовы и перспективы развития» (Москва, 2023); XI Международная научная конференция «Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений (Золотовские чтения)» (Москва, 2023).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 20 научных работ. Из них: 1 монография, 10 статей в журналах, включенных в Перечень ВАК / РУДН и 9 статей в журналах, представленных в международных базах цитирования Scopus и Web of Science.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 6 глав, заключения, списка литературы и приложения. Общий объем работы 408 страниц, включающий 166 рисунков и 36 таблиц. Количество источников использованной литературы – 247. Количество приложений – 1.

Автор выражает искреннюю благодарность своему многолетнему другу и соратнику, замечательному ученому-механику, профессору Агапову Владимиру Павловичу, профессору Ларионову Евгению Алексеевичу за ценные советы и поддержку при выполнении работы, а также дружному коллективу кафедры технологий строительства и конструкционных материалов инженерной академии РУДН. С трепетом в душе автор вспоминает наставления и советы блестящих ученых: профессора Трушина Сергея Ивановича, профессора Панкратову Галину Евгеньевну, профессора Ковалева Александра Олеговича, профессора Немчинова Владимира Валентиновича.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, определяются цели и задачи исследования, указывается научная новизна и практическая значимость работы.

Чтобы у читателя не возникли дополнительные трудности при прочтении и анализе материала данной работы, автор решил предпослать основному содержанию диссертации вводную главу, посвященную теории напряженно-деформированного состояния твердого тела.

В первой главе с общих позиций рассмотрены вопросы тензорного представления напряженного состояния в точке твердого тела, выработана единая форма записи уравнений для главных и октаэдрических напряжений, инвариантов напряженного состояния, интенсивности напряжений и т.п. Сформулирована геометрическая интерпретация напряженного состояния в точке, тесно связанная с определением главных напряжений в тригонометрической форме. На основании этого приведена общая концепция представления критериев разрушения с использованием системы координат $\xi - r - \theta$ в трехмерном пространстве.

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} действуют на трех взаимно ортогональных гранях элементарного параллелепипеда (рис. 1, а) в направлении координатных осей x_1, x_2, x_3 .

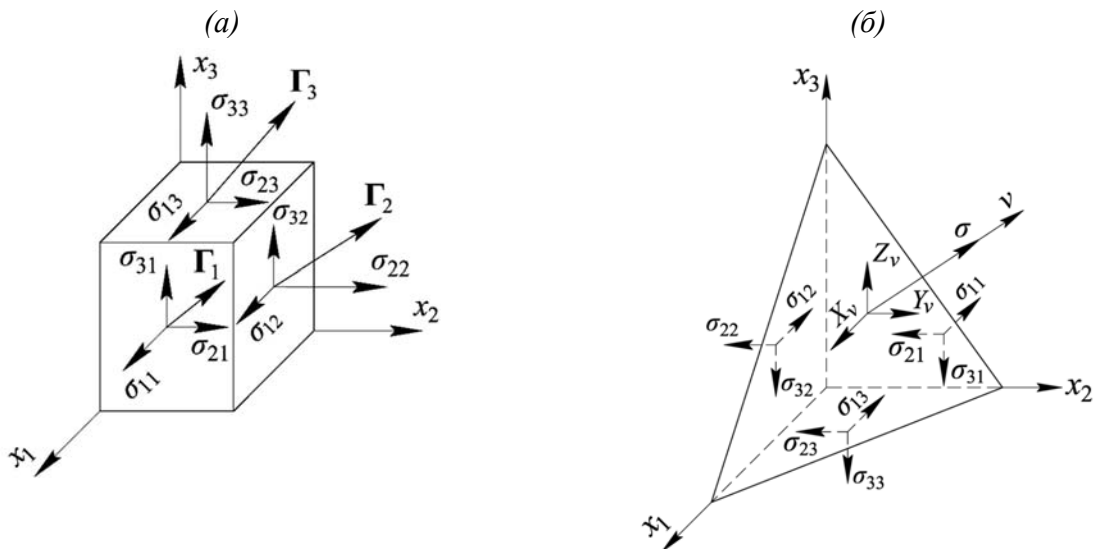


Рис. 1. Напряженное состояние элементарного параллелепипеда:
а – компоненты тензора напряжений, б – напряжения на наклонных площадках

Проекции вектора полного напряжения $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, действующие на каждой грани параллелепипеда, определяются тензором напряжений, который, как известно, представляется в виде:

$$\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Следовательно, проекции вектора полного напряжения на произвольно ориентированную площадку с нормалью \mathbf{n} , единичный вектор которой имеет компоненты $(n_1 \ n_2 \ n_3)$ могут быть представлены следующим образом:

$$\Gamma_1^{(n)} = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3, \quad \Gamma_2^{(n)} = \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3, \quad \Gamma_3^{(n)} = \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3.$$

В каждой точке твердого тела существуют три взаимно ортогональные наклонные площадки, на которых касательные напряжения равны нулю (рис. 1, б). Главные напряжения σ_1, σ_2 и σ_3 , действующие на этих площадках, определяются в результате решения кубического уравнения:

$$\sigma^3 - \sigma^2 I_1(T_\sigma) - \sigma I_2(T_\sigma) - I_3(T_\sigma) = 0,$$

коэффициенты $I_1(T_\sigma)$, $I_2(T_\sigma)$ и $I_3(T_\sigma)$ при неизвестных которого представляют собой инварианты тензора напряжений (1), которые равны

$$I_1(T_\sigma) = 3\sigma_0, \quad I_2(T_\sigma) = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1), \quad I_3(T_\sigma) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \quad (2)$$

Тензор напряжений σ_{ij} можно представить в виде суммы шарового тензора σ_{ij}^0 и девиатора напряжений s_{ij} : $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + s_{ij}$.

В свою очередь, инварианты девиатора напряжений определяются уравнениями:

$$I_1(D_\sigma) = 0, \quad I_2(D_\sigma) = -\frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2), \quad I_3(D_\sigma) = s_1s_2s_3. \quad (3)$$

Разрушение материалов зачастую происходит вследствие образования трещин отрыва по наклонным площадкам. В качестве таковых можно рассматривать площадки, равно наклоненные к координатным осям (октаэдрические площадки), направляющие косинусов которых равны $l = m = n = 1/\sqrt{3}$. На этих площадках действуют нормальные и касательные напряжения, вычисляемые по формулам:

$$\sigma_{окт} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_0 \quad \text{и} \quad \tau_{окт} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (4)$$

В свою очередь, главные (максимальные) касательные напряжения равны

$$\tau_{12} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2), \quad \tau_{23} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3), \quad \tau_{31} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1). \quad (5)$$

Для оценки прочности материала в характерной точке твердого тела вычисляются интегральные характеристики напряженного состояния – интенсивности нормальных и касательных напряжений:

$$\sigma_i = \sqrt{3I_2(D_\sigma)} \quad \text{и} \quad \tau_i = \sqrt{I_2(D_\sigma)}. \quad (6)$$

Изложенные выше положения применимы и к теории деформированного состояния твердого тела.

Качественную и количественную оценку прочности материалов удобнее выполнять с использованием геометрической интерпретации напряженного состояния. Так как напряженное состояние твердого тела в точке определяется значениями главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Следовательно, в трехмерном пространстве $\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$ напряженное состояние в точке P будет определяться прямоугольными координатами, в качестве которых выступают главные напряжения σ_1, σ_2 и σ_3 . В геометрическом смысле напряженное состояние в указанной точке можно представить радиус-вектором \mathbf{OP} , проведенным из начала координат (рис. 2, а).

Для изотропного материала критерии разрушения должны являться инвариантной функцией напряженного состояния. Отсюда следует, что такой критерий можно интерпретировать как поверхность в этом пространстве напряжений.

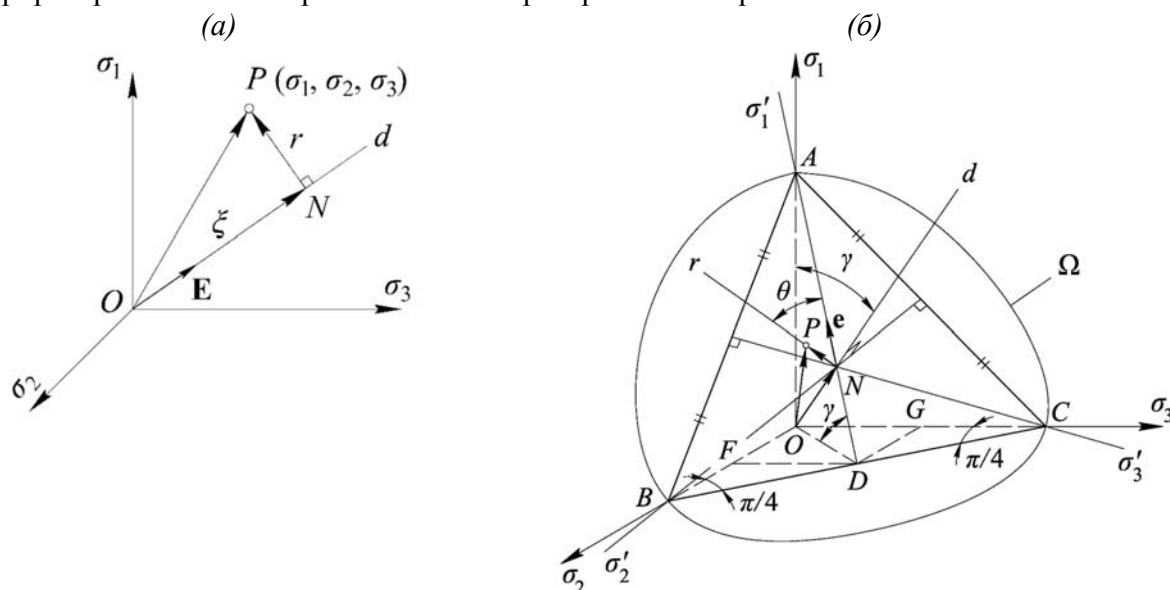


Рис. 2. К вопросу геометрической интерпретации напряженного состояния:
 а – геометрическая интерпретация напряженного состояния в точке,
 б – девиаторный след некоторой поверхности разрушения

Рассмотрим девиаторной след некоторой поверхности Ω , центральная ось которой совпадает с гидростатической осью d (рис. 2, б). Предположим, что в точке твердого тела найдены главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и определены их направления. Выберем эти направления в качестве координатных осей. Напряженное состояние в точке в этой системе координат также может быть представлено вектором \mathbf{OP} , компонентами которого являются главные напряжения $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

Следовательно, вектор \mathbf{OP} можно разложить по ортам координатных осей:

$$\mathbf{OP} = \sigma_1 \mathbf{i}_1 + \sigma_2 \mathbf{i}_2 + \sigma_3 \mathbf{i}_3.$$

где $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ и \mathbf{i}_3 – орты координатных осей σ_1, σ_2 и σ_3 , соответственно.

Компоненты вектора \mathbf{OP} можно представить в виде суммы гидростатической и девиаторной составляющих:

$$\sigma_1 = \sigma_0 + s_1, \quad \sigma_2 = \sigma_0 + s_2, \quad \sigma_3 = \sigma_0 + s_3,$$

где σ_0 – среднее (гидростатическое) напряжение; s_1, s_2, s_3 – компоненты девиатора напряжений.

Принимая во внимание, что

$$\mathbf{OP} = \mathbf{ON} + \mathbf{NP},$$

получим:

$$\mathbf{ON} = \sigma_0 (\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3), \quad \mathbf{NP} = s_1 \mathbf{i}_1 + s_2 \mathbf{i}_2 + s_3 \mathbf{i}_3.$$

Вектор \mathbf{ON} направлен вдоль гидростатической оси d , уравнение которой имеет вид: $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$.

При этом длина вектора \mathbf{ON} равна

$$\xi = |\mathbf{ON}| = \sigma_0 \sqrt{3} = \frac{I_1(T_\sigma)}{\sqrt{3}} \quad (7)$$

и для него справедливо условие: $s_1 + s_2 + s_3 = 0$.

Очевидно, что вектор \mathbf{NP} характеризует девиатор напряжений и лежит в девиаторной плоскости, ортогонален вектору \mathbf{ON} , который проходит через начало координат.

Длина вектора \mathbf{NP} равна

$$r = |\mathbf{NP}| = \sqrt{2I_2(D_\sigma)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_i, \quad \text{или} \quad \sigma_i = |\mathbf{NP}| \sqrt{\frac{3}{2}} = r \sqrt{\frac{3}{2}}. \quad (8)$$

Скалярное произведение векторов \mathbf{NP} и \mathbf{e} равно

$$\mathbf{NP} \cdot \mathbf{e} = |\mathbf{NP}| \cos \theta = r \cos \theta.$$

Тем самым,

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{NP} \cdot \mathbf{e}}{r} = \frac{1}{\sqrt{2I_2(D_\sigma)}} \left(s_1 \frac{2}{\sqrt{6}} - s_2 \frac{1}{\sqrt{6}} - s_3 \frac{1}{\sqrt{6}} \right) = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{2\sqrt{3}\sqrt{I_2(D_\sigma)}},$$

или

$$\cos \theta = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + 2(\sigma_3 - \sigma_1)^2}}. \quad (9)$$

Угол θ является углом вида напряженного состояния.

Если упорядочить величины главных напряжений в последовательности $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, то угол θ будет находится в границах сектора $0 \leq \theta \leq \pi/3$. Используя известное из тригонометрии соотношение: $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$, получим:

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{I_3(D_\sigma)}{\sqrt{[I_2(D_\sigma)]^3}} = \frac{\sqrt{2}}{\tau_{окГ}^3} I_3(D_\sigma).$$

Предельная поверхность, ограничивающая область прочностного сопротивления материала, задается как функция главных напряжений $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$. Для изотропных материалов эта поверхность является симметричной относительно гидростатической оси d . Ввиду этого, ее геометрическое представление удобно выполнять в системе координат, одна из осей которых совпадает с гидростатической осью (рис. 3). Как было отмечено ранее, точки на гидростатической оси характеризуются координатой ξ , а на девиаторной плоскости – координатой r . В дополнении к указанным координатам также будем использовать угол напряженного состояния θ , лежащий на девиаторной плоскости. Положительное направление этого угла отсчитывается против часовой стрелки от проекции координатной оси σ_1 на девиаторную плоскость. Поскольку девиаторная плоскость имеет равные углы

($\arccos(1/\sqrt{3}) = 54,7^\circ$) с осями координат σ_1 , σ_2 и σ_3 , проекции этих осей на девиаторную плоскость σ'_1 , σ'_2 и σ'_3 также образуют равные углы между собой – $2\pi/3$.

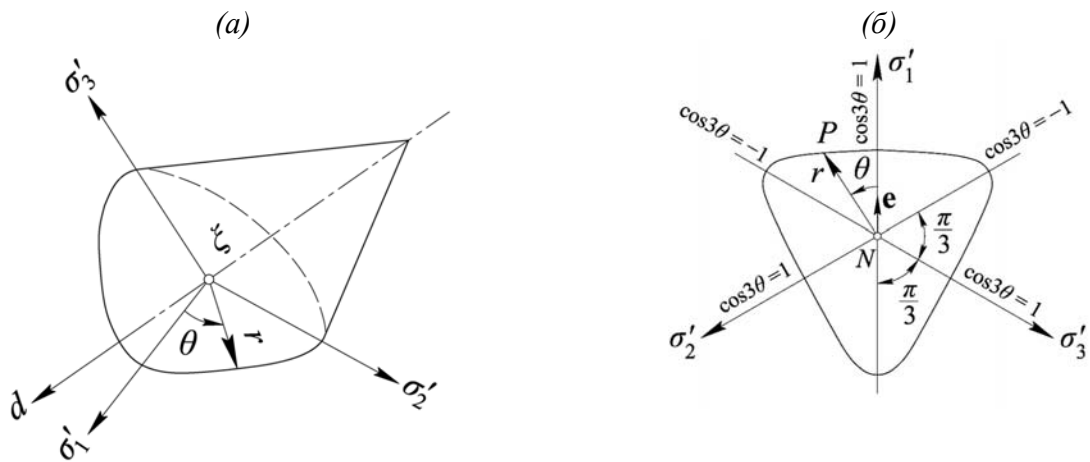


Рис. 3. Представление поверхности разрушения:
a – общий вид, *б* – девиаторный след в координатах ξ , r , θ ($\xi = const$)

Следовательно, поверхность разрушения может быть задана функцией $f(\xi, r, \theta) = 0$, в которой координаты предельных точек этой поверхности ξ , r и θ могут быть получены из соотношений (7), (8) и (9), соответственно.

Во второй главе приводятся основные предпосылки для построения расчетных моделей бетонных и железобетонных конструкций с использованием четырех- и восьмиузловых конечных элементов сплошной среды (рис. 4).

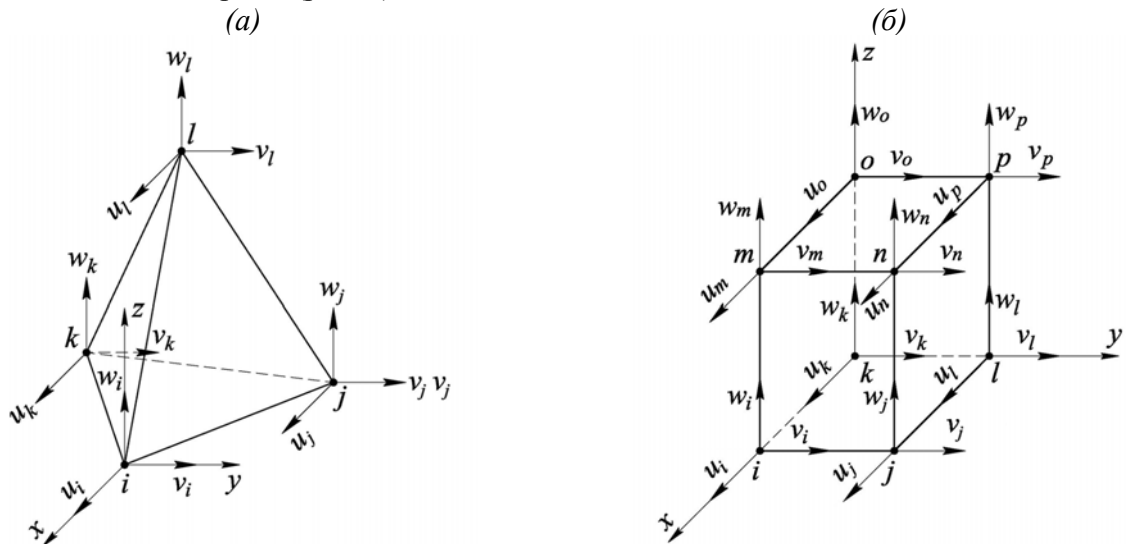


Рис. 4. Конечные элементы сплошной среды: *a* – четырехузловой, *б* – восьмиузловой

Функции перемещений которых аппроксимируются уравнениями:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, & v(x, y, z) &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y + \alpha_7 z, \\ w(x, y, z) &= \alpha_8 + \alpha_9 x + \alpha_{10} y + \alpha_{11} z \end{aligned} \quad (10)$$

и

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 xy + \alpha_5 yz + \alpha_6 xz + \alpha_7 xyz, \\ v(x, y, z) &= \alpha_8 + \alpha_9 x + \alpha_{10} y + \alpha_{11} z + \alpha_{12} xy + \alpha_{13} yz + \alpha_{14} xz + \alpha_{15} xyz, \\ w(x, y, z) &= \alpha_{16} + \alpha_{17} x + \alpha_{18} y + \alpha_{19} z + \alpha_{20} xy + \alpha_{21} yz + \alpha_{22} xz + \alpha_{23} xyz, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\alpha_0 \dots \alpha_{23}$ – постоянные коэффициенты, нахождение которых связано с решением линейных уравнений (10) и (11) с учетом наложенных граничных условий.

Основные положения расчета бетонных и железобетонных конструкций, приведенные в стандартах, были разработаны в докомпьютерный период и на протяжении XX века практически не претерпели изменений, и базируются на принципах, разработанных, преимущественно, для аналитического расчета конструкций простой геометрии, зачастую, статически определимых. Использование последних для разработки предпосылок численного расчета сложных бетонных и железобетонных конструкций с учетом объемного напряженного состояния не представляется возможным. В отличие от одноосного сжатия или растяжения, сведений о работе бетона в условиях двух- и трехосного напряженного состояния имеется ограниченное количество.

Опираясь на исследования НИИЖБ, А.А. Гвоздева, Н.И. Карпенко, В.Г. Теличко, а также иностранных ученых – Н. Kupfer, A. Zielinski, T. Gabet, A. Hussein и др. в работе установлены некоторые общие закономерности деформирования бетона при двухосном нагружении.

Опыты при трехосном нагружении бетона обычно проводятся в упрощенной постановке – в режимах пропорционально изменяющихся напряжений. Так, значимые результаты экспериментальных исследований приведены в работах как отечественных (Гениева Г.А., Гвоздева А.А., Карпенко Н.И., Круглова В.М., Малашкина Ю.Н., Тябликова Б.В., Полякова А.В., Яшина А.В. и др.), так и зарубежных ученых (F. Richart, G. Balmer, H. Kupfer, Geel Van E., T. Hansen, Hu Liangming, Shi Linlin и др.). Вместе с тем, в указанных опытах обращает на себя внимание большой разброс в экспериментальных данных, ввиду этого получить достоверные значения прочности бетона в случае неравномерного трехосного сжатия или растяжения в широком диапазоне напряжений весьма затруднительно. Тем самым, ограниченность приведенных данных, а также отсутствие испытаний на трехосное сжатие бетонов повышенной прочности, затрудняет их применение для разработки достоверных, экспериментально подтвержденных критериев прочности. Последнее обстоятельство побудило автора к проведению собственных испытаний бетона на неравномерное трехосное сжатие с использованием современного сертифицированного оборудования, которые рассмотрены ниже.

Ввиду ограниченности в материально-технических средствах автором настоящей работы было принято решение проводить трехосные испытания бетона в условиях равномерного бокового обжатия образцов. Принимая во внимание недостатки, присущие такому подходу, для проведения экспериментов были изготовлены серии образцов, тело бетона которых заключалось в стальную обойму цилиндрической формы. В качестве обоймы использовались цилиндры, получаемые в результате резки стальных труб из стали С345 по ГОСТ 10704-91.

Для регулирования величины бокового обжатия бетона применялись стальные обоймы различного диаметра с разной высотой и толщиной стенки.

Так, использовались обоймы диаметром 114, 127, 150, 159 мм и высотой 90, 140, 250, 288 мм.

Всего было изготовлены 19 образцов, из которых по 9 и 10 образцов в каждой серии имели толщину стенки 3 мм и 4 мм, соответственно (рис. 5).

Среднее значение прочности бетона на одноосное сжатие определялось по ГОСТ 10180-2018 на образцах – цилиндрах диаметром 150 мм и высотой 300 мм и составило 57,00 МПа.

Для исследования напряженно-деформированного состояния образцов на стальную обойму наклеивались тензорезисторы ВХ 120-5АА сопротивлением 120 Ом и базой 5 мм.

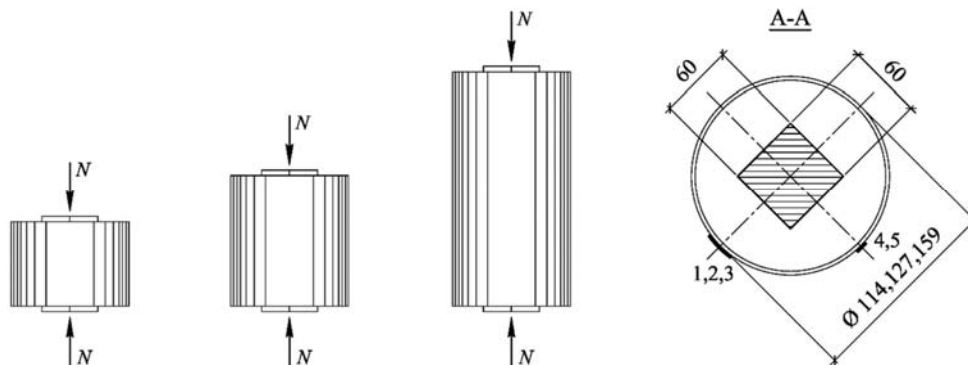


Рис. 5. Испытываемые образцы второй серии

Все тензорезисторы подключались к 32-х канальной тензометрической станции Zetlab (производство – г. Зеленоград) по полной мостовой схеме. Эксперименты проводились на испытательной установке Matest (производство – Италия), включающей в себя пресс с пределом нагружения до 1500 кН (рис. 6).

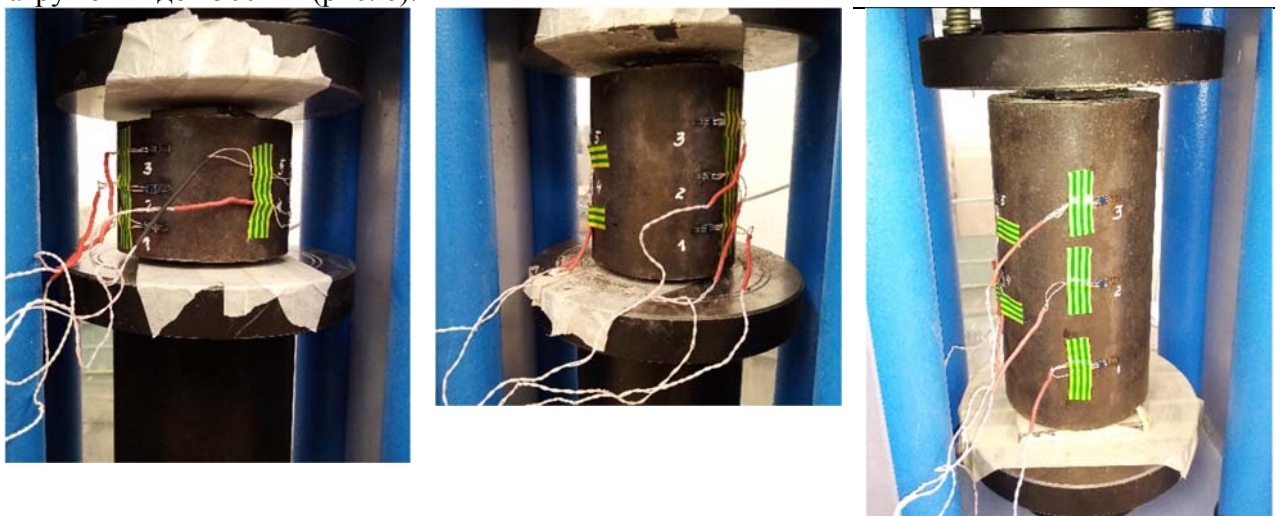


Рис. 6. Общий вид испытываемых образцов

В процессе экспериментов прикладываемая на образцы нагрузка и деформации стальной обоймы регистрировались синхронно, что, в итоге, позволило получить полную картину напряженно-деформированного состояния каждого образца.

Нагрузка передавалась на бетон через две прямоугольные стальные пластинки размером в плане 60×60 мм и толщиной 3 мм каждая.

Испытания проводились с постоянной скоростью нагружения 2 кН/с. Критерием разрушения образцов являлось падение величины прикладываемой нагрузки N до 60% от пикового значения, что, в случае одномерной аналогии, соответствует участку ниспадающей ветви диаграммы $\sigma - \varepsilon$ для одноосного сжатия.

Характерно, что глубина проникновения стальной пластинки, через которую на бетон передавалась нагрузка, в тело бетона составила от 3 до 6 мм, в зависимости от размеров испытываемых образцов (рис. 7), что сопровождалось значительными поперечными деформациями стальной обоймы. Последний факт может свидетельствовать о том, что в условиях неравномерного трехосного сжатия бетону присущ явно выраженный пластический характер деформирования. Данное обстоятельство имеет место при значениях средних (гидростатических) напряжений $\sigma_0 > 2R_b$.



Рис. 7. Характер разрушения образцов

На основании проведенных автором испытаний в зависимости от соотношения главных напряжений получены координаты точек предельной поверхности, представляющие собой нормируемые значения прочности бетона, выраженные через напряжения на октаэдрических площадках $\sigma_{окТ}/R_b$ и $\tau_{окТ}/R_b$.

Для верификации разработанных и приведенных в последующих главах диссертации моделей деформирования бетона и сравнения механизма разрушения элементов при изгибе было выполнено исследование напряженно-деформированного состояния бетонных и железобетонных балок в процессе нагружения. Для этих целей изготовлены и испытаны экспериментальные образцы бетонных и железобетонных балок трех серий. Бетонные балки первой серии (маркировка ЭБА-1) не имели армирование и изготавливались размером $1400(l) \times 250(b) \times 65(h)$ мм с соотношением сторон $h/l = 1:5,6$. Балки второй серии (маркировка ЭБА-2) выполнялись того же размера, что и балки ЭБА-1 и были армированы нижней продольной арматурой А400 $\phi 10$ мм. Пролет балок первой и второй серий составлял $l_0 = 1320$ мм, балок третьей серии – $l_0 = 400$ мм. Каждая серия балок включала в себя по шесть экспериментальных образцов.

Испытания указанных образцов выполнялись автором в лаборатории строительных конструкций и материалов инженерной академии РУДН.

Среднее значение прочности бетона на одноосное сжатие определялось по ГОСТ 10180-2018 на образцах – кубах с размером стороны 100 мм и составило 56,80 МПа.

Все образцы – балки испытывались в условиях трехточечного изгиба. Входе экспериментов определялись усредненные значения предельной (разрушающей) нагрузки, нагрузки трещинообразования, а также прогибы балок при фиксированных значениях нагрузки. Основные результаты, отвечающие проведенным испытаниям, приведены в табл. 1.

Таблица 1. Результаты испытаний образцов – балок

Исследуемая величина	Маркировка балок		
	ЭББА-1	ЭБА-2	ЭБС-3
Усредненное значение предельной нагрузки P_{ult} , кН	10,28	28,849	28,637
Среднее квадратическое отклонение S , кН	0,33	0,63	0,56

Дополнительно анализировалось напряженно-деформированное состояние одного образца из каждой серии, для чего на характерный образец в направлении главных деформаций наклеивались тензорезисторы ВХ 120-20АА сопротивлением 120 Ом и базой 20 мм. Так, на боковую поверхность балок с маркировкой ЭББА-1 и ЭБС-3 было наклеено по 21 тензорезистору. На поверхности балки ЭБА-2 размещено 20 тензорезисторов. Для регистрации деформаций в продольной стальной арматуре, на последнюю наклеивалось 4 тензорезистора с шагом 150 мм, при этом тензорезисторы и соответствующие отводы проводов располагались внутри тела балки.

Эксперименты проводились на испытательной установке Matest, предназначенной для проведения испытаний балок на изгиб, с постоянной скоростью нагружения 10 Н/с.

При установке тензорезисторов использовалась симметрия напряженного состояния балок. Так, ориентация тензорезисторов совпадала с направлением главных осей 1 и 2 в характерных точках на поверхностях балок, которое определялось в результате расчета указанных балок при малом значении параметра нагрузки λ , соответствующему линейно-упругому деформированию бетона.

Так как при увеличении нагрузки образование трещин и неупругая работа бетона ведут к искажению напряженно-деформированного состояния балок, оси 1 и 2 для них перестают быть главными. Поэтому для сравнения с экспериментальными данными, значения главных деформаций $(\varepsilon_1)'$ и $(\varepsilon_2)'$ в характерных точках балок, полученные при тестировании нелинейного решателя ВК ПРИНС, пересчитывались относительно осей 1 и 2 по формулам:

$$\varepsilon_1 = \frac{(\varepsilon_1)' + (\varepsilon_2)'}{2} + \frac{(\varepsilon_1)' - (\varepsilon_2)'}{2} \cos 2\alpha, \quad \varepsilon_2 = \frac{(\varepsilon_1)' - (\varepsilon_2)'}{2} + \frac{(\varepsilon_1)' + (\varepsilon_2)'}{2} \cos 2\alpha, \quad (12)$$

где ε_1 и ε_2 – главные деформации, отвечающие упругой работе бетона без трещин, α – угол между осями 1' и 1.

В процессе экспериментов прикладываемая нагрузка и деформации в характерных точках на поверхностях балок регистрировались синхронно, что, в конечном счете, позволило получить полную картину напряженно-деформированного состояния образцов. Ко всему прочему, для указанных балок были получены и исследованы поля главных деформаций, эпюры напряжений в продольной арматуре, отвечающие упругой работе бетона, началу трещинообразования и стадии, предшествующей разрушению.

В третьей главе рассмотрены наиболее достоверные феноменологические критерии прочности бетона и критерии текучести для арматурной стали, приведенные автором в виде, удобном для их практической реализации методом конечных элементов. Указанные критерии классифицированы как «одно- двух- трех- четырех- пяти- и шестипараметрические», что подразумевает под собой количество стандартных испытаний бетонных образцов для определения параметров того или иного критерия.

Разрушение, если оно имеет место, не должно зависеть от способа представления напряжений. Поэтому критерий разрушения бетона целесообразно формулировать в виде функции от параметров напряженного состояния, не зависящих от выбранной системы координат. Такими параметрами могут быть инварианты напряжений $I_1(T_\sigma)$, $I_2(D_\sigma)$ и $I_3(D_\sigma)$. В этом случае критерий разрушения можно сформулировать так: $f[I_1(T_\sigma), I_2(D_\sigma), I_3(D_\sigma)] = 0$.

Однако, учитывая, что вектор, определяющий напряженное состояние в точке твердого тела, может быть выражен через составляющие, одна из которых перпендикулярна девиаторной плоскости и характеризует шаровой тензор (гидростатическое напряжение), а другая лежит в девиаторной плоскости и характеризует девиатор напряжений, а также то, что $I_3(D_\sigma)$ связан с углом вида напряженного состояния θ . Тем самым, критерий разрушения предпочтительнее записать так: $f(\xi, r, \theta) = 0$.

На основании экспериментальных данных, в том числе полученных автором, сформулирован модифицированный критерий Друкера – Прагера (Drucker, W. Prager), дополненный параметрами критерия Мора – Кулона (Mohr, Coulomb) для бетонов.

В качестве гладкого приближения к шестиугольной пирамиде Мора – Кулона используется коническая поверхность Друкера – Прагера. В этом случае, уравнение поверхности, как функции переменных ξ и r , записывается в виде:

$$f(\xi, r) = \sqrt{6}\alpha\xi + r - \sqrt{2}k = 0, \quad (13)$$

где $\xi = I_1(T_\sigma)/\sqrt{3}$, $r = \sqrt{2I_2(D_\sigma)}$, α и k – положительные постоянные.

В пространстве главных напряжений предельная поверхность, отвечающая уравнению (13), представляет собой прямой конус, главные меридианы и девиаторное сечение которого показаны на рис. 8.

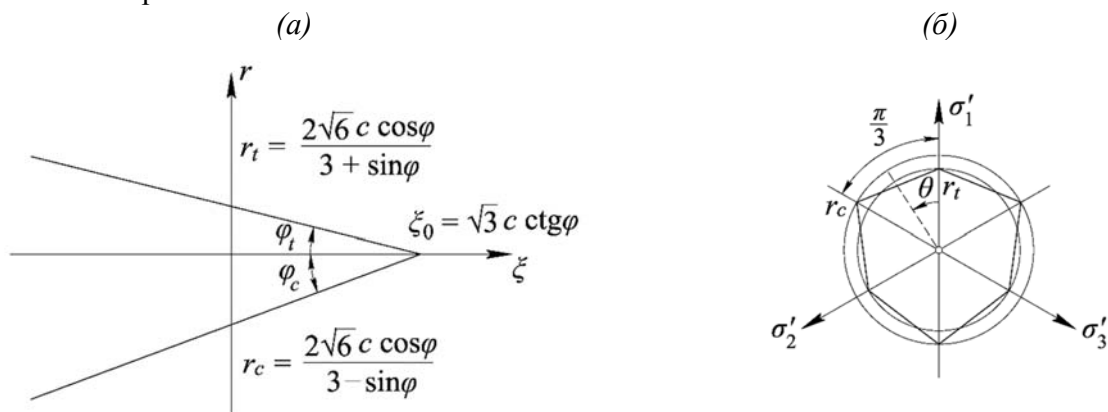


Рис. 8. Предельная поверхность Друкера – Прагера в системе координат $\xi - r - \theta$:

a – меридианы сжатия ($\theta = \pi/3$) и растяжения ($\theta = 0$), *б* – сечение девиаторной плоскостью

Для точной аппроксимации пирамиды Мора – Кулона конусом Друкера – Прагера необходимо установить связь между постоянными α и k , входящими в уравнение (13), и постоянными Мора – Кулона (сцепление c и угол внутреннего трения φ).

Если конус Друкера – Прагера описывает шестиугольную пирамиду Мора – Кулона (рис. 8, *б*) и представляет собой внешнюю границу вдоль меридиана сжатия r_c ($\theta = \pi/3$), эти постоянные связаны соотношением:

$$\alpha = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}, \quad k = \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}. \quad (14)$$

С другой стороны, прочность материала в области растягивающих напряжений будет ограничиваться внутренним конусом с образующей, проходящей через меридиан растяжения r_i ($\theta = 0$). В этом случае постоянные будут равны

$$\alpha = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)}, \quad k = \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)}. \quad (15)$$

В свою очередь, постоянные Мора – Кулона для бетона находятся из условий:

$$\sin \varphi = \frac{m-1}{m+1}, \quad c = \frac{R_b(1 - \sin \varphi)}{2 \cos \varphi}, \quad m = \frac{1}{\bar{R}_{bt}}, \quad (16)$$

где $\bar{R}_{bt} = R_{bt}/R_b$.

Очевидно, что если положить $\alpha = 0$, то уравнение (13) сводится к критерию текучести Мизеса – Губера.

Сформулированный таким образом критерий прочности бетона имеет два существенных недостатка: линейная зависимость от $I_1(T_\sigma)$ и $I_2(D_\sigma)$, и независимость от угла вида напряженного состояния θ , что не подтверждается большинством экспериментов. Однако, простота и удобство реализации для компьютерного расчета конструкций методом конечных элементов, а также удовлетворительное соответствие экспериментальным данным позволяет использовать данный критерий для приближенной оценки прочности железобетонных конструкций, находящихся в условиях трехосного напряженного состояния.

В дальнейшем автором предложены уточненные критерии разрушения бетона, в которых два последних недостатка были устранены.

Представлены в виде, употребительном для программной реализации методом конечных элементов, трехпараметрические критерии разрушения бетона Бреслера – Пистера (B. Bresler, K. Pister), Виллама – Варнке (K. Willam, E. Warnke), Чена – Чена (A.C.T. Chen, W.F. Chen); четырехпараметрические критерии Отозенна (N. Ottosen), (Реймана (H. Reimann), Се – Тин – Чена (S.S. Hsieh, E.C. Ting, W.F. Chen). Приведен пятипараметрический критерий для бетона, который является вариантом усовершенствования критерия разрушения Виллама – Варнке для хрупких материалов путем добавления двух дополнительных параметров для описания искривленных меридианов растяжения и сжатия предельной поверхности. Полученная таким образом поверхность разрушения адекватно описывает различные режимы сжатия бетона, как с низким, так и с высоким гидростатическим напряжением.

Предложен и экспериментально подтвержден шестипараметрический критерий разрушения бетона для случая двух- и трехосного сжатия, который обобщает наиболее удачные формулировки известных критериев прочности.

Принимая допущение о бетоне как изотропном материале, в пространстве главных напряжений $\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$ поверхность разрушения будет представлять собой симметричную относительно гидростатической оси d поверхность вращения (рис. 9, а), девиаторное сечение которой представлено на рис. 9, б. Так как данное сечение обладает тройной симметрией, достаточно получить уравнение предельной кривой в пределах сектора $0 < \theta < \pi/3$.

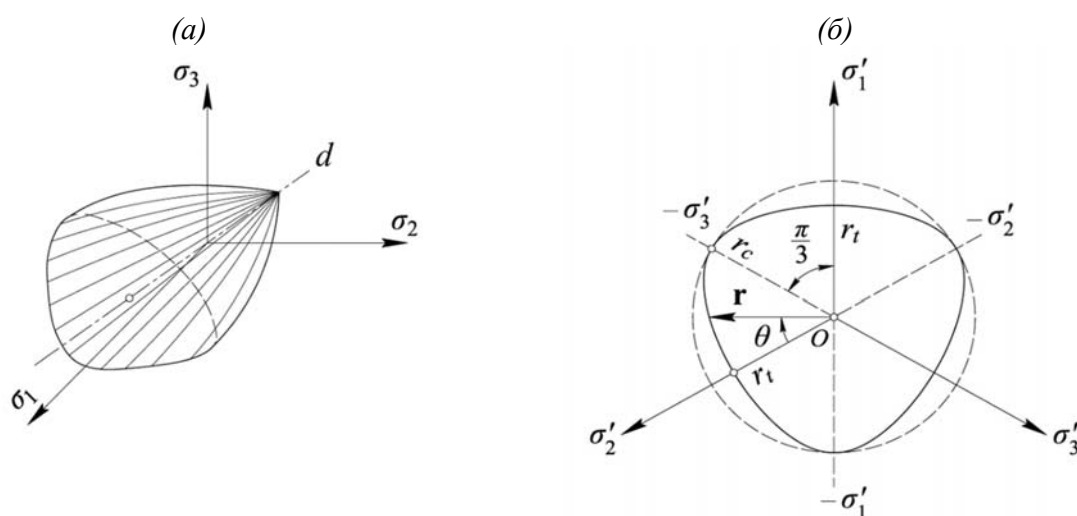


Рис. 9. Поверхность разрушения бетона:

a – вид в пространстве координат главных напряжений $\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$, *б* – девиаторное сечение

Длина радиус-вектора \mathbf{r} (рис. 9, б) определяется уравнением

$$r(\theta) = \frac{2r_c(r_c^2 - r_t^2)\cos\theta + r_c(2r_t - r_c)\sqrt{4(r_c^2 - r_t^2)\cos^2\theta + 5r_t^2 - 4r_t r_c}}{4(r_c^2 - r_t^2)\cos^2\theta + (r_c - 2r_t)^2}. \quad (17)$$

Очевидно, что если в полученном уравнении принять $r_t = r_c$, то предельная кривая на девиаторной плоскости будет представлять собой окружность.

Для условия прочности бетона принята зависимость, которая выражает связь между нормальными и касательными напряжениями на октаэдрических площадках:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = f(\sigma_{окТ}, \tau_{окТ}, \theta) = \frac{\sqrt{3}}{r(\sigma_{окТ}, \theta)} \frac{\tau_{окТ}}{R_b} - 1 = 0. \quad (18)$$

При этом меридианы растяжения ($\theta = 0$) и сжатия ($\theta = \pi/3$) поверхности разрушения описываются квадратичными функциями:

$$\bar{r}_t(\bar{\xi}) = A_1 + A_2\bar{\xi} + A_3\bar{\xi}^2, \quad \text{при } \theta = 0 \quad (19)$$

$$\bar{r}_c(\bar{\xi}) = B_1 + B_2\bar{\xi} + B_3\bar{\xi}^2, \quad \text{при } \theta = \pi/3 \quad (20)$$

где A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 – параметры критерия.

Чтобы определить параметры критерия A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 для конкретного класса бетона необходимо провести пять стандартных испытаний, приведенных в табл. 2.

Таблица 2. Стандартные испытания бетона для определения параметров критерия

Стандартные испытания	$\sigma_{окТ}/R_b$	$\tau_{окТ}/R_b$	Угол θ
1. Одноосное сжатие, $\sigma_3 = -R_b, \sigma_1 = \sigma_2 = 0$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\pi/3$
2. Одноосное растяжение, $\sigma_1 = R_{bt}, \sigma_2 = \sigma_3 = 0, \bar{R}_{bt} = 1/12$	$\frac{1}{3}\bar{R}_{bt}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}\bar{R}_{bt}$	0
3. Равномерное двухосное сжатие $\sigma_2 = \sigma_3 = -R_{bc}, \sigma_1 = 0,$ $\bar{R}_{bc} = 1,4^*$	$-\frac{2}{3}\bar{R}_{bc}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}\bar{R}_{bc}$	0
4. Равномерное трехосное растяжение ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \approx R_{bt}$), $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$	$\sigma_{окТ}/R_b = \bar{\xi}_0, \bar{\xi}_0 > 0$	0	0, $\pi/3$
5. Неравномерное трехосное сжатие ($\sigma_3 > \sigma_1 = \sigma_2, \theta = \pi/3$)	$\sigma_{окТ}/R_b = -\bar{\xi}_c, \bar{\xi}_c > 0,$ $\tau_{окТ}/R_b = \bar{r}_c$	$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0,$ $\bar{\xi}_c = 1,273^{**}, \bar{r}_c = 1,380^{**}$	$\pi/3$

Примечание: *согласно результатам экспериментов В.Г. Теличко и Л.А. Зиборова, **согласно результатам экспериментов автора

Используя результаты испытаний бетона, приведенные в табл. 4, каждое из уравнений (19) и (20) образует систему, состоящую из трех независимых уравнений, решение которых относительно A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 позволяет определить искомые параметры критерия:

$$A_1 = A_2\bar{\xi}_0 - A_3\bar{\xi}_0^2, \quad A_2 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}\bar{R}_{bt} - A_3\left(\frac{1}{9}\bar{R}_{bt}^2 - \bar{\xi}_0^2\right)}{\bar{\xi}_0 - \frac{1}{3}\bar{R}_{bt}},$$

$$A_3 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\bar{R}_{bc} - \bar{R}_{bt}\frac{\bar{\xi}_0 + \frac{2}{3}\bar{R}_{bc}}{\bar{\xi}_0 - \frac{1}{3}\bar{R}_{bt}}\right)}{\frac{4}{9}\bar{R}_{bc}^2 - \bar{\xi}_c^2 - \left(\frac{1}{9}\bar{R}_{bt}^2 - \bar{\xi}_c^2\right)\frac{\bar{\xi}_0 + \frac{2}{3}\bar{R}_{bc}}{\bar{\xi}_0 - \frac{1}{3}\bar{R}_{bt}}}$$
(21)

и

$$B_1 = B_2\bar{\xi}_0 - B_3\bar{\xi}_0^2, \quad B_2 = \frac{\bar{r}_c - B_3(\bar{\xi}_c^2 - \bar{\xi}_0^2)}{\bar{\xi}_0 + \bar{\xi}_c},$$

$$B_3 = \frac{\bar{r}_c(3\bar{\xi}_0 + 1) - \sqrt{2}(\bar{\xi}_0 + \bar{\xi}_c)}{3(\bar{\xi}_c^2 - \bar{\xi}_0^2)\left(\bar{\xi}_0 + \frac{1}{3}\right) + 3(\bar{\xi}_0 + \bar{\xi}_c)\left(\bar{\xi}_0^2 - \frac{1}{9}\right)}.$$
(22)

Для произвольного значения угла вида напряженного состояния θ девиаторная координата $r(\theta)$ определяется по формуле (17) в зависимости от значений $r_i = \sqrt{3}\bar{r}_i R_b$ и $r_c = \sqrt{3}\bar{r}_c R_b$. В свою очередь, координата $\xi = \sqrt{3}\bar{\xi} R_b$.

На рис. 10 показано сравнение меридиана сжатия ($\theta = \pi/3$) разработанного критерия прочности с экспериментальными данными трехосного испытания бетона, а также с пятипараметрическим критерием Виллама – Варнке и модифицированным критерием Друкера – Прагера с постоянными Мора – Кулона.

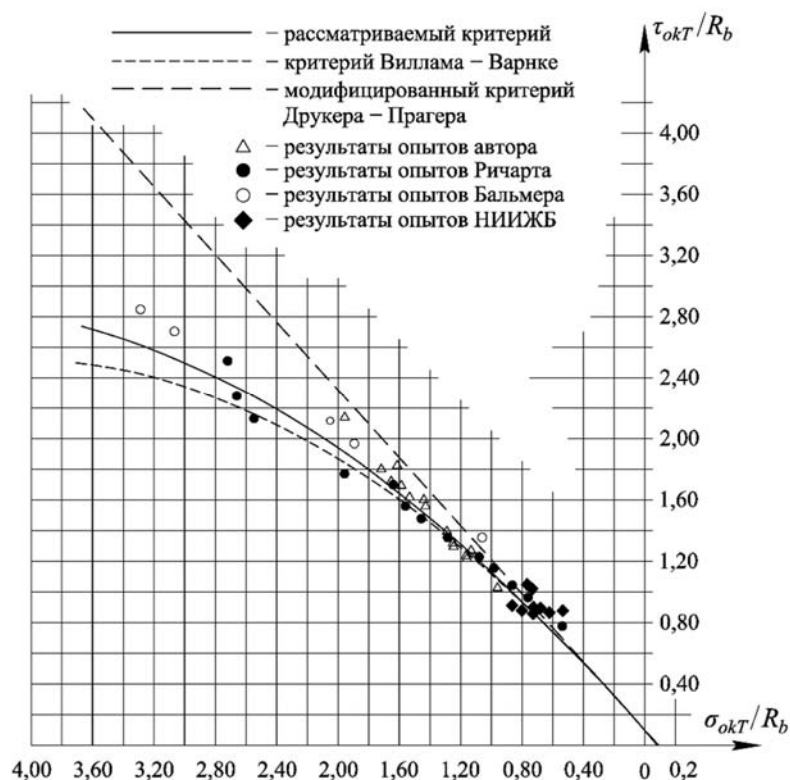


Рис. 10. Сравнение меридиана сжатия ($\theta = \pi/3$) рассматриваемого критерия с экспериментальными данными и пятипараметрическим критерием Виллама – Варнке и модифицированным критерием Друкера – Прагера

Для проверки предлагаемого критерия в режиме двухосного сжатия ($\sigma_1 = 0$ и $\sigma_2 \geq \sigma_3$) использовались результаты экспериментальных испытаний различных видов бетонов, проведенных в НИИЖБ. Так, для тяжелых крупнозернистых бетонов расхождения в значениях прочности $\Delta = \left[\left(\sqrt{3}\tau_{окт} / r(\bar{\xi}, \theta) \right) - 1 \right] \times 100\%$ составили не более 3,5%, для тяжелого мелкозернистого бетона и керамзитобетона – не более 4%.

На основании полученных и подтвержденных экспериментальным путем результатов, можно заключить, что разработанный критерий является универсальным и позволяет получать достоверные показатели прочности различных видов бетонов как при трехосном нагружения в режимах низкой и высокой боковой компрессии, так и в случае двухосного равномерного и неравномерного сжатия.

В четвертой главе приведены теоретические положения, касающиеся получения физических уравнений пластического течения бетона. При трехосном сжатии бетон после

достижения поверхности разрушения $f(\sigma_{ij}) \equiv f(\boldsymbol{\sigma})$ ведет себя как пластичный материал, а разрушение происходит тогда, когда деформации достигают предельных значений. В связи с этим поверхность разрушения $f(\boldsymbol{\sigma})$ можно рассматривать как поверхность текучести, а физические уравнения для сжатого бетона получать на основании той или иной теории пластичности. Таким образом, можно выделить следующие теории (концепции) для построения общих моделей деформирования бетона: теория бетона как идеально пластического материала и теория бетона с учетом деформационного упрочнения, согласно которой до достижения начальной поверхности текучести деформирование бетона происходит упруго.

Сформулирован общий подход к построению идеальной упругопластической модели деформирования бетона. Так, для ассоциированного закона течения

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = d\lambda \mathbf{a} \quad (23)$$

условием возникновения пластических деформаций, развивающихся по нормали к поверхности текучести (рис. 11) с вектором $\mathbf{a}^T = \partial f(\boldsymbol{\sigma}) / \partial \boldsymbol{\sigma}$, является

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{a}^T d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{a}^T \mathbf{D}_e (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\lambda \mathbf{a}) = 0. \quad (24)$$

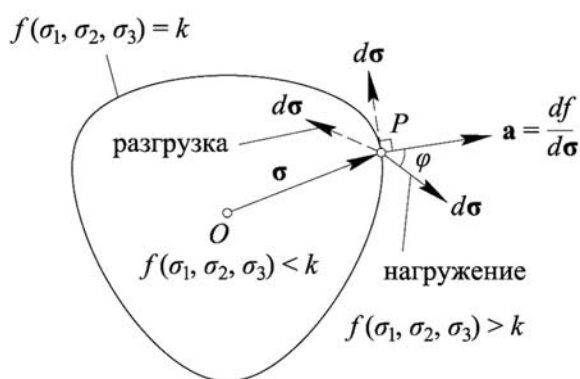


Рис. 11. Геометрическая интерпретация режима нагружения и разгрузки

С учетом того, что

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^e = d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad (25)$$

обобщенный закон Гука можно представить в следующем виде:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_e (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^p) = \mathbf{D}_e (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\lambda \mathbf{a}). \quad (26)$$

Откуда параметр $d\lambda$ определяется уравнением

$$d\lambda = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{D}_e}{\mathbf{a}^T \mathbf{D}_e \mathbf{a}} d\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (27)$$

Тем самым, вектор приращения напряжений

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_e (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^p) = \left(\mathbf{D}_e - \mathbf{D}_e \frac{\mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{D}_e}{\mathbf{a}^T \mathbf{D}_e \mathbf{a}} \right) d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_{ep} d\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (28)$$

где

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{D}_e \mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{D}_e}{\mathbf{a}^T \mathbf{D}_e \mathbf{a}}, \quad (29)$$

есть упругопластическая матрица бетона.

Для идеально упругопластических моделей деформирования бетона соотношения между приращениями напряжений и деформаций должны быть разработаны отдельно для стадий упругой деформации и пластического течения, а также содержать общие критерии разрушения. Зависимости между напряжениями и деформациями, отвечающие линейно упругой модели деформирования твердого тела, широко известны, универсальны и достаточно хорошо разработаны. Однако, для построения упругопластических моделей деформирования бетона необходимо получить зависимости между приращениями напряжения и деформаций при пластическом течении. Для этого, в первую очередь, следует определить условие текучести, характеризующее начало пластического течения и критерии вида разрушения бетона.

В работе предложена модифицированная модель течения Мизеса – Губера для идеально упругопластического материала, применяемая для арматурной стали и бетона при высоких гидростатических напряжениях; получила развитие модель течения Друкера – Прагера (с постоянными Мора – Кулона c и φ для бетонов) путем введения критерия растрескивания бетона при растяжении.

На основе критерия разрушения Виллама – Варнке для хрупких материалов построена пятипараметрическая модель идеально упругопластического бетона, поверхность текучести которой определяется уравнением:

$$f(\sigma_0, \tau_0, \theta) = \frac{1}{\bar{r}(\sigma_0, \theta)} \frac{\tau_0}{R_b} - 1 = 0, \quad (30)$$

где $\bar{r}(\sigma_0, \theta) = \sqrt{5}r(\sigma_0, \theta)$.

Вектор течения \mathbf{a} определяется по правилу дифференцирования сложных функций:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \sigma_0} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \tau_0} \frac{\partial \tau_0}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (31)$$

Меридианы растяжения и сжатия поверхности текучести (30) представляют собой квадратные параболы (рис. 12, *a*), а след кривой на девиаторной плоскости (рис. 12, *б*) определяется формулой (17), которую представим в виде:

$$\bar{r}(\sigma_0, \theta) = \frac{s+t}{v}, \quad (32)$$

где

$$s(\sigma_0, \theta) = 2(r_c^3 - r_i r_c^2) \cos \theta, \quad t(\sigma_0, \theta) = (2r_i r_c - r_c^2) \sqrt{4(r_c^2 - r_i^2) \cos^2 \theta + 5r_i^2 - 4r_i r_c}, \quad (33)$$

$$v(\sigma_0, \theta) = 4(r_c^2 - r_i^2) \cos^2 \theta + (r_c - 2r_i)^2.$$

Производные, входящие в уравнение (31), равны

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{r}} = -\frac{\tau_0}{R_b} \frac{1}{\bar{r}^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial \tau_0} \frac{\partial \tau_0}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_0} \frac{\partial \sqrt{(2I_2(D_\sigma))/5}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{r(\theta) R_b} \frac{1}{5\tau_0} \mathbf{s} \quad (34)$$

и

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \sigma_0} = \frac{v(\partial s / \partial \sigma_0 + \partial t / \partial \sigma_0) - (s+t) \partial v / \partial \sigma_0}{v^2}. \quad (35)$$

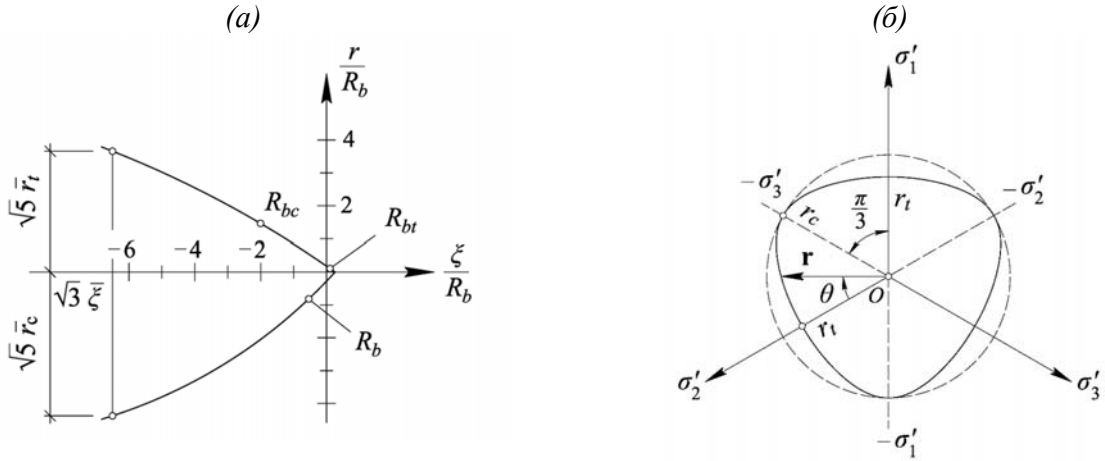


Рис. 12. Поверхность текучести: *a* – меридианы растяжения и сжатия, *b* – девиаторное сечение (R_{bc} – предел прочности бетона на равномерное двухосное сжатие, $r = \sqrt{5}\tau_0$, $\xi = \sqrt{3}\sigma_0$)

Предварительно, в уравнении (35) требуется определить следующие производные:

$$\frac{\partial s}{\partial \sigma_0} = 2 \cos \theta \left[(3r_c^2 - r_t^2) \frac{\partial r_c}{\partial \sigma_0} - 2r_c r_t \frac{\partial r_t}{\partial \sigma_0} \right], \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial \sigma_0} = & \left[2r_c \frac{\partial r_t}{\partial \sigma_0} + 2(r_t - r_c) \frac{\partial r_c}{\partial \sigma_0} \right] \sqrt{4(r_c^2 - r_t^2) \cos^2 \theta + 5r_t^2 - 4r_t r_c} + \\ & \frac{(2r_t r_c - r_c^2) \left[(-8r_t \cos^2 \theta + 10r_t - 4r_c) \frac{\partial r_t}{\partial \sigma_0} + (8r_c \cos^2 \theta - 4r_t) \frac{\partial r_c}{\partial \sigma_0} \right]}{2\sqrt{4(r_c^2 - r_t^2) \cos^2 \theta + 5r_t^2 - 4r_t r_c}} \end{aligned} \quad (37)$$

и

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma_0} = (8r_t \sin^2 \theta - 4r_c) \frac{\partial r_t}{\partial \sigma_0} + (8r_c \cos^2 \theta + 2r_c - 4r_t) \frac{\partial r_c}{\partial \sigma_0}. \quad (38)$$

Кроме того,

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial \mathbf{\sigma}} = \frac{1}{3} [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (39)$$

и

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{\sigma}} = \frac{\partial [\arccos(p/q)]}{\partial \mathbf{\sigma}} = -\frac{1}{\sqrt{1-(p/q)^2}} \frac{q(\partial p/\partial \mathbf{\sigma}) - p(\partial q/\partial \mathbf{\sigma})}{q^2}. \quad (40)$$

Производные в числителе уравнения (40) равны

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{\sigma}} = [2 \ -1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad \frac{\partial q}{\partial \mathbf{\sigma}} = \sqrt{\frac{6}{5}} \frac{1}{\tau_0} \mathbf{s}, \quad (41)$$

причем

$$\mathbf{s} = \frac{1}{3} [2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 \quad 2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1 \quad 2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2 \quad 0 \ 0 \ 0]^T. \quad (42)$$

После вычисления компонентов вектора $\partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$ физические уравнения для бетона получаются на основании выражения для упругопластической матрицы \mathbf{D}_{ep} , определяемой согласно (29):

Аналогичный подход используется для нахождения компонентов вектора $\partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$ в случае шестипараметрической модели деформирования бетона.

В случае упругопластической модели деформирования бетона с учетом упрочнения вектор приращения пластической деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}_p$ определяется законом течения:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = d\lambda \mathbf{a} = \mathbf{a} d\lambda. \quad (43)$$

Выражение для эквивалентной пластической деформации имеет вид:

$$\varepsilon_p = \int d\boldsymbol{\varepsilon}_p = \int \sqrt{d\boldsymbol{\varepsilon}_p^T d\boldsymbol{\varepsilon}_p}. \quad (44)$$

С учетом (43) и (44) получим:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_p = d\lambda A \quad \text{или} \quad d\lambda = d\varepsilon_p / A, \quad (45)$$

где $A = \sqrt{\mathbf{a}^T \mathbf{a}}$.

После подстановки отношения (45) в уравнение (43) получим:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_p = d\varepsilon_p \frac{\mathbf{a}}{A}. \quad (46)$$

Выражение для приращения компонент вектора напряжений можно записать так:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_e (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}_p). \quad (47)$$

Приращение пластической деформации связано с приращением общей деформации уравнением:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_p = \mathbf{C} d\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (48)$$

где \mathbf{C} – матрица преобразования приращения полной деформации в приращение пластической деформации.

Матричное уравнение, связывающее приращение напряжений и полных деформаций, имеет вид:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_{ep} d\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (49)$$

Приравняв правые части уравнений (47) и (49), получим выражение для определения матрицы упругопластичности:

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D}_e + \mathbf{D}_p = \mathbf{D}_e - \mathbf{D}_e \mathbf{C}. \quad (50)$$

Следовательно, приращение вектора напряжений $d\boldsymbol{\sigma}$ может быть определено из приращения полных деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}$, если найдена матрица \mathbf{C} и определена матрица \mathbf{D}_e .

Для того чтобы получить выражение для матрицы \mathbf{C} , рассмотрим условие согласованности:

$$df(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \chi) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} d\boldsymbol{\varepsilon}_p + \frac{\partial f}{\partial \chi} d\chi = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} d\boldsymbol{\varepsilon}_p + \frac{\partial f}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} d\boldsymbol{\varepsilon}_p = 0. \quad (51)$$

Подставляя в последнее уравнение выражение (47), и с учетом закона течения (43), получим:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{D}_e (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\lambda \mathbf{a}) + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} d\lambda \mathbf{a} + \frac{\partial f}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} d\lambda \mathbf{a} = 0. \quad (52)$$

Отсюда может быть найдена скалярная функция для $d\lambda$:

$$d\lambda = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{D}_e d\boldsymbol{\varepsilon}}{h + \mathbf{a}^T \mathbf{D}_e \mathbf{a}}. \quad (53)$$

Таким образом, в соответствии с (43), имеем:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_p = \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T \mathbf{D}_e}{L} d\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (54)$$

где $L = h + \mathbf{a}^T \mathbf{D}_e \mathbf{a}$.

Откуда матрица \mathbf{C} равна

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T \mathbf{D}_e}{L}. \quad (55)$$

С учетом уравнения (45), получим выражение для определения приращения эквивалентных пластических деформаций $d\varepsilon_p$:

$$d\varepsilon_p = \mathbf{a}^T \mathbf{D}_e d\boldsymbol{\varepsilon} \frac{A}{L}. \quad (56)$$

Следовательно, матрицы пластичности и упругопластичности бетона равны

$$\mathbf{D}_p = -\mathbf{D}_e \mathbf{C} = -\frac{\mathbf{D}_e \mathbf{a}\mathbf{a}^T \mathbf{D}_e}{L} \quad \text{и} \quad \mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D}_e \left(\mathbf{E} - \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T \mathbf{D}_e}{L} \right) = \mathbf{D}_e (\mathbf{E} - \mathbf{C}), \quad (57)$$

соответственно.

В диссертации предложена модифицированная модель Друкера – Прагера с учетом изотропного упрочнения и разупрочнения, позволяющая учитывать дилатацию бетона, наблюдаемую в ряде экспериментов. Для учета дилатации, связанной с разупрочнением бетона, коническая поверхность Друкера – Прагера в основании дополнена эллиптической «крышкой».

Так как пластические деформации в бетоне появляются раньше достижения материалом предельной поверхности, поэтому существует начальная поверхность текучести, которая постепенно расширяется до достижения предельной поверхности (рис. 13).

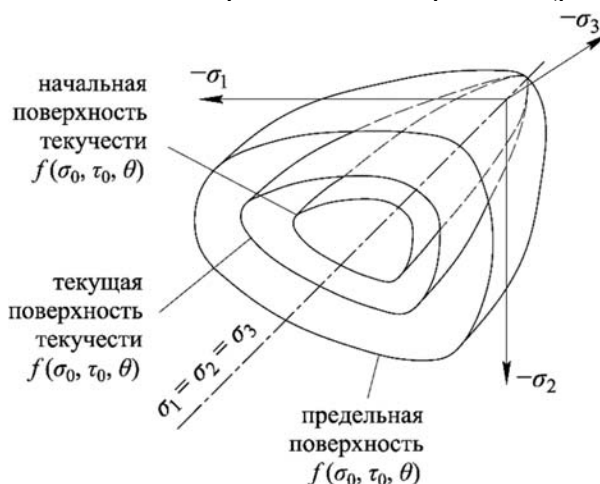


Рис. 13. Схематическое изображение поверхности текучести бетона в трехмерном пространстве напряжений

Построена модифицированная пятипараметрическая модель Виллама – Варнке с учетом упрочнения, функция текучести которой имеет вид:

$$f(\sigma_0, \tau_0, \theta) = \frac{1}{kr(\sigma_0, \theta)} \frac{\tau_0}{R_b} - 1 = 0. \quad (58)$$

Положение текущей поверхности текучести при заданных характеристиках напряженного состояния $(\sigma_0, \tau_0, \theta)$ определяется значением коэффициента k , который находится из соотношения

$$k = \frac{\tau_0/R_b}{r(\sigma_0, \theta)}, \quad (59)$$

где $r(\sigma_0, \theta)$ соответствует предельной поверхности текучести, а τ_0 – текущему напряженному состоянию.

Так как при относительно небольших нагрузках пластические деформации в бетоне не возникает, будем полагать, что при $k < 0,3$ имеют место только упругие деформации. При $k = 0,3$ точка σ , характеризующая текущее напряженное состояние, находится на начальной поверхности текучести. Пластические деформации в бетоне возникают, когда $0,3 \leq k \leq 1,0$. Если $k = 1$, то текущая поверхность текучести совпадает с предельной поверхностью. При достижении предельной поверхности бетон считается разрушенными и расчет останавливается.

В этом случае меридианы растяжения и сжатия текущей поверхности текучести описываются уравнениями

$$r_t = k \left[a_0 + a_1 \frac{\sigma_0}{R_b} + a_2 \left(\frac{\sigma_0}{R_b} \right)^2 \right], \quad r_c = k \left[b_0 + b_1 \frac{\sigma_0}{R_b} + b_2 \left(\frac{\sigma_0}{R_b} \right)^2 \right], \quad (60)$$

а упругопластическая матрица бетона находится из выражения

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D}_e \left(\mathbf{E} - k \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T \mathbf{D}_e}{\mathbf{a}^T \mathbf{D}_e \mathbf{a}} \right). \quad (61)$$

Приведенная методика избавляет от необходимости получения для условия текучести (58) полной матрицы \mathbf{D}_{ep} , соответствующей изотропному упрочнению бетона. При этом она позволяет учитывать изотропное расширение поверхности текучести, размер которой определяется в зависимости от текущего напряженного состояния отношением (τ_0/R_b) .

Аналогичный подход используется для построения шестипараметрической модели деформирования бетона с учетом изотропного упрочнения, меридианы предельной поверхности которой описываются уравнениями (19) и (20). Помимо этого, в работе разработана модель течения Мизеса – Губера для стержневой стальной арматуры и жесткого армирования с учетом смешанного упрочнения.

В пятой главе рассмотрены сопряженные с явлением ползучести вопросы теории железобетона – выводы уравнений механического состояния для идеального и стареющего бетона в приращениях путем наложения приращений мгновенных и запаздывающих деформаций. Наложение деформаций ползучести для нестареющего (идеального) бетона реализуется по принципу суперпозиций Больцмана: каждое частичное приращение деформации ползучести зависит лишь от величины и длительности частичного приращения напряжения. Для стареющего бетона приращение деформации ползучести зависит еще и от прочности бетона в момент приложения частичного напряжения. При этом имеет место взаимонезависимость частичных деформаций ползучести относительно приращения уровня напряжений.

В условиях объемного напряженного состояния бетона разрешающее уравнение ползучести в матричном виде может быть представлено следующим образом:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{\sigma}(t_0) \mathbf{A} \frac{1}{E(t_0)} + \int_{t_0}^t C(t, \tau) d\boldsymbol{\sigma}(\tau) \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{\sigma}(t_0) \mathbf{A} \frac{1}{E(t_0)} + \int_{t_0}^t C^*(t, \tau) d\boldsymbol{\sigma}(\tau), \quad (62)$$

где мера ползучести $C^*(t, \tau) = C(t, \tau) + \frac{1}{E(\tau)} - \frac{1}{E(t)}$, $\boldsymbol{\sigma}(t_0) = \boldsymbol{\sigma}_0$ – вектор напряжений в момент t_0 и $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ – вектор суммарных деформаций в момент t .

Матрица \mathbf{A} в уравнениях (62) учитывает влияние коэффициента Пуассона и для случая объемного напряженного состояния имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix}. \quad (63)$$

Принимая меру ползучести И.Е. Прокоповича – Е.Н. Щербакова

$$C(t, \tau) = C(\infty, 28) \Theta(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}], \quad (64)$$

учитывающую старение бетона. Единой для параметров $E(\tau)$, $R(\tau)$ и $C(t, \tau)$ причиной эволюции является физико-химические процессы в материале. Это обстоятельство влечет существование единой функции старения $\Theta(\tau)$, которой пропорциональны меры деформативности $1/E(\tau)$, прочности $1/R(\tau)$ и ползучести $1/C(t, \tau)$. Так как, согласно экспериментам А.В. Яшина, предельная деформативность $\varepsilon_R(\tau)$ слабо зависит от возраста бетона τ и деформацию $\varepsilon_R(\tau)$ полагают инвариантной от τ . В этом случае функцию старения можно принять в виде:

$$\Theta(\tau) = \frac{R(28)}{R(\tau)} \equiv \frac{E(28)}{E(\tau)} \equiv \frac{C(t, 28)}{C(t, \tau)}. \quad (65)$$

При функции общей податливости $J(t, \tau)$ на временном интервале (τ_0, τ_1) (рис. 14) суммарная деформация равна

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma(\tau_0)}{E(\tau_0)} + C(\tau_1, \tau_0) \sigma(\tau_0). \quad (66)$$

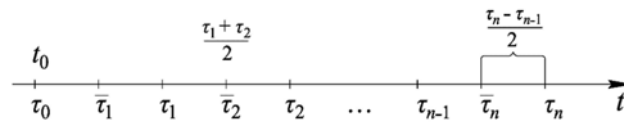


Рис. 14. Временная шкала для функции общей податливости $J(t, \tau)$

Согласно этой шкале представим деформацию ε_0 в виде:

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma(\bar{\tau}_1)}{E(\bar{\tau}_1)} + C(\tau_1, \bar{\tau}_1) \sigma(\bar{\tau}_1) \quad \text{на} \quad (\bar{\tau}_1, \tau_1). \quad (67)$$

Поскольку $\varepsilon_e(\bar{\tau}_1) = \sigma(\bar{\tau}_1)/E(\bar{\tau}_1)$, то

$$\varepsilon_e(\bar{\tau}_1) = \varepsilon_0 - C(\tau_1, \bar{\tau}_1)\sigma(\bar{\tau}_1), \quad (68)$$

где $\bar{\tau}_1 = (\tau_0 + \tau_1)/2$.

Упругой деформации $\varepsilon_e(\bar{\tau}_1)$ соответствует напряжение $\sigma(\bar{\tau}_1)$, определяемое из равенства

$$\varepsilon_0 = \left[\frac{1}{E(\tau_0)} + C(\tau_1, \tau_0) \right] \sigma(\tau_0) = \left[\frac{1}{E(\bar{\tau}_1)} + C(\tau_1, \bar{\tau}_1) \right] \sigma(\bar{\tau}_1). \quad (69)$$

Тем самым,

$$\sigma(\bar{\tau}_1) = \frac{E(\bar{\tau}_1) [1 + E(\tau_0)C(\tau_1, \tau_0)]}{E(\tau_0) [1 + E(\bar{\tau}_1)C(\tau_1, \bar{\tau}_1)]} \sigma(\tau_0). \quad (70)$$

Очевидно, что при неизменной полной деформации ε_0 упругая составляющая $\varepsilon_e(\bar{\tau}_1)$ будет уменьшаться за счет увеличения деформации ползучести на интервале (τ_0, τ_2) :

$$\varepsilon_{cr}(\tau_2, \tau_0) = [C(\tau_2, \bar{\tau}_1) - C(\tau_2, \bar{\tau}_2)]\sigma(\bar{\tau}_1) + C(\tau_2, \bar{\tau}_2)\sigma(\bar{\tau}_2). \quad (71)$$

Напряжение, соответствующее упругой деформации $\varepsilon_e(\bar{\tau}_2)$, равно

$$\sigma(\bar{\tau}_2) = \frac{E(\bar{\tau}_2) [\varepsilon_0 - [C(\tau_2, \bar{\tau}_1) - C(\tau_2, \bar{\tau}_2)]\sigma(\bar{\tau}_1)]}{1 + E(\bar{\tau}_2)C(\tau_2, \bar{\tau}_2)}. \quad (72)$$

Обобщая приведенные выше рассуждения, получим равенство для определения $\sigma(\bar{\tau}_n)$:

$$\sigma(\bar{\tau}_n) = \frac{E(\bar{\tau}_n) \left[\varepsilon_0 - \sum_{i=1}^{n-1} [C(\tau_n, \bar{\tau}_i) - C(\tau_n, \bar{\tau}_{i+1})] \sigma(\bar{\tau}_i) \right]}{1 + E(\bar{\tau}_n)C(\tau_n, \bar{\tau}_n)}, \quad n = 2, 3, 4, \dots, m. \quad (73)$$

Особенностью данного подхода является то, что при наложении упругих деформаций $\varepsilon_e(\bar{\tau}_n)$ и деформаций ползучести $\varepsilon_{cr}(\tau_n)$, деформации $\varepsilon_e(\bar{\tau}_n)$ запаздывают относительно $\varepsilon_{cr}(\tau_n)$ на время $(\tau_n - \tau_{n-1})/2$.

Для функции общей податливости $J^*(t, \tau) = 1/E(t) + C^*(t, \tau)$ уравнение релаксации напряжений на временном отрезке (t_0, t_1) (рис. 15) имеет вид:

$$\sigma(t_n) = E(t_n) \left[\varepsilon_0 - \sum_{i=1}^n [C^*(t_n, t_{i-1}) \Delta \sigma_{i-1}] \right], \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (74)$$

где $\Delta \sigma_0 = \sigma(t_0)$, $\Delta \sigma_i = \sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})$.



Рис. 15. Временная шкала для функции общей податливости $J^*(t, \tau)$

Полученные уравнения (73) и (74) отвечают наследственной теории старения Г.Н. Маслова – Н.Х. Арутюняна. При постоянной полной деформации $\varepsilon_0 = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_{cr}(t, \tau)$ реализуется уменьшение упругой составляющей $\varepsilon_e(t)$ за счет роста деформаций ползучести $\varepsilon_{cr}(t, \tau)$. Такая трансформация деформаций влечет за собой уменьшение напряжений $\sigma(t)$ при постоянной суммарной деформации ε_0 – релаксацию напряжений.

Отличие функций $J(t, \tau)$ и $J^*(t, \tau)$ заключается в том, что в уравнении для $J(t, \tau)$ мгновенная деформация $1/E(\tau)$ отвечает напряжениям $\sigma(\tau) = 1$ в момент их приложения τ , а в уравнении для $J^*(t, \tau)$ напряжениям $\sigma(\tau) = 1$ соответствует упругая деформация $1/E(t)$ в момент наблюдения t . Очевидно, что функции $J(t, \tau)$ и $J^*(t, \tau)$ тождественны друг-другу.

Рассмотрим процедуру построения и решения уравнений ползучести бетона методом конечных элементов.

Как и прежде, разделим время t на ряд временных интервалов: $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n$, в которых $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$.

Приращение упругой деформации на отрезке $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ равно

$$\Delta \varepsilon_e(t_n) - \Delta \varepsilon_e(t_{n-1}) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{1}{E(\tau)} d\sigma. \quad (75)$$

Приняв усредненное значение временного интервала $\bar{t}_n = (t_n + t_{n-1})/2 = t_n - 0,5\Delta t_n$ по теореме о среднем, заменим модуль упругости $E(\tau)$ в указанных пределах интегрирования значением $E(\bar{t}_n)$ в средней точке \bar{t}_n . Тогда, получим:

$$\Delta \varepsilon_e(t_n) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{1}{E(\tau)} d\sigma = \frac{\Delta \sigma(t_n)}{E(\bar{t}_n)}. \quad (76)$$

Приращение деформации ползучести равно

$$\Delta \varepsilon_{cr}(t_n, t_{n-1}) = \varepsilon_{cr}(t_n) - \varepsilon_{cr}(t_{n-1}) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} C(t, \tau) d\sigma. \quad (77)$$

Под знаком интеграла в правой части полученного уравнения возраст бетона τ представляет собой интегрируемую переменную. Когда приращение Δt_n достаточно мало, меру ползучести $C(t, \tau)$ можно заменить на значение $C(t, \bar{t}_n)$ в средней точке \bar{t}_n . Тогда

$$\Delta \varepsilon_{cr}(t_n, t_{n-1}) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} C(t, \tau) d\sigma = C(t_n, \bar{t}_n) \Delta \sigma(t_n). \quad (78)$$

Рассмотрим процедуру решения полученного уравнения. В дальнейших суждениях, для сокращения записи формул приняты следующие обозначения: $\bar{t}_n = t_{n-0,5}$, $\varepsilon_{n-1}^{cr} = \varepsilon_{cr}(t_{n-1})$, $\varepsilon_n^{cr} = \varepsilon_{cr}(t_n)$, $\Delta \sigma_{n-1} = \Delta \sigma(t_{n-1})$, $\Delta \sigma_n = \Delta \sigma(t_n)$ и т.д.

Для трех соседних моментов времени t_{n-1} , t_n , t_{n+1} соответствующие интервалы равны $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ и $\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ (рис. 16).

Тогда приращения деформаций ползучести для трех соседних моментов t_{n-1} , t_n , t_{n+1} равны

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{n-1}^{cr} &= C(t_{n-1}, t_0) \Delta \sigma_0 + C(t_{n-1}, t_{1-0,5}) \Delta \sigma_1 + \dots + C(t_{n-1}, t_{n-0,5}) \Delta \sigma_{n-1}, \\ \Delta \varepsilon_n^{cr} &= C(t_n, t_0) \Delta \sigma_0 + C(t_n, t_{1-0,5}) \Delta \sigma_1 + \dots + C(t_n, t_{n-0,5}) \Delta \sigma_n, \\ \Delta \varepsilon_{n+1}^{cr} &= C(t_{n+1}, t_0) \Delta \sigma_0 + C(t_{n+1}, t_{1-0,5}) \Delta \sigma_1 + \dots + C(t_{n+1}, t_{n+1-0,5}) \Delta \sigma_{n+1}. \end{aligned} \quad (79)$$

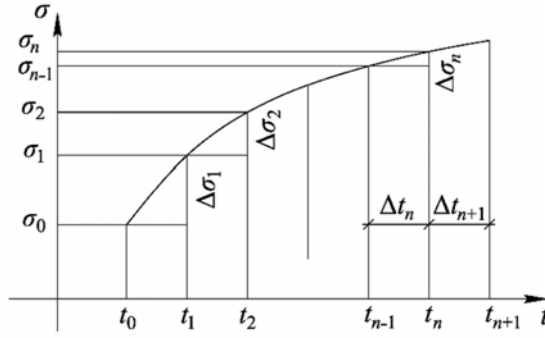


Рис. 16. К формулировке уравнений ползучести в приращениях

Введем в полученные уравнения общую меру ползучести (64) и рассмотрим выражение

$$C(t_{n+1}, t_{i-0,5}) - C(t_n, t_{i-0,5}) = \varphi(t_{i-0,5}) \left[1 - e^{-\gamma(t_{n+1}-t_{i-0,5})} \right] - \varphi(t_{i-0,5}) \left[1 - e^{-\gamma(t_n-t_{i-0,5})} \right] =$$

$$= \varphi(t_{i-0,5}) \left[e^{-\gamma(t_n-t_{i-0,5})} - e^{-\gamma(t_n+\Delta t_{n+1}-t_{i-0,5})} \right] = \varphi(t_{i-0,5}) e^{-\gamma(t_n-t_{i-0,5})} \left[1 - e^{-\gamma\Delta t_{n+1}} \right],$$
(80)

где $i = 1, 2, 3, \dots$

С учетом уравнения (80) на основании формул (79), имеем:

$$\Delta \varepsilon_{n+1}^{cr} = \varepsilon_{n+1}^{cr} - \varepsilon_n^{cr} = (1 - e^{-\gamma\Delta t_{n+1}}) \Omega_{n+1} + \Delta \sigma_{n+1} C(t_{n+1}, t_{n+1-0,5}),$$
(81)

где

$$\Omega_{n+1} = \Delta \sigma_0 \varphi(t_0) e^{-\gamma(t_n-t_0)} + \Delta \sigma_1 \varphi(t_{1-0,5}) e^{-\gamma(t_n-t_{1-0,5})} + \dots$$

$$\dots + \Delta \sigma_{n-1} \varphi(t_{n-1-0,5}) e^{-\gamma(t_n-t_{n-1-0,5})} + \Delta \sigma_n \varphi(t_{n-0,5}) e^{-\gamma(t_n-t_{n-0,5})}.$$
(82)

Аналогичным образом получим уравнение для приращения $\Delta \varepsilon_n^{cr}$:

$$\Delta \varepsilon_n^{cr} = \varepsilon_n^{cr} - \varepsilon_{n-1}^{cr} = (1 - e^{-\gamma\Delta t_n}) \Omega_n + \Delta \sigma_n C(t_n, t_{n-0,5}),$$
(83)

в котором

$$\Omega_n = \Delta \sigma_0 \varphi(t_0) e^{-\gamma(t_{n-1}-t_0)} + \Delta \sigma_1 \varphi(t_{1-0,5}) e^{-\gamma(t_{n-1}-t_{1-0,5})} + \dots$$

$$\dots + \Delta \sigma_n \varphi(t_{n-0,5}) e^{-\gamma(t_{n-1}-t_{n-0,5})} + \Delta \sigma_{n-1} \varphi(t_{n-1-0,5}) e^{-\gamma(t_{n-1}-t_{n-1-0,5})}.$$
(84)

Сопоставляя выражения для Ω_{n+1} и Ω_n , можно заметить, что

$$\Omega_{n+1} = \Omega_n e^{-\gamma\Delta t_n} + \Delta \sigma_n \varphi(t_{n-0,5}) e^{-0,5\gamma\Delta t_n}.$$
(85)

Приращения упругой деформации и деформации ползучести в матричной форме имеют вид:

$$\Delta \varepsilon_n^e = \frac{1}{E(t_{n-0,5})} \mathbf{A} [\Delta \sigma_n] \quad \text{и} \quad \Delta \varepsilon_n^{cr} = \mathbf{L}_n + C(t_n, t_{n-0,5}) \mathbf{A} [\Delta \sigma_n],$$
(86)

где \mathbf{A} – матрица коэффициентов Пуассона, определяемая согласно (63),

$$\mathbf{L} = [L_x \quad L_y \quad L_z \quad L_{xy} \quad L_{yz} \quad L_{zx}]^T, \quad \mathbf{\Omega} = [\Omega_x \quad \Omega_y \quad \Omega_z \quad \Omega_{xy} \quad \Omega_{yz} \quad \Omega_{zx}]^T.$$

Компоненты векторов \mathbf{L} и $\mathbf{\Omega}$ определяются выражениями:

$$\mathbf{L}_n = (1 - e^{-\gamma\Delta t_n}) \mathbf{\Omega}_n, \quad \mathbf{\Omega}_n = \mathbf{\Omega}_{n-1} e^{-\gamma\Delta t_{n-1}} + \mathbf{A} [\Delta \sigma_{n-1}] \varphi(t_{n-1-0,5}) e^{-0,5\gamma\Delta t_{n-1}}, \quad \mathbf{\Omega}_1 = \mathbf{A} [\Delta \sigma_0] \varphi(t_0).$$
(87)

Параметр $\mathbf{\Omega}(t) = [\Omega_1 \quad \Omega_2 \quad \dots \quad \Omega_{n-1} \quad \Omega_n]^T$ представляет собой массив, характеризующий историю нагружения бетона.

Определив массив $\mathbf{\Omega}(t)$, приращения $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{cr}(t_n, t_0) = [\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_1^{cr} \quad \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_2^{cr} \quad \dots \quad \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^{cr}]^T$ вычисляется на каждом временном интервале по формуле (86).

Вектор приращений напряжений $\Delta\boldsymbol{\sigma}_n$ связан с вектором приращения упругих деформаций $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^e$ следующим соотношением:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{D}_n^e [\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^e] = \mathbf{D}_n^e [\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^{cr}], \quad (88)$$

где $\mathbf{D}_n^e = E_{n-0,5} \mathbf{A}^{-1}$ – матрица упругих постоянных в средней точке отрезка Δt_n .

Принимая во внимание, что $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{B} [\Delta\boldsymbol{\delta}_n]$ и с учетом формулы (88), получим:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{D}_n^{cr} \mathbf{B} [\Delta\boldsymbol{\delta}_n] - \mathbf{L}_n, \quad (89)$$

где

$$\mathbf{D}_n^{cr} = [\mathbf{E} + C(t_n, t_{n-0,5}) \mathbf{D}_n^e \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{D}_n^e = \frac{E_{n-0,5}}{1 + C(t_n, t_{n-0,5}) E_{n-0,5}} \mathbf{A}^{-1}, \quad (90)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица.

Как известно, уравнение равновесия, выражающее связь между внешними и внутренними силами, имеет вид:

$$\Delta\mathbf{P}_n = \int_V \mathbf{B}^T [\Delta\boldsymbol{\sigma}_n] dV, \quad (91)$$

где $\Delta\mathbf{P}_n$ – вектор приращения внешней узловой нагрузки.

С учетом формул (89) и (91) получим разрешающее уравнение в приращениях, учитывающее ползучесть:

$$\mathbf{K}_n [\Delta\boldsymbol{\delta}_n] = \Delta\mathbf{P}_n + \Delta\mathbf{P}_n^{cr}, \quad (92)$$

в котором

$$\mathbf{K}_n = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_n^{cr} \mathbf{B} dV \quad \text{и} \quad \Delta\mathbf{P}_n^{cr} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_n^{cr} \mathbf{L}_n dV \quad (93)$$

где \mathbf{K}_n – матрица жесткости конструкций, $\Delta\mathbf{P}_n^{cr}$ – эквивалентное приращение нагрузки вследствие деформаций ползучести.

В диссертации сформулированы предпосылки для разработки трехмерных моделей ползучести бетона на основе механических моделей вязкоупругих и упруго-вязкопластических тел. При этом для рассмотренных моделей использовался единообразный подход к получению уравнений равновесия в приращениях.

В шестой главе уделено внимание процедурам, связанным с реализацией расчета массивных бетонных и железобетонных конструкций методом конечных элементов. На основании сформулированных в предыдущих главах критериев разрушения и пластичности бетона приведена методика и алгоритм нелинейного расчета железобетонных конструкций, находящихся в условиях объемного напряженного состояния, с учетом как хрупкого разрушения, так и упругопластического деформирования сжатого бетона.

Нелинейный расчет конструкций в ВК ПРИНС производится шагово-итерационным методом в приращениях. Уравнение равновесия конструкции для шага нагружения записывается так:

$$(\mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_{NL_1} + \mathbf{K}_{NL_2}) \Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{P}, \quad (94)$$

где $\Delta\mathbf{K} = 0,5(\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_0)$.

Матрицы жесткости \mathbf{K}_0 и \mathbf{K}_1 вычисляются в начале и конце каждой итерации. Нелинейные матрицы жесткости для отдельного конечного элемента определяются согласно уравнениям:

$$\mathbf{K}_{NL_i} = \tilde{\mathbf{K}}_{NL_i} + \mathbf{K}_{NL_i}^d, \quad \mathbf{K}_{NL_i}^d = 0,5 \left(\Delta \mathbf{u}^T \frac{\partial}{\partial \Delta \mathbf{u}_j} \tilde{\mathbf{K}}_{NL_i} \right), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (95)$$

где $\tilde{\mathbf{K}}_{NL_i}$ и $\mathbf{K}_{NL_i}^d$ – прямая и дифференциальная матрицы жесткости i -го порядка, n – число степеней свободы конечного элемента.

Матрица начальных напряжений и вектор внешних узловых сил определяются из уравнений:

$$\mathbf{K}_\sigma = \int_V \mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{G} dV \quad \text{и} \quad \mathbf{P} = - \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{p} dV, \quad (96)$$

где \mathbf{G} – матрица, связывающая повороты с узловыми перемещениями, \mathbf{S} – матрица, составленная из компонентов напряжений; \mathbf{N} – матрица функций формы, выражающая перемещений внутренних точек конечного элемента через узловые перемещения; \mathbf{p} – вектор, составленный из компонентов распределенной нагрузки.

Решение уравнения (94) производится итерационным способом дополнительной нагрузки, что равносильно применению модифицированного метода Ньютона – Рафсона, по уравнению

$$(\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_\sigma)_j^{(i)} \Delta \mathbf{u}_j^{(i)} = \Delta \mathbf{P}_j - (\Delta \mathbf{K} + \mathbf{K}_{NL_1} + \mathbf{K}_{NL_2})_j^{(i-1)} \Delta \mathbf{u}_j^{(i-1)}, \quad (97)$$

где j – номер шага нагружения, i – номер итерации.

В этом случае матрица жесткости факторизуется только один раз в начале шага, что упрощает вычисления, но требует большего количества итераций для достижения заданной точности.

При достижении сходимости итерационного процесса вычисляются полные значения перемещений и напряжений по формулам:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \Delta \boldsymbol{\sigma}, \quad (98)$$

где $\Delta \mathbf{u}$ и $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ – приращения перемещений и напряжений, соответственно.

Приращения напряжений, обусловленные приращением деформаций $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$, определяются по формуле:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_{ep} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (99)$$

где \mathbf{D}_{ep} – упругопластическая матрица характеристик материала.

В общем случае, на каждом шаге нагружения анализируется напряженное состояние материала и при возникновении пластических деформаций и (или) трещин производится корректировка напряжений с учетом принятых диаграмм деформирования. Это требует процесса уравновешивания конструкции. Итерации равновесия производятся по формуле (94), которая модифицируется к виду:

$$(\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_\sigma)_j^{(i)} \Delta \mathbf{u}_j^{(i)} = \mathbf{P}_j - \mathbf{F}_j^{(i-1)}, \quad (100)$$

где \mathbf{P} – вектор внешних узловых сил, \mathbf{F} – вектор узловых сил, статически эквивалентных внутренним напряжениям.

Вектор \mathbf{F} находится по формуле:

$$\mathbf{F} = - \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (101)$$

В формуле (100) матрица жесткости принимается равной матрице \mathbf{K}_j , найденной в конце шага при итерациях по формуле (97). Таким образом, в формуле (97) итерируется матрица жесткости, а в формуле (100) – вектор узловых сил, эквивалентный внутренним напряжениям.

Матрица жесткости \mathbf{K} для отдельного конечного элемента находится согласно уравнению:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_e \mathbf{B} dV, \quad (102)$$

где \mathbf{B} – матрица, связывающая компоненты деформаций элемента с компонентами узловых перемещений (геометрическая матрица), \mathbf{D}_e – матрица обобщенного закона Гука, V – объем конечного элемента.

Одной из проблем, возникающих при нелинейном расчете конструкций методом конечных элементов, является сходимость шагово-итерационных процедур. Для устранения данной проблемы используется метод ускорения сходимости, применяемый при решении системы нелинейных уравнений вида (94), в основе которого положены энергетические соотношения.

При выполнении шагово-итерационных процедур важным вопросом является учет изменения жесткости бетона при разгрузке из сжатой зоны с переходом в растянутую и наоборот. Указанные пути разгрузки и догрузки материала предполагают разработку единой методики определения приведенного модуля E_{red} , предпосылки которой кратко изложены ниже.

1. Модель хрупкого разрушения бетона сжатой зоны

До трещинообразования деформирование бетона в растянутой зоне предполагается линейно-упругим с начальным модулем E_0 . Нагружение растянутого бетона после образования трещины (участок $C - D$) происходит с фиктивным модулем упругости (рис. 17, а):

$$E_{cr} = \frac{\sigma_{cr}}{\varepsilon_m - \varepsilon_{cr}}, \quad (103)$$

где ε_m – предельная деформация бетона с трещинами при растяжении, σ_{cr} и ε_{cr} – напряжение и деформация трещинообразования, соответственно.

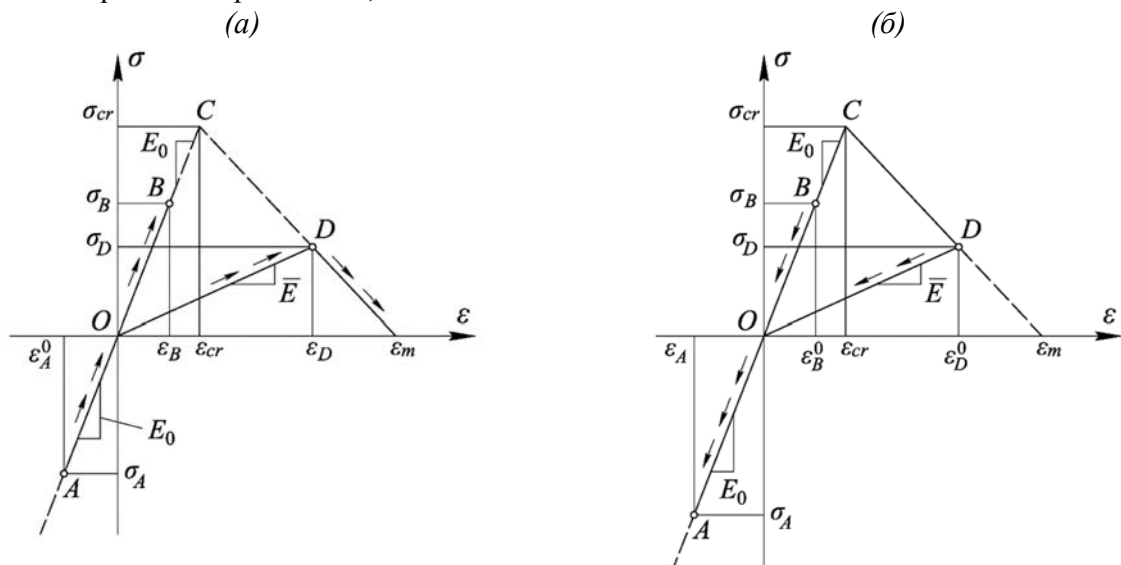


Рис. 17. К определению приведенного модуля E_{red} для хрупкой модели разрушения:
 а – разгрузка из сжатой зоны с переходом в растянутую, б – то же, из растянутой зоны в сжатую

Напряжение в растянутом бетоне после возникновения трещины находится по формуле

$$\sigma = \sigma_{cr} \frac{\varepsilon_m - \varepsilon_D}{\varepsilon_m - \varepsilon_{cr}}, \quad (104)$$

где ε_D – текущее значение деформации.

Разгрузка из сжатой зоны бетона (начальное состояние – точка A (рис. 17, a)) в растянутую может происходить двумя путями: в отсутствие трещины в растянутом бетоне разгрузка происходит по пути $A-O-B$ с начальным модулем E_0 , а при ее наличии – по траектории $A-O-D$ с переменным модулем упругости. Так, на участке ε_A^0-O разгрузка производится с начальным модулем E_0 , а на участке $O-\varepsilon_D$ (рис. 17, a) с модулем

$$\bar{E} = \frac{1}{\varepsilon_D} \frac{\sigma_{cr} (\varepsilon_m - \varepsilon_D)}{\varepsilon_m - \varepsilon_{cr}}, \quad \varepsilon_{cr} < \varepsilon_D < \varepsilon_m. \quad (105)$$

Значение приведенного модуля упругости E_{red} на пути деформирования $\varepsilon_A^0-O-\varepsilon_D$, вычисляется на основании энергетического подхода по формуле:

$$E_{red} = \frac{E_0 (\varepsilon_A^0)^2 + \bar{E} (\varepsilon_D)^2}{(|\varepsilon_A^0| + \varepsilon_D)^2}. \quad (106)$$

Разгрузка из растянутой зоны бетона с переходом в сжатую будет происходить по траектории $B-O-A$ при отсутствии трещины в растянутом бетоне и по пути $D-O-A$ при ее наличии (рис. 17, b), подчиняется тем же законам, что и разгрузка бетона из сжатой зоны в растянутую.

2. Упругопластические модели деформирования бетона

В случае идеальной упругопластической модели и упругопластической модели деформирования бетона с упрочнением (рис. 18), при отсутствии трещины в растянутом бетоне разгрузка из сжатой зоны в растянутую происходит по пути $A-O_1-B$ с начальным модулем упругости E_0 . При наличии трещины разгрузка будет производиться по траектории $A-O_1-D$ с переменным модулем упругости: так, на участках деформирования $\varepsilon_A^0-\varepsilon_p$ и $\varepsilon_p-\varepsilon_B$ с начальным модулем

$$E_0 = \frac{\sigma_A}{\varepsilon_A^0 - \varepsilon_p} = \frac{\sigma_B}{\varepsilon_p - \varepsilon_B}, \quad (107)$$

а на участке $\varepsilon_p-\varepsilon_D$ с модулем

$$\bar{E} = \frac{\sigma_D}{\varepsilon_D + |\varepsilon_p|}. \quad (108)$$

в зависимости от значения текущей деформации ε_D .

Текущее напряжение находится из подобия треугольников (рис. 18):

$$\sigma_D = \sigma_{cr} \frac{\varepsilon_m - \varepsilon_p - \varepsilon_D}{\varepsilon_m - \varepsilon_{cr}}. \quad (109)$$

Таким образом,

$$\bar{E} = \frac{\sigma_{cr}}{\varepsilon_D + |\varepsilon_p|} \frac{\varepsilon_m - \varepsilon_p - \varepsilon_D}{\varepsilon_m - \varepsilon_{cr}}. \quad (110)$$

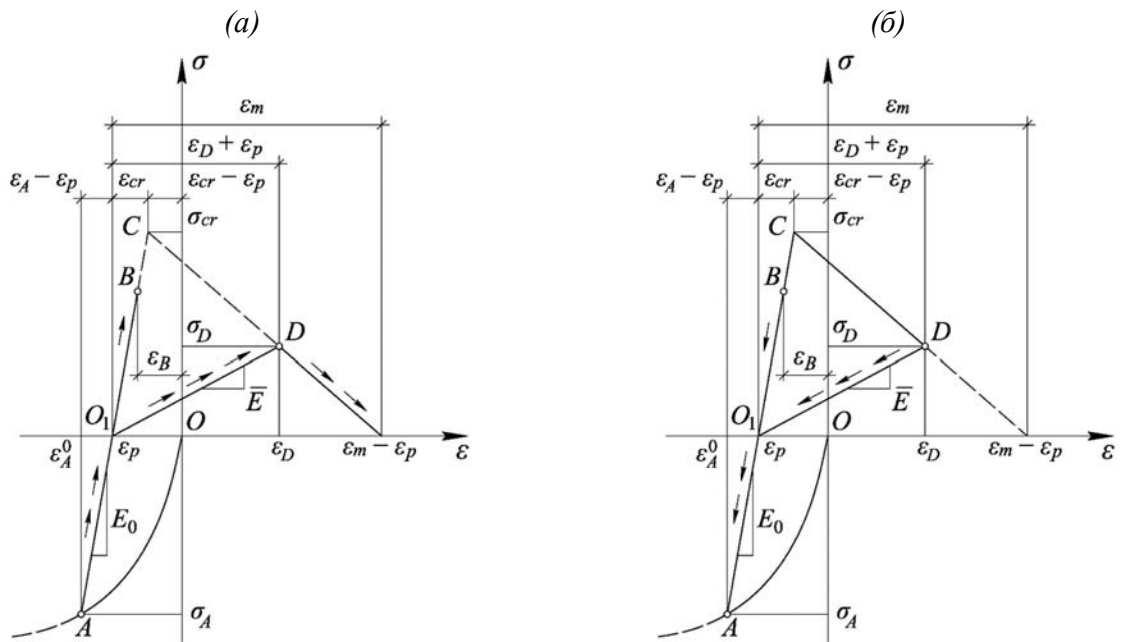


Рис. 18. К определению модуля E_{red} для упругопластической модели с упрочнением:
 a – разгрузка из сжатой зоны с переходом в растянутую, b – то же, из растянутой зоны в сжатую

Имея величины модулей E_0 и \bar{E} , а также значения начальной ε_A^0 и текущей ε_D деформаций, приведенный модуль упругости E_{red} на пути разгрузки $A-O_1-D$ определяется по формуле (106).

Разгрузка из растянутой зоны бетона с переходом в сжатую происходит по траектории $B-O_1-A$ с начальным модулем упругости E_0 при отсутствии трещины (рис. 18, b) и по пути $D-O_1$ с переменным модулем упругости \bar{E} , определяемым по формуле (110), при ее наличии. В случае отсутствия пластических деформаций в сжатом бетоне в формулах (109) и (110) принимается $\varepsilon_p = 0$. На пути разгрузки $D-O_1-A$ приведенный модуль упругости E_{red} также определяется по формуле (106).

В процессе расчета конструкции шагово-итерационным методом должны учитываться различные пути нагружения материала. Характер нагружения материала в ВК ПРИНС учитывается параметром NOLOAD, который обозначается трехзначным числом, представляющим собой комбинацию цифр 1 и 2, где 1 – разгрузка, 2 – нагрузка или догрузка. Первая цифра соответствует характеру нагружения материала по третьему главному направлению, вторая и третья цифры в обозначении указанного параметра отвечают характеру нагружения по второму и первому главным направлениям, соответственно.

Анализ путей нагружения материала производится на основе определения признака схемы в зависимости от значений и знака главных деформаций ε_1 , ε_2 и ε_3 на текущем и предшествующем шаге. Если в области сжатия компоненты главных деформаций на текущем шаге, по сравнению с предшествующим, изменяют свои значения и при этом не меняют знак, то для установления характера нагружения выполняется сравнение интенсивности главных деформаций (ε_i) и $(\varepsilon_i)^0$ на текущем и предшествующем шаге, соответственно.

Всего, в общей сложности, определено 16 возможных случаев поведения материала, представленные в табл. 6.1 диссертации, которые позволяют однозначно установить в характерной точке твердого тела признаки переходы материала от «растяжения к сжатию» или от «сжатия к растяжению» по каждому главному направлению, что особенно важно для корректного определения модуля упругости бетона с инициированными трещинами.

Условием возникновения трещины в растянутом бетоне является достижение главным напряжением по одному из главных направлений предельной величины сопротивления трещинообразованию R_{bt} , при этом трещина образовывается в направлении, ортогональном действующему напряжению. Физическая матрица \mathbf{D}_e для бетона с одной, двумя и тремя трещинами формируется следующим образом. При образовании трещины по первому главному направлению напряженное состояние бетона по двум другим рассматривается как плосконапряженное и используется модифицированный критерий прочности Мизеса – Губера, который сводится к виду:

$$f[I_1(T_\sigma), I_2(D_\sigma)] = \sqrt{\beta[3I_2(D_\sigma) + \alpha I_1(T_\sigma)]} = \sigma_0, \quad (111)$$

где α и β – эмпирические коэффициенты, которые на основании экспериментальных данных принимаются равными 0,355 и 1,355, соответственно.

С принятыми значениями коэффициентов α и β критерий (111) достаточно хорошо согласовывается с результатами двухосных испытаний бетона Купфера (Н. Kufper).

Первоначально напряжения в конечном элементе вычисляются в глобальных осях конструкции $x - y - z$. В момент возникновения первой трещины фиксируется положение главных осей $1 - 2 - 3$ (рис. 19).

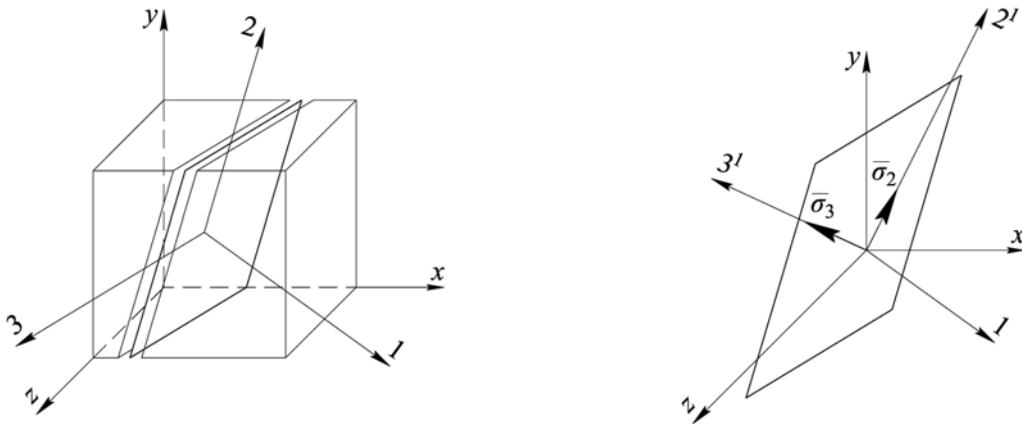


Рис. 19. Анализ напряженного состояния бетона при образовании одной трещины

При возникновении первой трещины материал в объеме элемента распадается, согласно принятой гипотезе, на ряд плосконапряженных пластинок. В каждой такой пластинке существуют такие площадки с нормальными 2^1 и 3^1 , на которых нормальные напряжения имеют экстремальные значения. Дальнейший анализ трещинообразования производится по главным напряжениям $\bar{\sigma}_2$ и $\bar{\sigma}_3$, действующим вдоль осей 2^1 и 3^1 (рис. 19). Данные напряжения, как и угол поворота осей 2^1 и 3^1 относительно осей 2 и 3 находится по общим правилам сопротивления материалов. Затем расчет конструкции выполняется в осях $1 - 2^1 - 3^1$, для чего предварительно вычисляется матрица направляющих косинусов этих осей в глобальных осях $x - y - z$.

При наличии двух трещин модуль упругости бетона по третьему направлению определяется по диаграмме $\sigma - \varepsilon$ для одноосного напряженного состояния. При этом физическая матрица будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12}^c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23}^c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31}^c \end{bmatrix}. \quad (112)$$

При наличии трех трещин модуль упругости E равен нулю.

Модуль E в матрице (112) принимается равным либо начальному модулю, если бетон в третьем главном направлении растянут, либо касательному модулю кривой $\sigma - \varepsilon$, если бетон по третьему главному направлению сжат.

Эксперименты показывают, что треснувший бетон с арматурой передает значительные касательные напряжения. При этом на величину сдвиговой жесткости влияют такие факторы, как ширина раскрытия трещины, коэффициент армирования, диаметр арматуры, структура бетона и др. Поэтому модуль сдвига для бетона с трещиной в первом главном направлении принимается как функция текущей деформации:

$$G_{12}^c = 0,25G \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{0,004} \right), \quad G_{12}^c = 0, \quad \text{если } \varepsilon_1 > 0,004. \quad G_{31}^c = G_{12}^c \quad (113)$$

где G – модуль сдвига для бетона без трещин, ε_1 – растягивающая деформация по первому главному направлению.

На основании сформулированных положений разработаны программы, адаптированные к ВК ПРИНС.

Выполнены верификационные расчеты бетонных и железобетонных конструкций с учетом трехосного напряженного состояния бетона, используемые для отладки разработанных алгоритмов для нелинейного решателя ВК ПРИНС. При этом в процессе расчетов для моделирования работы бетона сжатой зоны использовались как модель хрупкого разрушения, так и упругопластические модели деформирования. Полученные в процессе расчетов результаты сопоставлялись с данными экспериментов, выполненных, в том числе автором, и показали достоверность и приемлемую точность, некоторые из которых приведены далее.

Ниже представлены результаты расчетов экспериментально испытанных автором бетонных и железобетонных балок с различным соотношением h/l .

В расчетах принимались следующие физико-механические характеристики бетона: $R_b = 56,8$ МПа, $R_{bt} = 3,3$ МПа, $E_0 = 4,2 \cdot 10^4$ МПа, $\mu = 0,2$, $\rho = 2500$ кг/м³. Армирование балки ЭБА-2 моделировалось одномерными стержневыми элементами с тремя степенями свободы в узле. В качестве диаграммы деформирования стали принималась диаграмма Прандтля с пределом текучести $R_s = 400$ МПа и модулем упругости $E_s = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Нагружение и условие опирания балок соответствовали методике проведенных экспериментов. Суммарная нагрузка на каждую балку принималась равной $P = 36$ кН. Был задан 41 шаг нагружения, коэффициент к нагрузке на первом шаге принимался равным 0,01, а на остальных шагах – 0,03. Расчеты выполнялись шагово-итерационным методом до достижения предельной нагрузки. По результатам расчетов исследовались процесс трещинообразования в бетоне, напряжения в арматуре, прогибы балки, а также предельная (разрушающая) нагрузка.

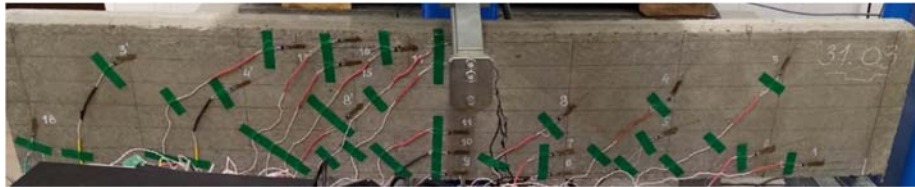
Результаты расчета указанных балок, полученные с применением ВК ПРИНС по модели хрупкого разрушения сжатого бетона при разбиении указанных балок на сетку объемных конечных элементов $70 \times 10 \times 4$ для балок ЭББА-1, ЭБА-2 и $36 \times 20 \times 8$ – для балки ЭБС-3, представлены в табл. 3 – табл. 5. Для модели хрупкого разрушения бетона сжатой зоны использовался модифицированный пятипараметрический критерий разрушения, приведенный в третьей главе диссертации.

Характер разрушения рассматриваемых балок показан на рис. 20 – рис. 22, соответственно.

Таблица 3. Результаты расчета испытуемой балки ЭББА-1

Исследуемая величина	Результаты экспериментов (усредненные значения)	Результаты расчета в ВК ПРИНС
Предельная нагрузка, кН	10,28	11,16
Погрешность, %	–	+7,88

Разрушение испытуемой балки ЭББА-1, $P_{cr} = 10,28$ кН



Трещинообразование согласно расчету по ВК ПРИНС (модель 1), $P_{cr} = 11,16$ кН

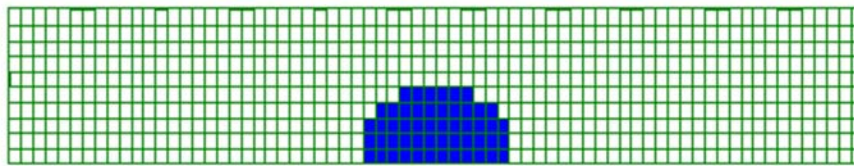
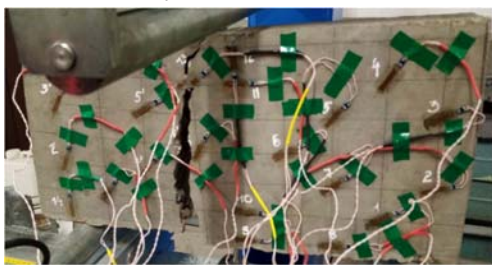


Рис. 20. Характер разрушения испытуемой балки ЭББА-1

Таблица 4. Результаты расчета испытуемой балки ЭБС-3

Исследуемая величина	Результаты экспериментов (усредненные значения)	Результаты расчета в ВК ПРИНС
Предельная нагрузка, кН	28,637	30,00
Погрешность, %	–	+4,76

Разрушение испытуемой балки ЭБС-3,
 $P_{cr} = 28,637$ кН



Трещинообразование согласно расчету по
ВК ПРИНС (модель 1), $P_{cr} = 30$ кН

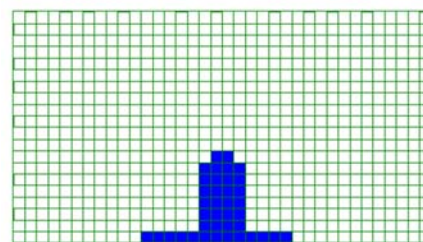
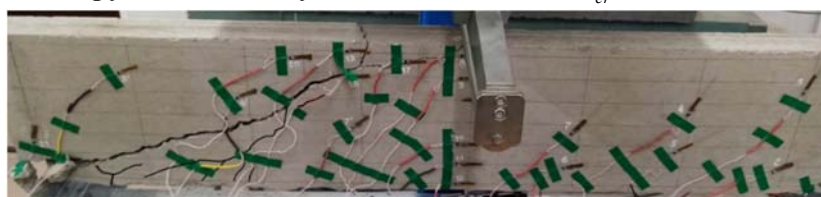


Рис. 21. Характер разрушения испытуемой балки (ЭБС-3)

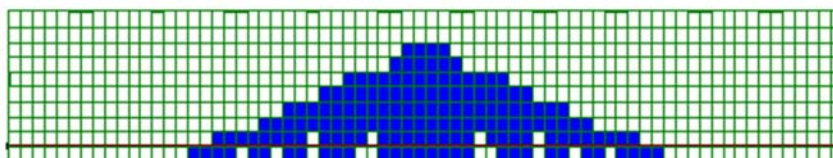
Таблица 5. Результаты расчета испытуемой балки ЭБА-2

Исследуемая величина	Прогибы балки (мм) при нагрузке, кН			Нагрузка трещино- образования, кН	Предельная нагрузка, кН
	18	21	24		
Результаты экспериментов (усредненные значения)	0,96	1,17	1,488	9,375	28,849
Результаты расчета в ВК ПРИНС	0,742	1,131	1,476	9,00	27,36
Погрешность, %	-29,40	-3,33	-0,81	-4,17	-5,44

Разрушение испытуемой балки ЭБА-2, $P_{cr} = 28,849$ кН



Трещинообразование согласно расчету по ВК ПРИНС (модель 1), $P_{cr} = 27,36$ кН

**Рис. 22.** Характер разрушения испытуемой балки (ЭБА-2)

Таким образом, верификация разработанного конечного элемента, проведенная на основании тестовых расчетов балки в условиях чистого изгиба, показала схожий механизм разрушения испытанных балок, приемлемую точность и достоверность полученных результатов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках проведенного исследования получены следующие наиболее важные выводы и результаты:

1. Предложена геометрическая интерпретация напряженного состояния в точке, тесно связанная с определением главных напряжений в тригонометрической форме. На основании этого приведена общая концепция представления критериев разрушения с использованием системы координат $\xi - r - \theta$ в трехмерном пространстве, удобная для реализации методом конечных элементов, которая в дальнейшем будет применяться для разработки как новых критериев прочности и пластичности бетона, так и для модификации существующих.

2. Изготовлены и испытаны серии образцов, тело бетона которых заключалось в стальную обойму цилиндрической формы. Для регулирования величины бокового обжатия бетона применялись стальные обоймы различного диаметра с разной высотой и толщиной стенки. В процессе экспериментов прикладываемая на образцы нагрузка и деформации стальной обоймы посредством тензометрии регистрировались синхронно, что, в итоге, позволило получить координаты точек предельной поверхности и нормируемые значения прочности бетона, выраженные через напряжения на октаэдрических площадках. Кроме того, установлено, что

бетон в зависимости от соотношения между осевым напряжением и боковым давлением может вести себя как квазиупругий, пластичный размягчающийся или пластичный упрочняющийся материал. При этом с возрастанием бокового давления осевая прочность бетона увеличивается. Данное обстоятельство имеет место при значениях гидростатических напряжений $\sigma_0 > 2R_b$.

3. Для верификации разработанных моделей деформирования бетона и сравнения механизма разрушения элементов при изгибе были изготовлены и испытаны в условиях трехточечного изгиба образцы бетонных и железобетонных балок. Посредством тензометрии анализировалось их напряженно-деформированное состояние, включая деформации продольной стальной арматуры. В результате чего определены усредненные значения разрушающей нагрузки, нагрузки трещинообразования, прогибы балок, получены поля главных деформаций, а также эпюры напряжений в продольной арматуре, отвечающие упругой работе бетона, началу трещинообразования и стадии, предшествующей разрушению.

4. Приведены в удобном для практической реализации методом конечных элементов виде наиболее достоверные феноменологические критерии прочности бетона и критерии текучести для арматурной стали, которые в работе классифицированы как «одно- двух- трех- четырех- пяти- и шестипараметрические», что подразумевает под собой количество стандартных испытаний бетонных образцов для определения параметров того или иного критерия.

5. На основании экспериментальных данных, в том числе полученных автором, сформулирован модифицированный критерий прочности Друкера – Прагера, дополненный параметрами критерия Мора – Кулона для бетонов. Построены расчетные диаграммы критерия прочности Отоззена, позволяющие для случая трехосного сжатия при заданных значениях σ_1/R_b и σ_2/R_b определить предельное значение σ_3/R_b в режимах: сжатие – сжатие – сжатие и растяжение – сжатие – сжатие, а также для условий смешанного двухосного сжатия. Приведен пятипараметрический критерий прочности для бетона, который является вариантом усовершенствования критерия разрушения Виллама – Варнке для хрупких материалов путем добавления двух дополнительных параметров для описания искривленных меридианов растяжения и сжатия предельной поверхности. Полученная таким образом поверхность разрушения адекватно описывает различные режимы сжатия бетона, как с низким, так и с высоким гидростатическим напряжением.

6. Предложен и экспериментально подтвержден шестипараметрический критерий разрушения бетона для случая двух- и трехосного сжатия, который обобщает наиболее удачные формулировки известных критериев прочности. Сравнение меридианов поверхности разрушения показывает, что в случае трехосного сжатия в режиме низких и средних гидростатических напряжений данный критерий хорошо согласуется как с пятипараметрическим критерием Виллама – Варнке, так и с экспериментальными данными, в том числе полученными автором. Кроме того, результаты данного критерия находятся в приемлемой согласованности с данными двухосных испытаний бетона. Таким образом, разработанный критерий является универсальным и позволяет получить достоверные показатели прочности различных видов бетонов как при трехосном нагружении в режимах низкой и высокой боковой компрессии, так и в условиях двухосного сжатия, а соответствующая ему поверхность в пространстве главных напряжений может рассматриваться в качестве поверхности разрушения в случае модели хрупкого раздробления бетона сжатой зоны, а также интерпретироваться как предельная поверхность текучести в случае модели бетона как упругопластического материала.

7. Сформулирован общий подход к построению идеальной упругопластической модели деформирования бетона на основании ассоциированного закона течения. Параметр $d\lambda$, свидетельствующий о наличии пластических деформаций, определяется уравнением

$d\lambda = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{D}_e}{\mathbf{a}^T \mathbf{D}_e \mathbf{a}} d\boldsymbol{\varepsilon}$. При этом матрица упругопластичности бетона, связывающая приращения

напряжений и приращения полных деформаций, равна $\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{D}_e \mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{D}_e}{\mathbf{a}^T \mathbf{D}_e \mathbf{a}}$.

8. Предложена модифицированная модель течения Мизеса – Губера для идеально упругопластического материала, применяемая для арматурной стали и бетона при высоких гидростатических напряжениях. Кроме того, разработана модель течения Друкера – Прагера, соответствующая идеально упругопластическому материалу и дополненная параметрами критерия Мора – Кулона для бетонов и условием растрескивания бетона при растяжении. При этом отвечающая этой модели поверхность текучести аппроксимируется так, что ребра шестиугольной пирамиды Мора – Кулона совпадают с образующими конуса Друкера – Прагера таким образом, что конус описывает пирамиду Мора – Кулона вдоль меридианов растяжения или сжатия.

9. На основе критерия разрушения Виллама – Варнке для хрупких материалов построена пятипараметрическая модель идеально упругопластического бетона. При этом вектор течения, нормальный к поверхности текучести, определяется по правилу дифференцирования сложных функций.

10. Сформулирован общий подход к построению упругопластической модели деформирования бетона с учетом упрочнения, согласно которому приращение пластической деформации связано с приращением общей деформации уравнением $d\boldsymbol{\varepsilon}_p = \left(\frac{\mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{D}_e}{h + \mathbf{a}^T \mathbf{D}_e \mathbf{a}} \right) d\boldsymbol{\varepsilon}$. При

этом скалярная функция, свидетельствующая о наличии пластических деформаций, равна

$d\lambda = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{D}_e d\boldsymbol{\varepsilon}}{h + \mathbf{a}^T \mathbf{D}_e \mathbf{a}}$, а матрица упругопластичности бетона определяется уравнением

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D}_e \left(\mathbf{E} - \frac{\mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{D}_e}{h + \mathbf{a}^T \mathbf{D}_e \mathbf{a}} \right).$$

11. Предложена модифицированная упругопластическая модель Друкера – Прагера (с параметрами критерия Мора – Кулона для бетонов) с учетом изотропного упрочнения и разупрочнения, позволяющая учитывать дилатацию бетона, наблюдаемую в ряде экспериментов. Для учета дилатации, связанной с разупрочнением бетона, коническая поверхность Друкера – Прагера в основании дополнена эллиптической «крышкой».

12. Построена модифицированная пятипараметрическая модель упругопластического деформирования бетона с учетом упрочнения. Положение текущей поверхности текучести при заданных характеристиках напряженного состояния $(\sigma_0, \tau_0, \theta)$ определяется значением коэффициента k , который находится из соотношения $k = \frac{\tau_0/R_b}{r(\sigma_0, \theta)}$, где $r(\sigma_0, \theta)$ соответствует

предельной поверхности текучести, а τ_0/R_b – текущему напряженному состоянию. В этом случае

упругопластическая матрица бетона равна $\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D}_e \left(\mathbf{E} - k \frac{\mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{D}_e}{\mathbf{a}^T \mathbf{D}_e \mathbf{a}} \right)$. Тем самым, приведенная

методика избавляет от необходимости получения для условия текучести $f(\sigma_0, \tau_0, \theta) = 0$ полной матрицы \mathbf{D}_{ep} , соответствующей изотропному упрочнению бетона. При этом она позволяет

учитывать изотропное расширение поверхности текучести, размер которой определяется в зависимости от текущего напряженного состояния отношением τ_0/R_b .

13. Подробно исследована и критически оценена упругопластическая модель бетона с повреждениями (Concrete Damaged Plasticity), которая на сегодняшний день является одной из самых востребованных моделей для прочностного расчета массивных железобетонных конструкций и реализована в ряде зарубежных расчетных комплексах (например, Abaqus). В результате выполнения верификационных расчетов установлено, что ввиду наличия множества неопределенных входных параметров указанной модели (например, ψ , e , R_{bc}/R_b , K , d_t , d_c) получить для конкретной задачи однозначную величину предельной нагрузки не представляется возможным. В связи с этим, применительно к этой модели, более уместно говорить о некотором диапазоне величин предельных нагрузок в зависимости от значений параметров в исходных данных. Сравнение результатов расчета экспериментально испытанных бетонных и железобетонных балок, полученных с применением ВК ПРИНС по разработанной при участии автора модели хрупкого разрушения бетона сжатой зоны, показывает более близкие к экспериментальным значения предельных нагрузок, чем по упругопластической модели бетона с повреждениями, полученные в программе Abaqus.

14. Сформулирована модель течения Мизеса – Губера для стальной стержневой арматуры и жесткого армирования с учетом смешанного упрочнения, позволяющая в полной мере учитывать эффект Баушингера.

15. Исследованы сопряженные с явлением ползучести вопросы теории железобетона – выводы уравнений механического состояния для идеального и стареющего бетона в приращениях путем наложения приращений мгновенных и запаздывающих деформаций. Наложение деформаций ползучести для нестареющего (идеального) бетона реализуется по принципу суперпозиций Больцмана: каждое частичное приращение деформации ползучести зависит лишь от величины и длительности частичного приращения напряжения. Для стареющего бетона приращение деформации ползучести зависит еще и от прочности бетона в момент приложения частичного напряжения. При этом имеет место взаимонезависимость частичных деформаций ползучести относительно приращения уровня напряжений.

16. Принимая общую меру ползучести И.Е. Прокоповича – Е.Н. Щербакова с функцией старения $\Theta(\tau) = C(t, 28)/C(t, \tau)$, построены уравнения релаксации и ползучести бетона в приращениях для случая одномерного и объемного напряженного состояния элемента. В алгоритме статического расчета бетонных и железобетонных конструкций методом конечных элементов для учета ползучести в систему уравнений равновесия включено дополнительное слагаемое ΔP_n^{cr} – эквивалентное приращение нагрузки вследствие запаздывающих деформаций, обусловленное изменением физической матрицы бетона на рассматриваемом временном интервале.

17. Сформулированы предпосылки для разработки на основе метода конечных элементов трехмерных моделей ползучести бетона как механических моделей вязкоупругих и вязкопластических тел, в том числе комбинированных, включающих в себя упругий, вязкий и жесткопластический компоненты.

18. На основании сформулированных критериев разрушения и пластичности бетона приведена методика и алгоритм нелинейного расчета железобетонных конструкций, находящихся в условиях объемного напряженного состояния, с учетом как хрупкого разрушения, так и упругопластического деформирования бетона сжатой зоны. Для ускорения сходимости решения системы нелинейных уравнений представлен метод, в основу которого положены энергетические соотношения.

19. Разработана процедура определения приведенного модуля упругости для различных моделей деформирования бетона при разгрузке из сжатой зоны с переходом в растянутую и наоборот. Кроме того, изложена методика учета трещинообразования в растянутом бетоне, рассмотрены принципы построения физической матрицы для элемента с трещинами в одном, двух и трех взаимно ортогональных направлениях.

20. С целью отладки разработанных алгоритмов для нелинейного решателя ВК ПРИНС выполнены верификационные расчеты бетонных и железобетонных конструкций с учетом трехосного напряженного состояния бетона, в которых для моделирования работы бетона сжатой зоны использовались как модель хрупкого разрушения, так и упругопластические модели деформирования. Полученные результаты сопоставлялись с экспериментальными данными и показали достоверность и приемлемую точность.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в журналах, индексируемых в МБЦ

1. **Markovich, A.S.** Analysis Of The Theory Of Calculation Of Fiber-Reinforced Concrete With Non-Steel Fibers / **A.S. Markovich**, D.D. Koroteev, M.I. Abu Mahadi, D.A. Miloserdova // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2019. - 675(1). - 012013. DOI: 10.1088/1757-899X/675/1/012013

2. Abu Mahadi, M.I. The Problem of Numerical Analysis of Rigidity in Binded Reinforced Concrete Elements / M.I. Abu Mahadi, **A.S. Markovich**, K.S. Akifyeva, D.A. Miloserdova. // Journal of Mechanics of Continua and Mathematical Sciences. – March 2019. - Special Issue-1. – P. 400-409. <https://doi.org/10.26782/jmcms.2019.03.00039>

3. **Markovich, A.S.** Influence of Reinforcement of Contour High-Strength Reinforcement without Adhesion to Concrete on the Deflections of Monolithic Beams / **A.S. Markovich**, V.S. Kuznetsov, Yu. A. Shaposhnikova, M.I. Abu Mahadi // Journal of Mechanics of Continua and Mathematical Sciences. – March 2019. - Special Issue-1. – P. 390-399. <https://doi.org/10.26782/jmcms.2019.03.00038>

4. **Markovich, A.S.** Deformations and Stresses in the Structural Reinforcement when using Wending Rods / **A.S. Markovich**, V.S. Kuznetsov, M.I. Abu Mahadi, Yu.A. Shaposhnikova // Journal of Mechanics of Continua and Mathematical Sciences. – November 2019. - №4. - P. 78-89. <https://doi.org/10.26782/jmcms.spl.4/2019.11.00009>

5. **Markovich, A.S.** The stress-strain state of the external wall panel with opening of residential building in case bias / **A.S. Markovich**, M.I. Abu Mahadi, D.A. Miloserdova, M.S.A. Asad // AIP Conf. Proc. - 2022. - 2559 (1). - 050013. <https://doi.org/10.1063/5.0099222>

6. Chiadighikaobi, P.C. Physicomechanical Properties of Carbon Nanotubes Reinforced Cementitious Concrete – A Review / P.C. Chiadighikaobi, A.A. Abd Noor, J.P. Vladimir, **A.S. Markovich**, L.A. Saad, D. E. Ewa, S.K. Aderomose // Open Civil Engineering Journal. - 2023. - Vol.17. - P. 1-11. DOI: 10.2174/18748368-v17-230912-2023-6

7. **Markovich, A.S.** Properties of dispersed fibers for efficient concrete reinforcement / **A.S. Markovich**, D.A. Miloserdova // AIP Conf. Proc. - 2023. - 2936 (1). - 040003. <https://doi.org/10.1063/5.0180333>

8. Agapov, V. Nonlinear analysis of solid reinforced concrete structures with cracks / V. Agapov, **A. Markovich** // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2023. – Vol. 19. – No. 4. – P. 14–26. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2023-19-4-14-26>

9. Agapov, V.P. Failure criterion for concrete under volumetric stress state conditions / V.P. Agapov, **A.S. Markovich** // Construction Materials and Products. - 2023. - 6(6). - 7. – P. 1-12. DOI: 10.58224/2618-7183-2023-6-6-7

Публикации в изданиях, включенных в Перечень РУДН/ВАК

10. **Маркович, А.С.** Проблема численного анализа жесткости изгибаемых железобетонных элементов / **А.С. Маркович**, М.И. Абу Махади, Д.А. Милосердова, К.С. Акифьева, М.А. Асад // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. - 2018. - Т. 14. - №3. - С. 233-241. doi: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-233-241
11. Agapov, V.P. Dynamic method for determining critical loads in the PRINS computer program / V.P. Agapov, **A.S. Markovich** // Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. - 2020. - Vol. 16. - N. 5. - P. 380-389. doi: 10.22363/1815-5235-2020-16-5-380-389
12. Agapov, V.P. Investigation of the accuracy and convergence of the results of thin shells analysis using the PRINS program / V.P. Agapov, **A.S. Markovich** // Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. - 2021. - Vol. 17. - N. 6. - P. 617-627. doi: 10.22363/1815-5235-2021-17-6-617-627
13. **Маркович, А.С.** Свойства дисперсных волокон для эффективного армирования бетонов / **А.С. Маркович**, Д.А. Милосердова // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. - 2022. - Т. 18. - №2. - С. 182-192. doi: 10.22363/1815-5235-2022-18-2-182-192
14. Агапов, В.П. Модели нелинейного деформирования бетона при трехосном напряженном состоянии и их реализация в вычислительном комплексе ПРИНС / В.П. Агапов, **А.С. Маркович**, К.Р. Айдемиров // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. - 2023. - Т. 19. - №2. - С. 162-177. doi: 10.22363/1815-5235-2023-19-2-162-177
15. Агапов, В.П. Расчет массивных железобетонных конструкций с учетом трещинообразования / В.П. Агапов, **А.С. Маркович** // Промышленное и гражданское строительство. - 2023. - № 7. - С. 43-49. DOI: 10.33622/0869-7019.2023.07.43-49
16. Агапов, В.П. Конечный элемент для расчета массивных железобетонных конструкций с учетом трещинообразования / В.П. Агапов, **А.С. Маркович** // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. - 2023. - Т. 19. - №6. - С. 593-607. doi: 10.22363/1815-5235-2023-19-6-593-607
17. Агапов, В.П. Критерий прочности бетона для двух- и трехосного напряженного состояния / В.П. Агапов, **А.С. Маркович** // Транспортные сооружения. - 2023. - Т 10. -№ 4. - С. 1-25. <https://doi.org/10.15862/09SATS423>
18. Агапов, В.П. Шестипараметрический критерий прочности для бетона / В.П. Агапов, **А.С. Маркович** // Строительная механика и расчет сооружений. - 2023. - №6. - С. 20-32. DOI 10.37538/0039-2383.2023.6.20.32
19. Ларионов, Е.А. Релаксация напряжений в железобетонных элементах конструкций / Е.А. Ларионов, **А.С. Маркович**, Е.А. Гринько // Строительная механика и расчет сооружений. - 2024. - №1. - С. 32-38. DOI 10.37538/0039-2383.2024.1.32.38

Монографии

20. Агапов, В.П. Нелинейные модели бетонных и железобетонных конструкций. Теория и реализация в ВК ПРИНС : монография / В.П. Агапов, **А.С. Маркович**. - Москва : РУДН, 2023. - 264 с.

АННОТАЦИЯ ДИССЕРТАЦИИ

Маркович Алексей Семенович

«Развитие нелинейных моделей бетонных и железобетонных конструкций на основе метода конечных элементов»

Современные строительные нормы и правила предписывают проводить расчеты железобетонных конструкций в нелинейной постановке с учетом реальных свойств бетона и арматуры. В виду этого в настоящей работе разработаны модели хрупкого разрушения и упругопластического деформирования бетона, а также принципы учета трещинообразования в бетоне. Указанные расчетные модели прошли экспериментальную проверку и позволяют получить достоверные значения прочности бетонных и железобетонных конструкций, находящихся в условиях двух- и трехосного напряженного состояния. Приведена методика, реализующая указанные модели деформирования, разработан алгоритм нелинейного расчета массивных железобетонных конструкций, на основании которого построен конечный элемент сплошной среды (тип solid). Данный конечный элемент интегрирован в вычислительный комплекс ПРИНС, предназначенный для инженерных расчетов строительных конструкций. От части, данную работу следует рассматривать как руководство для разработки упругопластических моделей «трехмерного» бетона применительно к компьютерным программам, реализующим метод конечных элементов.

ABSTRACT OF THE DISSERTATION

Markovich Alexey Semenovich

«Development of nonlinear models of concrete and reinforced concrete structures based on the finite element method»

Modern building codes require that calculations of reinforced concrete structures be carried out in a nonlinear formulation, taking into account the actual properties of concrete and reinforcement. In view of this, in this work, models of brittle fracture and elastoplastic deformation of concrete, as well as principles for taking into account cracking in concrete, have been developed. These models have been experimentally tested and make it possible to obtain reliable values of the strength of concrete and reinforced concrete structures under bi- and triaxial stress conditions. A technique is presented that implements these deformation models, an algorithm for the nonlinear calculation of massive reinforced concrete structures is developed, on the basis of which a solid finite element is constructed. This final element is integrated into the PRINS software, designed for engineering calculations of building structures. In part, this work should be considered as a guide for the development of elastoplastic models of three-dimensional concrete in relation to computer programs that implement the finite element method.