ОТЗЫВ

на автореферат диссертационной работы Белова Александра Александровича «Обобщение метода конечных разностей на задачи с особенностями в решении» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Многие важные научно-технические явления включают процессы с сильно различающимися масштабами. Такие задачи называются жесткими. К ним относятся задачи с одним или несколькими пограничными слоями (в частности, кинетика химических реакций, модели нелинейных осцилляторов и ряд других). Жесткими являются задачи о пробое в газах или полупроводниках. Они описываются уравнениями, решения которых обращаются в бесконечность за конечное время, то есть имеют сингулярности. Последние также возникают в выборе оптимальных режимов зажигания термоядерных мишеней, в моделях нелинейной акустики и оптики и др. Задачи для уравнений в частных производных в слоистых средах характеризуются тем, что на границах раздела сред решение испытывает излом либо разрыв. Эти задачи также можно отнести к жестким.

Общим свойством для перечисленных задач является наличие особенностей: пограничных слоев (которые при увеличении жесткости стремятся к сильным разрывам), сингулярностей в узком смысле либо разрывов на границах раздела сред.

Рассматриваемые задачи представляют большой практический интерес. Однако они крайне трудны для расчета, поэтому разработка специализированных численных методов является актуальной задачей.

В диссертации предложен ряд новых конечно-разностных алгоритмов как общего назначения, так и специализированных. Среди них 1) интегрирование жестких задач Коши для ОДУ с контрастными структурами, 2) расчет решений задач кинетики реакций, 3) исследование ближайшей сингулярности в решении задачи Коши, 4) интегрирование задачи Коши с множественными полюсами на вещественной оси, 5) расчет решений задач для системы одномерных уравнений Максвелла в слоистых средах с частотной дисперсией, 6) подходы, позволяющие свести некоторые задачи для системы двумерных уравнений Максвелла к одномерному случаю.

Разработанные методы обладают существенной новизной. Они превосходят известные подходы по точности и надежности. Особенно отмечу специализированную схему для задач кинетики. Благодаря простоте, высокой точности и хорошим качественным свойствам эта схема оказалась востребована при проведении практических расчетов. Так, она уже используется несколькими коллективами из Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН и физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Результаты диссертации соответствуют требованиям паспорта специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Они опубликованы в 32 работах в журналах, рекомендованных ВАК, причем 22 – в периодических научных изданиях, индексируемых Web of Science или Scopus.

По тексту автореферата есть замечания.

1) В главе 2 предложено использовать среднеквадратичный аналог метрики Хаусдорфа для вычисления расстояния между кривыми. Целесообразно пояснить, как эта метрика вычисляется на практике.

2) Соискателем получен ряд результатов, относящихся к кинетике химических и термоядерных реакций. Эта тема представляет значительный интерес для практики. Возможно, стоило бы более подробно отразить их в диссертационной работе.

Отмеченные недостатки не снижают высокой оценки диссертационного исследования.

Считаю, что диссертация соответствует всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, а ее автор – Белов Александр Александрович – заслуживает присвоения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Я, Галанин Михаил Павлович, в соответствии с требованиями Федерального закона от 27.07.2006 №152-ФЗ «О персональных данных», настоящим даю согласие Федеральному государственному автономному образовательному учреждению высшего образования "Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы", место нахождения: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, на базе которого создан диссертационный совет ПДС 0200.006, на обработку моих персональных данных, связанных с работой диссертационного совета.

Доктор физико-математических наук,
профессор,
главный научный сотрудник ФГУ
«Федеральный исследовательский
центр Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша РАН»,
125047, г. Москва, Миусская пл., 4,
e-mail: galan@keldysh.ru
тел. +7 (499) 220-78-54

Галанин Михаил Павлович
19.06.2023 г.

Подпись М.П. Галанина заверяю
Ученый секретарь
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН,
к.ф.-м.н. А.А. Давыдов

ОТЗЫВ

на автореферат диссертационной работы Белова Александра Александровича «Обобщение метода конечных разностей на задачи с особенностями в решении» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Необходимость численного решения жестких задач часто возникает при моделировании сложных процессов с сильно различающимися масштабами в различных научно-технических приложениях. Типичными примерами являются задачи с одним или несколькими пограничными слоями (диффузия вещества через слоистые среды с сильно различающимися проницаемостями, кинетика химических реакций, в том числе автокаталитического типа, модели нелинейных осцилляторов и др.). К жестким относят также задачи, решения которых имеют сингулярности, т.е. обращаются в бесконечность за конечное время – такие, как моделирование пробоя в газах или полупроводниках, задачи кумуляции и взрыва, расчет оптимальных режимов зажигания термоядерных мишеней, модели нелинейной акустики, оптики и др. В том числе, в последние годы все большее внимание привлекают задачи интегральной фотоники, описываемые системой уравнений Максвелла в слоистых средах. Перечисленные задачи имеют большое значение для практики, однако их численное решение сталкивается со значительными трудностями. Для преодоления последних требуются специальные подходы. Этим обусловлена несомненная актуальность диссертационной работы Белова А.А.

В диссертации предложены новые разностные методы для следующих классов задач: жесткие задачи Коши для ОДУ, задачи Коши с сингулярностями в решении (причем возможна как единственная особенность, так и последовательность сингулярностей), задачи для системы одномерных и квазиодномерных уравнений Максвелла в слоистых средах с частотной дисперсией.

Разработанные методы обладают существенной новизной и имеют высокую практическую значимость, поскольку значительно расширяют круг задач, к которым применим метод конечных разностей, и могут непосредственно использоваться в фундаментальных исследованиях и прикладных разработках.

Среди методов, построенных в диссертации, особенно выделю бикомпактные разностные схемы для одномерных и квазиодномерных уравнений Максвелла. Так, метод спектрального разложения является принципиально новым подходом к составлению разностных схем. При этом он прост и имеет наглядный физический смысл. Эффективность предложенных в диссертации подходов практически подтверждена их успешным применением к решению прикладных задач и получением на этой основе ряда важных численных результатов.

Полученные результаты соответствуют паспорту специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ и адекватно сформулированы в положениях, выносимых на защиту.

Результаты диссертации опубликованы в 32 работах, из которых 32 изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 22 – в периодических научных изданиях, индексируемых Web of Science и Scopus. Результаты представлялись на множестве международных и всероссийских конференций, а также обсуждались на научных семинарах в различных научно-образовательных организациях, в том числе – на семинаре по вычислительной физике в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ (Дубна).

К автореферату имеются замечания.

1) Строго говоря, современные программы интегрирования ОДУ с автоматическим выбором шага (например, ode45 и ode15s в пакете Matlab) отличаются от первоначальных версий программ Дормана – Принса и Гира соответственно, поскольку претерпели ряд усовершенствований. Поэтому, во избежание разночтений, следовало бы указывать их современные названия.

2) Название «бикомпатные схемы» было введено в статье Н.Н. Калиткина и поэтому его использование в диссертации вполне оправдано, однако следовало бы более подробно пояснить в автореферате, что подразумевает данный термин.

Отмеченные недостатки не снижают высокой оценки диссертационного исследования.

На основании автореферата и известных мне работ Белова А.А. считаю, что диссертация соответствует всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание степени доктора физико-математических наук, а ее автор – Белов Александр Александрович – заслуживает присвоения ему степени доктора физико-математических наук по специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Земляная Елена Валериевна
доктор физ.-мат. наук,
начальник сектора №4 расчетов сложных физических
систем Научного отдела вычислительной физики
Лаборатории информационных технологий им. М.Г.
Мещерякова Объединенного института ядерных
исследований, mail: elena@jinr.ru, тел. +7-49621-647-28

Международная межправительственная организация Объединенный институт ядерных исследований
141980, Россия, Московская обл., г. Дубна, ул. Жолио-Кюри, 6, post@jinr.ru, +7(496)216-50-59 (секретариат)

Подпись Земляной Е.В. заверяю:
к.ф.-м.н., ученый секретарь ЛИТ ОИЯИ
Дереновская О.Ю.

8.06.2023

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ОТЗЫВ

на автореферат диссертационной работы Белова Александра Александровича
«Обобщение метода конечных разностей на задачи с особенностями в решении»
на соискание ученой степени доктора физико-математических наук
по специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

В физике и технике возникают новые все более сложные задачи, предъявляющие чрезвычайно высокие требования к точности и надежности расчета. Характерной особенностью таких задач является наличие особенностей в решении: пограничных слоев, сингулярностей, сильных либо слабых разрывов на границах раздела сред. В таких случаях традиционные алгоритмы метода конечных разностей теряют точность.

В диссертации А.А. Белова предложены, программно реализованы и протестированы новые алгоритмы метода конечных разностей для следующих классов задач: жесткие задачи Коши для ОДУ, задачи Коши с сингулярностями в решении, задачи моделирования волн в слоистых средах с частотной дисперсией.

Разработанные методы представляют значительную практическую ценность для проведения фундаментальных и прикладных исследований и разработки перспективных технических систем. Результаты диссертации могут непосредственно использоваться в работах, проводимых в Объединенном институте ядерных исследований, на ряде факультетов МГУ им. М.В. Ломоносова, в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, в федеральных ядерных центрах ВНИИЭФ и ВНИИТФ, в Физическом институте им. П.Н. Лебедева РАН и ряде других организаций.

Особенный интерес, на мой взгляд, представляют геометрически-адаптивные сетки для интегрирования жестких задач Коши. Различные методы автоматического выбора шага, адаптированного к решению, предлагались с 1970-х годов. Однако они не гарантировали получения заданной пользователем точности. Предложенная в диссертации процедура сгущения геометрически-адаптивных сеток позволяет вычислять асимптотически точные оценки погрешности. Этот подход существенно расширяет область применимости таких разностных сеток и делает их дешевым и надежным средством решения многих жестких задач Коши.

В автореферате достаточно полно отражена актуальность темы диссертации, цель работы, научная новизна, теоретическая и практическая значимость. Положения, выносимые на защиту, соответствуют теме работы и решают задачи, поставленные в диссертации.

Результаты диссертации достаточно полно представлены в публикациях автора и сделанных им докладах на международных и всероссийских конференциях.

К автореферату имеется замечания.

1) Постановку задачи в главе 5 стоит сопроводить поясняющей иллюстрацией.

2) Имеются некоторое количество опечаток.

Отмеченные недостатки не снижают однако высокой оценки диссертационного исследования.

Считаю, что диссертация соответствует всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание степени доктора физико-математических наук, а ее автор – Белов Александр Александрович – заслуживает присвоения ему степени доктора физико-математических наук по специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Мележик Владимир Степанович Мележ

«9» июня 2023 г.

доктор физико-математических наук (специальность 01.04.02 – «Теоретическая физика»), ведущий научный сотрудник Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований, 141980 Московская обл., г. Дубна, ул. Жолио-Кюри, д.6

тел. +7 (496) 216-36-15

Email: melezhik@theor.jinr.ru

Подпись В.С. Мележика заверяю.

Зам. директора ЛТФ по научной работе О.В. Теряев

Объединенный институт ядерных исследований

ОТЗЫВ

на автореферат диссертационной работы Белова Александра Александровича
«Обобщение метода конечных разностей на задачи с особенностями в решении»
на соискание ученой степени доктора физико-математических наук
по специальности 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация посвящена развитию численных методов решения дифференциальных уравнений, важных для теоретического описания химических реакций, реакций горения, фотонных кристаллов, физики плазмы и др. Среди новых результатов, полученных в диссертации, отмечу разработанный метод решения жестких задач Коши посредством выделения переходной области-участка большой кривизны интегральной кривой между каждым пограничным слоем и регулярным решением. Программно реализован метод геометрически-адаптированного выбора шага по кривизне интегральной кривой. В частности, этот метод позволил эффективно численно решать прикладную задачу кинетики реакции водородно-кислородного горения. Разработан метод инверсной функции для численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с произвольным количеством полюсов целого порядка на отрезке интегрирования. Предложена бикомпактная эффективная разностная схема для одномерной системы уравнений Максвелла в фотонных кристаллах.

Приведенные в автореферате диссертации результаты опубликованы в ведущих профильных журналах и докладывались, и обсуждались на многочисленных авторитетных конференциях. По моему мнению диссертационная работа и полученные в ней результаты представляют существенный вклад в математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, а ее автор Белов Александр Александрович заслуживает присуждения искомой степени.

Поляков Петр Александрович

доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова,
119991 Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
тел.: +7 495 939-14-89
e-mail: pa.polyakov@physics.msu.ru

Подпись Полякова П.А. заверяю

Колесова Н.С.

ОТЗЫВ

на автореферат диссертационной работы Белова Александра Александровича «Обобщение метода конечных разностей на задачи с особенностями в решении» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Современные прикладные задачи предъявляют все более высокие требования к вычислительным методам, что стимулирует их бурное развитие. К важнейшим проблемам можно отнести повышение надежности разностных методов (например, с помощью процедур апостериорного контроля фактической точности), снижение трудоемкости расчета (в частности, за счет адаптирования сеток), обобщение разностных методов на новые классы задач, к которым ранее разностные методы считались неприменимыми (среди них, например, многие задачи с обобщенными решениями). Эти вопросы непосредственно рассматриваются в диссертации. Поэтому тема исследования является, бесспорно, актуальной.

В диссертации предложен ряд новых конечно-разностных алгоритмов для следующих классов задач. 1) Жесткие и плохо обусловленные задачи Коши для ОДУ. Особое внимание уделено задаче кинетики реакций. 2) Задачи Коши, решение которых имеет сингулярности различных типов. В частности, рассмотрены задачи, решения которых допускают продолжение за сингулярность. 3) Одномерные и квазиодномерные задачи для системы уравнений Максвелла в слоистых средах, решения которых испытывают сильный либо слабый разрыв. Особое внимание уделено задачам в нестационарной (немонохроматической) постановке. Для всех методов дано теоретическое обоснование.

Диссертационная работа имеет выраженную практическую составляющую. Предлагаемые методы и алгоритмы реализованы в виде прикладных пакетов. Проведено их тщательное тестирование, и на основании последнего даны практические рекомендации. Проведены расчеты ряда важных прикладных задач.

Результаты диссертации соответствуют требованиям паспорта специальности 1.2.2 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Они достаточно полно представлены в публикациях диссертанта: 32 работы в журналах, рекомендованных ВАК (из них 22 – в периодических научных изданиях, индексируемых Web of Science и Scopus).

Считаю, что диссертация соответствует всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание степени доктора физико-математических наук, а ее автор, Белов Александр Александрович, заслуживает присвоения ему степени доктора физико-математических наук по специальности 1.2.2 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Ягола Анатолий Григорьевич

13.06.2023

доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры математики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова,
11991 Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
тел.: 4959391033
e-mail: yagola@physics.msu.ru

Подпись профессора Яголы А.Г. заверяю

Колесова Н.С.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова · физический факультет · КАНЦЕЛЯРИЯ · МОСКВА

ОТЗЫВ

на диссертационную работу Белова Александра Александровича «Обобщение метода конечных разностей на задачи с особенностями в решении»
на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Актуальность темы диссертационной работы.

Задачи физики, химии и техники обычно содержат процессы, протекающие с различными скоростями. В ряде важных прикладных задач скорости таких процессов могут отличаться на много порядков. Подобные задачи называют жесткими. Решения таких задач зачастую вычислительные особенности. Среди них контрастные структуры, сингулярности, а также сильные и слабые разрывы на границах раздела сред.

Например, задачи пробоя в газах или полупроводниках описываются уравнениями, решения которых обращаются в бесконечность за конечное время, то есть имеют сингулярность. Сингулярности также возникают в задачах кумуляции, в выборе оптимальных режимов зажигания термоядерных мишеней, в моделях нелинейной акустики и оптики и др.

Контрастные структуры возникают в моделях нелинейных осцилляторов, в автокаталитических режимах химической кинетики и др.

Решения с сильными и слабыми разрывами на границах раздела сред возникают в задачах интегральной фотоники. Оптические наноструктуры могут применяться в качестве детекторов, логических элементов, переключателей, модуляторов, волноводов и т.д.

Жесткие задачи интенсивно изучаются с 1952 года, и для них создано много численных методов и пакетов программ. Однако они быстро теряют надежность при увеличении жесткости задачи, особенно в случае контрастных структур. Для задач с полюсами традиционно используются методы компьютерной алгебры, достаточно универсальных численных методов фактически не существует. Кроме того, применяемые в пакетах программ методы выбора шага не имеют теоретического обоснования и нередко дают ошибочную оценку погрешности.

Таким образом, тема диссертационной работы является, несомненно, ***актуальной***.

Основные результаты диссертационной работы.

Все полученные результаты обладают значительной ***новизной*** и ***оригинальностью***.

Для численного интегрирования задачи Коши для ОДУ предложен принципиально новый метод автоматического выбора шага по кривизне интегральной кривой (геометрически-адаптивные сетки). Для предложенных сеток разработана процедура сгущения, которая позволила применить метод Ричардсона и находить апостериорную асимптотически точную оценку погрешности полученного решения. Для традиционных алгоритмов выбора шага не найдено таких оценок.

Для расчетов по явным схемам на геометрически-адаптивных сетках построены новые экономичные методы вычисления кривизны. Это впервые позволило вести расчеты задач высокой жесткости по экономичным явным схемам с апостериорным контролем точности.

На конкретных примерах проанализированы границы применимости сеточных методов и методов разложения по малому параметру, и дан ряд практических рекомендаций.

Предложена новая специальная явная схема второго порядка точности для расчетов кинетики реакций, обеспечивающая положительность решения.

Проведена апробация предложенных методов, причем не только на модельных задачах с известным точным решением, но и на реальной задаче кинетики химических реакций водород-кислородного горения. Выполнено сравнение предложенных подходов и традиционных алгоритмов выбора шага, основанных на локальном сгущении и вложенных схемах. При этом впервые контролируется фактическая точность расчета традиционных алгоритмов. Сравнение убедительно показало преимущества предложенных подходов.

Построен новый метод обнаружения и исследования степенных и логарифмических полюсов для систем ОДУ. Предложенный метод превосходит по надежности известные подходы, поскольку (1) работает при параметризации через длину дуги интегральной кривой и (2) позволяет вычислять параметры особенностей одновременно с апостериорной асимптотически точной оценкой погрешности. Предложенный метод может быть применен и к исследованию уравнений в частных производных, которые методом прямых сводятся к системе ОДУ. В качестве теста рассмотрено квазилинейное параболическое уравнение, описывающее S-режим нелинейного горения.

Предложен новый метод обобщенной инверсной функции для решения задачи Коши для систем ОДУ с последовательностью алгебраических особых точек целого порядка. В отличие от ранее известных подходов, предложенный метод не использует априорной информации о свойствах задачи.

Для системы стационарных и нестационарных одномерных уравнений Максвелла построена новая бикомпактная консервативная разностная схема. Предложен принципиально новый способ учета дисперсии вещества при решении линейных гиперболических задач.

Построены новые тестовые задачи с обобщенными точными решениями. Проведена апробация предложенных схем на этих тестах, и выполнено сравнение с наиболее популярными численными методами: методом конечных элементов в частотной области для стационарных задач и схемой «с перешагиванием» для нестационарных задач. Это сравнение показало, что предложенные схемы кардинально превосходят известные по точности и надежности.

Для задачи о наклонном падении плоской волны на систему плоско-параллельных либо клиновидных пластин предложен метод интегрирования уравнений Максвелла вдоль оптического луча. Этот метод позволяет решать эту задачу по одномерным схемам, что существенно уменьшает трудоемкость решения многих важных задач.

Предложен метод учета флуктуаций геометрических параметров рассеивателя (метод виртуального эксперимента). Проведены расчеты спектров отражения реальных одномерных фотонных кристаллов как при нормальном падении, так и при наклонном. Выполнено сравнение результатов расчета с известными экспериментальными спектрами. Показано, что разработанные методы обеспечивают хорошее согласование расчетов с экспериментом в пределах точности последнего 1-7%.

Проведены расчеты реальной задачи о формировании поверхностной волны Блоха при наклонном падении импульса на одномерный диэлектрический фотонный кристалл. Выполнено исследование параметров этой волны (яркость свечения и время жизни связанного состояния) в зависимости от толщин слоев фотонного кристалла. Результаты этих расчетов можно использовать для экспериментальной реализации долгоживущих связанных состояний.

Для всех предложенных методов дано строгое обоснование. Эти методы реализованы в виде рабочих программ и прикладных пакетов программ на языке Matlab.

Теоретическая и практическая значимость исследований обусловлена следующим. Предложенные математические методы превосходят по точности, надежности и экономичности ранее известные алгоритмы. Они являются востребованными и представляют несомненный интерес для широкого круга исследователей. Результаты диссертационной работы ***уже применяются*** рядом научных коллективов, например, в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, физическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова, в Российском университете дружбы народов.

Достоверность и обоснованность полученных результатов.

Полученные в диссертационной работе результаты ***достоверны***, основные выводы и заключения ***обоснованы***.

Основные результаты диссертации достаточно полно изложены в публикациях: 32 работы в журналах, рекомендованных ВАК, из которых 22 – в периодических научных изданиях, индексируемых Web of Science и Scopus.

Недостатки работы.

Отметим некоторые недостатки работы.

1) Задача кинетики водород-кислородного горения (п. 3.3.1) рассмотрена в изотермической постановке. Такая постановка, бесспорно, релевантна практике. Однако она является упрощенной. Представляет интерес также горение с учетом энерговыделения реакций. Стоило рассмотреть (или хотя бы упомянуть) такую задачу. Можно ли применять к ней химическую схему?

2) В пакете программ GACK (см. п. 3.2.4) используется оригинальный алгоритм составления правых частей уравнений химической кинетики. Стоило дать его описание в тексте диссертации.

3) В методе спектрального разложения используется преобразование Фурье. Однако это накладывает ряд ограничений на характер рассматриваемых импульсов. Они должны быть таковы, чтобы прямое и обратное преобразования Фурье выражались сходящимися интегралами. Более того, при доказательстве сходимости импульсы и вовсе предполагаются финитными. Чтобы ослабить эти ограничения, нужно использовать преобразование Лапласа.

4) В разделах 6.1.2 и 6.1.3 проводится сравнение стационарной бикомпактной схемы и метода конечных элементов (МКЭ) на ряде тестовых примеров. При этом постановка задач для МКЭ несколько отличается от таковой для бикомпактной схемы. Вместо условий излучения на границе задаются условия Дирихле по значению точного решения. Следовало рассматривать одинаковые постановки.

5) Имеются небрежности в изложении материала, например, в формуле (1.2) у правых частей нет сдвига по времени в описании методов Рунге–Кутты, что верно только для автономных задач; на стр. 38 записана

одностадийная схема, хотя анонсирована она как многостадийная; и ряд других погрешностей изложения материала.

Заключение.

Диссертация написана хорошим и грамотным русским языком. Отмеченные недостатки не снижают высокой оценки диссертационного исследования. Диссертационное исследование соответствует паспорту специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Важнейшие результаты диссертационной работы достаточно полно представлены в положениях, выносимых на защиту.

Считаю, что диссертация соответствует всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание степени доктора физико-математических наук, а ее автор – Белов Александр Александрович – заслуживает присвоения ему степени доктора физико-математических наук по специальности 1.2.2 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Аристова Елена Николаевна, гл. научн. сотр. Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, 125047 Москва, Миусская пл., д. 4,
доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник,
тел.: +7(916)2190971, +7(499)2207209
e-mail: aristovaen@mail.ru

____/Е.Н.Аристова/

Подпись Аристовой Е.Н. заверяю:
Ученый секретарь Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН,
кандидат физико-математических наук Давыдов Александр Александрович

____/А.А.Давыдов/

20.06.2023