Отзыв официального оппонента

на диссертацию Гамбаряна Марка Микаеловича **«Обратимые разностные схемы для динамических систем с квадратичной правой частью»**, представленную к защите в диссертационном совете ПДС 0200.006 при федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Российский университет дружбы народов» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.2.2 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Обзор содержания

В главе 1 рассматриваются конечно-разностные модели динамических систем с квадратичной правой частью. Приводятся примеры таких систем: осцилляторы Якоби и Вейерштрасса, движение волчка (случаи Эйлера–Пуансо, Ковалевской), система Вольтерры–Лотки. Обсуждаются трудности при применении классических разностных схем, включая потерю интегралов и появление «лишних корней». Особое внимание уделено обратимым разностным схемам, в частности схеме Кагана, задающей бирациональное преобразование между состояниями. Теорема 1.3 утверждает, что для любой системы с квадратичной правой частью можно построить обратимую схему по конкретному правилу замены мономов. Обратимость в этом случае обеспечивает однозначное соответствие между начальными и конечными данными, в отличие от обычных схем.

В глава 2 подробно описано программное обеспечение, созданное автором в системе Sage и объединённое в пакет fdm. Его структура реализована на объектно-ориентированной основе (классы для постановки задачи и для численных решений). В пакете реализованы функции cremona_hat (преобразование мономов для построения схемы), cremona_step (решение для одного шага) и cremona_scheme (получение полной траектории). В главе приведены результаты экспериментов для различных систем, включая осциллятор Якоби и систему Вольтерры–Лотки. Наблюдается, что точки приближённых траекторий часто располагаются на линиях или многообразиях в фазовом пространстве, что ставит задачу их дальнейшего алгебраического анализа.

В главе 3 излагается метод Лагутинского для исследования траекторий динамических систем. Вводится определитель Лагутинского, составленный из многочленов, задающих линейное семейство гиперповерхностей, и их производных вдоль векторного поля. Доказывается, что тождественное обращение определителя в нуль означает, что все траектории лежат на гиперповерхностях этого семейства. В случае невырожденных систем показывается существование рационального интеграла, который может быть выражен через миноры определителя. Рассматриваются как двумерные, так и многомерные системы.

В следующей этот аппарат используется в диссертации для анализа свойств траекторий, полученных по разностным схемам и на его основе проведен анализ алгебраических свойств разностных схем.

В 5 главе показано, что для эллиптических осцилляторов обратимые схемы сохраняют структуру непрерывной модели: точки решений лежат на эллиптических кривых, схема допускает квадратурное представление, а решение выражается через эллиптические функции дискретного аргумента.

В работе решены следующие ключевые задачи:

- Разработан алгоритм построения обратимых (бирациональных) разностных схем для систем с квадратичной правой частью.
- Реализован программный комплекс в системе компьютерной алгебры Sage (пакет fdm), позволяющий проводить символьные и численные эксперименты с обратимыми схемами.
- На основе метода Лагутинского разработан критерий принадлежности

траекторий алгебраическим многообразиям.

- Доказано, что для эллиптических осцилляторов обратимые схемы сохраняют структуру непрерывной модели.

Теоретические результаты подкреплены численными экспериментами и сравнением с аналитическими решениями.

Актуальность темы диссертационной работы.

Динамические системы с квадратичной правой частью встречаются во множестве задач механики, электродинамики, химической кинетики и биологии. Их аналитическое исследование возможно лишь в исключительных случаях, поэтому ключевую роль играет численное моделирование. Важно строить такие разностные схемы, которые не только аппроксимируют исходную систему, но и сохраняют её фундаментальные свойства. В этом контексте особое значение имеют обратимые схемы, задающие бирациональное соответствие, позволяющее избежать появления «лишних корней» и обеспечивающее корректное наследование свойств непрерывной модели.

Характеристика содержания диссертационной работы.

В работе исследованы алгебраические свойства обратимых разностных схем для систем с квадратичной правой частью, особенно для эллиптических осцилляторов. Реализованы методы построения и анализа таких схем в системе компьютерной алгебры Sage, создан комплекс программ, интегрированный в пакет fdm for sage. Разработан численно-аналитический аппарат для исследования траекторий дискретных моделей и проведено сравнение с непрерывными системами. Особое внимание уделено дискретизации осцилляторов Якоби и волчка Эйлера-Пуансо.

Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, их достоверность.

Выводы основаны на строгом теоретическом анализе, сопровождаемом доказательствами, опубликованными в рецензируемых изданиях.

Достоверность подтверждается сопоставлением численных экспериментов с аналитическими решениями, а также независимыми результатами других авторов. Методы и алгоритмы, предложенные в диссертации, апробированы на международных конференциях и семинарах.

Практическая значимость исследований.

Разработанные инструменты полезны для изучения динамических систем с законами сохранения, особенно в задачах, связанных с осцилляторами. Результаты могут использоваться в образовательных курсах по дифференциальным уравнениям и компьютерной алгебре, а также при создании свободного программного обеспечения для анализа нелинейных систем.

Недостатки работы.

Работа не свободна от некоторых недостатков.

1. Доказательство теоремы 4.2 требует, на мой взгляд, некоторого уточнения. Схема Кагана – это схема второго порядка, а определитель Лагутинского содержит производные n-го порядка. Поэтому требуется обоснование для утверждения о том, что в пределе $\Delta t \to 0$ разностный определитель (4.2) переходит в определитель Лагутинского исходной непрерывной системы.

2. Говоря о наследовании разностными схемами свойств исходных непрерывных динамических систем (раздел 1.2), автор обращает внимание на два свойства: наследование интегралов движения и взаимную однозначность связи между начальным и конечным положениями системы. Вне рассмотрения оказались такие важные свойства как симплектичность разносной схемы. Следовало учесть, что в работах Суриса было показано, что метод Кагана наследует симпатическую структуру гамильтоновых систем, и отразить это обстоятельство в разрабатываемом программном обеспечении.

3. В задачах с подвижными особенностями важным является возможность определения характера особенности по методу конечных разностей. Автор

отмечает, что метод Кагана правильно подражает полюсам. Однако совершенно не очевидно, что этому следует радоваться. В работах Альшиной и др. было показано, что метод CROS не подражает особенностям – вместо полюса решение входит на «полочку». Благодаря этому не происходит роста значений решений и удается разработать надежный метод определения порядка и положения особой точки. Метод Кагана дает возле полюсов огромные значения, поэтому вполне может оказаться, что он не пригоден для более-менее точного определения порядка и положения подвижной особенности. Этот аспект применения метода Кагана не был исследован в диссертации.

Заключение.

Диссертационная работа показала, что дискретная теория обратимых схем для эллиптических осцилляторов в значительной степени воспроизводит непрерывную теорию: траектории приближённых решений лежат на эллиптических кривых, допускается представление через квадратуры и эллиптические функции. Это подтверждает актуальность выбранного направления и открывает перспективы для развития дискретной теории эллиптических функций как части общей теории преобразований Кремоны.

Основные результаты исследования нашли отражение в ряде публикаций автора: пять статей в журналах, индексируемых в международных базах *Scopus/WoS*, и тезисы докладов на международных конференциях. Это подтверждает высокий научный уровень и востребованность выполненной работы.

На основании вышеизложенного считаю, что диссертационная работа «Обратимые разностные схемы для динамических систем с квадратичной правой частью» полностью соответствует требованиям п. 2.2 разделы II Положения о присуждении ученых степеней в ФГАУ ВО Российский университет дружбы народов, утвержденного Ученым советом РУДН, протокол

№ УС-1 от 22 января 2024 г., предъявляемых к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, а ее автор — Гамбарян Марк — степени кандидата физико-математических наук.

Официальный оппонент:
доктор физико-математических наук (специальность 01.01.03 — «Математическая физика»), доцент, ФГАОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», профессор кафедры математики физического факультета

Корпусов Максим Олегович
«03» октября 2025 г.

ФГАОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», профессор кафедры математики физического факультета,
Российская Федерация, Москва, 119991, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, строение 2, Физический Факультет
Тел.: +7 (495) 939-10-00
Электронная почта: korpusov@gmail.com

Подпись М.О. Корпусова удостоверяю:
Начальник отдела кадров Физического Факультета МГУ
им. М. В. Ломоносова
Сенькина Светлана Станиславовна