На правах рукописи

Российский
университет
дружбы
народов

Алмохаммад Халиль

Интегральные свойства обобщенных потенциалов Бесселя–Рисса

Специальность 1.1.1.
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2022

Работа выполнена в Математическом институте им. С. М. Никольского факультета физико-математических и естественных наук Федерального государственого автономного образовательного учреждения высшего образования «Российский университет дружбы народов».

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Гольдман Михаил Львович**
Официальные оппоненты:	**Осипенко Константин Юрьевич,** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры общих проблем управления механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова
	Ситник Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования Института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета
	Ушакова Елена Павловна, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории 45 Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Защита состоится 25 октября 2022 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета ПДС 0200.005 при Российском университете дружбы народов по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6.

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов) по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6 и на сайте «Диссертационные советы РУДН» в сети интернет (http://rudn.ru/science/dissovet).

Автореферат разослан 21 сентября 2022 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
ПДС 0200.005,
д-р физ.-мат. наук Савин Антон Юрьевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Данная диссертация посвящена изучению интегральных свойств сверток функций с ядрами, обобщающими классические ядра Бесселя–Макдональда. При изучении интегральных свойств потенциалов решающую роль играют конусы их убывающих перестановок. Они устроены весьма сложно и важно получить эквивалентные им более простые конусы. В описании эквивалентных конусов возникают операторы типа Харди–Копсона на конусах монотонных функций. Свойства классических ядер Бесселя–Макдональда подробно изучены в книгах Беннетта и Шарпли[1], С. М. Никольского[2], В. Г. Мазьи[3]. Известные работы М. Л. Гольдман[4], A. Gogatishvili, M. Johansson, C. A. Okpoti и L. E. Persson[5], М. Л. Гольдман[6,7], посвящены исследованию свойств различных функциональных пространств. Особое значение имеют исследования модулярных неравенств для операторов Харди–Копсона на конусе Ω положительных убывающих функций из весовых пространств Орлича. Большой вклад в изучение этой проблемы внесли Jim Quile Sun[8], M. Goldman, R. Kerman[9], S. Bloom, R. Kerman[10], Э. Г. Бахтигареева, М. Л. Гольдман[11]. Классические потенциалы Бесселя и Рисса играют большую роль в теории функциональных пространств и в ее приложениях в теории дифференциальных уравнений с частными производными. Свойства Бесселевых потенциалов и потенциала Рисса подробно изложены в книгах С. М. Никольского[2], И. Стейна[12], В. Г. Мазьи[3].

---

[1] *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of operators. New York : Acad. Press, 1988.

[2] *Nikolsky S. M.* Approximation of functions of several variables and imbedding theorems. Moscow : Science, 1977.

[3] *Мазья В. Г.* Пространства Соболева. Л. : Издательство ЛГУ, 1985.

[4] *Goldman M. L.* Optimal embeddings of the generalized Bessel and Riesz potentials // Proceedings of the Mathematical Institute V. A. Steklov. 2010. Vol. 269. P. 91—111.

[5] *Gogatishvili A., Johansson M., Okpoti C. A., Persson L. E.* Characterization of embeddings in Lorentz spaces using a method of discretization and anti-discretization // Bull. Austral. Math. Soc. 2007. Vol. 76. P. 69—92.

[6] *Гольдман М. Л., Малышева А. В.* Об оценке равномерного модуля непрывности обобщенного потенциала Бесселя // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. 2013. Т. 283. С. 1—12.

[7] *Бахтигареева Э. Г., Гольдман М. Л.* Весовые неравенства для операторов типа Харди на конусе убывающих функций из пространства Орлича // Математические заметки. 2017. Т. 102, № 5. С. 673—683.

[8] *Sun J. Q.* Hardy type inequalities on weighted Orlicz spaces : PhD thesis / Sun Jim Quile. London, Canada : The Univ. of Western Ontario, 1995.

[9] *Goldman M., Kerman R.* On the principal of duality in Orlicz-Lorentz Spaces // Function spaces. Differential Operators. Problems of mathematical education. Proc. Intern. Conf. dedicated to 75-th birthday of prof. Kudrjavtsev. Moscow, 1998. P. 179—183.

[10] *Bloom S., Kerman R.* Weighted Orlicz space integral inequalitiesfor the Hardy-Littlewood maximal operator // Studia Math. 1994. Vol. 110, no. 2. P. 149—167.

[11] *Bakhtigareeva E., Goldman M. L.* Modular and norm inequalities for operators on the cone of decreasing function in Orlicz space // Eurasian math. Journal. 2017. Vol. 8. P. 1—10.

[12] *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М. : Мир, 1974. 336 с.

В работе проведена конкретизация общих критериев вложений потенциалов в перестановочно инвариантные пространства в случае, когда базовое пространство для потенциалов есть весовое пространства Лоренца. Получены явные критерии справедливости модулярных неравенств для операторов типа Харди–Копсона на функциях в пространстве Орлича.

Цель диссертационной работы состоит в исследовании интегральных свойств обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса, получении явных критериев справедливости модулярных неравенств для операторов типа Харди–Копсона на функциях в пространстве Орлича.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. установить эквивалентные описания конусов убывающих перестановок для потенциалов, построенных на базе весовых пространств Лоренца с общими весами;
2. сформулировать критерии вложений пространства потенциалов в перестановочно инвариантные пространства и дать описания оптимальных перестановочно инвариантных пространств для таких вложений;
3. приведена конкретизация этих вложений в случае базовых весовых пространств Лоренца
4. установить модулярные неравенства для операторов типа Харди–Копсона на функциях из весовых пространств Орлича;
5. установить модулярные неравенства для операторов типа Харди–Копсона на конусе Ω положительных монотонных функциях в пространстве Орлича.

Научная новизна. В данной работе получены следующие новые результаты:

1. построены эквивалентные описания конусов убывающих перестановок для потенциалов, построенных на базе весовых пространств Лоренца с общими весами;
2. построена конкретизация в случае базовых весовых пространств Лоренца критериев вложений пространства потенциалов в перестановочно инвариантные пространства и даны описания оптимальных перестановочно инвариантных пространств для таких вложений.
3. установлены явные модулярные неравенства для операторов типа Харди–Копсона на функциях из весовых пространств Орлича;
4. установлены явные модулярные неравенства для операторов типа Харди–Копсона на конусе Ω положительных монотонных функций в пространстве Орлича.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты работы носят теоретический характер. На основании общих результатов этой работы может быть получен ряд критериев вложения для различных конкретных пространств и различных типов ядер, включая классические потенциалы Бесселя и Рисса.

Исследование интегральных свойств потенциалов служит базой для дальнейшего изучения свойств гладкости потенциалов в тех интегральных метриках, в которых получены соответствующие вложения.

Методология и методы исследования. Оценки убывающих перестановок для свёртки, их применения для обобщённых потенциалов Бесселя и Рисса. Эквивалентные описания конусов убывающих перестановок для потенциалов. Изучение свойств обобщённых оператор Харди–Копсона, возникающих в теории потенциалов. Описания оптимальных перестановочно инвариантных пространств для вложения потенциалов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Построены эквивалентные описания конусов убывающих перестановок для потенциалов, построенных на базе весовых пространств Лоренца с общими весами;
2. Построена конкретизация в случае базовых весовых пространств Лоренца критериев вложений пространства потенциалов в перестановочно инвариантные пространства и даны описания оптимальных перестановочно инвариантных пространств для таких вложений.
3. Доказаны теоремы о модулярных неравенствах для операторов типа Харди–Копсона на функциях из весовых пространств Орлича.
4. Доказаны теоремы о модулярных неравенствах для операторов типа Харди–Копсона на конусе Ω положительных монотонных функций в пространстве Орлича.

Степень достоверности результатов, полученных в диссертации, обеспечивается строгостью приведенных доказательств, многочисленными выступлениями на семинарах, конференциях и школах, а также имеющимися публикациями в рецензируемых изданиях, которые индексируются международными базами данных.

Апробация работы. Результаты, представленные в диссертационной работе, излагались на научном семинаре Северо-Кавказского центра математических исследований ВНЦ РАН и Южного математического института ВНЦ РАН под руководством д.ф.-м.н., проф. А. Г. Кусраева, к.ф.-м.н. М. А. Плиева; в Российском университете дружбы народов на научном семинаре под руководством профессоров А. В. Арутюнова, В. И. Буренкова и М. Л. Гольдмана, в МГУ им. М. В. Ломоносова на научном семинаре на механико-математическом факультете под руководством профессоров Г. Г. Магарил-Ильяева и К. Ю. Осипенко, на научном семинаре на факультете вычислительной математики и кибернетики под руководством академика Е. И. Моисеева и профессора И. С. Ломова. Кроме того, результаты диссертации докладывались на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых Ломоносов (Москва, 2019–2020–2021); на Международной научной конференции (Ninth International Scientific Conference ”Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis IX”. Rostov-on-Don, 2018–2019); на 31-й Крымской Осенней Математической Школе-симпозиуме по спектральным и эволюционным задачам (Севастополь, 2020); на 5-й Международной конференции «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования» (Москва, 2018); на Международной научной конференции «Interdisciplinary Research in Science, Engineering and Technology» (Bangalore, India, 2021); на Международной научной конференции «Order Analysis and Related Questions of Mathematical Modelling, XVI.» (Vladikavkaz, 2021).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 11 печатных изданиях, 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1—5], 6 — в тезисах докладов международных и всероссийских конференций [6—11]. Результаты диссертации, содержащиеся в совместных работах, принадлежат лично автору.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Полный объем диссертации составляет **101** страницу текста. Список литературы содержит **72** наименования.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится краткий обзор наиболее важных публикаций, связанных с темой исследования, и анализ основных результатов диссертации.

Глава 1 состоит из четырёх параграфов.

Параграф 1.1. В первом разделе кратко изложены необходимые для дальнейшего понятия банахова функционального пространства (кратко: БФП), перестановочно инвариантного пространства (кратко ПИП). Мы опираемся на понятия, введенные в книгах С. Г. Крейна, Ю. И. Петунина и Е. М. Семенова[13] и К. Беннетта, Р. Шарпли[1], а также на результаты работ М. Л. Гольдмана[14] развивающих концепции БФП, вложений и накрывании конусов[15].

Пусть (S,Σ,μ) есть пространство с мерой. Здесь Σ — σ-алгебра подмножеств множества S, на которых определена неотрицательная σ-конечная, σ-аддитивная мера μ. Через $L_0 = L_0(S,\Sigma,\mu)$ обозначим множество μ-измеримых вещественнозначных функций $f : S \to \mathbb{R}$, а через L_0^+ подмножество множества L_0, состоящее из неотрицательных функций:

$$L_0^+ = \left\{ f \in L_0;\ f \geqslant 0 \right\}.$$

Определение 1.1.1. *Отображение $\rho :\ L_0^+ \to [0,\infty]$ называется функциональной нормой (кратко: ФН), если для всех f, g, $f_n \in L_0^+$, $n \in \mathbb{N}$ выполнены условия*[1]*:*

[13] *Крейн С. Г.*, *Петунин Ю. И.*, *Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М. : Наука, 1978. 400 с.

[14] *Бокаев Н. А.*, *Гольдман М. Л.*, *Каршыгина Г. Ж.* Конусы функций с условиями монотонности для обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса // Математические заметки. 2018. Т. 104, № 3. С. 356—373.

[15] *Гольдман М. Л.* Об оптимальных вложениях обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. 2010. Т. 269. С. 91—111.

(P1) $\rho(f) = 0 \;\Rightarrow\; f = 0$, *$\mu$–почти всюду (кратко: μ–п.в.);*
$\rho(\alpha f) = \alpha\rho(f)$, $\alpha \geqslant 0$; $\rho(f+g) \leqslant \rho(f) + \rho(g)$ *(свойство нормы);*

(P2) $f \leqslant g$, *(μ–п.в.)* $\;\Rightarrow\; \rho(f) \leqslant \rho(g)$ *(монотонность нормы);*

(P3) $f_n \uparrow f \;\Rightarrow\; \rho(f_n) \to \rho(f)(n \to \infty)$ *(свойство Фату);*

(P4) $0 < \mu(\sigma) < \infty \;\Rightarrow\; \int\limits_{\sigma} f\,\mathrm{d}\mu \leqslant c_\sigma \rho(f)$, $f \in L_0^+$ *(локальная интегрируемость);*

(P5) $0 < \mu(\sigma) < \infty \;\Rightarrow\; \rho(\chi_\sigma) < \infty$ *(конечность ФН для характеристических функций χ_σ множеств конечной меры).*

Здесь $f_n \uparrow f$ означает, что

$$f_n \leqslant f_{n+1}, \quad \lim_{n\to\infty} f_n = f, \quad (\mu\text{–п.в.}).$$

Определение 1.1.2. *Пусть ρ есть функциональная норма. Множество $X = X(\rho)$ функций из L_0, для которых $\rho(|f|) < \infty$ называется банаховым функциональным пространством (кратко: БФП), порожденным функциональной нормой ρ. Для $f \in X$ полагаем*

$$\|f\|_X = \rho(|f|).$$

Обозначим для $f \in L_0$

$$\lambda_f(y) = \mu\big\{x \in S\,:\; |f(x)| > y\big\}, \quad y \in [0,\infty)$$

— Лебегова функция распределения. Через $\dot{L}_0$ обозначим множество функций $f \in L_0$, для которых $\lambda_f(y)$ не тождественна бесконечности,

$$\text{т. е.} \quad \exists y_0 \in [0,\infty)\,:\; \lambda_f(y_0) < \infty.$$

Для $f \in \dot{L}_0$ введем невозрастающую перестановку f^* как правую обратную функцию к невозрастающей функции λ_f, т. е.

$$f^*(t) = \inf\big\{y \in [0,\infty)\,:\; \lambda_f(y) \leqslant t\big\}, \quad t \in \mathbb{R}_+ = (0,\infty), \tag{1}$$

f^* — невозрастающая перестановка функции f, т. е. неотрицательная, убывающая, непрерывная справа функция на $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$, которая равноизмерима с f:

$$\mu_n\big\{x \in \mathbb{R}^n\,:\; |f(x)| > y\big\} = \mu_1\big\{t \in \mathbb{R}_+\,:\; f^*(t) > y\big\}, \quad y \in \mathbb{R}_+.$$

Здесь μ — это мера Лебега.

Определение 1.1.3.

(i) Банахово функциональное пространство, сокращенно БФП, $E = E(\mathbb{R}^n)$ — это банахово пространство измеримых по Лебегу функций
$f\,:\; \mathbb{R}^n \;\to\; C$ с монотонной нормой, т. е.

$$|f| \leqslant g, \quad g \in E \;\text{ влечет }\; f \in E, \quad \|f\|_E \leqslant \|g\|_E.$$

и со свойством Фату:

$$0 \leqslant f_n \uparrow f, \quad f_n \in E \;\text{ влечет }\; f \in E, \quad \|f_n\|_E \leqslant \|f\|_E.$$

(ii) БФП E называется перестановочно-инвариантным пространством, сокращенно ПИП, если его норма монотонна относительно перестановок,

$$f^* \leqslant g^*, \quad g \in E \ \text{влечет}\ f \in E, \quad \|f\|_E \leqslant \|g\|_E.$$

Примерами ПИП служат пространства Лебега $L_p(\mathbb{R}^n)$, пространства Лоренца, пространства Орлича.

В работе изучается пространство потенциалов $H_E^G \equiv H_E^G(\mathbb{R}^n)$ на n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.1.4. *Пространство потенциалов $H_E^G = H_E^G(\mathbb{R}^n)$: определяем как множество сверток ядер потенциалов с функциями из базового пространства*

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) = \{u = G * f \ : \ f \in E(\mathbb{R}^n)\}, \tag{2}$$

где $E(\mathbb{R}^n)$ — перестановочно-инвариантное пространство, а

$$\|u\|_{H_E^G} = \inf\left\{\|f\|_E \ : \ f \in E(\mathbb{R}^n),\ G * f = u\right\}. \tag{3}$$

Ядро представления G назовем допустимым, если

$$G \in L_1(\mathbb{R}^n) + E'(\mathbb{R}^n).$$

Здесь свёртка $G * f$ определяется как интеграл

$$(G * f)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y. \tag{4}$$

(мы ввели здесь множитель $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ для удобства при использовании преобразования Фурье). Здесь мы существенно используем результаты работы[15], в которой установлены точные теоремы вложения в ПИП для обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса:

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n),$$

Кроме того, $E'(\mathbb{R}^n)$ — ассоциированное ПИП, т. е. ПИП с нормой:

$$\|g\|_{E'} = \sup\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^n} |fg|\,\mathrm{d}\mu_n \ : \ f \in E,\ \|f\|_E \leqslant 1\right\}. \tag{5}$$

Пример

$$E = L_p, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty \quad \Rightarrow E' = L_{p'}; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Для ПИП $E(\mathbb{R}^n)$, $E'(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим пространства $\tilde{E}(\mathbb{R}_+)$, $\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)$ — их представления Люксембурга[1], т. е. ПИП, для которых выполняются следующие равенства

$$\|f\|_E = \|f^*\|_{\tilde{E}}, \quad f \in E(\mathbb{R}^n); \quad \|g\|_{E'} = \|g^*\|_{\tilde{E}'}, \quad g \in E'(\mathbb{R}^n),$$

где f, g — измеримые функции.

Введем класс монотонных функций $\mathfrak{J}_n(R)$, $R > 0$ следующим образом.

Определение 1.1.5. *Функция $\theta : (0,R) \to \mathbb{R}_+$ принадлежит классу $\mathfrak{J}_n(R)$, если*

1. *θ убывающая и непрерывная на $(0,R)$;*
2. *существует постоянная $c \in \mathbb{R}_+$ такая, что*

$$r^{-n} \int_0^r \theta(\rho)\rho^{n-1}\mathrm{d}\rho \leqslant c\theta(r), \quad r \in (0,R). \tag{6}$$

Отметим, что

$$\varphi(\tau) = \theta\left(\left(\frac{\tau}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \in \mathfrak{J}_1(T), \quad T = V_n R^n,$$

где V_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

$$f_\varphi(t;\tau) = \min\{\varphi(t),\varphi(\tau)\} = \begin{cases} \varphi(t), & 0 < \tau \leqslant t, \\ \varphi(\tau), & \tau > t. \end{cases} \tag{7}$$

В случае допустимых ядер мы можем для потенциалов $u \in H_E^G$ определить убывающие перестановки u^*.

Определение 1.1.6. *Пусть $u^\# : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ означает симметрическую перестановку функции u, т. е. радиально симметричную неотрицательную убывающую и непрерывную справа (как функция от $\rho = |x|$, $x \in \mathbb{R}^n$), которая равноизмерима с u. Отметим, что*

$$u^\#(\rho) = u^*\left(V_n\rho^n\right), \quad u^*(t) = u^\#\left(\left(\frac{t}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right), \quad \rho, t \in \mathbb{R}_+. \tag{8}$$

Здесь V_n — объем n-мерного единичного шара. Обозначим

$$\begin{aligned} T &= \infty, && \text{если } R = \infty, \\ T &= V_n(R/2)^n, && \text{если } R \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \tag{9}$$

Сформулируем условия на ядра G[15].

Определение 1.1.7. *Пусть $\theta \in \mathfrak{J}_n(\infty)$. Считаем, что $G \in S_\infty(\theta)$, если*

$$G^\#(\rho) \cong \theta(\rho), \quad \rho = |x| \in \mathbb{R}_+. \tag{10}$$

Определение 1.1.8. *Пусть $\theta \in \mathfrak{J}_n(\infty)$. Считаем, что $G \in S_\infty^0(\theta)$, если*

$$G(\rho) \cong \theta(\rho), \quad \rho = |x| \in \mathbb{R}_+. \tag{11}$$

Замечание 1.1.3. *Ясно, что $S_\infty^0(\theta) \subset S_\infty(\theta)$.*

Определение 1.1.9. *Пусть $\theta \in \mathfrak{I}_n(\infty)$. Потенциалы $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$ называются обобщенными потенциалами Рисса, если*

$$G(x) \cong \theta(|x|), \quad |x| \in \mathbb{R}_+. \tag{12}$$

Определение 1.1.10. *Пусть $X = X(\mathbb{R}^n)$ есть ПИП, $\theta \in \mathfrak{I}_n(R)$, где $R \in \mathbb{R}_+$. Считаем, что $G \in S_R(\theta; X)$, если*

$$(G_R^0)^{\#}(\rho) \cong \theta(\rho), \quad \rho \in (0,R), \quad G_R^1 \in X(\mathbb{R}^n), \tag{13}$$

где

$$B_R = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x| < R\right\}, \quad R \in \mathbb{R}_+,$$

$$G_R^0(x) = G(x)\chi_{B_R}(x); \quad G_R^1(x) = G(x)\chi_{B_R^c}(x).$$

При этом,

$$G(x) = G_R^0(x) + G_R^1(x).$$

Определение 1.1.11. *Пусть $X = X(\mathbb{R}^n)$ есть ПИП, $\theta \in \mathfrak{I}_n(R)$,*

$$G(x) = G_R^0(x) + G_R^1(x);$$

$$B_R = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x| < R\right\}, \quad R \in \mathbb{R}_+,$$

$$G_R^0(x) = G(x)\chi_{B_R}(x); \quad G_R^1(x) = G(x)\chi_{B_R^c}(x).$$

Считаем, что $G \in S_\infty^0(\theta; X)$, если

$$G_R^0(x) \cong \theta(\rho), \quad \rho = |x| \in (0,R), \quad G_R^1 \in X(\mathbb{R}^n).$$

Определение 1.1.12. *Пусть $\theta \in \mathfrak{I}_n(R)$. Потенциалы $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$ называются обобщенными бесселевыми потенциалами, если*

$$G_R^0(x) \cong \theta(|x|), \quad x \in B_R, \quad G_R^1(x) \in (L_1 \cap E')(\mathbb{R}^n), \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} G\,\mathrm{d}x \neq 0.$$

Параграф 1.2. Эквивалентные описания конусов перестановок для потенциалов. В этом разделе мы покажем, как операторы типа Харди–Копсона появляются в теории потенциалов. Рассмотрим следующие конусы перестановок для $T \in (0,\infty]$, снабженные положительно однородными функционалами[15]:

$$M(T) \equiv M_E^G(T) = \left\{h(t) = u^*(t),\ t \in (0,T) \,:\, u \in H_E^G\right\}, \tag{14}$$

$$\rho_{M(T)}(h) = \inf\left\{\|u\|_{H_E^G} \,:\, u \in H_E^G,\ u^*(t) = h(t),\ t \in (0,T)\right\}, \tag{15}$$

Определение 1.2.1. *При $T \in (0,\infty]$ рассмотрим конус*

$$K(T) \equiv K_E^{\varphi} = \left\{ h(t) = \int\limits_0^T f_{\varphi}(t;\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau; \quad t \in (0,T) \ : \ g \in \tilde{E}_0(0,T) \right\}, \qquad (16)$$

снабженный функционалом $\rho_{K(T)}(h) = \|g\|_{\tilde{E}(0,T)}$, где в случае $T \in \mathbb{R}_+$,

$$\|g\|_{\tilde{E}(0,T)} = \|g^0\|_{\tilde{E}(R_+)}; \quad g^0(t) = g(t); \quad t \in (0,T), \quad g^0(t) = 0, \quad t \geqslant \tau.$$

$$\tilde{E}_0(0,T) = \left\{ g \in \tilde{E}(0,T);\ 0 \leqslant g \downarrow, \quad g(t+0) = g(t), \quad t \in (0,T) \right\} \qquad (17)$$

Считаем, что

$$f_{\varphi}(t;\cdot) \in \tilde{E}'(0,T) \quad \text{при} \quad t \in (0,T). \qquad (18)$$

Напомним, что множество $\{K(T)\}$ неотрицательных измеримых функций на $(0,T)$, $T \in (0,\infty]$ образует конус, снабженный функционалом

$$\rho_{K(T)} \ : \ K(T) \to [0,\infty) \quad \text{если}$$

$$h \in K \Rightarrow \alpha h \in K, \quad \forall \alpha \in [0,\infty); \qquad (19)$$

$$\rho_{K(T)}(\alpha h) = \alpha \rho_{K(T)}(h), \quad \forall \alpha \in [0,\infty); \qquad (20)$$

$$\rho_{K(T)}(h) = 0 \quad \Rightarrow \quad h = 0 \quad \text{почти всюду на } (0,T). \qquad (21)$$

Рассмотрим совокупность $\mathfrak{I}_T = \{K(T)\}$ таких конусов.

Определение 1.2.2. *Пусть $K(T)$, $M(T) \in \mathfrak{I}_T$. Конус $K(T)$ накрывает конус $M(T)$ (обозначение $M(T) \prec K(T)$), если существуют постоянные $c_1 = c_1(T) \in \mathbb{R}_+$ и $c_2 = c_2(T) \in [0,\infty)$, причем $c_2(\infty) = 0$, такие, что для каждой функции $k_1 \in M(T)$ найдется функция $k_2 \in K(T)$, удовлетворяющая условиям*

$$\rho_{K(T)}(k_2) \leqslant c_1 \rho_{M(T)}(k_1), \quad k_1(t) \leqslant k_2(t) + c_2 \rho_{M(T)}(k_1), \quad t \in (0,T). \qquad (22)$$

Замечание 1.2.1. *Эквивалентность конусов означает их взаимное накрывание:*

$$M(T) \approx K(T) \quad \Leftrightarrow \quad M(T) \prec K(T) \prec M(T).$$

Теорема 1.2.1. (см. [4]). *Пусть $R \in (0,\infty]$, $\theta \in \mathfrak{I}_n(R)$ и $T = T(R), T = \infty$, если $R = \infty$; где $T = V_n \left(\frac{R}{2}\right)^n$, если $R < \infty$; $f_{\varphi}(t;.) \in \tilde{E}'(\mathbb{R}_+)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $G \in S_{\infty}^0(\theta)$ или, если $R \in \mathbb{R}_+$, $G \in S_R^0(\theta; E')$, то*

$$M_E^G(T) \approx K_E^{\varphi}(T). \qquad (23)$$

Параграф 1.3. Рассмотрены общие свойства потенциалов, построенных на базе весовых пространств Лоренца с общими весами.

Определение 1.3.1. *Пространствами Лоренца $\Lambda^q(v)$ и $\Gamma^q_\delta(v)$, где δ и $v > 0$ — измеримые функции, называются пространства измеримых функций с конечными нормами:*

$$\|f\|_{\Lambda^q(v)} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty f^{*q}(t)v(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}; & 1 < q < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{t\in(0,\infty)}\left\{f^*(t)v(t)\right\}; & q = \infty, \end{cases} \tag{24}$$

$$\|f\|_{\Gamma^q_\delta(v)} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty f_\delta^{**q}(t)v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}; & 1 < q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in(0,\infty)}\left\{f_\delta^{**}(t)v(t)\right\}; & q = \infty, \end{cases} \tag{25}$$

где

$$f_\delta^{**}(t) = \frac{1}{\int_0^s \delta(t)\,\mathrm{d}t}\int\limits_0^t f^*(\tau)\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau; \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

В частности, когда $\delta = 1$:

$$\|f\|_{\Gamma^q(v)} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty f^{**q}(t)v(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}; & 1 < q < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{t\in(0,\infty)}\left\{f^{**}(t)v(t)\right\}; & q = \infty. \end{cases} \tag{26}$$

Определение 1.3.2. *Пусть оператор $\mathfrak{R}_{\varphi,T} : \tilde{E}_0(0,T) \to \tilde{X}(0,T)$, $T \in (0,\infty]$, определён по формуле*

$$\mathfrak{R}_{\varphi,T}[g](t) = \int\limits_0^T f_\varphi(t;\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad g \in \tilde{E}_0(0,T). \tag{27}$$

Этот оператор играет важную роль в интегральных свойствах потенциала. Сформулируем критерии вложений пространства потенциалов в ПИП:

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n). \tag{28}$$

Вложение (28) эквивалентно условию: существует $c \in (0,\infty)$, такая что

$$\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\tilde{X}} \leqslant c\|g\|_{\tilde{E}}; \quad g \in \tilde{E}_0.$$

Рассмотрим случай $E = \Lambda^q(u)$.

Задача — описать оптимальное ПИП $X_0(\mathbb{R}^n)$ для вложения

$$H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n),$$

т. е. такое ПИП $X_0(\mathbb{R}^n)$, что

1. $H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n) \subset X_0(\mathbb{R}^n)$;
2. если ПИП $X(\mathbb{R}^n)$, такое что есть вложение $H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n)$, то

$$X_0(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n).$$

В наших результатах мы использовали следующие свойства потенциалов и теоремы[15].

Теорема 1.3.1. *Пусть оператор* $\mathfrak{R}_{\varphi,\infty} : \Lambda^q(u)(\mathbb{R}_+) \to \tilde{X}(\mathbb{R}_+)$. *Для потенциалов Рисса вложение:*

$$H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n) \tag{29}$$

эквивалентно ограниченности оператора $\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}$.

Теорема 1.3.3. *При* $T = \infty$ *для потенциалов типа Рисса, или* $T = V_n(R/2)^n \in \mathbb{R}_+$ *для потенциалов типа Бесселя имеет место эквивалентность*

$$H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n) \subset L_\infty(\mathbb{R}^n) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \in [\Lambda^q(u)]'(0,T). \tag{30}$$

Параграф 1.4. Критерии вложений пространства потенциалов в перестановочно инвариантные пространства в случае базовых весовых пространств Лоренца.

Теорема 1.4.2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, *а функции* $v \geqslant 0$ — *измеримая и* V *определена следующим образом:*

$$V(t) = \int_0^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

тогда

$$\left\|\mathfrak{R}^{**}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{L^{p'}(v)} \cong \left\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\right\|_{L^{p'}(v)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\tilde{A} = \sup_{x>0}\left\{\left(\int_0^\infty \left(\frac{x}{x+t}\right)^{p'} \cdot v(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^\infty \left(\frac{t}{t+x}\right)^{p} \cdot \frac{v(t)}{V(t)^p}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\right\} < \infty. \tag{31}$$

Получены критерии вложений пространства потенциалов в перестановочно инвариантные пространства и даны описания оптимальных перестановочно инвариантных пространств для таких вложений. Приведена конкретизация этих вложений в случае базовых весовых пространств Лоренца.

Теорема 1.4.3. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'} = 1$, *а функции* u, v, w, V *и* U *определены следующим образом:*

$$U(s) = \int\limits_0^s u(t)\,\mathrm{d}t, \quad v(t) = \frac{t^{2p'}u(t)\varphi^{p'}(t)}{U^{p'}(t)}, \quad V(t) = \int\limits_0^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$w(t) = \frac{t^{p+p'-1}V(t)\int_t^\infty \tau^{-p'}v(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{V(t) + t^{p'}\int_t^\infty \tau^{-p'}v(\tau)\,\mathrm{d}\tau}.$$

Кроме того, пусть существует $c \in (0,\infty)$ *такое, что* $\int_0^r \varphi(\rho)\,\mathrm{d}\rho \leqslant c\varphi(r)r$; $\forall r \in (0,\infty)$, *и пусть*

$$C = \sup_{r>0}\left\{\left(\int\limits_0^r \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int\limits_t^\infty \frac{U^p(t)}{t^{2p}u^{\frac{p}{p'}}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\right\} < \infty. \tag{32}$$

Тогда оптимальное ПИП для вложения $H^G_{\Lambda^{p'}(u)}(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n)$ *имеет эквивалентную норму*

$$\|f\|_{\tilde{X}_0(\mathbb{R}_+)} \cong \|f\|_{\Gamma^p(w)}. \tag{33}$$

Основные результаты первой главы опубликованы в работах [1; 2] из списка публикаций автора по теме диссертации.

В **главе 2** исследуются модулярные неравенства для операторов типа Харди–Копсона на весовых пространствах Орлича.

Параграф 2.1. Определения и предварительные сведения и вспомогательные теоремы.

Определение 2.1.1. *Функция* Φ: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *называется* N*-функцией, если*

$\Phi(t) = \int\limits_0^t \phi(\tau)\,\mathrm{d}\tau$; *где* ϕ *непрерывна,* $0 < \phi \uparrow$; $\phi(0) = 0$; $\phi(\infty) = \infty$. *Пусть* ϕ^{-1} *непрерывная справа функция, обратная к* ϕ, *и определим*

$$\Psi(t) = \int\limits_0^t \phi^{-1}(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Ψ *называется дополнительной функцией для* Φ.

Определение 2.1.2. *а) Говорят, что* N*-функция* Φ *удовлетворяет* Δ_2 *условию (мы пишем* $\Phi \in \Delta_2$*), если существует константа* $B > 0$, *такая, что*

$$\Phi(2t) \leqslant B\Phi(t), \quad \forall t > 0. \tag{34}$$

б) Запишем $\Phi_1 \ll \Phi_2$ если существует константа $L_0 > 0$, такая, что неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(a_i) \leqslant L_0 \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(\sum_{i=1}^{\infty} a_i) \tag{35}$$

выполняется для любой последовательности $\{a_i\}$ с $a_i \geqslant 0$.

Если $\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$ выпуклая функция , то $\Phi_1 \ll \Phi_2$.

***Например**, если $\Phi_1(t) = t^p$; $\Phi_2(t) = t^q$; $0 < p,\ q < \infty$, тогда $\Phi_1 \ll \Phi_2$ при $p \leqslant q$.*

в) Пусть ω положительная измеримая весовая функция и Φ — N-функция. Пространство Орлича $L_\Phi(\omega)$ состоит из всех измеримых функций f (по модулю эквивалентности почти везде) с нормой

$$\|f\|_{\Phi(\omega)} = \inf\left\{ \lambda > 0,\ \int_0^{\infty} \Phi(\lambda^{-1}|f(x)|)\omega(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1 \right\}. \tag{36}$$

***Например**, если $\omega \equiv 1$; $\Phi(t) \equiv t^p$, тогда $L_\Phi(\omega) = L_p$.*

Мы называем $\|\cdot\|_{\Phi(\omega)}$ нормой Люксембурга.

Норма Орлича функции f определяется выражением

$$\|f\|'_{\Psi(\omega)} = \sup\left\{ \int_0^{\infty} |fg|\omega\,\mathrm{d}x \ :\ g \in L_0^+(\mathbb{R}_+);\ \int_0^{\infty} \Psi(|g|)\omega\,\mathrm{d}x \leqslant 1 \right\}, \tag{37}$$

где Ψ — дополнительная функция к Φ.

Замечание 2.1.1. (см. [1]). *$L_\Phi(\omega)$ — банахово пространство, и нормы Люксембурга и Орлича эквиваленты. Именно,*

$$\|f\|_{\Phi(\omega)} \leqslant \|f\|'_{\Psi(\omega)} \leqslant 2\|f\|_{\Phi(\omega)}. \tag{38}$$

Определение 2.1.3. *Обобщенные операторы Харди — это операторы вида*

$$\mathfrak{K}f(x) = \int_0^{x} k(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \mathfrak{K}^*g(t) = \int_t^{+\infty} k(x,t)g(x)\,\mathrm{d}x, \tag{39}$$

где

а) $k\ :\ \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^2\ :\ 0 < t < x < +\infty\big\} \to [0, +\infty)$;

б) $k(x,t) \geqslant 0$ не убывает по x, не возрастает по t;

в) $k(x,y) \leqslant D\big(k(x,t)+k(t,y)\big)$, всякий раз, когда $0 \leqslant y \leqslant t < x < +\infty$ для некоторой константы D.

Параграф 2.2. Модулярные неравенства для операторов типа Харди–Копсона на функциях в пространстве Орлича.

Напомним, что

$$K_E^{\varphi} = \left\{ h(x) = \int\limits_0^{\infty} f_{\varphi}(x;\tau) g(\tau)\,\mathrm{d}\tau; \quad x \in (0,\infty) \,:\, g \in \tilde{E}_0(0,\infty) \right\};$$

$$f_{\varphi}(x;\tau) = \begin{cases} \varphi(x), & 0 < \tau \leqslant x, \\ \varphi(\tau), & \tau > x; \end{cases}$$

$$0 < \varphi \downarrow, \quad \int\limits_0^{x} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leqslant c\varphi(x)x.$$

Мы рассматриваем оператор

$$\mathcal{F}[g] \equiv h(x) = \int\limits_0^{\infty} f_{\varphi}(x;\tau) g(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{40}$$

$$\mathcal{F}[g] = \varphi(x) \int\limits_0^{x} g(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int\limits_x^{\infty} \varphi(\tau) g(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \mathcal{F}_1[g] + \mathcal{F}_2[g]. \tag{41}$$

Это означает, что $\mathcal{F}$ является суммой двух операторов типа Харди–Копсона.
Теорема 2.2.2. *Пусть Φ_1, Φ_2 — N-функции, $\Phi_1 \ll \Phi_2$, Ψ_1, Ψ_2 — дополнительные функции для Φ_1 и Φ_2, a, b, v, ω — положительные весовые функции, $\mathcal{F}$ определяется формулой* (40)*. Тогда существует такая постоянная $A > 0$, что неравенство*

$$\Phi_2^{-1}\left(\int\limits_0^{+\infty} \Phi_2\big(a(x)\mathcal{F}g(x)\big)\omega(x)\,\mathrm{d}x \right) \leqslant \Phi_1^{-1}\left(\int\limits_0^{+\infty} \Phi_1\big(Ab(x)g(x)\big)v(x)\,\mathrm{d}x \right) \tag{42}$$

выполняется для всех неотрицательных измеримых функций g тогда и только тогда, когда существует постоянная C такая, что неравенство

$$\Phi_2^{-1}\left(\int\limits_0^{+\infty} \Phi_2\left(\frac{a(x)}{C} \cdot \frac{f_{\varphi}(x;r)}{\varphi(r)} \left\| \frac{f_{\varphi}(\cdot;r)}{\varepsilon v b} \right\|_{\Psi_1(\varepsilon v)} \right) \omega(x)\,\mathrm{d}x \right) \leqslant \Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{43}$$

выполняется для всех ε, $r > 0$.

Целью данной теоремы является изучение поведения интегральных операторов типа Харди–Копсона на весовых пространствах Орлича. Результаты о модулярных неравенствах для рассматриваемых операторов типа Харди–Копсона важны, поскольку такие операторы возникают в изучение убывающих перестановок для обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса, в этом случае пространство Орлича–Лоренца служит базовым пространством.

Параграф 2.3. Применение к весовым пространствам Лебега.

Применим теорему 2.2.1 к случаю весовых пространств Лебега. Пусть $1 \leqslant p, q < \infty$

$$\Phi_1(t) = t^p; \quad \Phi_2(t) = t^q; \quad \Psi_1 = t^{p'}; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1;$$

функции a, b, v, ω такие, как в теореме 2.2.1. Тогда

$$\Phi_1^{-1}(t) = t^{\frac{1}{p}}; \quad \Phi_2^{-1}(t) = t^{\frac{1}{q}};$$

$$\Phi_1 \ll \Phi_2 \Leftrightarrow p \leqslant q,$$

Применение теоремы 2.2.1 дает следующий результат.

Пусть $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$. Тогда существует такая постоянная $A > 0$, что неравенство

$$\left(\int\limits_0^{+\infty} a^q(x) \big(\mathcal{F} g\big)^q(x) \omega(x)\, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant A \left(\int\limits_0^{+\infty} \big(b^p(x) g^p(x)\big) v(x)\, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{44}$$

выполняется для всех неотрицательных измеримых функций g тогда и только тогда, когда существует постоянная $C > 0$ такая, что неравенство

$$\left(\int\limits_0^{+\infty} a(x)^q f_\varphi(x; r)^q \omega(x)\, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} \left\| \frac{f_\varphi(\cdot; r)}{vb} \right\|_{L_{p'}(v)}^q \leqslant C\varphi(r). \tag{45}$$

выполняется для всех $r > 0$.

Основные результаты второй главы опубликованы в работе [3] из списка публикаций автора по теме диссертации.

В **главе 3** изучаются модулярные неравенства для операторов типа Харди–Копсона на монотонных функциях в пространстве Орлича.

Аналогичная проблема изучена для весовых пространств Орлича–Лоренца. Ее решение связано с переходом от описаний действия операторов на конусе всех неотрицательных функций из пространства Орлича к изучению действия операторов на конусе неотрицательных функций со свойствами монотонности. Эти результаты играют важную роль, поскольку изучение интегральных свойств потенциалов связано именно с конусами их убывающих перестановок. В главе 3 диссертации получены критерии справедливости модулярных неравенств для операторов типа Харди–Копсона, отображающих конусы монотонных функций в весовом пространстве Орлича в другое весовое пространство Орлича. Следует отметить, что ответы, полученные в главе 3 с учетом свойств монотонности, существенно отличаются по форме от результатов главы 2, и их получение потребовало от автора привлечения ряда новых соображений.

Мы рассматриваем модулярные неравенства для операторов типа Харди–Копсона на конусе Ω положительных убывающих функций из весовых пространств Орлича. Воспользуемся общей теоремой (доказана в[9]) и результатами в[7] о редукции модулярных неравенств для положительно однородных операторов на конусе Ω, что позволяет перейти к модулярным неравенствам для модифицированных операторов на конусе всех положительных функций из пространства Орлича. Он основан на теореме двойственности, описывающей ассоциированную норму для конуса Ω. Мы следуем, в основном, обозначениям, использованным в книге Беннета и Шарпли[1] [разд. 8, Глава 4] и в работе[16]. Здесь конкретизируются модулярные неравенства для случая, когда положительный оператор является оператором типа Харди–Копсона. Показано, что в этом случае модифицированный оператор является обобщенным оператором Харди в нотации Jim Quile Sun[8]. Это позволяет использовать подходы, развитые в[17,18,19,20], а также результаты, полученные Jim Quile Sun[8], чтобы установить явные критерии справедливости модулярных неравенств.

Параграф 3.1. Определения и предварительные сведения.

Мы предполагаем, что $M(\mathbb{R}_+)$ — множество измеримых по Лебегу почти всюду конечных функций, M_+ — конус почти всюду положительных функций из $M = M(\mathbb{R}_+)$;

$$M_+ = \left\{ f \in M(\mathbb{R}_+) : \ f > 0 \right\}.$$

Рассмотрим конус положительных убывающих функций из пространства Орлича:

$$\Omega = \left\{ f \in L_{\Phi,v} : \ 0 \leqslant f \downarrow \right\} \tag{46}$$

Для $g \in M_+$, введем следующую ассоциированную норму на конусе:

$$\|g\|'_{\Omega} = \sup \left\{ \int_0^{\infty} f g \, \mathrm{d}t : \ f \in \Omega; \ \|f\|_{\Phi,v} \leqslant 1 \right\}. \tag{47}$$

16 *Бахтигареева Э. Г.*, *Гольдман М. Л.* Неравенства для операторов типа Харди на конусе убывающих функций из весового пространства Орлича // Доклады Академии наук. 2017. Т. 477, № 2. С. 133—137.

17 *Gogatishvili A.*, *Neves J. S.*, *Opic B.* Optimality of embeddings of Bessel-potential-type spaces // Function spaces, differential operators and nonlinear analysis: Proc. Conf., Milovy, Czech Republ. Math. Inst. Acad. Sci. Czech Republ., Prague, 2005. P. 97—102.

18 *Goldman M. L.* Estimates for restrictions of monotone operators on the cone of decreasing functions in Orlicz space // Mathematical Notes. 2016. No. 1. P. 24—37. in Russian.

19 *Goldman M. L.* Estimates for the norms of monotone operators on weighted Orlicz-Lorentz classes // Doklady Mathematics. 2016. Vol. 94, no. 3. P. 627—631.

20 *Goldman M. L.* On optimal embeddings of the generalized Bessel and Riesz potentials // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2010. Vol. 269. P. 91—111. in Russian.

Сформулируем результат, обобщающий некоторые предыдущие результаты работ[10,21,22,23,24].

Предложение 3.1.1. (см.[21]). *Пусть Φ, Ψ — дополнительные N-функции, N-функция Φ удовлетворяет условию Δ_2, пусть $v \in M_+$ и пусть*

$$0 < V(t) := \int_0^t v\, d\tau < \infty, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad V(+\infty) = +\infty. \tag{48}$$

Для фиксированного числа $0 < a < 1$ справедлива следующая двусторонняя оценка:

$$\|g\|'_\Omega \cong \|\mathfrak{R}_a(g)\|_{\Psi,v} = \inf\left\{ \lambda > 0 : \int_0^\infty \Psi\big(\lambda^{-1}|\mathfrak{R}_a(g;t)|\big)v(t)\, dt \leqslant 1 \right\}, \tag{49}$$

где

$$\mathfrak{R}_a(g;t) := V(t)^{-1} \int_{\delta_a(t)}^t g(\tau)\, d\tau, \quad \delta_a(t) := V^{-1}\big(aV(t)\big), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{50}$$

При различных значениях $a \in (0,1)$ нормы (49) эквивалентны.

Здесь и далее мы используем обозначения

$$A \cong B \Leftrightarrow \exists\, c \in [1,\infty) : \; c^{-1} \leqslant A/B \leqslant c. \tag{51}$$

В следующих рассмотрениях мы будем использовать формулу сопряженного оператора:

$$\mathfrak{R}_0^*(f;\tau) = \int_\tau^\infty \frac{f(t)}{V(t)}\, dt, \quad \tau \in \mathbb{R}_+. \tag{52}$$

Параграф 3.2. Области применения для операторов типа Харди–Копсона.

Сформулируем основной результат этого раздела, позволяющий свести модулярные неравенства для операторов на конусе Ω к модулярным неравенствам для модифицированных операторов на конусе M_+.

В этом разделе мы применяем общие результаты[11] в случае оператора Харди–Копсона.

---

[21] *Goldman M.*, *Kerman R.* On the principle of duality in Orlicz–Lorentz spaces, Function spaces. Differential Operators. Problems of mathematical Education // Proc. Intern. Conf. dedicated to 75-th birthday of prof. Kudrjavtsev. Vol. 1. M., 1998. P. 179—183.

[22] *Drabek P.*, *Heinig H.*, *Kufner A.* Weighted modular inequalities for monotone functions // J. Inequal. and Applications. 1997. Vol. 1. P. 183—197.

[23] *Sawyer E.* Boundedness of classical operators on classical Lorentz spaces // Studia Math. 1990. Vol. 96. P. 145—158.

[24] *Heinig H. P.*, *Kufner A.* Hardy operators on monotone functions andsequences in Orlicz spaces // J. London Math. Soc. 1996. Vol. 53, no. 2. P. 256—270.

Параграф 3.3. Доказательство результатов

Теорема 3.3.1. *Пусть Φ_1, Φ_2 — N-функции и $\Phi_1 \prec\prec \Phi_2$, Ψ_1, Ψ_2 — дополнительные функции для Φ_1 и Φ_2, v, u, w положительные весовые функции, $\mathcal{F}$ — оператор Харди–Копсона* (40). *Пусть выполняется условие*

$$A_\varphi = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \frac{1}{t\varphi(t)}\left(\int_0^t \varphi\,\mathrm{d}\tau\right) < \infty. \tag{53}$$

Тогда существует постоянная $C > 0$ такая, что неравенство

$$\Phi_2^{-1}\left\{\int_{\mathbb{R}_+} \Phi_2\big(w(t)\mathcal{F}f(t)\big)u(t)\,\mathrm{d}t\right\} \leqslant \Phi_1^{-1}\left\{\int_{\mathbb{R}_+} \Phi_1\big(Cf(t)\big)v(t)\,\mathrm{d}t\right\}, \quad f \in \Omega, \tag{54}$$

выполняется для всех положительных невозрастающих функций f тогда и только тогда, когда существует константа B такая, что для всех ε, $r > 0$ выполняются следующие неравенства:

$$\Phi_2^{-1}\left\{\int_0^\infty \Phi_2\left(\frac{w(t)}{B}\cdot\frac{f_\varphi(t,r)}{\varphi(r)}\left\|\frac{f_\varphi(\cdot,r)}{\varepsilon V}\right\|_{\Psi_1(\varepsilon v)}\right)u(t)\,\mathrm{d}t\right\} \leqslant \Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{55}$$

Основные результаты третьей главы опубликованы в работах [4; 5] из списка публикаций автора по теме диссертации.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Рассмотрены общие свойства потенциалов, построенных на базе весовых пространств Лоренца с общими весами.
2. Установлены эквивалентные описания конусов убывающих перестановок для потенциалов, построенных на базе весовых пространств Лоренца с общими весами.
3. Получены критерии вложений пространства потенциалов в перестановочно инвариантные пространства и даны описания оптимальных перестановочно инвариантных пространств для таких вложений. Приведена конкретизация этих вложений в случае базовых весовых пространств Лоренца.
4. Результаты о модулярных неравенствах для рассмотренных операторов типа Харди важны, так как такие операторы возникают при изучении убывающих перестановок для обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса, когда в качестве базовых ПИП выступают пространства Орлича–Лоренца.
5. Рассмотрены модулярные неравенства для операторов типа Харди на конусе Ω положительных убывающих функций из весовых пространств Орлича.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Альхалиль Н. Х.*, *Алмохаммад Х.* Интегральные свойства обобщённых потенциалов типа Бесселя и типа Рисса // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2017. — Т. 25, № 4. — С. 340—349.
2. *Альхалиль Н. Х.*, *Алмохаммад Х.* Дифференциальные свойства обобщённых потенциалов типа Бесселя и типа Рисса // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2018. — Т. 26, № 1. — С. 3—12.
3. *Almohammad K.* On modular inequalities for generalized Hardy operators on weighted Orlicz spaces // Eurasian Math. J. — 2021. — Vol. 12, no. 3. — P. 19—28.
4. *Almohammad K.* The Modular Inequalities for Hardy-type Operators on Monotone Functions in Orlicz Space // Advances in Systems Science and Applications. — 2020. — Vol. 21, no. 2. — P. 133—141.
5. *Almohammad K.* The Modular for Hardy-Type Operators on Monotone Functions in Orlicz Space // Annals of R.S.C.B. — 2021. — Vol. 25, no. 2. — P. 1196—1200.
6. *Алмохаммад Х.* Интегральные свойства обобщённых потенциалов типа Бесселя и типа Рисса // 8th International Scientific Conference «Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis VIII». — 2018. — С. 31.
7. *Алмохаммад Х.* О модулярных неравенствах для обобщённых операторов Харди на весовых пространствах Орлича–Лоренца // Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2019». — М. : Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 2019.
8. *Алмохаммад Х.*, *Альхалиль Н. Х.* О свойствах потенциалов типа Рисса на базе пространств Орлича-Лоренца // 9th International Scientific Conference «Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis IX». — Rostov-on-Don, 04.2019. — С. 30—31.
9. *Алмохаммад Х.*, *Альхалиль Н. Х.* О модулярных неравенствах обобщенных Харди операторов на весовых пространствах Орлича // Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2020 «XXXI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам». — Симферополь, 04.2020. — С. 6—7.
10. *Алмохаммад Х.* Модулярные неравенства для одного класса операторов свертки на монотонных функциях в пространстве Орлича // Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2020». — М. : Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 2020.
11. *Алмохаммад Х.* Модулярные неравенства для операторов типа Харди на монотонных функциях в пространстве Орлича // Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2021». — М. : Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 2021.

Халиль Алмохаммад

Интегральные свойства обобщённых потенциалов Бесселя–Рисса

Аннотация

В работе рассмотрены общие свойства потенциалов, построенных на базе весовых пространств Лоренца с общими весами. Установлены эквивалентные описания конусов убывающих перестановок для потенциалов, построенных на базе весовых пространств Лоренца с общими весами. Получены критерии вложений пространства потенциалов в перестановочно инвариантные пространства (кратка ПИП) и даны описания оптимальных перестановочно инвариантных пространств для таких вложений. Приведена конкретизация этих вложений в случае базовых весовых пространств Лоренца. Результаты о модулярных неравенствах для рассмотренных операторов типа Харди важны, так как такие операторы возникают при изучении убывающих перестановок для обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса, когда в качестве базовых ПИП выступают пространства Орлича–Лоренца. Рассмотрены модулярные неравенства для операторов типа Харди на конусе Ω оператора положительно убывающих функций из весовых пространств Орлича.

Khalil Almohammad

Integral properties of generalized potentials Bessel–Riesz

Abstract

In this work the general properties of potentials constructed on the basis of weighted Lorentz spaces with common weights are studied. Equivalent descriptions of cones of decreasing rearrangement are established for potentials constructed on the basis of weighted Lorentz spaces with common weights. Criteria for embeddings of the space of potentials into rearrangement invariant spaces (shortly RIS) are obtained and descriptions of optimal rearrangement invariant spaces for such embeddings are given. A concretization of these embeddings in the case of basic weighted Lorentz spaces is given. The results on modular inequalities for the considered Hardy-type operators are important, since such operators arise in the study of decreasing rearrangement for generalized Bessel and Riesz potentials, when the Orlicz–Lorentz spaces act as basic RIS. We consider modular inequalities for Hardy-type operators on the cone Ω of the operator positively decreasing functions from weighted Orlicz spaces.

Алмохаммад Халиль

Интегральные свойства обобщенных потенциалов
Бесселя–Рисса

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ____