

Сахаров Сергей Игоревич

**О начально-краевых задачах для параболических
систем в плоских областях с негладкими
боковыми границами**

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2025

Работа выполнена на кафедре математического анализа Механико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова".

Научный руководитель:

Бадерко Елена Александровна, д.ф.-м.н.,
доцент, профессор кафедры математического
анализа Механико-математического факульте-
та Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

Официальные оппоненты:

Бурский Владимир Петрович, д.ф.-м.н.,
профессор, профессор кафедры высшей мате-
матики Московского физико-технического ин-
ститута

Черепова Марина Федоровна, д.ф.-м.н.,
доцент, профессор кафедры математического и
компьютерного моделирования Института ин-
формационных и вычислительных технологий
Национального исследовательского универси-
тета «МЭИ»

Ведущая организация:

Федеральное государственное автономное об-
разовательное учреждение высшего образова-
ния Национальный исследовательский ядер-
ный университет «МИФИ»

Защита состоится 9 декабря 2025 года в 17 часов 00 минут на заседании диссер-
тационного совета ПДС 0200.005 при Российском университете дружбы народов
имени Патриса Лумумбы по адресу: г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3.

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библио-
течном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов)
по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6 и на официальном сайте
ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»
по адресу:

<http://www.rudn.ru/science/dissovet>

Автореферат разослан 7 ноября 2025 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н.

Савин Антон Юрьевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Тема диссертационной работы относится к области исследования начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений с частными производными параболического типа. В диссертации эти задачи рассматриваются в полуограниченных и ограниченных областях на плоскости с негладкими (допускающими «клювы») «боковыми» границами. Изучаются вопросы о существовании, единственности, характере гладкости и интегральных представлениях решений поставленных задач, а также об алгебраических условиях разрешимости этих задач.

Впервые параболические системы были введены И.Г. Петровским¹, и им же положено начало исследованию задачи Коши для таких систем. В дальнейшем при изучении начальных и начально-краевых задач для параболических систем были получены известные результаты В. Погорельского², С.Д. Эйдельмана³, В.А. Солонникова⁴, А. Фридмана⁵ и многих других.

Хорошо известна теория задач для параболических систем общего вида В.А. Солонникова⁴. Из этой теории, в частности, следует однозначная разрешимость в пространстве Гёльдера $H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$, $\alpha \in (0, 1)$, начально-краевых задач для параболических систем второго порядка с гёльдеровыми коэффициентами в областях с гладкими «боковыми» границами из класса $H^{1+\alpha/2}$, при соответствующих условиях на характер гладкости данных в этих задачах.

Отдельный интерес начально-краевые задачи для параболических уравнений и систем представляют в случае областей с негладкими «боковыми» границами. В пионерской работе Жевре⁶ с использованием метода потенциалов были впервые исследованы начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности с одной пространственной переменной в областях с негладкими «боковыми» границами из класса Жевре $H^{(1+\alpha)/2}$, $\alpha \in (0, 1)$. Л.И. Камынин⁷ исследовалась гладкость тепловых потенциалов для уравнения теплопроводности со многими пространственными переменными в общем случае нецилиндрических поверхностей-

¹Петровский И.Г. О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. МГУ. Секц. А. 1938. 1. № 7. С. 1-72.

²Pogorzelski W. Étude de la matrice des solution fondamentales du système parabolique d'équations aux dérivées partielles // Ric. Mat. Vol. 1958. Vol. 7. P. 153-185.

³Эйдельман С.Д. Параболические системы. М.: «Наука», 1964. 444 с.

⁴Солонников В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Матем. ин-та В.А. Стеклова АН СССР. 1965. Т. 83. С. 3-163.

⁵Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: «Мир», 1968. 428 с.

⁶Jevrey M. Sur les équation aux deriveés partielles du type parabolique // J. Math. Pur. Appl. 1913. Ser. 6. Vol. 9. № 4. P. 305-471.

⁷Камынин Л.И. О гладкости тепловых потенциалов // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 6. С. 800-839.

носителей плотностей этих потенциалов. Далее Л.И. Камыниным^{8 9} была построена систематическая теория параболических потенциалов и теория разрешимости начально-краевых задач для параболических уравнений второго порядка с одной пространственной переменной в областях с негладкими «боковыми» границами из классов Жевре $H^{(1+\alpha)/2}$, $\alpha \in (0, 1)$, и Дини-Гёльдера $H^{1/2+\omega}$, где ω — некоторый модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини. Л.И. Камыниным и Б.Н. Химченко¹⁰ был исследован вопрос о единственности решения второй начально-краевой задачи для параболических уравнений второго порядка со многими пространственными переменными в нецилиндрических областях с негладкими «боковыми» границами.

Е.А. Бадерко^{11 12 13} была развита теория однозначной разрешимости начально-краевых задач для параболических уравнений порядка $2p$, $p \in \mathbb{N}$, со многими пространственными переменными в нецилиндрических областях с негладкими «боковыми» границами. М.Ф. Черепова¹⁴ установила разрешимость задачи Бицадзе-Самарского для параболического уравнения второго порядка с n пространственными переменными в нецилиндрических областях с негладкими «боковыми» границами. В.Н. Шевелевой¹⁵ с использованием метода, разработанного Е.А. Бадерко, исследована однозначная разрешимость задачи для параболического уравнения второго порядка с разрывными коэффициентами с условиями сопряжения на негладкой поверхности разрыва. А.Н. Коненков¹⁶ рассмотрел первую начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в конусе, вершина которого соответствует начальному или финальному моменту времени, получил оценки функции Грина и установил классы существования и единственности решений этой задачи. Исследование начально-краевых задач для параболических уравнений по-

⁸Камынин Л.И. К теории Жевре для параболических потенциалов. VI // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 6. С. 1015-1025.

⁹Камынин Л.И. О гладкости тепловых потенциалов в пространстве Дини-Гёльдера // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11. № 5. С. 1017-1045.

¹⁰Камынин Л.И., Химченко Б.Н. Теорема о косой производной для равномерно параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. матем. журн. 1989. Т. 30. № 1. С. 114-122.

¹¹Бадерко Е.А. О решении первой краевой задачи для параболических уравнений с помощью потенциала простого слоя // ДАН СССР. 1985. Т. 283. № 1. С. 11-13.

¹²Бадерко Е.А. Краевые задачи для параболического уравнения и граничные интегральные уравнения // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 1. С. 17-23.

¹³Бадерко Е.А. О единственности решений начально-краевых задач для параболических уравнений высокого порядка // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 1. С. 63-70.

¹⁴Черепова М.Ф. О задаче Бицадзе-Самарского для параболического уравнения // Вестн. Моск. ун-та. 1986. Сер. 1. Мат., мех. № 4. С. 74-76.

¹⁵Шевелева В.Н. Решение методом интегральных уравнений контактных задач для параболических уравнений. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1994.

¹⁶Коненков А.Н. Первая краевая задача для уравнения теплопроводности в вырождающихся по времени областях // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2025. Т. 65. № 4. С. 460-470.

рядка $2p$ было продолжено М.Ф. Череповой^{17 18}, в работах которой рассматривались случаи неограниченных по временной переменной t нецилиндрических областей с негладкими «боковыми» границами. В этих работах доказаны теоремы о существовании и единственности решений начально-краевых задач из пространства функций, допускающих рост при $t \rightarrow +\infty$. При этом предполагалось, что младшие коэффициенты и правая часть параболических уравнений допускают определенный рост вблизи параболической границы области, а старшие коэффициенты этих уравнений удовлетворяют лишь локальному условию Гёльдера в области.

Первая и вторая начально-краевые задачи в областях с негладкими «боковыми» границами из класса $H^{(1+\alpha)/2}$ исследовались и в случае одномерных по переменной x параболических систем с гёльдеровыми коэффициентами. В.А. Тверитиновым¹⁹ доказана теорема о существовании решения из пространства $H^{1+\alpha, (1+\alpha)/2}(\bar{\Omega})$, $\alpha \in (0, 1)$, второй начально-краевой задачи. Е.А. Бадерко и М.Ф. Череповой²⁰ установлена разрешимость первой начально-краевой задачи в случае однородной параболической системы и нулевого начального условия в пространстве $C^{1,0}(\bar{\Omega})$ вектор-функций, непрерывных и ограниченных вместе со своей пространственной производной первого порядка вплоть до границы области, а также исследован характер гладкости полученного решения. Далее Е.А. Бадерко и М.Ф. Череповой²¹ были доказаны теоремы о единственности решений из пространства $C^{1,0}(\bar{\Omega})$ первой и второй начально-краевых задач для параболических систем с гёльдеровыми коэффициентами. А.Н. Коненковым²² получена теорема об однозначной разрешимости первой начально-краевой задачи для однородной параболической системы с гёльдеровыми коэффициентами, которые зависят только от x , в пространстве вектор-функций, непрерывных и ограниченных вплоть до границы области.

Исследование классической разрешимости первой и второй начально-краевых задач продолжилось для более общего случая параболических систем с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини, в областях с «боковыми» границами из класса Дини-Гёльдера. В работе М. Зейнеддин²³ доказана теорема о

¹⁷Черепова М.Ф. О разрешимости краевых задач для параболического уравнения с растущими вблизи границы коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 1. С. 110-121.

¹⁸Черепова М.Ф. Краевые задачи для параболического уравнения высокого порядка с растущими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 4. С. 507-516.

¹⁹Тверитинов В.А. Решение второй краевой задачи для параболической системы с одной пространственной переменной методом граничных интегральных уравнений // Деп. ВИНТИ РАН. 15.11.89. № 6906-B89.

²⁰Бадерко Е.А., Черепова М.Ф. Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 2. С. 198-208.

²¹Бадерко Е.А., Черепова М.Ф. О единственности решений первой и второй начально-краевых задач для параболических систем в ограниченных областях на плоскости // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 8. С. 1039-1048.

²²Коненков А.Н. Существование и единственность классического решения первой краевой задачи для параболических систем на плоскости // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. С. 904-913.

²³Зейнеддин М. О потенциале простого слоя для параболической системы в классах Дини. Дис. ... канд.

существовании решения из пространства $C_0^{1,0}(\bar{\Omega})$ второй начально-краевой задачи для однородных параболических систем с нулевым начальным условием. Е.А. Бадерко и М.Ф. Череповой²⁴ была установлена разрешимость в пространстве $C_0^{1,0}(\bar{\Omega})$ первой начально-краевой задачи для однородной параболической системы с нулевым начальным условием. Вопрос о единственности решений поставленных задач в этих работах не рассматривался.

В большинстве цитируемых выше работ использовался метод параболических потенциалов, что дало возможность авторам получать интегральные представления для решений. Эти представления имеют самостоятельный интерес, так как сводят поставленные задачи к решению граничных интегральных уравнений и систем Вольтерры первого и второго рода. Тем самым авторы в своих работах создавали теоретическую основу для численного исследования поставленных параболических задач быстро развивающимся методом граничных элементов (методом граничных интегральных уравнений).

Из приведенного обзора видно, что предыдущие исследования задач для параболических систем в областях с негладкими «боковыми» границами ограничивались случаями, когда на каждой из «боковых» границ областей для всех компонент искомой вектор-функции задаются только условия первого или только второго рода. Поэтому перед автором диссертации естественно возник вопрос об изучении таких задач в случае граничных условий общего вида, а именно, когда на компоненты искомой вектор-функции задаются как условия первого, так и условия третьего рода с переменными коэффициентами. Кроме того, ранее не изучались начально-краевые задачи для неоднородных параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами с ненулевыми начальными условиями в областях с негладкими «боковыми» границами из класса Дини-Гёльдера.

Актуальность темы диссертации обусловлена необходимостью дальнейшего развития метода потенциалов (метода граничных интегральных уравнений) для исследования однозначной классической разрешимости начально-краевых задач для неоднородных параболических систем с ненулевыми начальными условиями в областях с негладкими «боковыми» границами, на которых задаются граничные условия общего вида с переменными коэффициентами, и представления решений таких задач в конструктивном виде.

Заметим наконец, что параболические системы моделируют, в частности, нестационарные процессы тепло- и массопереноса в многокомпонентных материалах. Негладкость «боковых» границ рассматриваемых областей моделирует, например, резкое изменение размеров металлических изделий при фазовых переходах, свя-

физ.-матем. наук. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1992.

²⁴Baderko E.A., Cherepova M.F. Dirichlet problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients // Applicable Analysis. 2021. Vol. 100. No. 13. P. 2900-2910.

занных с увеличением или уменьшением температуры при проведении различных технологических процессов или во время эксплуатации этих изделий.

Цели и задачи диссертационной работы. Целью диссертационной работы является исследование однозначной классической разрешимости начально-краевых задач для неоднородных параболических систем второго порядка с ненулевыми начальными условиями в полуограниченных и ограниченных областях на плоскости с негладкими «боковыми» границами из класса Дини-Гёльдера, на которых для компонент искомых вектор-функций задаются граничные условия общего вида с переменными коэффициентами, и получение интегральных представлений решений поставленных задач. Для достижения этой цели были поставлены следующие задачи, последовательному решению которых посвящена работа автора.

1. Установить *единственность* в пространстве $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ классического решения второй начально-краевой задачи для параболической системы с коэффициентами, удовлетворяющими *двойному условию Дини*, в полуограниченной и ограниченной областях с «боковыми» границами из класса *Дини-Гёльдера*.

2. Изучить вопрос о существовании и единственности в пространстве $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ классических решений начально-краевых задач для однородных параболических систем с нулевым начальным условием и с *граничными условиями общего вида* на негладких «боковых» границах областей. Исследовать *алгебраические условия разрешимости* поставленных задач. Получить *интегральные представления* решений.

3. Исследовать свойства потенциала Пуассона и объемного потенциала, а затем установить классическую разрешимость в пространстве $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ начально-краевых задач для *неоднородных* параболических систем с *ненулевым* начальным условием и с граничными условиями общего вида на негладких «боковых» границах областей. Установить *характер гладкости* и получить *интегральные представления* решений.

Научная новизна. Все результаты, представленные автором в диссертационной работе, являются новыми и состоят в следующем.

1. Впервые установлена *единственность* в пространстве $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ решений начально-краевых задач для параболических систем с коэффициентами, удовлетворяющими *двойному условию Дини*, как в полуограниченных, так и в ограниченных областях с «боковыми» границами из класса *Дини-Гёльдера*, на которых для компонент искомых вектор-функций задаются *граничные условия общего вида* с переменными коэффициентами.

2. Впервые установлена классическая *разрешимость* в пространстве $\hat{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$ начально-краевых задач для *неоднородных* параболических систем с коэффициентами, удовлетворяющими *двойному условию Дини*, с *ненулевыми начальными условиями*, в полуограниченных и ограниченных областях с «боковыми» границами из класса *Дини-Гёльдера*, на которых задаются *граничные условия общего вида*,

при *минимальных требованиях* на характер гладкости правых частей граничных условий и начальных функций, а также на характер непрерывности «боковых» границ областей. Получены соответствующие оценки и *интегральные представления* решений.

3. Приведена новая формулировка *алгебраического условия разрешимости* поставленных задач. Доказано, что условие разрешимости рассматриваемых задач в этой формулировке эквивалентно известному^{3 4} условию Лопатинского. Приведен пример, иллюстрирующий тот факт, что в случае граничных условий общего вида указанное выше условие может не выполняться. Кроме того, предложен алгоритм проверки выполнения этого условия в некоторых частных случаях.

4. Впервые доказаны теоремы об *однозначной разрешимости* в пространстве $C[0, T]$ систем граничных интегральных уравнений Вольтерры первого и второго рода, которые индуцируются граничными условиями *общего вида с переменными коэффициентами*.

5. Впервые в случае плотности $h \in C^1(\mathbb{R})$ доказаны теоремы *о свойствах потенциала Пуассона и его следа* на негладкой кривой из класса Дини-Гёльдера.

6. Впервые доказана теорема о существовании *единственного в пространстве* $C^{1,0}(\overline{D})$ классического решения задачи Коши для параболических систем с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини, *принадлежащего пространству* $\hat{C}^{1,0}(\overline{D})$. Дано интегральное представление решения.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа имеет преимущественно теоретический характер. Разработанная автором техника может быть использована в изучении многих вопросов, возникающих в теории классической разрешимости различных начально-краевых задач для параболических уравнений и систем. Например, могут быть получены новые результаты в исследовании задач для параболических систем с коэффициентами, разрывными на негладкой кривой раздела сред. Интегральные представления решений, полученные автором, могут служить теоретической основой для численного исследования рассматриваемых в диссертации задач методом граничных элементов (методом граничных интегральных уравнений). Кроме того, результаты диссертационной работы могут быть использованы при проектировании и разработке технологических процессов химико-термической обработки металлов.

Положения, выносимые на защиту.

1. Однозначная классическая разрешимость начально-краевых задач для неоднородных параболических систем с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини, с ненулевыми начальными условиями, в *полуограниченных* областях с негладкими «боковыми» границами из класса Дини-Гёльдера, на которых для компонент искомым вектор-функций задаются граничные условия общего вида с переменными коэффициентами, среди которых есть как условия первого рода, так и условия третьего рода. Оценки полученных решений. Алгебраические

условия разрешимости поставленных задач.

2. Интегральные представления решений начально-краевых задач для параболических систем с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини, в *полуограниченных* областях с «боковыми» границами из класса Дини-Гёльдера.

3. Однозначная классическая разрешимость начально-краевых задач для неоднородных параболических систем с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини, с ненулевыми начальными условиями, в *ограниченных* областях с «боковыми» границами из класса Дини-Гёльдера, на которых для компонент искомых вектор-функций задаются граничные условия общего вида с переменными коэффициентами.

4. Интегральные представления решений начально-краевых задач для параболических систем с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини, в *ограниченных* областях с «боковыми» границами из класса Дини-Гёльдера.

Методология и методы исследования. В диссертации используются классические методы теории дифференциальных уравнений в частных производных, методы математического и функционального анализа, метод параболических потенциалов, метод граничных интегральных уравнений.

Степень достоверности. Достоверность полученных автором диссертации результатов обеспечивается строгостью математических доказательств и использованием апробированных научных методов.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации и отдельные ее части докладывались и обсуждались на следующих международных **конференциях** и научно-исследовательских **семинарах**:

1. XXIX Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2022» (МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 11-22 апреля 2022 г.);

2. XXXV Международная Воронежская весенняя математическая школа «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XXXIII». (Воронеж, Россия, 3-9 мая 2022 г.);

3. XXXVI Международная Воронежская весенняя математическая школа «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения-XXXIV». (Воронеж, Россия, 3-9 мая 2023 г.);

4. Международная Воронежская математическая школа, посвященная памяти В.П. Маслова «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна -2024» (Воронеж, Россия, 26-30 января 2024 г.);

5. Международная научная конференция «Математика в созвездии наук» к юбилею академика В.А. Садовниченко (Москва, Россия, 1-2 апреля 2024 г.);

6. Международная Воронежская весенняя математическая школа «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XXXVI» (Воронеж, Россия, 30 апреля - 4 мая 2025 г.);

7. Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященная памяти выдающегося математика И.Г. Петровского (Москва, Россия, 19-24 мая 2025 г.).

8. Научно-исследовательский семинар «Интегральные уравнения» (руководитель: проф. Е.А. Бадерко, Москва, механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, неоднократно);

9. Научно-исследовательский семинар «Обратные задачи математической физики и естествознания» механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (руководители: акад. РАН В.А. Садовничий, проф. А.И. Прилепко, Москва, механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, 2023 г.);

10. Научно-исследовательский семинар «Спектральная теория дифференциальных операторов и актуальные вопросы математической физики» (руководитель: проф. И.С. Ломов, Москва, факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова, 2023, 2025 гг.);

11. Научно-исследовательский семинар «Методы решения задач математической физики» (руководитель: проф. В.И. Власов, отдел вычислительных методов и математической физики ФИЦ ИУ РАН, 2025 г.);

12. Семинар МЭИ по дифференциальным уравнениям (руководители: проф. Ю.А. Дубинский, проф. А.А. Амосов, Москва, МЭИ, 2025 г.);

13. Научно-исследовательский семинар «Уравнения математической физики» (руководитель: проф. Г.А. Чечкин, Москва, механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, 2025 г.);

14. Научный семинар математического института РУДН по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (руководитель: проф. А.Л. Скубачевский, Москва, математический институт РУДН, 2025 г.).

15. Научный семинар кафедры высшей математики МФТИ (руководитель: проф. Е.С. Половинкин, Московская обл., г. Долгопрудный, Московский физико-технический институт.)

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 9 научных статьях [1-9] в рецензируемых научных изданиях, входящих в базы цитирования Scopus, Web of Science и RSCI. Результаты совместных работ, включённые в диссертацию, получены автором лично.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы из 140 наименований. Общий объём диссертации составляет 169 страниц.

Краткое содержание диссертации

Постановка задач. Предварительно приведем сведения и введем обозначения,

которые необходимы для формулировки результатов диссертации.

*Модулем непрерывности*²⁵ называем функцию $\omega : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, обладающую следующими свойствами:

$$\omega(0) = 0,$$

$$\omega \text{ не убывает на } [0, +\infty),$$

$$\omega \text{ полуаддитивна на } [0, +\infty) : \omega(z_1 + z_2) \leq \omega(z_1) + \omega(z_2), \quad z_1, z_2 \in [0, +\infty),$$

$$\omega \text{ непрерывна на } [0, +\infty).$$

Модуль непрерывности ω удовлетворяет *условию Дини*, если

$$\tilde{\omega}(z) \equiv \int_0^z y^{-1} \omega(y) dy < +\infty, \quad z > 0, \quad (1)$$

и *двойному условию Дини*, если

$$\tilde{\tilde{\omega}}(z) \equiv \int_0^z y^{-1} dy \int_0^y x^{-1} \omega(x) dx < +\infty, \quad z > 0. \quad (2)$$

Через $\mathcal{D}$ обозначаем множество модулей непрерывности, которые удовлетворяют условию Дини (1), а через $\mathcal{D}^2$ — множество модулей непрерывности, которые удовлетворяют двойному условию Дини (2).

Пример.²⁵ Модулями непрерывности являются функции

$$\omega_1^{(\alpha)}(z) = z^\alpha, \quad z \geq 0,$$

при $\alpha \in (0, 1]$ и

$$\omega_2^{(\alpha)}(z) = \begin{cases} 0, & z = 0 \\ |\ln z|^{-\alpha}, & 0 < z \leq \frac{1}{2} \\ |\ln 2|^{-\alpha}, & z > \frac{1}{2} \end{cases}$$

²⁵Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: «Наука», 1977. 512 с.

при $\alpha > 0$. При этом модуль непрерывности $\omega_2^{(\alpha)}$ при $\alpha > 2$ удовлетворяет условию (2), при $\alpha \in (1, 2]$ удовлетворяет только условию (1), а при $\alpha \in (0, 1]$ не удовлетворяет условию (1).

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $T > 0$ — фиксированные числа. Обозначим $D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, t \in (0, T)\}$. Рассмотрим равномерно параболический по И.Г. Петровскому¹ оператор

$$Lu = \partial_t u - \sum_{k=0}^2 A_k(x, t) \partial_x^k u, \quad u = (u_1, \dots, u_m)^T, \quad (3)$$

где A_k — $m \times m$ -матрицы, элементами которых являются вещественнозначные функции a_{ijk} , $i, j = 1, \dots, m$, $k = 0, 1, 2$, определенные в $\bar{D}$, и выполнены условия:

(а) собственные числа μ_r , $r = 1, \dots, m$, матрицы A_2 подчиняются неравенствам $\operatorname{Re} \mu_r(x, t) \geq \delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $(x, t) \in \bar{D}$;

(б) функции a_{ijk} ограничены в $\bar{D}$ и справедливы оценки $|\Delta_{x,t} a_{ijk}(x, t)| \leq \omega_0(|\Delta x| + |\Delta t|^{1/2})$, $(x, t), (x + \Delta x, t + \Delta t) \in \bar{D}$, где $\omega_0 \in \mathcal{D}^2$.

Здесь и далее для произвольной функции u обозначаем $\Delta_{x,t} u(x, t) = u(x + \Delta x, t + \Delta t) - u(x, t)$. Также в дальнейшем будут использоваться обозначения $\Delta_x u(x, t) = u(x + \Delta x, t) - u(x, t)$, $\Delta_t u(x, t) = u(x, t + \Delta t) - u(x, t)$.

Пусть $\Omega \subset D$ — произвольная область. Введем следующие пространства: $C^0(\bar{\Omega})$ — пространство непрерывных и ограниченных в $\bar{\Omega}$ (вектор-)функций u с нормой $\|u; \Omega\|^0 = \sup_{(x,t) \in \Omega} |u(x, t)|$;

$$C_0(\bar{\Omega}) = \{u \in C^0(\bar{\Omega}) : u(x, 0) = 0\};$$

$$C^{1,0}(\bar{\Omega}) = \{u \in C^0(\bar{\Omega}) : \partial_x u \in C^0(\bar{\Omega})\}, \quad \|u; \Omega\|^{1,0} = \sum_{k=0}^1 \|\partial_x^k u; \Omega\|^0;$$

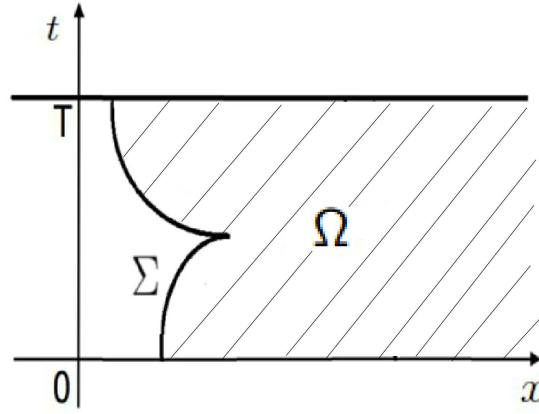
$$C_0^{1,0}(\bar{\Omega}) = \{u \in C^{1,0}(\bar{\Omega}) : \partial_x^k u(x, 0) = 0, \quad k = 0, 1\}.$$

Здесь и далее для произвольного числового вектора a (числовой матрицы A) под $|a|$ (соответственно $|A|$) понимаем максимум из модулей его компонент (её элементов). Под значениями функций и их производных на границе произвольной области Ω понимаем их предельные значения «изнутри» Ω .

Сначала рассматриваются начально-краевые задачи для параболических систем в *полуограниченной* области. А именно, в полосе D выделяется *полуограниченная* область $\Omega = \{(x, t) \in D : x > g(t)\}$ с «боковой» границей $\Sigma = \{(x, t) \in \bar{\Omega} : x = g(t)\}$. Функция g удовлетворяет условию *Дини-Гёльдера*:

$$|\Delta_t g(t)| \leq |\Delta t|^{1/2} \omega_1(|\Delta t|^{1/2}), \quad t, t + \Delta t \in [0, T], \quad (4)$$

где $\omega_1 \in \mathcal{D}$ — некоторый модуль непрерывности. Заметим, что условие (4) допускает наличие «клювов» на кривой Σ .



В частном случае, когда

$$\omega_1(z) = z^\alpha, \quad z \geq 0, \quad \alpha \in (0, 1), \quad (5)$$

условие (4) называется *условием Жевре*.

Положим $\Omega_0 = \{(x, t) \in \bar{\Omega} : x > g(0), t = 0\}$.

Обозначим через $C^{2,1}(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_0 \cup \Sigma))$ пространство (вектор-)функций u , непрерывных вместе со своими производными $\partial_t u$, $\partial_x^k u$, $k = 1, 2$, в $\bar{\Omega} \setminus (\Omega_0 \cup \Sigma)$.

Пусть $m_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = 0, 1$, и $m_0 + m_1 = m$. Пусть заданы $m_0 \times m$ -матрица $B_0(t) = \|b_{ij0}(t)\|$ и $m_1 \times m$ -матрицы $B_1(t) = \|b_{ij1}(t)\|$, $\hat{B}_1(t) = \|\hat{b}_{ij1}(t)\|$, элементами которых являются функции, определенные на отрезке $[0, T]$.

Рассматривается следующая начально-краевая задача: найти (вектор-)функцию $u \in C^{2,1}(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_0 \cup \Sigma)) \cap C^{1,0}(\bar{\Omega})$, являющуюся решением системы

$$Lu(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\Omega} \setminus (\Omega_0 \cup \Sigma), \quad (6)$$

удовлетворяющую начальному условию

$$u(x, 0) = h(x), \quad x \geq g(0), \quad (7)$$

и граничным условиям

$$B_0(t)u(g(t), t) = \psi_0(t), \quad (8)$$

$$B_1(t)\partial_x u(g(t), t) + \hat{B}_1(t)u(g(t), t) = \psi_1(t), \quad t \in [0, T]. \quad (9)$$

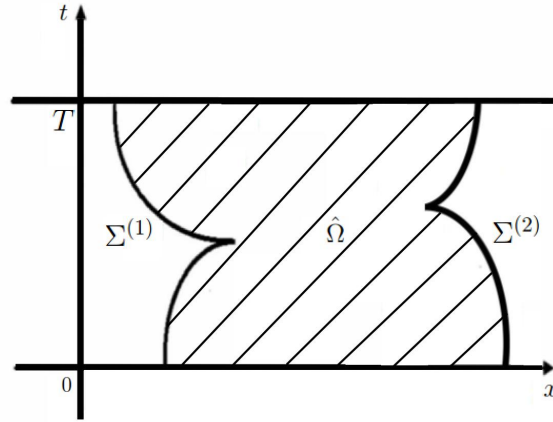
Заметим, что в состав граничных условий (8), (9) для компонент искомой (вектор-)функции u входит m_0 граничных условий первого рода и m_1 граничных условий третьего рода, причем $m_0 + m_1 = m$. В частности, при $B_0(t) = E$, $t \in [0, T]$, где E —единичная матрица, задача (6)-(9)—это первая начально-краевая задача, а при $B_1(t) = E$, $\hat{B}_1(t) = 0$, $t \in [0, T]$,—вторая начально-краевая задача.

В работе начально-краевые задачи для параболических систем исследуются также в *ограниченной* области. А именно, в полосе D выделяется ограниченная область $\hat{\Omega} = \{(x, t) \in D : g^{(1)}(t) < x < g^{(2)}(t)\}$ с «боковыми» границами $\Sigma^{(s)} = \{(x, t) \in \bar{\Omega} : x = g^{(s)}(t)\}$, $s = 1, 2$. Функции $g^{(s)}$, $s = 1, 2$, удовлетворяют следующим условиям:

$$|\Delta_t g^{(s)}(t)| \leq |\Delta t|^{1/2} \omega_1(|\Delta t|^{1/2}), \quad t, t + \Delta t \in [0, T], \quad (10)$$

и для некоторой постоянной $d > 0$

$$g^{(2)}(t) - g^{(1)}(t) \geq d, \quad t \in [0, T]. \quad (11)$$



Положим $\hat{\Omega}_0 = \{(x, t) \in \bar{\hat{\Omega}} : g^{(1)}(0) < x < g^{(2)}(0), t = 0\}$.

Через $C^{2,1}(\bar{\hat{\Omega}} \setminus (\hat{\Omega}_0 \cup \Sigma^{(1)} \cup \Sigma^{(2)}))$ обозначаем пространство (вектор-)функций u , непрерывных вместе со своими производными $\partial_t u$, $\partial_x^k u$, $k = 1, 2$, в $\bar{\hat{\Omega}} \setminus (\hat{\Omega}_0 \cup \Sigma^{(1)} \cup \Sigma^{(2)})$.

Пусть $m_i^{(s)} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = 0, 1$, и $m_0^{(s)} + m_1^{(s)} = m$, $s = 1, 2$. Пусть заданы $m_0^{(s)} \times m$ -матрицы $B_0^{(s)}(t) = \|b_{ij0}^{(s)}(t)\|$ и $m_1^{(s)} \times m$ -матрицы $B_1^{(s)}(t) = \|b_{ij1}^{(s)}(t)\|$, $\hat{B}_1^{(s)}(t) = \|\hat{b}_{ij1}^{(s)}(t)\|$, $s = 1, 2$, элементами которых являются функции, определенные на отрезке $[0, T]$.

Рассматривается следующая начально-краевая задача: найти (вектор-)функцию $u \in C^{2,1}(\bar{\hat{\Omega}} \setminus (\hat{\Omega}_0 \cup \Sigma^{(1)} \cup \Sigma^{(2)})) \cap C^{1,0}(\bar{\hat{\Omega}})$, являющуюся решением системы

$$Lu(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\hat{\Omega}} \setminus (\hat{\Omega}_0 \cup \Sigma^{(1)} \cup \Sigma^{(2)}), \quad (12)$$

удовлетворяющую начальному условию

$$u(x, 0) = h(x), \quad g^{(1)}(0) \leq x \leq g^{(2)}(0), \quad (13)$$

и граничным условиям

$$B_0^{(s)}(t)u(g^{(s)}(t), t) = \psi_0^{(s)}(t), \quad (14)$$

$$B_1^{(s)}(t)\partial_x u(g^{(s)}(t), t) + \hat{B}_1^{(s)}(t)u(g^{(s)}(t), t) = \psi_1^{(s)}(t), \quad t \in [0, T], \quad s = 1, 2. \quad (15)$$

Определения и формулировка основных результатов. Для формулировки основных результатов диссертации введем необходимые обозначения и функциональные пространства.

Через $C[0, T]$ обозначаем пространство непрерывных на $[0, T]$ (вектор-)функций с нормой $\|\psi; [0, T]\|^0 = \max_{t \in [0, T]} |\psi(t)|$. Положим $C_0[0, T] = \{\psi \in C[0, T] : \psi(0) = 0\}$.

Рассмотрим оператор дробного дифференцирования порядка $1/2$ (преобразование Абеля)

$$(\partial^{1/2}\varphi)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t (t - \tau)^{-1/2} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Обозначим²⁰ $C_0^{1/2}[0, T] = \{\psi \in C[0, T] : \partial^{1/2}\psi \in C_0[0, T]\}$ с нормой

$$\|\psi; [0, T]\|^{1/2} = \|\psi; [0, T]\|^0 + \|\partial^{1/2}\psi; [0, T]\|^0.$$

Через $C^1(\mathbb{R})$ обозначим пространство (вектор-)функций, непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ вместе со своей производной первого порядка h' , с нормой $\|h; \mathbb{R}\|^1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |h'(x)|$.

Для произвольной области $\Omega \subset D$ положим

$$\hat{C}^{1,0}(\bar{\Omega}) = \{u \in C^{1,0}(\bar{\Omega}) : \|u; \Omega\|^1 = \|u; \Omega\|^{1,0} + \sup_{\substack{(x,t), (x,t+\Delta t) \in \Omega, \\ \Delta t \neq 0}} \frac{|\Delta_t u(x,t)|}{|\Delta t|^{1/2}} < \infty\};$$

$$\hat{C}_0^{1,0}(\bar{\Omega}) = \{u \in \hat{C}^{1,0}(\bar{\Omega}) : \partial_x^k u(x, 0) = 0, \quad k = 0, 1\}.$$

Заметим, что пространство $\hat{C}^{1,0}(\bar{\Omega})$ совпадает с пространством Гёльдера⁴ $H^{1+\alpha, (1+\alpha)/2}(\bar{\Omega})$ при подстановке в определение последнего $\alpha = 0$. При этом нормы в этих пространствах эквивалентны.

Обозначим $D_{(0,T]} = \{(x, t) \in \bar{D} : 0 < t \leq T\}$. Введем следующие пространства: $C(D_{(0,T]})$ —пространство (вектор-)функций, непрерывных в $D_{(0,T]}$;

$$C_{1/2}^\omega(D_{(0,T]}) = \{f \in C(D_{(0,T]}) : \|f; D_{(0,T]}\|_{1/2}^\omega = \sup_{(x,t) \in D_{(0,T]}} \frac{|f(x,t)|t^{1/2}}{\omega(t^{1/2})} < \infty\}, \quad \text{где } \omega—$$

некоторый модуль непрерывности;

$\mathcal{D}_x^{loc}(D_{(0,T]})$ —пространство (вектор-)функций f таких, что для каждой ограниченной области Ω , для которой $\bar{\Omega} \subset D_{(0,T]}$, существует такой модуль непрерывности $\omega_\Omega \in \mathcal{D}$, что

$$|\Delta_x f(x, t)| \leq \omega_\Omega(|\Delta x|), \quad (x, t), (x + \Delta x, t) \in \overline{\Omega}.$$

Обозначим $D^* = \{(x, t; \xi, \tau) \in \overline{D} \times \overline{D} : t > \tau\}$. Известно²³, что при условиях (а), (б) существует фундаментальная матрица решений (ф.м.р.) системы $Lu = 0$, имеющая вид

$$\Gamma(x, t; \xi, \tau) = Z(x - \xi, t - \tau; A_2(\xi, \tau)) + W(x, t; \xi, \tau), \quad (x, t; \xi, \tau) \in D^*,$$

где $Z(x - \xi, t - \tau; A_2(\xi, \tau))$ — ф.м.р. системы $\partial_t u - A_2(\xi, \tau) \partial_x^2 u = 0$ с «замороженными» в точке (ξ, τ) коэффициентами,

$$W(x, t; \xi, \tau) = \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} Z(x - y, t - \eta; A_2(y, \eta)) \mu(y, \eta; \xi, \tau) dy,$$

(вектор-)плотность μ находится из условия, чтобы столбцы матрицы $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ удовлетворяли по переменным x, t системе $Lu = 0$ в полосе $\{(x, t) \in D : \tau < t < T\}$.

Сначала рассмотрим начально-краевую задачу (6)-(9) в *полуограниченной области*. Для ее исследования используем: потенциал простого слоя

$$(U\varphi)(x, t) \equiv \int_0^t \Gamma(x, t; g(\tau), \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad (16)$$

потенциал Пуассона

$$(Ph)(x, t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, 0) h(\xi) d\xi \quad (17)$$

и объемный потенциал

$$(Vf)(x, t) \equiv \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi, \quad (x, t) \in \overline{D}. \quad (18)$$

Предполагается, что коэффициенты из граничных условий (8), (9) удовлетворяют следующим требованиям при $j = 1, \dots, m$:

$$b_{ij0} \in C[0, T], \quad |\Delta_t b_{ij0}(t)| \leq \frac{|\Delta t|^{1/2} \omega_1(|\Delta t|^{1/2})}{\min\{t^{1/2}, (t + \Delta t)^{1/2}\}}, \quad t, t + \Delta t \in (0, T], \quad (19)$$

$$i = 1, \dots, m_0,$$

где $\omega_1 \in \mathcal{D}$ — модуль непрерывности из условия (4),

$$b_{ij1}, \hat{b}_{ij1} \in C[0, T], \quad i = 1, \dots, m_1. \quad (20)$$

Положим (см. (3), (8), (9))

$$A(t) \equiv A_2(g(t), t), \quad M(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-y^2 A(t)\} dy$$

и

$$G(t) \equiv \begin{pmatrix} B_0(t) \\ B_1(t)M(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T].$$

Основными результатами, полученными автором работы для задачи (6)-(9), являются следующие две теоремы.

Теорема 3.23. Пусть выполнены условия (a), (b) для коэффициентов оператора L , условие (4) для «боковой» границы Σ области Ω , условия (19), (20) для коэффициентов в граничных условиях (8), (9) и, кроме того,

$$\det G(t) \neq 0, \quad t \in [0, T]. \quad (21)$$

Тогда для любых $h \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C_{1/2}^{\omega_1}(D_{(0,T]}) \cap \mathcal{D}_x^{loc}(D_{(0,T]})$ и любых ψ_0, ψ_1 , удовлетворяющих условиям:

$$\psi_0 - B_0 h(g(0)) \in C_0^{1/2}[0, T], \quad (22)$$

$$\psi_1 \in C[0, T], \quad \psi_1(0) = B_1(0)h'(g(0)) + \hat{B}_1(0)h(g(0)), \quad (23)$$

существует единственное в пространстве $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ решение и задачи (6)-(9). Это решение принадлежит пространству $\hat{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$ и справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|u; \Omega\|^1 &\leq C\{\|\psi_0 - B_0 h(g(0)); [0, T]\|^{1/2} + \|\psi_1; [0, T]\|^0 + \|h; \mathbb{R}\|^1 + \\ &+ \|f; D_{(0,T]}\|_{1/2}^{\omega_1}\}. \end{aligned}$$

Здесь и далее через C, c обозначаем положительные постоянные, зависящие от модуля непрерывности ω_1 , чисел T, m, d , коэффициентов оператора L и элементов матриц $B_0, B_1, \hat{B}_1, B_0^{(s)}, B_1^{(s)}, \hat{B}_1^{(s)}$, $s = 1, 2$.

Теорема 3.24. Пусть выполнены условия Теоремы 3.23. Тогда для решения задачи (6)-(9) из пространства $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ справедливо представление в виде суммы (векторных) параболических потенциалов

$$u(x, t) = (U\varphi)(x, t) + (Ph)(x, t) + (Vf)(x, t), \quad (x, t) \in \overline{\Omega}, \quad (24)$$

где $\varphi \in C_0[0, T]$ — единственное в пространстве $C[0, T]$ решение системы граничных интегральных уравнений Вольтерры I и II рода

$$\begin{aligned} B_0(t) \int_0^t \Gamma(g(t), t; g(\tau), \tau) \varphi(\tau) d\tau = \\ = \psi_0(t) - B_0(t)(Ph)(g(t), t) - B_0(t)(Vf)(g(t), t), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} -B_1(t)(2A(t))^{-1}\varphi(t) + B_1(t) \int_0^t \partial_x \Gamma(g(t), t; g(\tau), \tau) \varphi(\tau) d\tau + \\ + \hat{B}_1(t) \int_0^t \Gamma(g(t), t; g(\tau), \tau) \varphi(\tau) d\tau = \psi_1(t) - B_1(t) \partial_x (Ph)(g(t), t) - \end{aligned}$$

$$-B_1(t) \partial_x (Vf)(g(t), t) - \hat{B}_1(t)(Ph)(g(t), t) - \hat{B}_1(t)(Vf)(g(t), t), \quad t \in [0, T]. \quad (26)$$

Далее рассмотрим начально-краевую задачу (12)-(15) в ограниченной области. Для ее исследования мы используем два потенциала простого слоя

$$(U^{(s)}\varphi^{(s)})(x, t) \equiv \int_0^t \Gamma(x, t; g^{(s)}(\tau), \tau) \varphi^{(s)}(\tau) d\tau, \quad (x, t) \in \overline{D}, \quad s = 1, 2, \quad (27)$$

потенциал Пуассона Ph и объемный потенциал Vf (см. (17), (18)).

Предполагается, что коэффициенты из граничных условий (14), (15) удовлетворяют следующим требованиям при $s = 1, 2$, $j = 1, \dots, m$:

$$b_{ij0}^{(s)} \in C[0, T], \quad |\Delta_t b_{ij0}^{(s)}(t)| \leq \frac{|\Delta t|^{1/2} \omega_1(|\Delta t|^{1/2})}{\min\{t^{1/2}, (t + \Delta t)^{1/2}\}}, \quad t, t + \Delta t \in (0, T], \quad (28)$$

$$i = 1, \dots, m_0^{(s)},$$

где $\omega_1 \in \mathcal{D}$ — модуль непрерывности из условия (4),

$$b_{ij1}^{(s)}, \hat{b}_{ij1}^{(s)} \in C[0, T], \quad i = 1, \dots, m_1^{(s)}. \quad (29)$$

Обозначим (см. (3), (14), (15))

$$A^{(s)}(t) \equiv A_2(g^{(s)}(t), t), \quad M^{(s)}(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-y^2 A^{(s)}(t)\} dy$$

и

$$G^{(s)}(t) \equiv \begin{pmatrix} B_0^{(s)}(t) \\ B_1^{(s)}(t) M^{(s)}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T], \quad s = 1, 2.$$

Основными результатами, полученными автором работы для задачи (12)-(15), являются следующие две теоремы.

Теорема 3.26. Пусть выполнены условия (a), (b) для коэффициентов оператора L , условия (10), (11) для «боковых» грани $\Sigma^{(s)}$, $s = 1, 2$, области $\hat{\Omega}$, условия (28), (29) для коэффициентов в граничных условиях (14), (15) и, кроме того,

$$\det G^{(s)}(t) \neq 0, \quad t \in [0, T].$$

Тогда для любых $h \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C_{1/2}^{\omega_1}(D_{(0,T]}) \cap \mathcal{D}_x^{loc}(D_{(0,T]})$ и любых $\psi_0^{(s)}, \psi_1^{(s)}$, $s = 1, 2$, удовлетворяющих условиям:

$$\psi_0^{(s)} - B_0^{(s)} h(g^{(s)}(0)) \in C_0^{1/2}[0, T],$$

$$\psi_1^{(s)} \in C[0, T], \quad \psi_1^{(s)}(0) = B_1^{(s)}(0) h'(g^{(s)}(0)) + \hat{B}_1^{(s)}(0) h(g^{(s)}(0)),$$

существует единственное в пространстве $C^{1,0}(\bar{\hat{\Omega}})$ решение и задачи (12)-(15). Это решение принадлежит пространству $\hat{C}^{1,0}(\bar{\hat{\Omega}})$ и справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|u; \hat{\Omega}\|^1 &\leq C \left\{ \sum_{s=1}^2 [\|\psi_0^{(s)} - B_0^{(s)} h(g^{(s)}(0)); [0, T]\|^{1/2} + \|\psi_1^{(s)}; [0, T]\|^0] + \|h; \mathbb{R}\|^1 + \right. \\ &\quad \left. + \|f; D_{(0,T]}\|_{1/2}^{\omega_1} \right\}. \end{aligned}$$

Теорема 3.27. Пусть выполнены условия Теоремы 3.26. Тогда для решения задачи (12)-(15) из пространства $C^{1,0}(\bar{\hat{\Omega}})$ справедливо представление в виде суммы (векторных) параболических потенциалов

$$u(x, t) = \sum_{s=1}^2 (U^{(s)} \varphi^{(s)})(x, t) + (Ph)(x, t) + (Vf)(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\Omega}, \quad (30)$$

где $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}) \in C_0[0, T] \times C_0[0, T]$ — единственное в пространстве $C[0, T] \times C[0, T]$ решение системы граничных интегральных уравнений Вольтерры I и II рода

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 B_0^{(s)}(t) \int_0^t \Gamma(g^{(s)}(t), t; g^{(i)}(\tau), \tau) \varphi^{(i)}(\tau) d\tau &= \psi_0^{(s)}(t) - B_0^{(s)}(t)(Ph)(g^{(s)}(t), t) - \\ &- B_0^{(s)}(t)(Vf)(g^{(s)}(t), t), \\ (-1)^s B_1^{(s)}(t)(2A^{(s)}(t))^{-1} \varphi^{(s)}(t) + \sum_{i=1}^2 B_1^{(s)}(t) \int_0^t \partial_x \Gamma(g^{(s)}(t), t; g^{(i)}(\tau), \tau) \varphi^{(i)}(\tau) d\tau + \\ + \sum_{i=1}^2 \hat{B}_1^{(s)}(t) \int_0^t \Gamma(g^{(s)}(t), t; g^{(i)}(\tau), \tau) \varphi^{(i)}(\tau) d\tau &= \psi_1^{(s)}(t) - B_1^{(s)}(t) \partial_x (Ph)(g^{(s)}(t), t) - \\ &- B_1^{(s)}(t) \partial_x (Vf)(g^{(s)}(t), t) - \hat{B}_1^{(s)}(t)(Ph)(g^{(s)}(t), t) - \hat{B}_1^{(s)}(t)(Vf)(g^{(s)}(t), t), \\ t \in [0, T], \quad s = 1, 2. \end{aligned}$$

Диссертация состоит из трех глав. Опишем кратко их содержание.

Глава 1. Основное содержание Главы 1 составляют теоремы о единственности решений из пространства $C^{1,0}(\bar{\Omega})$ второй начально-краевой задачи для параболических систем в полуограниченной и ограниченной областях с негладкими «боковыми» границами из класса Дини-Гёльдера (см. (4), (10)). Для их доказательства используются методы, разработанные Е.А. Бадерко и М.Ф. Череповой^{13 21 26 27} в

²⁶Бадерко Е.А. О решении методом граничных интегральных уравнений краевых задач для линейных параболических уравнений произвольного порядка в нецилиндрических областях. Дис. ... докт. физ.-матем. наук. М.: МГУ имени М.В. Ломоносова, 1992.

²⁷Бадерко Е.А., Черепова М.Ф. О единственности решения первой начально-краевой задачи для параболических систем с постоянными коэффициентами в полуограниченной области на плоскости // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 673-682.

случае гёльдеровых коэффициентов параболического оператора и боковых границ областей из класса Жевре (см. (5)). Эти теоремы используются далее в Главе 3 для доказательства единственности решений из пространства $C^{1,0}(\bar{\Omega})$ начально-краевых задач для параболических систем с граничными условиями общего вида. Они также могут быть использованы при исследовании единственности решений различных других задач для параболических систем.

В Главу 1 входят § 1 – 4. В § 1 приводятся необходимые сведения, вводятся используемые обозначения и даются определения функциональных пространств.

В § 2 доказывается вспомогательная лемма о единственности решения первой начально-краевой задачи для параболической системы с дифференцируемыми коэффициентами в полуограниченной области в пространстве $\hat{C}^{1,0}(\bar{\Omega})$ с дополнительным ограничением на характер роста пространственной производной второго порядка решения вблизи «боковой» границы области.

В § 3 и § 4 устанавливается единственность в пространстве $C^{1,0}(\bar{\Omega})$ решения второй начально-краевой задачи для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в полуограниченной и ограниченной областях, соответственно.

Результаты Главы 1 опубликованы в [1,2,4,5].

Глава 2. Основное содержание Главы 2 составляют теоремы о принадлежности пространству $\hat{C}^{1,0}(\bar{D})$ потенциала Пуассона Ph и объемного потенциала Vf , а также свойства следов этих потенциалов на негладкой кривой.

В Главу 2 входят § 5 – 9. Основное содержание § 5 и § 6 составляют теоремы о принадлежности пространству $\hat{C}^{1,0}(\bar{D})$ потенциалов Ph и Vf , соответственно.

В § 7 используются пространства

$$C_{1/2}(D_{(0,T]}) = \{f \in C(D_{(0,T]}) : \|f; D_{(0,T]}\|_{1/2} = \sup_{(x,t) \in D_{(0,T]}} |f(x,t)|t^{1/2} < \infty\},$$

$$C^{2,1}(D_{(0,T]}) = \{u \in C(D_{(0,T]}) : \partial_t^l \partial_x^k u \in C(D_{(0,T]}), 1 \leq 2l + k \leq 2\}$$

и доказывается следующая

Теорема 2.12. Пусть выполнены условия (a), (b) для коэффициентов оператора L . Тогда для любой $h \in C^1(\mathbb{R})$ и любой $f \in C_{1/2}(D_{(0,T]}) \cap \mathcal{D}_x^{loc}(D_{(0,T]})$, удовлетворяющей условию: для любого $B > 0$ существует такой модуль непрерывности ω_B , что выполняется неравенство

$$|f(x,t)| \leq \omega_B(t^{1/2})t^{-1/2}, \quad x \in [-B, B], \quad 0 < t \leq T,$$

сумма потенциалов

$$u(x,t) = (Ph)(x,t) + (Vf)(x,t), \quad (x,t) \in \bar{D}, \quad (31)$$

является единственным в пространстве $C^{2,1}(D_{(0,T]}) \cap C^{1,0}(\bar{D})$ решением задачи Коши

$$Lu(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in D_{(0, T]}, \quad (32)$$

$$u(x, 0) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (33)$$

Это решение принадлежит пространству $\hat{C}^{1,0}(\overline{D})$ и для него справедлива оценка

$$\|u; D\|^1 \leq C\{\|h; \mathbb{R}\|^1 + \|f; D_{(0, T]}\|_{1/2}\}.$$

В § 8 доказывается следующая теорема о свойствах следа потенциала Ph на негладкой кривой Σ из класса Дини-Гёльдера.

Теорема 2.17. Пусть выполнены условия (a), (b) для коэффициентов оператора L и условие (4) для кривой Σ . Тогда при любой $h \in C^1(\mathbb{R})$ для (вектор-)функции $(Ph)(g(t), t)$ имеют место представление

$$(Ph)(g(t), t) = h(g(0)) + \hat{h}(t), \quad t \in [0, T],$$

где $\hat{h} \in C_0^{1/2}[0, T]$, и оценка

$$\|\hat{h}; [0, T]\|^{1/2} \leq C\|h; \mathbb{R}\|^1.$$

Наконец в § 9 устанавливается принадлежность пространству $C_0^{1/2}[0, T]$ следа потенциала Vf на негладкой кривой Σ .

Заметим, что свойства потенциалов Ph и Vf , установленные в Главе 2, могут быть использованы при исследовании различных задач для параболических уравнений и систем.

Результаты Главы 2 опубликованы в [3, 7, 9].

Глава 3. В Главе 3 исследуются начально-краевые задачи для параболических систем в полуограниченной и ограниченной областях с негладкими «боковыми» границами из класса Дини-Гёльдера (см. выше Теоремы 3.23, 3.24, 3.26, 3.27. Разрешимость в пространстве $\hat{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$ и единственность решений из пространства $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ поставленных задач доказываются отдельно. Для получения этих результатов используется метод потенциалов (метод граничных интегральных уравнений).

В Главу 3 входят § 10 – 15. Сначала в § 10 устанавливаются существование и единственность решения из пространства $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ начально-краевой задачи для однородной параболической системы с нулевым начальным условием в полуограниченной области с граничными условиями общего вида, коэффициенты в которых являются постоянными. Доказывается, что полученное решение принадлежит пространству $\hat{C}_0^{1,0}(\overline{\Omega})$. Предъявляется интегральное представление решения в виде (векторного) потенциала простого слоя $U\varphi$, где $\varphi \in C_0[0, T]$ – (векторная)

плотность, компоненты которой являются единственным в пространстве $C[0, T]$ решением системы граничных интегральных уравнений Вольтерры I и II рода, индуцированной граничными условиями поставленной задачи.

В § 11 доказывается, что рассматриваемые в § 10 требования на характер непрерывности правых частей граничных условий являются точными для существования решения поставленной задачи из пространства $C_0^{1,0}(\bar{\Omega})$. Кроме того, приводится пример, который, на основе результатов Л.И. Камынина и Б.Н. Химченко²⁸, показывает, что рассматриваемое в настоящей работе условие на характер непрерывности «боковых» границ областей является точным для разрешимости в пространстве $C^{1,0}(\bar{\Omega})$ начально-краевых задач, в которых имеются граничные условия первого рода.

В § 12 устанавливается эквивалентность алгебраического условия (21) и известного^{3,4} условия Лопатинского для разрешимости поставленных задач. Приводится пример, иллюстрирующий тот факт, что в случае граничных условий общего вида (8), (9) условие (21) *может не выполняться*. Кроме того, предлагается алгоритм вычисления элементов матрицы $G(t)$ из условия (21) в том случае, если известна такая матрица $F(t)$, что

$$\bar{A}(t) = F^{-1}(t)A(t)F(t), \quad t \in [0, T],$$

где $\bar{A}(t)$ — жорданова форма матрицы $A(t)$.

В § 13 результаты § 10 для однородной параболической системы и нулевой начальной функции переносятся на случай *переменных коэффициентов в граничных условиях*.

В § 14 изучаются условия существования непрерывной дробной производной порядка $1/2$ произведения двух функций. А именно, доказывается следующая

Теорема 3.22. Пусть функция b удовлетворяет условиям

$$b \in C[0, T], \quad |\Delta_t b(t)| \leq \frac{|\Delta t|^{1/2} \omega(|\Delta t|^{1/2})}{\min\{t^{1/2}, (t + \Delta t)^{1/2}\}}, \quad t, t + \Delta t \in (0, T],$$

где $\omega \in \mathcal{D}$ — некоторый модуль непрерывности, и пусть $\psi \in C_0^{1/2}[0, T]$. Тогда для функции $\hat{\psi}(t) = b(t)\psi(t)$, $t \in [0, T]$, справедливы включения

$$\hat{\psi} \in C_0^{1/2}[0, T]$$

и оценка

$$\|\hat{\psi}; [0, T]\|^{1/2} \leq C\|\psi; [0, T]\|^{1/2}.$$

²⁸Камынин Л.И., Химченко Б.Н. Принцип максимума и локальные оценки Липшица вблизи боковой границы для решений параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. матем. журн. 1975. Т. 16, № 6. С. 1172-1187.

Теорема 3.22 используется далее в § 15, 16 при исследовании систем граничных интегральных уравнений, индуцируемых граничными условиями задач (6)-(9) и (12)-(15).

Далее в § 15 рассматривается случай *неоднородной* параболической системы и *ненулевой* начальной функции и доказываются основные Теоремы 3.23, 3.24.

Наконец в § 16 исследуются начально-краевые задачи в *ограниченной* области и доказываются Теоремы 3.26, 3.27.

Основные результаты Главы 3 опубликованы в [3,6,8,9].

Заключение. В этом разделе подводятся итоги полученных в Главах 1, 2 и 3 результатов.

Заключение

1. Установлена однозначная классическая разрешимость начально-краевых задач для неоднородных параболических систем с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини, с ненулевыми начальными условиями, в *полуограниченных* областях с негладкими «боковыми» границами из класса Дини-Гёльдера, на которых для компонент искомых вектор-функций задаются граничные условия общего вида с переменными коэффициентами, среди которых есть как условия первого рода, так и условия третьего рода. Получены оценки решений поставленных задач. Исследованы алгебраические условия разрешимости рассматриваемых задач.

2. Получены интегральные представления решений начально-краевых задач для параболических систем с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини, в *полуограниченных* областях с «боковыми» границами из класса Дини-Гёльдера.

3. Доказана теорема об однозначной классической разрешимости начально-краевых задач для неоднородных параболических систем с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини, с ненулевыми начальными условиями, в *ограниченных* областях с «боковыми» границами из класса Дини-Гёльдера, на которых для компонент искомых вектор-функций задаются граничные условия общего вида с переменными коэффициентами.

4. Даны интегральные представления решений начально-краевых задач для параболических систем с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини, в *ограниченных* областях с «боковыми» границами из класса Дини-Гёльдера.

Результаты диссертации имеют значимость в рамках теории начально-краевых задач для уравнений и систем параболического типа и могут служить теоретической основой для численного исследования этих задач методом граничных элементов (методом граничных интегральных уравнений).

Публикации автора по теме диссертации

[1] Бадерко Е.А., Сахаров С.И. Единственность решения первой начально-краевой задачи для параболической системы с дифференцируемыми коэффициентами в полуполосе с негладкой боковой границей // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 5. С. 625-634.

Английский перевод: Baderko E.A., Sakharov S.I. Uniqueness of the Solution of the First Initial-Boundary Value Problem for a Parabolic System with Differentiable Coefficients in a Half-Strip with Nonsmooth Lateral Boundary // Differ. Equations. 2021. Vol. 57. No. 5. P. 605-614.

[2] Бадерко Е.А., Сахаров С.И. Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в плоских областях // Докл. РАН. 2022. Т. 502. № 2. С. 26-29.

Английский перевод: Baderko E.A., Sakharov S.I. Uniqueness of Solutions of Initial-Boundary Value Problems for Parabolic Systems with Dini-Continuous Coefficients in Domains on the Plane // Dokl. Math. 2022. Vol. 15. No. 2. P. 71-74.

[3] Бадерко Е.А., Сахаров С.И. Потенциал Пуассона в первой начально-краевой задаче для параболической системы в полуограниченной области на плоскости // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 10. С. 1333-1343.

Английский перевод: Baderko E.A., Sakharov S.I. Poisson Potential in the First Initial-Boundary Value Problem for a Parabolic System in a Semibounded Domain on the Plane // Differ. Equations. 2022. Vol. 58. No. 10. P. 1327-1337.

[4] Бадерко Е.А., Сахаров С.И. О единственности решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в полуограниченной области на плоскости // Журн. вычислит. матем. и мат. физики. 2023. Т. 63. № 4. С. 584-595.

Английский перевод: Baderko E.A., Sakharov S.I. Uniqueness of Solutions to Initial-Boundary Value Problems for Parabolic Systems with Dini-Continuous Coefficients in a Semibounded Domain on the Plane // Comput. Math. and Math. Phys. 2023. Vol. 63. No. 4. P. 584-595.

[5] Бадерко Е.А., Сахаров С.И. Об однозначной разрешимости начально-краевых задач для параболических систем в ограниченных плоских областях с негладкими боковыми границами // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 5. С. 608-618.

Английский перевод: Baderko E.A., Sakharov S.I. On the Unique Solvability of Initial-Boundary Value Problems for Parabolic Systems in Bounded Plane Domains with Nonsmooth Lateral Boundaries // Differ. Equations. 2023. Vol. 59. No. 5. P. 618-628.

[6] Сахаров С.И. Начально-краевые задачи для однородных параболических систем в полуограниченной плоской области и условие дополненности // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 12. С. 1641-1653.

Английский перевод: Sakharov S.I. Initial-Boundary Value Problems for Homogeneous Parabolic Systems in a Semibounded Plane Domain and Complementarity Condition // Differ. Equations. 2023. Vol. 59. No. 12. P. 1650-1663.

[7] Бадерко Е.А., Сахаров С.И. Об однозначной разрешимости задачи Коши в классе $C^{1,0}(\overline{D})$ для параболических систем на плоскости // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60. № 11. С. 1471-1483.

Английский перевод: Baderko E.A., Sakharov S.I. On the Unique Solvability of the Cauchy Problem in the Class $C^{1,0}(\overline{D})$ for Parabolic Systems on the Plane // Differ. Equations. 2024. Vol. 60. No. 11. P. 1544-1556.

[8] Сахаров С.И. О начально-краевых задачах для параболических систем в полуограниченной плоской области с граничными условиями общего вида // Журн. вычислит. мат. и матем. физики. 2024. Т. 64. № 6. С. 1028-1041.

Английский перевод: Sakharov S.I. Initial-Boundary Value Problems for Parabolic Systems in a Semibounded Plane Domain with General Boundary Conditions // Comput. Math. and Math. Phys. 2024. Vol. 64. No. 6. P. 1274-1285.

[9] Сахаров С.И. Об однозначной разрешимости начально-краевых задач для параболических систем в полуограниченной плоской области с негладкой боковой границей // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2025. Т. 65. № 6. С. 972-984.

Английский перевод: Sakharov S.I. On the Unique Solvability of Initial-Boundary Value Problems for Parabolic Systems in a Semibounded Plane Domain with a Nonsmooth Lateral Boundary // Comput. Math. and Math. Phys. 2025. Vol. 65. No. 6. P. 1354-1367.

Сахаров Сергей Игоревич

О начально-краевых задачах для параболических систем в плоских областях с негладкими боковыми границами

Аннотация

Рассматриваются начально-краевые задачи для параболических систем с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини, в плоских областях с негладкими боковыми границами, допускающими наличие «клювов», на которых задаются граничные условия общего вида с переменными коэффициентами, среди которых есть условия как первого, так и третьего рода. Доказаны теоремы об однозначной классической разрешимости поставленных задач в пространстве вектор-функций, непрерывных и ограниченных вместе со своей пространственной производной первого порядка в замыкании областей. Даны интегральные представления решений. Сформулировано алгебраическое условие разрешимости поставленных задач и доказано, что оно эквивалентно известному условию Лопатинского. Показано, что рассматриваемые условия на характер негладкости боковых границ областей и на характер непрерывности правых частей в граничных условиях являются точными для классической разрешимости поставленных задач в пространстве вектор-функций, непрерывных и ограниченных вместе со своей пространственной производной первого порядка в замыкании областей.

Sakharov Sergey Igorevich

On initial-boundary value problems for parabolic systems in plane domains with nonsmooth lateral boundaries

Abstract

We consider initial-boundary value problems for parabolic systems with coefficients, satisfying the double Dini condition, in plane domains with cusps-admitting nonsmooth lateral boundaries on which general boundary conditions with variable coefficients are given. The boundary conditions on the components of vector solutions include both Dirichlet and Robin ones. Theorems are proved on the unique regular solvability of the problems in the space of vector functions that are continuous and bounded together with their first-order spatial derivative in the closure of the domains. Integral representations of the solutions are given. An algebraic condition for the solvability of the problems is formulated, and it is proved that it is equivalent to the well-known Lopatinsky condition. It is shown that the considered conditions on the character of the nonsmoothness of the lateral boundaries of the domains and on the character of the continuity of the right-hand sides in the boundary conditions are sharp for the regular solvability of the posed problems in the space of vector functions that are continuous and bounded together with their first-order spatial derivative in the closure of the domains.