на правах рукописи

КОВАЛЁВ Иван Александрович

ПОЛУЧЕНИЕ ОЦЕНОК И ПОСТРОЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОСОБЕННОСТЯМИ

1.2.3. Теоретическая информатика, кибернетика
(по физико-математическим наукам)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2024

Работа выполнена на кафедре прикладной математики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Вологодский государственный университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор кафедры прикладной математики
Вологодского государственного университета
Зейфман Александр Израилевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, ведущий
научный сотрудник Федерального государственного
бюджетного учреждения науки «Институт
проблем управления» им. В.А. Трапезникова
Семёнова Ольга Валерьевна,

доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедры теории вероятностей и
математической статистики Национального
исследовательского Томского государственного университета
Моисеева Светлана Петровна,

кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры теории вероятностей и
кибербезопасности Российского университета
дружбы народов (РУДН)
Сопин Эдуард Сергеевич

Защита диссертации состоится 27 сентября 2024 г. 15:00 на заседании диссертационного совета ПДС 0200.006 при Российском университете дружбы народов имени Патриса Лумумбы по адресу: г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд. 214.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6.

Автореферат разослан «___» __________ 2024 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
ПДС 0200.006
канд. физ.-мат. наук, доц. Демидова А.В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Первоначальные исследования в области теории массового обслуживания были проведены А. К. Эрлангом почти столетие назад. Однако до сих пор эта тема остается активно развивающимся разделом теории вероятностей, так как методы и модели массового обслуживания играют важную роль в исследовании телекоммуникационных систем, экономических и производственных процессов.

Интерес к исследованию нестационарных (неоднородных по времени) марковских цепей постоянно увеличивается, в связи с чем является актуальной задача получения оценок скорости сходимости, устойчивости и погрешности аппроксимации для различных классов моделей, а также применение полученных оценок для построения основных предельных характеристик конкретных систем массового обслуживания.

Степень разработанности темы В этой области было проведено множество исследований, и российские и зарубежные ученые внесли большой вклад в ее развитие. Среди них следует отметить В.В. Анисимова, Л.Г. Афанасьеву, Г.П. Башарина, Ю.В. Гайдамаку, А.К.Горшенина, А.А. Назарова, А.Н. Моисеева, С.П. Моисееву, К. Е. Самуйлова, В. М. Вишневского, А.А. Боровкова, П.П. Бочарова, Р.Л. Добрушина, А.Н. Дудина, А.И. Зейфмана, В.В. Калашникова, Н.В. Карташова, В.Ю. Королева, Е.В. Морозова, А.В. Печинкина, В.В. Рыкова, О.В. Семенову, В.Г. Ушакова, С.Г. Фосса, E. Van Doorn, M.Neuts, R.L.Tweedie, W.Whitt и других.

Несмотря на это, вопросы свойств эргодичности и устойчивости для неоднородных марковских цепей с непрерывным временем и их применение к моделям массового обслуживания до сих пор остаются открытыми. Именно в этом направлении были проведены первоначальные исследования А.И. Зейфмана. Кроме того, задачи устойчивости стохастических моделей изучались также В.В. Анисимовым, А.Ю. Митрофановым, В.В. Калашниковым, Н.В. Карташовым.

Цель и задачи диссертационной работы. Целью диссертационной работы является получение оценок вероятностных характеристик (скорости сходимости к предельному режиму, устойчивости) и построение предельных характеристик для некоторых систем массового обслуживания с особенностями.

Для достижения заявленной цели решены следующие **задачи**:

1) Получены оценки скорости сходимости и устойчивости для систем массового обслуживания

   – типа $M_t/M_t/1$ с отказами, катастрофами, сбоями и ремонтами сервера;

   – с одним сервером, специальными групповыми поступлениями требований и специальной политикой пропуска очереди;

   – с одним сервером, специальными групповыми поступлениями требований, специальной политикой пропуска очереди и катастрофами;

   – с групповым поступлением и групповым обслуживанием требований с управлением, зависящим от состояния;

   – с нетерпеливыми клиентами;

   – с эластичным трафиком и нестационарной интенсивностью.

2) Для системы массового обслуживания с одним сервером, специальными групповыми поступлениями требований и специальной политикой пропуска очереди получены

   – оценки мощности сервера и мощности потока, при которой среднее число требований в системе не превышает заданного числа;

   – границы интенсивности обслуживания и интенсивности поступления требований, чтобы среднее оставалось в заданных границах.

Кроме того, для каждой из моделей с помощью разработанных алгоритмов и программ с применением численных методов проведены вычислительные эксперименты: построены предельные характеристики СМО, показаны зависимости реальных характеристик СМО от интенсивностей систем. Экспериментально проиллюстрированы свойства политики пропуска очереди.

Научная новизна.

1) Для процессов, описывающих число требований в системе

– типа $M_t/M_t/1$ с отказами, катастрофами, сбоями и ремонтами сервера;

– с одним сервером, специальными групповыми поступлениями требований и специальной политикой пропуска очереди;

– с одним сервером, специальными групповыми поступлениями требований, специальной политикой пропуска очереди и катастрофами;

– с групповым поступлением и групповым обслуживанием требований с управлением, зависящим от состояния;

– с нетерпеливыми клиентами;

– с эластичным трафиком и нестационарной интенсивностью.

получены новые оценки скорости сходимости к предельному режиму и предельному среднему, оценки устойчивости.

2) Для системы массового обслуживания с одним сервером, специальными групповыми поступлениями требований и специальной политикой пропуска очереди получены

   – оценки мощности сервера и мощности потока, при которой среднее число требований в системе не превышает заданного числа;

   – границы интенсивности обслуживания и интенсивности поступления требований, чтобы среднее оставалось в заданных границах.

Кроме того, для каждой из моделей с помощью разработанных алгоритмов и программ с применением численных методов проведены вычислительные эксперименты: построены предельные характеристики СМО, показаны зависимости реальных характеристик СМО от интенсивностей систем. Экспериментально проиллюстрированы свойства политики пропуска очереди.

Личное участие автора заключается в исследовании рассматриваемых моделей, получении новых оценок для них, а также разработке алгоритмов и программ для проведения вычислительных экспериментов.

Теоретическая и практическая ценность. Теоретическая значимость полученных результатов состоит в том, что применен метод, основанный на применении логарифмической нормы линейной операторной функции и специальных преобразованиях редуцированной матрицы интенсивностей марковской цепи к ряду новых моделей. Метод может быть полезен для изучения подобных ситуаций, получения результатов в исследовании конкретных систем массового обслуживания. Практическая значимость – описанные подходы могут быть полезны в моделировании потоков информации, связанных с высокопроизводительными вычислениями, создании стохастических моделей телекоммуникационных систем, популяционных моделей в биологии и других отраслях.

Методы исследования. Для решения вышеописанных задач используется оператор Коши дифференциального уравнения в банаховом пространстве и оценки его нормы. Вопросы, связанные с вычислением требуемых параметров сводятся к изучению бесконечных систем дифференциальных уравнений на множестве стохастических векторов. Основным инструментом исследования и получения соответствующих оценок является метод, базирующийся на двух моментах: оценках, основанных на применении логарифмической нормы линейной операторной функции и специальных преобразованиях редуцированной матрицы интенсивностей марковской цепи. Для проведения вычислительных экспериментов используется программа на языке Java, которая решает задачу Коши методом Адамса–Мултона 4-го порядка.

Положения, выносимые на защиту.

1) Установление аналитических свойств новых систем массового обслуживания марковского типа, получение оценок скорости сходимости и устойчивости с помощью метода логарифмической нормы.

2) Нахождение зависимостей среднего числа требований в системе с одним сервером, специальными групповыми поступлениями требований и специальной политикой пропуска очереди от интенсивностей обслуживания и поступления требований.

3) Построение предельных характеристик для каждой из изученных систем массового обслуживания.

Отметим, что перечисленные системы имеют широкое применение во многих областях: область сетевых систем связи, для моделирования сценария скачивания файла, в моделировании дорожного движения, бизнесе и отраслях промышленности, компьютерных коммуникациях, здравоохранении и медицинских науках, сервисных системах, розничных магазинах, а задачи, связанные с получением оценок скорости сходимости и устойчивости, решаются для них впервые.

Обоснованность полученных результатов следует из строгих математических доказательств.

Достоверность полученных результатов подтверждается совпадением результатов исследования с результатами других авторов и экспериментом.

Соответствие паспорту специальности. Диссертация выполнена в соответствии с паспортом специальности 1.2.3 – «Теоретическая информатика, кибернетика» и включает оригинальные результаты, направленные на развитие методов оценки и расчета вероятностных характеристик телекоммуникационных сетей. В соответствии с п. 9 «Математическая теория исследования операций» паспорта исследованы новые типы систем массового обслуживания, являющихся адекватными моделями реальных информационно-телекоммуникационных систем.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на:
- семинарах кафедры прикладной математики ВоГУ "Современные методы стохастического моделирования сложных систем" (2020-2023),
- XXXVI Международном семинаре по проблемам устойчивости стохастических моделей (Петрозаводск, Россия, 2021),
- 19-й Международной конференции по численному анализу и прикладной математике (Родос, Греция, 2021),
- 20-й Международной конференции по численному анализу и прикладной математике (Родос, Греция, 2022).

Публикации. Основные результаты опубликованы в 7 печатных работах, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 3 - в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 1 - в тезисах докладов. Программа для проведения вычислительных экспериментов имеет свидетельство о государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ за номером 2020615415 от 22 мая 2020 года.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, разбитых на параграфы, заключения, приложения, списка литературы, включающего 136 наименований, в том числе работы автора. Работа изложена на 147 листах машинописного текста.

Содержание работы

Во введении дается обоснование актуальности темы диссертации, приводится краткий обзор работ по данной тематике, сформулированы результаты, полученные в работе.

В главе 1 приводится вспомогательный математический аппарат, необходимый для дальнейшего исследования. Вводятся определения основных понятий: предельного среднего, пространства l_1, логарифмической нормы оператора, а также некоторые понятия и методы, важные для дальнейшего исследования.

В следующих главах рассмотрено шесть новых моделей с использованием метода логарифмической нормы, получены оценки скорости сходимости, устойчивости и на основе этих оценок построены основные предельные характеристики. Для изучения каждой модели использован следующий алгоритм действий:

1) получение верхних оценок скорости сходимости, то есть нахождение момента времени t^*, начиная с которого вероятностные характеристики процесса $X(t)$ с заданной погрешностью не зависят от начальных условий;

2) получение оценок устойчивости для возмущенного процесса с близкими инфинитезимальными характеристиками;

3) в случае большой размерности исходного процесса (или счетного числа состояний) аппроксимации с помощью процессов меньшей размерности;

В каждом из примеров для проведения вычислительных экспериментов рассматривается соответствующая модель с 1-периодическими по времени интенсивностями:

- в случае большой размерности исходного процесса (или счетного числа состояний) выбираем размерность усеченного процесса N;
- на основании полученных оценок определяем интервал на котором достигается желаемая точность $[0, t^* + 1]$;
- решаем прямую систему Колмогорова с простейшими начальными условиями $X(0) = 0$ и $X(0) = N$ для исходной (в случае необходимости, для усеченной) системы на отрезке $[0, t^* + 1]$;
- на отрезке $[t^*, t^* + 1]$ получаем с требуемой погрешностью все основные предельные характеристики как самого процесса $X(t)$, так и близких ему «возмущенных» процессов.

В главе 2 рассмотрена система массового обслуживания типа $M_t/M_t/1$ с отказами, катастрофами, сбоями и ремонтами сервера в случае нестационарного поведения. Данная модель может быть описана марковским процессом $X(t), t > 0$, где $X(t)$ обозначает число требований в системе в момент времени t (процесс длины очереди). Обозначим через $p_n(t) = P(X(t) = n)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Результирующее поведение вероятностей состояний описывается прямой системой Колмогорова

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = A(t)\,\mathbf{p}(t), \tag{1}$$

где $\mathbf{p}(t) = (r(t), p_0(t), p_1(t), \ldots)^T$ и $A(t) =$

$$\begin{pmatrix}
-\eta(t) & \gamma_0(t) & \gamma_1(t) & \cdots & \gamma_{k-1}(t) & \gamma_k(t) & \gamma_{k+1}(t) & \gamma_{k+2}(t) & \cdots \\
\eta(t) & -(\lambda(t)+\gamma_0(t)) & \mu(t) & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & \lambda(t) & -(\lambda(t)+\gamma_1(t)+\mu(t)) & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda(t) & -(\lambda(t)\beta(t)+\gamma_k(t)+\mu(t)) & \mu(t) & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda(t)\beta(t) & -(\lambda(t)\beta(t)+\gamma_{k+1}(t)+\mu(t)) & \mu(t) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{pmatrix} \tag{2}$$

с интенсивностями поступления требований $\lambda(t)$, обслуживания требований $\mu(t)$, катастрофы $\gamma_i(t)$, восстановления вышедшего из строя сервера $\eta(t)$. При поступлении требования, если впереди него есть k (пороговое значение) или больше требований, то оно присоединяется к очереди с вероятностью $\beta(t)$ и может отказаться с вероятностью $1-\beta(t)$, $r(t)$ - вероятность того, что сервер находится в ремонте в момент времени t с $r(0)=0$.

Для получение оценок скорости сходимости опишем два подхода.

Первый подход. Положим $\gamma^*(t) = \inf_n \gamma_n(t)$ и перепишем прямую систему Колмогорова (1) как $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A^*(t)\,\mathbf{p} + \mathbf{g}(t)\,, \quad t \geq 0$, где $\mathbf{g}(t) = (\gamma^*(t), 0, 0, \dots)^T$, $A^*(t) = \left(a^*_{ij}(t)\right)_{i,j=0}^{\infty}$ с элементами $a^*_{0j}(t) = a_{0j}(t) - \gamma^*(t)$ и $a^*_{ij}(t) = a_{ij}(t)$ при $i \geq 1$.

Теорема 1 *Пусть интенсивности катастроф существенны, т.е.*

$$\int_0^\infty \gamma^*(t)\; dt = +\infty. \tag{3}$$

Тогда процесс $X(t)$ слабо эргодичен (в равномерной операторной топологии) и имеет место следующая оценка скорости сходимости

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq e^{-\int\limits_0^t \gamma^*(\tau)\,d\tau} \|\mathbf{p}^*(0) - \mathbf{p}^{**}(0)\| \leq 2e^{-\int\limits_0^t \gamma^*(\tau)\,d\tau} \tag{4}$$

для любых начальных условий $\mathbf{p}^*(0), \mathbf{p}^{**}(0)$ и всех $t \geq 0$.

Рассмотрим последовательность $d_0 = 1$, $d_{n+1} = (1+\varepsilon)d_n$ для $n \geq 0$ и положительного ε, диагональную матрицу $\mathsf{D} = diag\,(d_0, d_1, d_2, \dots)$ и пространство $l_{1\mathsf{D}} = \{\mathbf{p}/\|\mathbf{p}\|_{1\mathsf{D}} = \|\mathsf{D}\mathbf{p}\|_1 < \infty\}$.

Теорема 2 *Пусть существует $\varepsilon > 0$ такое, что*

$$\int_0^\infty (\gamma^*(t) - \varepsilon \upsilon(t))\; dt = +\infty, \tag{5}$$

где $\upsilon(t) = \max(\eta(t), \lambda(t))$. Тогда $X(t)$ слабо эргодичен и выполняется следующая оценка скорости сходимости:

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_{1D} \leq e^{-\int\limits_0^t (\gamma^*(\tau) - \varepsilon\upsilon(\tau))\,d\tau} \|\mathbf{p}^*(0) - \mathbf{p}^{**}(0)\|_{1D} \tag{6}$$

для любых начальных условий $\mathbf{p}^*(0), \mathbf{p}^{**}(0)$ *и всех* $t \geq 0$.

Пусть $l_{1E} = \{\mathbf{p} = (r, p_0, p_1, p_2, \ldots)\}$ пространство последовательностей таких что $\|\mathbf{p}\|_{1E} = \sum_{k\geq 0} k|p_k| < \infty$. $\|\mathbf{p}\|_{1D} = \|D\mathbf{p}\| = \|\left(d_0 r, d_1 p_0, d_2 p_1, \ldots\right)^T\| = d_0 r + \sum_{k\geq 0} d_{k+1} p_k \geq \sum_{k\geq 1} k \frac{d_{k+1}}{k} p_k$. $W = \inf_{k\geq 1} \frac{d_{k+1}}{k}$. Тогда $W\|\mathbf{p}\|_{1E} \leq \|\mathbf{p}\|_{1\mathsf{D}}$.

Следствие 1. Пусть последовательность $\{d_i\}$ такая, что выполняется (5) и существует $W > 0$. Тогда $X(t)$ имеет предельное среднее значение, скажем $\phi(t) = E(t, 0)$, и выполняется следующая оценка:

$$|E(t,j) - E(t,0)| \leq \frac{d_{j+1}}{W} e^{-\int\limits_0^t (\gamma^*(\tau) - \varepsilon v(\tau))\, d\tau} \tag{7}$$

для всех j и всех $t \geq 0$.

Второй подход. Рассмотрим частный случай, при котором скорости катастроф одинаковые, а именно, предположим, что все $\gamma_n(t) = \gamma^*(t)$. В этой ситуации первое уравнение системы будет выглядеть следующим образом $r'(t) = -\eta(t)r(t) + \gamma^*(t)$, следовательно, его можно решить. Рассмотрим теперь систему Колмогорова в виде $\frac{d\mathbf{z}}{dt} = B\left(t\right)\mathbf{z} + \mathbf{f}\left(t\right), \quad t \geq 0$, где $\mathbf{f}\left(t\right) = \left(\eta(t) r\left(t\right), 0, 0, \ldots\right)^T$, $\mathbf{z}\left(t\right) = \left(p_0(t), p_1(t), \ldots\right)^T$, а $B\left(t\right)$ получена из $A\left(t\right)$ исключением первой строки и первого столбца. В этом случае оценка полностью аналогична теореме 1, только с заменой в левой части $\mathbf{p}$ на $\mathbf{z}$.

Существенно иная ситуация с этим подходом возникает, когда рассматриваем общий случай при получении взвешенных оценок. Используем равенство $r(t) = 1 - \sum_{i\geq 0} p_i(t)$. Затем снова получаем уравнение $\frac{d\mathbf{z}}{dt} = B\left(t\right)\mathbf{z} + \mathbf{f}\left(t\right), \quad t \geq 0$ с другим $B(t)$, $\mathbf{f}\left(t\right) = \left(\eta(t), 0, 0, \ldots\right)^T$ и $\mathbf{z}\left(t\right) = \left(p_0(t), p_1(t), \ldots\right)^T$. В этой ситуации сформулированы теоремы о скорости сходимости в, так называемых, «взвешенных» нормах.

Рассмотрен «возмущенный» процесс длины очереди $\bar{X}(t), t \geq 0$ с соответствующей транспонированной матрицей интенсивности $\bar{A}(t)$, где матрица «возмущения» $\hat{A}(t) = A(t) - \bar{A}(t)$ в некотором смысле мала. А именно, предполагаем, что возмущенная очередь имеет ту же природу, что и исходная.

Теорема 3 *Пусть в предположении теоремы 1 интенсивность катастрофы $\gamma(t)$ будет такой, что*

$$e^{-\int\limits_s^t \gamma(\tau)\,d\tau} \le N e^{-\gamma_0(t-s)} \tag{8}$$

для некоторых положительных N, γ_0. Тогда выполняется следующая оценка возмущения:

$$\limsup_{t\to\infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \le \frac{\hat{\epsilon}\,(2L+6)\,(1+\log{(N/2)})}{\gamma_0}, \tag{9}$$

для любой возмущенной очереди с соответствующими возмущенными интенсивностями.

Также сформулированы оценки устойчивости в условиях теорем о скорости сходимости во «взвешенных» нормах. Для подтвержения теоретических оценок проведены вычислительные эксперименты — рассмотрены две модели массового обслуживания с 1-периодическими интенсивностями.

В главе 3 рассматривается модель массового обслуживания с одним сервером, специальными групповыми поступлениями требований и специальной политикой пропуска очереди. Требования поступают в систему партиями с интенсивностью $\lambda(t)$. Размер поступающей партии становится известен по ее прибытии и является случайной величиной с заданным распределением вероятностей $\{b_n, n \ge 1\}$, имеющей конечное среднее значение $\bar{b} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k$, $B_k = \sum_{n=k}^{\infty} b_n$. Интенсивность обслуживания $\mu(t)$. Транспонированная матрица интенсивностей имеет вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\lambda(t) & \mu(t) & 0 & 0 & \dots \\ \lambda(t)b_1 & -(\lambda(t)B_2+\mu(t)) & \mu(t) & 0 & \dots \\ \lambda(t)b_2 & \lambda(t)b_2 & -(\lambda(t)B_3+\mu(t)) & \mu(t) & \dots \\ \lambda(t)b_3 & \lambda(t)b_3 & \lambda(t)b_3 & -(\lambda(t)B_4+\mu(t)) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Наличие предельного режима $X(t)$ в рассматриваемой очереди зависит от формы распределения размера пакета $\{b_n, n \ge 1\}$. Показано, что когда хвост распределения геометрический или более «легкий», то всегда существует предельный режим $X(t)$, тогда как для более тяжелых хвостов вопрос остается открытым.

Теорема 4 *Предположим, что существуют* $0 < q < 1$ *и* $C > 0$ *такие, что* $b_k \le Cq^k$ *для всех* $k \ge 1$, *и*

$$\int_0^\infty \mu(t)\, dt = +\infty. \tag{10}$$

Тогда цепь Маркова $X(t)$ *слабо эргодична, и для любого начального условия* $\mathbf{w}(0)$ *и любого* $t \ge 0$ *верна следующая оценка*

$$\|\mathbf{w}\,(t)\,\| \le e^{-\int_0^t (1-\delta)\mu(u)\,du} \|\mathbf{w}(0)\|$$

для всех $\delta \in (q, 1)$.

Предположим, что для некоторых положительных M, a и всех s, t, $0 \le s \le t$ выполняется неравенство

$$4e^{-\int_s^t (1-\delta)\mu(u)\,du} \le Me^{-a(t-s)}. \tag{11}$$

Рассмотрим простейшую ситуацию, когда возмущенный процесс $\bar{X}(t)$ таков, что соответствующая матрица интенсивности $\bar{Q}(t)$ имеет ту же структуру.

Пусть возмущенные интенсивности, равные $\bar{\lambda}(t)$, $\bar{\mu}(t)$, такие что $|\lambda(t) - \bar{\lambda}(t)| \le \hat{\epsilon}_\lambda$, $|\mu(t) - \bar{\mu}(t)| \le \hat{\epsilon}_\mu$ для всех $t \ge 0$. Следующая теорема содержит соответствующую оценку устойчивости.

Теорема 5 *Пусть* $X(t)$ *-* $1D$*-экспоненциально слабо эргодическая цепь Маркова. Тогда возмущенный процесс* $\bar{X}(t)$ *также является* $1D$*-экспоненциально слабо эргодичным для достаточно малых* $\hat{\epsilon}_\lambda, \hat{\epsilon}_\mu$ *и выполняется следующая оценка возмущения:*

$$\limsup_{t\to\infty} \|p(t) - \bar{p}(t)\|_{1D} \le \frac{MC^*(ML((1+\delta)\hat{\epsilon}_\mu + \hat{\epsilon}_\lambda) + a\hat{\epsilon}_\lambda)}{a(a - M((1+\delta)\hat{\epsilon}_\mu + \hat{\epsilon}_\lambda))}, \tag{12}$$

где M, a *определяются (11). Более того, если* $W = \inf_{k\ge1} \frac{d_k}{k} > 0$, *то обе цепи Маркова* $X(t)$ *и* $\bar{X}(t)$ *имеют предельные математические ожидания и*

$$\limsup_{t\to\infty} |\phi(t) - \bar{\phi}(t)| \le \frac{MC^*(ML((1+\delta)\hat{\epsilon}_\mu + \hat{\epsilon}_\lambda) + a\hat{\epsilon}_\lambda)}{Wa(a - M((1+\delta)\hat{\epsilon}_\mu + \hat{\epsilon}_\lambda))}. \tag{13}$$

Далее сформулированы утверждения и теоремы на управление некоторыми параметрами системы: границы интенсивности обслуживания требований и мощность сервера обслуживания.

Утверждение. *Пусть задано среднее число требований в системе* $E(t,0)$ *с некоторыми границами, т.е.*

$$\limsup_{t\to\infty} |E(t,0) - \bar{E}(t,0)| \leq h \tag{14}$$

для некоторого положительного h. *Тогда границы для интенсивности обслуживания будут иметь вид*

$$|\mu(t) - \bar{\mu}(t)| \leq \frac{Wa^2h}{(1+\delta)(C^*LM^2 + MhWa)}. \tag{15}$$

Теорема 6 *Пусть задана интенсивность поступления требований* $\lambda(t)$, *известны* $\{b_k\}$. *Интенсивность обслуживания имеет вид* $\mu(t) = \mu g(t)$, *причем* $g(t)$ *известна и выполняется неравенство* $e^{-\int_\tau^t g(u)du} \leq He^{-v(t-\tau)}$, *а* μ *можем управлять. Тогда для того, чтобы*

$$\limsup_{t\to\infty} E(t,0) \leq N^* \tag{16}$$

достаточно, чтобы

$$\frac{H^{(1-\delta)\mu}}{\mu} \leq \frac{v(1-\delta)N^*W}{4C^*L}. \tag{17}$$

Аналогичные результаты сформулированы и для границ интенсивности поступления требований и мощности потока требований.

Описаны результаты трёх вычислительных экспериментов: первый посвящен подтверждению полученных теоретических оценок сходимости и построению предельных характеристик системы, второй показывает влияние интенсивностей системы на реальные значения характеристик СМО, а третий иллюстрирует свойства политики пропуска очереди.

В главе 4 исследуется модель массового обслуживания с одним сервером, специальными групповыми поступлениями требований и специальной политикой пропуска очереди при наличии катастроф. Обозначения как предыдущей модели, здесь же отметим, что транспонированная матрица интенсивностей имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\lambda(t) & \mu(t)+\gamma(t) & \gamma(t) & \gamma(t) & \dots \\ \lambda(t)b_1 & -(\lambda(t)B_2+\mu(t)+\gamma(t)) & \mu(t) & 0 & \dots \\ \lambda(t)b_2 & \lambda(t)b_2 & -(\lambda(t)B_3+\mu(t)+\gamma(t)) & \mu(t) & \dots \\ \lambda(t)b_3 & \lambda(t)b_3 & \lambda(t)b_3 & -(\lambda(t)B_4+\mu(t)+\gamma(t)) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

а $\gamma(t)$ – интенсивность катастрофы (одномоментной потери всех требований в системе).

Рассмотрено несколько вариантов. Для процесса, описывающего число требований в рассматриваемой системе, во-первых, сформулировано условие сходимости за счет существенности катастроф. Во-вторых, получено условие в случае, когда интенсивности поступления групп требований экспоненциально убывают при увеличении размера группы, в-третьих, в случае, когда интенсивности убывают со степенной скоростью. Теоретические выводы подтверждены с помощью вычислительных экспериментов.

В §1 главы 5 рассмотрена система массового обслуживания с групповым поступлением и групповым обслуживанием требований с управлением, зависящим от состояния. Транспонированная матрица интенсивностей имеет вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\lambda(t) & \mu(t) & 0 & \mu(t) & 0 & 0 & \dots \\ \lambda(t) & -(\lambda(t)+\mu(t)) & \mu(t) & 0 & \mu(t) & 0 & \dots \\ 0 & \lambda(t) & -(\lambda(t)+\mu(t)) & 0 & 0 & \mu(t) & \dots \\ 0 & 0 & \lambda(t) & -(\lambda(t)+\mu(t)) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(t) & -(\lambda(t)+\mu(t)) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda(t) & -(\lambda(t)+\mu(t)) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad (18)$$

с интенсивностями поступления требований $\lambda(t)$ и обслуживания требований $\mu(t)$. Для процесса, описывающего число требований в рассматриваемой системе, сформулировано условие нуль-эргодичности.

Теорема 7 *Если* $\int_0^\infty \left(\lambda(t)(1-\sigma)+\mu(t)(1-\sigma^{-3})\right)\,dt = +\infty$ *для некоторго* $\sigma \in (0,1)$*, то Марковская цепь* $X(t)$ *нуль-эргодична,*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sigma^i p_i(t) \le e^{-\int_0^t \left(\lambda(u)+\mu(u)-\sigma\lambda(u)-\sigma^{-3}\mu(u)\right)du} \sum_{i=0}^{\infty} \sigma^i p_i(0),\ \ t \ge 0 \qquad (19)$$

и для всех $n \geq 0$ и $N \geq 0$ выполнено неравенство

$$\mathsf{P}\left(X(t) > n | X(0) = N\right) \geq 1 - \sigma^{N-n} e^{-\int_0^t \left(\lambda(u)+\mu(u)-\sigma\lambda(u)-\sigma^{-3}\mu(u)\right)\, du}. \qquad (20)$$

Также получены условие слабой эргодичности, оценки устойчивости. Рассмотрены численные примеры.

В §2 главы 5 рассмотрена система массового обслуживания с нетерпеливыми клиентами. Транспорнированная матрица интенсивностей имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\phi_0\lambda(t) & \mu_1(t) & 0 & 0 & \cdots \\ \phi_0\lambda(t) & -(\phi_1\lambda(t)+\mu_1(t)) & \mu_2(t) & 0 & \cdots \\ 0 & \phi_1\lambda(t) & -(\phi_2\lambda(t)+\mu_(t)) & \mu_3(t) & \cdots \\ 0 & 0 & \phi_2\lambda(t) & -(\phi_3\lambda(t)+\mu_3(t)) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad (21)$$

с S серверами, интенсивностями поступления $\phi_i\lambda(t)$ (где коэффициенты ϕ_i монотонно убывают т.е. интенсивность поступления требований уменьшается с ростом очереди) и интенсивностями обслуживания $\mu_k(t) = \mu(t)\min(k, S)$.

Теорема 8 *Пусть найдется такое $\delta \in (1; \frac{S}{S-1})$, что $\int_0^\infty (S\mu(t) - \delta\phi_S\lambda(t))\, dt = +\infty$. Тогда $X(t)$ слабо эргодична, причем*

$$\left\|\mathbf{p}^1(t) - \mathbf{p}^2(t)\right\|_{1D} \leq e^{-\frac{\delta-1}{\delta}\int_0^t (S\mu(u)-\delta\phi_S\lambda(u))du} \left\|\mathbf{p}^1(0) - \mathbf{p}^2(0)\right\|_{1D} \qquad (22)$$

для любых начальных условий $\mathbf{p}^1(0) \in \Omega$, $\mathbf{p}^2(0) \in \Omega$ и всех $t \geq 0$.

Получены оценки устойчивости, рассмотрены численные примеры.

В §3 главы 5 рассмотрена система массового обслуживания с эластичным трафиком и нестационарной интенсивностью. Транспорнированная матрица интенсивностей имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\lambda(t) & \mu_1(t) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda(t) & -(\mu_1(t)+\lambda(t)) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(t) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -(\mu_N(t)+\lambda(t)) & \mu_{N+1}(t) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda(t) & -(\mu_{N+1}(t)+\lambda(t)) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda(t) & -\mu_{N+r}(t) \end{pmatrix}, \qquad (23)$$

где $\lambda(t)$ — интенсивность потока запросов на передачу эластичных данных, b — минимальная гарантированная эластичная скорость передачи блоков данных, $\mu(t) = \frac{C}{\theta(t)}$ и $\mu_n(t) = \mu(t) + \max(n-N,0)\gamma(t)$, $\theta(t)$ — среднее значение длины блока данных, r — очередь заявок на передачу блока эластичных данных, $\gamma(t)$ — интенсивность потерь по заявкам на стационарное лечение, C — пропускная способность сети (скорость обслуживания), $|\frac{C}{b}| = N$ - это максимальное число запросов, которые устройство может обрабатывать одновременно. Пространство состояний системы выглядит следующим образом $X = \{n \in 0, ..., N, ..., N+r : c(n) \leq C\}$.

Для больших интенсивностей обслуживания будет верна следущая теорема.

Теорема 9 *Пусть существует положительное число $\delta > 1$ такое, что*

$$\int_0^\infty (\mu(t) - \delta\lambda(t))dt = +\infty. \qquad (24)$$

Тогда цепь Маркова $X(t)$ слабо эргодична и имеет следующие оценки скорости сходимости:

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_{1D} \leq e^{-\int\limits_0^t \left(1-\frac{1}{\delta}\right)(\mu(t)-\delta\lambda(t))\,d\tau} \|\mathbf{p}^*(0) - \mathbf{p}^{**}(0)\|_{1D}, \qquad (25)$$

$$\|\mathbf{p}^*(t)-\mathbf{p}^{**}(t)\| \le 4\delta^{N+r} e^{-\int\limits_0^t \left(1-\frac{1}{\delta}\right)(\mu(t)-\delta\lambda(t))\,d\tau} \|\mathbf{p}^*(0)-\mathbf{p}^{**}(0)\| \le \\ \le 8\delta^{N+r} e^{-\int\limits_0^t \left(1-\frac{1}{\delta}\right)(\mu(t)-\delta\lambda(t))\,d\tau} \tag{26}$$

для любых начальных условий $\mathbf{p}^*(0), \mathbf{p}^{**}(0)$ *и любого* $t \ge 0$.

Положим $W = \min_{k\ge1} \frac{d_k}{k} = \min_{k\ge0} \frac{\delta^k}{k+1}$.Тогда получим $W\|\mathbf{p}\|_{1E} \le \|\mathbf{p}\|_{1\mathsf{D}}$.

Следствие 1. *Из условий теоремы 9* $X(t)$ *имеет предельное среднее значение, тогда* $\phi(t) = E(t,0)$, *и получаем, что следующая оценка верна для любого* j *и любого* $t \ge 0$:

$$|E(t,j)-E(t,0)| \le \frac{1+\delta^{j-1}}{W} e^{-\int\limits_0^t \left(1-\frac{1}{\delta}\right)(\mu(t)-\delta\lambda(t))\,d\tau}. \tag{27}$$

При больших интенсивностей поступления возьмём $\gamma_{**}(t) = \min\left(\left(\frac{1}{\delta}-1\right)(\delta\lambda(t)-\mu(t)), \gamma(t)\right)$. Тогда будет верна следущая теорема.

Теорема 10 *Пусть*

$$\int_0^\infty \gamma_{**}(t)\,dt = +\infty, \tag{28}$$

для некоторого $\delta \in [\frac{r-1}{r}, 1)$. *Тогда цепь Маркова* $X(t)$ *слабо эргодична и имеет следующие оценки скорости сходимости:*

$$\|\mathbf{p}^*(t)-\mathbf{p}^{**}(t)\|_{1D} \le e^{-\int\limits_0^t \gamma_{**}(\tau)\,d\tau} \|\mathbf{p}^*(0)-\mathbf{p}^{**}(0)\|_{1D} \tag{29}$$

и

$$\|\mathbf{p}^*(t)-\mathbf{p}^{**}(t)\| \le \frac{8}{\delta^{N-1}} e^{-\int\limits_0^t \gamma_{**}(\tau)\,d\tau} \tag{30}$$

для любых начальных условий $\mathbf{p}^*(0), \mathbf{p}^{**}(0)$ *и любого* $t \ge 0$.

Для каждой СМО этой главы теоретические выводы подтверждены с помощью вычислительных экспериментов.

В заключении описаны и сформулированы основные результаты, полученные в ходе диссертационного исследования для рассмотренных моделей массового обслуживания.

В приложении приведено описание программы, с помощью которой выполняются построения основных характеристик марковского процесса.

Основные результаты работы

В ходе решения поставленных в диссертационной работе задач получены оценки скорости сходимости и устойчивости для

- системы массового обслуживания типа $M_t/M_t/1$ с отказами, катастрофами, сбоями и ремонтами сервера;
- системы массового обслуживания с одним сервером, специальными групповыми поступлениями требований и специальной политикой пропуска очереди;
- системы массового обслуживания с одним сервером, специальными групповыми поступлениями требований, специальной политикой пропуска очереди и катастрофами;
- системы массового обслуживания с групповым поступлением и групповым обслуживанием требований с управлением, зависящим от состояния;
- системы массового обслуживания с нетерпеливыми клиентами;
- системы массового обслуживания с эластичным трафиком и нестационарной интенсивностью.

Оценки применены для построения предельных характеристик.

Для системы массового обслуживания с одним сервером, специальными групповыми поступлениями требований и специальной политикой пропуска очереди получены

- оценки мощности сервера и мощности потока, при которой среднее число требований в системе не превышает заданного числа;

- границы интенсивности обслуживания и границы интенсивности поступления требований, чтобы среднее оставалось в заданных границах.

Для каждой из моделей с помощью разработанных алгоритмов и программ с применением численных методов проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие теоретические выводы.

Результаты, полученные в данной диссертационной работе, позволяют расширить круг практических задач, допускающих аналитическое исследование важнейших вероятностных характеристик.

Список работ опубликованных по теме диссертации

1) Зейфман, А. И. , Сатин, Я. А., Ковалёв, И. А. Об одной нестационарной модели обслуживания с катастрофами и тяжелыми хвостами // Информатика и ее применения. — 2021. – Т. 15. № 2, С. 20-25 DOI: https://doi.org/10.14357/19922264210203 (ВАК, Scopus)

2) Зейфман, А. И. , Сатин, Я. А., Ковалёв, И. А. Оценки скорости сходимости и устойчивости для одного класса нестационарных марковских моделей систем с нетерпеливыми клиентами // Системы и средства информатики — 2022. – B.32(4). C. 21-31 DOI: https://doi.org/10.14357/08696527220403 (ВАК)

3) Ковалёв И.А. Об оценках устойчивости и их применении для некоторых моделей массового обслуживания Системы и средства информатики. 2023. Т. 33 №1, 90-104 DOI: (ВАК)

4) Zeifman, A. I., Satin, Y. A., Kovalev, I. A., Sherif I. Ammar. Ergodicity and Perturbation Bounds for Mt/Mt/1 Queue with Balking, Catastrophes, Server Failures and Repairs // Rairo – Operations Research. — 2021. – V.55. P. 2223-2240. DOI: https://www.rairo-ro.org/articles/ro/abs/2021/05/ro210072/ro210072.html (WoS CC)

5) Zeifman, A. I., R. V. Razumchik, Y. A. Satin, and I. A. Kovalev. Ergodicity bounds for the Markovian queue with time-varying transition intensities, batch arrivals and one queue skipping policy // Applied

Mathematics and Computation. — 2021. – V.395 №125846. DOI: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300320307992 (WoS CC, Q1)

6) Zeifman, A., Satin, Y., Kovalev, I., Razumchik, R., & Korolev, V. Facilitating Numerical Solutions of Inhomogeneous Continuous Time Markov Chains Using Ergodicity Bounds Obtained with Logarithmic Norm Method // Mathematics. — 2021. – V.9(1). P. 42. DOI: https://www.mdpi.com/2227-7390/9/1/42 (WoS CC, Q1)

7) Kochetkova, I., Satin, Y., Kovalev, I., Makeeva, E., Chursin, A., Zeifman, A. Convergence Bounds for Limited Processor Sharing Queue with Impatience for Analyzing Non-Stationary File Transfer in Wireless Network // Mathematics. — 2022. – V.10(1) P. 30. DOI: https://www.mdpi.com/2227-7390/10/1/30 (WoS CC, Q1)

8) Kovalev, I., Satin, Y., Zeifman, A. About Service Intensity Bounds for a Queuing Model. // Proceedings 19th international conference of numerical analysis and applied mathematics, 2021. – 2021. – September 2021, Rhodes, Greece. AIP Conf. Proc. 2849, 100004 (2023)

9) Ковалёв И.А., Сатин Я.А., Зейфман А.И., Программа для решения задачи Коши для системы однородных дифференциальных уравнений 1-го порядка методом Адамса-Мултона 4-го порядка // Свидетельство №2020615415 (РФ; Программа). – 2020 год.

Ковалёв Иван Александрович (Россия)

Получение оценок и построение предельных характеристик для некоторых систем массового обслуживания с особенностями

В диссертации исследуются ряд систем массового обслуживания с особенностями. Для изучения процесса, описывающего число требований в системе, применяется общий подход, основанный на использовании логарифмической нормы оператора прямой системы Колмогорова и специальных преобразованиях редуцированной системы. Получены оценки скорости сходимости к предельным характеристикам, оценки устойчивости. Получены оценки некоторых параметров для модели с одним сервером, специальными групповыми поступлениями требований и специальной политикой пропуска очереди. Для каждой из задач с помощью разработанных алгоритмов и программ с применением численных методов проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие теоретические выводы.

Kovalev Ivan (Russia)

Obtaining estimates and computation of limiting characteristics for some queuing systems with features

A number of queuing systems with features are considered in dissertation. We deal with the queue-length process and employ the general approach for the study of forward Kolmogorov system via logarithmic norm of a operator function and related estimates. We obtain bounds on the rate of convergence and perturbations for the considered queue-length processes. We obtain bounds of some parameters for a system with time-varying transition intensities, batch arrivals and one queue skipping policy. Computational experiments confirming theoretical conclusions were carried out using numerical methods, developed algorithms and programs.