

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ
им. ПАТРИСА ЛУМУМБЫ
(РУДН им. Патриса Лумумбы)

На правах рукописи

Сопин Эдуард Сергеевич

**МОДЕЛИ РЕСУРСНЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ
И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ К АНАЛИЗУ И РАСЧЕТУ ПОКАЗАТЕЛЕЙ
ЭФФЕКТИВНОСТИ БЕСПРОВОДНЫХ СЕТЕЙ**

Специальность

1.2.3 – Теоретическая информатика, кибернетика
(по физико-математическим наукам)

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Научный консультант:

Самуйлов Константин Евгеньевич –
доктор технических наук, профессор

Москва – 2026

Оглавление

Введение.....	4
Глава 1. Модели ресурсных систем массового обслуживания для анализа беспроводных сетей	19
1.1. Обзор систем массового обслуживания с ограниченным ресурсом	20
1.2. Применение случайных списков и псевдосписков к анализу ресурсных систем	28
1.3. Распределение требований к ресурсу в беспроводных сетях.....	38
Глава 2. Анализ простейших ресурсных систем массового обслуживания....	43
2.1. Методы расчета вероятностно-временных характеристик экспоненциальных РеСМО	43
2.2. Агрегирование входящих потоков	49
2.3. Нечувствительность стационарного распределения к виду распределения времени обслуживания	52
2.4. Анализ ресурсной системы с марковским входящим потоком.....	61
Глава 3. Методы анализа и расчета ресурсных систем массового обслуживания с сигналами	66
3.1. Модель ресурсной системы с сигналами и ее вероятностные характеристики	67
3.2. Метод приближенного расчета вероятностных характеристик.....	73
3.3. Модифицированный метод приближенного расчета	78
Глава 4. Применение ресурсных моделей к анализу сети радиодоступа «Новое радио» в диапазоне миллиметровых длин волн.....	98
4.1. Моделирование эффектов блокировок пути прямого распространения сигнала.....	99

4.2. Резервирование ресурса для повышения непрерывности сессий передачи данных	102
4.3. Совместное использование механизмов резервирования ресурса и мультисвязности.....	113
4.4. Анализ эффектов повторных вызовов и адаптации скорости передачи данных	128
Глава 5. Применение ресурсных моделей для анализа гетерогенных сетей с несколькими технологиями радиодоступа	147
5.1. Модель гетерогенной сети с совместным использованием технологий радиодоступа в миллиметровом диапазоне длин волн и в терагерцевых частотах	148
5.2. Анализ модели гетерогенной сети с выгрузкой сессий в нелицензированный диапазон частот	169
Заключение	186
Список литературы	189

Введение

Актуальность темы исследования.

Сети телекоммуникаций, в особенности технологии беспроводных сетей, динамично развиваются в последние десятилетия. Совершенствование компактных пользовательских устройств привело к бурному развитию услуг мобильной широкополосной связи, а промышленные революции – к появлению и широкому распространению принципиально новых типов услуг, основанных на массовом межмашинном взаимодействии, а также сверхнадежной связи со сверхнизкими задержками. Появление новых типов услуг и расширение требований к производительности сетей стимулируют дальнейшую эволюцию существующих сетей четвертого (4G) и пятого (5G) поколений, а также формируют требования к перспективным сетям шестого поколения (6G), завершение разработки которых ожидается на рубеже 2030-х годов.

Для передачи все больших объемов данных на участке радиодоступа в сетях 5G+ пришлось задействовать более высокие диапазоны частот, ранее не использовавшиеся в беспроводных сетях, в том числе так называемый диапазон миллиметровых длин волн (30 – 300 ГГц). Для преодоления более высоких потерь распространения в этом диапазоне применяются сложные антенные решетки, позволяющие концентрировать излучаемый сигнал в достаточно узкие лучи. С одной стороны, это позволяет достигать приемлемого радиуса зоны покрытия базовых станций (БС) в несколько сотен метров. Однако с другой стороны, пересечение пути прямого распространения такого узкого луча от БС до пользователя даже небольшим объектом, к примеру, человеком или автомобилем, приводит к резкому снижению качества радиоканала, что может приводить к значительному снижению скорости передачи данных пользователю или даже к разрыву соединения. В разрабатываемых сетях шестого поколения планируется перейти в еще более высокие диапазоны частот, в которых, в дополнение к блокировкам пути прямого распространения кратковременные сбои соединения могут вызываться рассинхронизацией направленности антенных решеток на

приемнике и передатчике из-за так называемой микромобильности, т.е. небольших смещений или поворотов устройства. Эти особенности требуют разработки механизмов, позволяющих нивелировать негативные эффекты резких колебаний качества радиоканалов.

Параллельно с появлением новых технологий совершенствуются существующие и разрабатываются новые методы и теории анализа производительности беспроводных сетей. Ключевую роль в этом играют математические модели с широким применением вероятностных методов, особенно систем массового обслуживания. Использование классических моделей массового обслуживания и методов теории телетрафика осложняется тем, что в беспроводных сетях фактическая скорость передачи данных при выделении одного и того же объема радиоресурса может различаться в десятки раз в зависимости от качества радиоканала.

Особенно актуальными в контексте анализа производительности беспроводных сетей оказались так называемые системы обслуживания со случайными требованиями к ресурсу или ресурсные системы массового обслуживания (РесМО), которые позволяют с высокой точностью описывать процессы обслуживания пользовательских сессий передачи данных на БС сети мобильной связи. При этом широкое применение систем данного класса осложняется как отсутствием эффективных методов расчета известных РесМО так и необходимостью разработки новых типов РесМО, которые позволяют моделировать описанные выше особенности беспроводных сетей, использующих высокочастотные диапазоны. В результате возникает важная научная проблема разработки методов анализа ресурсных систем массового обслуживания, алгоритмов расчета их вероятностно-временных характеристик, а также методов описания сценариев функционирования сетей радиодоступа в терминах РесМО для расчета показателей эффективности.

Степень разработанности темы.

Исследования РесМО, начавшись в 1970-х годах, получили обширное развитие в 1990-х годах, когда они стали активно применяться для анализа

вычислительных систем, в которых ограниченным ресурсом выступали процессорное время и память. Новый виток активности исследований РеСМО начался в середине 2010-х годов в рамках их применения к анализу беспроводных сетей четвертого, а затем и последующих поколений. Вопреки этому, множество задач до сих пор остаются нерешенными как в части разработки методов анализа новых моделей РеСМО, так и в части их применения к различным сценариям функционирования сетей радиодоступа пятого и последующих поколений.

Теоретические и прикладные основы исследований в данной области базируются в основном на результатах в области теории вероятностей, теории случайных процессов, теории массового обслуживания, теории телетрафика и стохастической геометрии. В области методов анализа показателей эффективности беспроводных сетей: С.Д. Андреев, Е.А. Барабанова, В.О. Бегишев, В.М. Вишневский, К.А. Вытовтов, Ю.В. Гайдамака, Б.С. Гольдштейн, В.Ю. Деарт, Б.Г. Ибрагимов, И.А. Кочеткову, Е.А. Крук, Д.С. Кулябов, А.Е. Кучерявого, Е.А. Кучерявого, А.И. Ляхова, Д.А. Молчанов, А.С.А. Мутханна, В.А. Нетес, Ю.Н. Орлов, А.И. Парамонов, А.П. Пшеничников, А.В. Росляков, К.Е. Самуйлов, Р.Л. Смелянский, Н.А. Соколов, А.М. Тюрликов, Е.М. Хоров, И.И. Цитович, Г.Г. Яновский, I. Akyildiz, J.G. Andrews, M. Dohler, P. Popovski, J.W. Roberts, T. Taleb, W. Whitt и другие.

По моделям математической теории телетрафика Г.П. Башарин, Ю.В. Гайдамака, А.Н. Дудин, А.В. Зорин, И.А. Кочеткова, А.П. Пшеничников, К.Е. Самуйлов, С.Н. Степанов, М.А. Федоткин, V.V. Iversen, F. Kelly, U. Krieger, K.W. Ross и другие.

По теории массового обслуживания Е.А. Барабанова, П.П. Бочаров, В.М. Вишневский, К.А. Вытовтов, Ю.В. Гайдамака, Б.В. Гнеденко, А.М. Горцев, А.Н. Дудин, Д.В. Ефросинин, А.И. Зейфман, А.В. Зорин, В.А. Ивницкий, Г.П. Климов, А.З. Меликов, А.Н. Моисеев, С.П. Моисеева, Е.В. Морозов, А.А. Назаров, В.А. Наумов, С.В. Пауль, А.В. Печинкин, Р.В. Разумчик, А.С. Румянцев, В.В. Рыков, К.Е. Самуйлов, Б.А. Севастьянов, О.В. Семенова, С.Н. Степанов, А.Ф. Терпугов, О.М. Тихоненко, М.А. Федоткин, Ю.С. Хохлов, Г.Ш. Цициашвили, С.Я. Шоргин,

С.Ф. Яшков, S. Asmussen, E. Gelenbe, L. Kleinrock, , D. Lucantoni, M.F. Neuts, M. Pagano, R. Ramaswami и другие. В частности, по ресурсным системам массового обслуживания: Ю.В. Гайдамака, А.Н. Моисеев, С.П. Моисеева, В.А. Наумов, К.Е. Самуйлов, О.М. Тихоненко, F. Kelly, U. Krieger и другие.

Цель и задачи исследования.

Диссертация посвящена решению фундаментальной научной проблемы – разработке моделей ресурсных систем, методов их анализа и вычислительных алгоритмов для расчета показателей эффективности современных и перспективных беспроводных сетей. Для достижения поставленной цели в диссертации решаются следующие задачи:

1. Разработка модели требований к радиоресурсу БС в виде дискретного вероятностного распределения.
2. Разработка методов анализа и вычислительных алгоритмов для расчета ВВХ РеСМО с дискретными требованиями к ресурсу при различных типах входящего потока и распределения времени обслуживания.
3. Построение моделей РеСМО с сигналами, моделирующими изменения требований заявок к ресурсу в процессе обслуживания, разработка методов их анализа, а также точных и приближенных вычислительных алгоритмов.
4. Построение моделей механизмов повышения показателей непрерывности пользовательских сессий в сети радиодоступа и разработка методов расчета вероятностей потери и прерывания обслуживания сессий, а также среднего объема занятого ресурса.
5. Разработка моделей гетерогенных сетей с несколькими технологиями радиодоступа в виде РеСМО с сигналами и методов расчета их показателей эффективности.

Научная новизна результатов исследования состоит в следующем:

1. Разработан новый сверточный алгоритм вычисления вероятностных характеристик РеСМО с пуассоновским входящим потоком и дискретной функцией распределения требований к ресурсам.

2. Доказана теорема о нечувствительности стационарного распределения РеСМО с пуассоновским входящим потоком и интенсивностями поступления и обслуживания, зависящими от состояния системы, к виду функции распределения времени обслуживания. Ранее свойство было известно для ресурсных систем с постоянными интенсивностями поступления и обслуживания.
3. Разработана новая модель ресурсной СМО с сигналами, при поступлении которых заявка изменяет требуемый объем ресурсов. Ранее в моделях с сигналами не учитывались случайные требования заявок к ресурсам. Кроме того, ранее не учитывалась возможность потери заявки при поступлении сигнала.
4. Разработан новый метод приближенного анализа РеСМО с сигналами с использованием имитирующей РеСМО без сигналов, но с дополнительным потоком заявок, интенсивность которого рассчитывается итерационно. В отличие от предложенных ранее, для расчета вероятности прерывания используется не распределение по времени, а распределение по цепи Маркова, вложенной по моментам окончания обслуживания.
5. Применения ресурсных СМО к анализу беспроводных сетей позволили учесть при расчете показателей эффективности основные их особенности: механизмы выделения радиоресурсов в зависимости от используемой кодово-модуляционной схемы, подвижность пользовательских устройств, возникновение блокировок прямого пути распространения сигнала в сетях миллиметрового диапазона частот и связанных с ними нестабильностью радиоканала, а также механизмы резервирования ресурсов, мультисвязности и выгрузки, призванные повысить показатели непрерывности сессий передачи данных и увеличить емкость сети.

Теоретическая и практическая значимость работы.

В диссертации сделан вклад в теорию ресурсных систем массового обслуживания в виде доказательств ряда их фундаментальных свойств, а также

новых моделей ресурсных систем с сигналами, методов их анализа, точного и приближенного расчета ВВХ. С целью применения полученных результатов в научно-исследовательских, проектных организациях и телекоммуникационных компаниях были разработаны вычислительные алгоритмы и программные средства, предназначенные для расчета показателей качества обслуживания в беспроводных сетях. На отдельные модули программных средств получены свидетельства о государственной регистрации. Кроме того, предложенные в четвертой и пятой главах методы анализа и расчета механизмов повышения показателей непрерывности сессий передачи данных и технологий выгрузки трафика в сценариях, близких к реальным, могут быть использованы стандартизирующими организациями и производителями оборудования для выработки рекомендаций по применению этих механизмов в сетях радиодоступа пятого и шестого поколений.

Методология и методы исследования.

Для решения задач, сформулированных в диссертационной работе, применялись методы теории вероятностей, теории случайных процессов, теории массового обслуживания, математической теории телетрафика, стохастической геометрии и имитационного моделирования.

Положения, выносимые на защиту.

1. Разработанный метод построения функции распределения ступенчатого вида, описывающей случайные требования сессий пользователей к объему ресурса сети мобильной связи позволяет моделировать процесс обслуживания сессий на БС с помощью РеСМО с дискретными требованиями к ресурсу (глава 1).
2. Разработанный алгоритм вычисления стационарного распределения РеСМО с пуассоновским входящим потоком и дискретным распределением требований к ресурсу позволяет вычислять вероятность блокировки заявки, средний объем, дисперсию занятого ресурса и распределение требований потерянных заявок в процессе вычисления нормирующей константы (глава 2).
3. Для класса моделей РеСМО с пуассоновским входящим потоком и интенсивностями поступления и обслуживания, зависящими от числа

заявок в системе, доказано свойство нечувствительности стационарного распределения к виду функции распределения времени обслуживания (глава 2).

4. Разработанные модели РеСМО с сигналами применимы для оценки показателей эффективности беспроводных сетей с дискретными ресурсными блоками. Потоки сигналов моделируют резкие скачки качества радиоканалов из-за возникновения блокировок пути прямого распространения сигнала в высокочастотной сети радиодоступа (глава 3).
5. Замена РеСМО с сигналами на имитирующую РеСМО без сигналов с дополнительным потоком заявок, интенсивность которого вычисляется итерационно, позволяет приближенно вычислять вероятностные характеристики исходной СМО с сигналами (глава 3).
6. Разработанная модель РеСМО с сигналами и дискретной функцией распределения требований к ресурсу применима к анализу показателей эффективности беспроводной сети пятого поколения «Новое радио», функционирующей в миллиметровом диапазоне частот, с различными механизмами для улучшения показателей непрерывности сессий передачи данных. Модель позволяет вычислять вероятность прерывания обслуживания уже принятых сессий (глава 4).
7. Расчет показателей эффективности обслуживания сессий в сети NR-U, использующей нелицензированные частоты совместно с лицензированными, может проводиться с помощью двух взаимоувязанных моделей. На первом этапе проводится расчет доли трафика, выгружаемого в нелицензируемые частоты, а также функции распределения требований к ресурсам выгружаемых сессий с использованием РеСМО. На втором этапе вычисляется распределение скорости передачи данных в нелицензированном диапазоне (глава 5).

Степень достоверности результатов работы.

Достоверность полученных результатов обеспечена математически корректными доказательствами теорем, утверждений и следствий из них, корректностью разработанных математических моделей, использованием известных фундаментальных результатов и соответствием полученных

теоретических результатов данным вычислительных экспериментов, в том числе с применением методов имитационного моделирования, а также качественным совпадением частных случаев разработанных моделей с известными результатами исследований других авторов.

Апробация результатов работы.

Основные результаты диссертации были апробированы в докладах на всероссийских и международных конференциях: Всероссийская конференция «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» (2015-2023: Москва), International Conference on Next Generation Wired/Wireless Networking NEW2AN (2016, 2018-2020: Санкт-Петербург), International Congress on Ultra Modern Telecommunications ICUMT (2014: Санкт-Петербург, 2015: Брно, Чехия, 2017: Мюнхен, Германия, 2018: Москва, 2019: Дублин, Ирландия), International Conference on Distributed Computer and Communication Networks DCCN (2016-2025: Москва), International Conference on Analytical & Stochastic Modelling Techniques & Applications ASMТА (2016: Кардифф, Великобритания), International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics ICNAAM (2014, 2016: Родос, Греция), European Conference on Modelling and Simulations (2017: Будапешт, Венгрия, 2018: Вильгельмсхафен, Германия, 2019: Казерта, Италия), International Workshop on Simulation IWS (2015: Вена, Австрия), International Conference on Applied Mathematics, Computational Science and Systems Engineering AMCSE (2017: Афины, Греция, 2018: Рим, Италия), International Conference on Information Technologies and Mathematical Modelling ITMM (2015-2016, 2020-2021: Томск, 2017: Казань, 2019: Саратов, 2024: Карши, Узбекистан), международная научная конференция «Конвергентные когнитивно-информационные технологии» (2016-2017: Москва), International Conference on Internet and Distributed Computing Systems IDCS (2019: Неаполь, Италия), International Conference «Modern Network Technologies» (2014, 2022: Москва), International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications PIMRC (2020: Лондон, Великобритания), IEEE 25th International Conference on Communication Technology, ICCT (2024: Ченду, Китай), International Conference on

Computer Science and Artificial Intelligence Applications, CSAIA (2025: Чанша, Китай), а также на научном межвузовском семинаре «Современные телекоммуникации и математическая теория телетрафика» РУДН, МТУСИ, ИППИ РАН, ТГУ, ИПМ РАН (2024, 2026).

Реализация результатов работы.

Научные результаты работы использованы в следующих пяти научно-исследовательских работах (НИР), выполненных под непосредственным руководством автора:

- Построение и анализ математических моделей схем распределения радиоресурсов в беспроводных гетерогенных сетях пятого поколения и разработка методов для анализа их показателей эффективности // грант РФФИ № 16-37-60103 (2016 – 2018).
- Разработка информационной технологии, математического, алгоритмического и программного обеспечения для моделирования передачи трафика в сетях пятого поколения в нелицензируемом диапазоне частот // стипендия совета по грантам Президента РФ № СП-2759.2019.5 (2019-2021).
- Вероятностный анализ эффективности механизмов выгрузки задач интернета вещей и мобильных вычислений в туманно-облачную систему беспроводных сетей 5G // грант РФФИ № 20-07-01052 (2020 – 2022).
- Разработка моделей ресурсных систем массового обслуживания и анализ эффективности совместного использования беспроводных технологий пятого поколения со стандартом 3GPP New Radio // грант РФФИ № 20-71-00124 (2020 – 2022).
- Алгоритмы и модели обеспечения показателей качества обслуживания в беспроводных гетерогенных сетях шестого поколения // грант РФФИ № 22-79-10128 (2022 – 2025).

Научные результаты работы использованы также в НИР по другим грантам РФФИ и РФФИ, в рамках государственного задания Минобрнауки РФ, выполненных при участии автора.

Результаты диссертационной работы легли в основу учебно-методических комплексов для лекционных курсов, в том числе разработанного автором курса «Методы стохастического анализа телекоммуникаций», читаемых студентам первого курса магистратуры по направлениям подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» и 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии», постановок задач для выпускных работ бакалавров и магистров по направлениям подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 02.03.01 «Математика и компьютерные науки» и магистров по специализации «Теория вероятностей и математическая статистика», а также кандидатских диссертаций по специальности 1.2.3 «Теоретическая информатика, кибернетика» на кафедре теории вероятностей и кибербезопасности факультета физико-математических и естественных наук РУДН им. П. Лумумбы.

Публикации.

Основные научные результаты диссертации изложены в 85 опубликованных работах, из них 50 работ опубликованы в изданиях, индексируемых в международных базах индексации и цитирования (МБЦ) Web of Science и Scopus, 8 работ в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в наукометрической базе данных RSCI, 1 работа в рецензируемом научном издании, входящем в перечень ВАК РФ. По теме работы автор также имеет 15 зарегистрированных свидетельств на программу для электронных вычислительных машин, 2 монографии и 3 учебных пособия.

Соответствие паспорту специальности.

Диссертация выполнена в соответствии с паспортом специальности 1.2.3. «Теоретическая информатика, кибернетика» и включает оригинальные результаты в области анализа распределенных многопользовательских систем, разработки информационных процессов в инфокоммуникационных сетях, а также анализа показателей непрерывности обслуживания сеансов связи и обеспечения надежной передачи данных в современных и перспективных беспроводных сетях. Таким образом, диссертационное исследование соответствует пунктам паспорта 11, 12, и 25 указанной специальности:

11. Распределенные многопользовательские системы.

12. Модели информационных процессов и структур.

25. Методы высоконадежной обработки информации и обеспечения помехоустойчивости информационных коммуникаций для целей передачи, хранения и защиты информации.

Личный вклад автора.

Автор лично получил основные результаты диссертации. Автор лично участвовал во всех этапах исследования, выполнил апробацию результатов исследования, разработал сценарии для проведения численных экспериментов. При непосредственном участии автора обработаны результаты численных экспериментов, выполнена их интерпретация, подготовлены основные публикации по работе.

Объем и структура работы.

Текст диссертации включает в себя введение, основную часть из пять глав, заключение и список литературы. Работа изложена на 214 страницах текста, содержит 47 рисунков и 10 таблиц, а также список литературы из 246 наименований.

Краткое содержание работы.

Первая глава диссертации посвящена анализу особенностей построения ресурсных систем массового обслуживания с ресурсом конечного объема. В разделе 1.1 проведен краткий обзор моделей и методов анализа РеСМО, обосновывающих актуальность и новизну исследований.

В разделе 1.2 изложены понятия случайного списка и псевдосписка [210], которые представляют собой два подхода к построению случайного процесса, описывающего поведение РеСМО. Идея построения процесса в виде псевдосписка заключается в том, что процесс отслеживает только длину списка и его объем, т.е. суммарный объем занятого всеми заявками ресурса, вместо списка объемов ресурса, занятых каждой заявкой. Преимуществом такого подхода является значительное уменьшение размерности пространства состояний, что позволяет применять численные методы при невозможности получения аналитических

решений. Для марковизации процесса используется допущение, что объем ресурса, освобождаемый заявкой по завершении обслуживания, может отличаться от объема, занятого ею при поступлении и определяется условной функцией распределения. Показано, что в РеСМО с пуассоновским потоком и экспоненциальным обслуживанием совместное стационарное распределения числа заявок в системе и суммарного объема занятого ресурса случайного списка и соответствующего псевдосписка полностью совпадают.

В разделе 1.3 разработан метод построения функции распределения (ФР) ступенчатого вида, описывающей случайные требования сессий пользователей к объему ресурсов сети, позволяющий сводить задачи расчета показателей эффективности сетей сотовой мобильной связи к расчету вероятностно-временных характеристик РеСМО. Ступенчатый вид ФР обусловлен особенностями сетей радиодоступа четвертого, пятого и последующих поколений, в которых частотно-временной ресурс выделяется ресурсными блоками.

Глава 1 написана на основании публикаций автора [180, 187, 217, 219].

Во **второй главе** представлены результаты исследований простейших РеСМО, в которых возможны только два типа события: поступление и завершение обслуживания заявок. В разделе 2.1 разработан сверточный алгоритм расчета стационарного распределения экспоненциальной РеСМО, преимуществом которого является возможность вычисления вероятностных характеристик в процессе расчета нормировочной константы без необходимости расчета многократных сверток распределения требований к ресурсу.

В разделе 2.2 проведен анализ простейшей экспоненциальной РеСМО с несколькими входящими потоками. Доказано, что анализ вероятностных характеристик может быть проведен с использованием такой же РеСМО, но с одним средневзвешенным потоком. Это позволяет расширить возможности применения сверточного алгоритма из раздела 2.1 на случай РеСМО с несколькими потоками заявок. Кроме того, сверточный алгоритм адаптирован для расчета вероятности потери отдельных типов заявок.

Раздел 2.3 посвящен анализу свойства нечувствительности простейших РеСМО с пуассоновским входящим потоком к виду ФР времени обслуживания. Сначала свойство нечувствительности доказано для РеСМО с постоянными интенсивностями поступления и обслуживания заявок, по аналогии с аналогичной теоремой Б.А. Севастьянова [75] для первой модели Эрланга. Далее показано, что это свойство характерно и для более широкого класса РеСМО с пуассоновским входящим потоком, в которых интенсивности поступления и обслуживания зависят от количества заявок в системе.

В разделе 2.4 проведен анализ РеСМО с марковским (MAP, Markovian Arrival Process) входящим потоком. Показано, что инфинитезимальная матрица соответствующего процесса может быть представлена в блочном трехдиагональном виде. Получены формулы для вероятности потери заявки и среднего объема занятого ресурса.

Глава 2 написана на основании публикаций автора [7, 8, 52, 82, 182, 189, 209, 212, 213, 218, 226, 227].

Третья глава диссертации посвящена методам анализа и расчета РеСМО с сигналами, в которых, в отличие от простейших, появляется третий тип событий – поступление сигналов. Поступление сигналов вызывает изменение требований заявки к ресурсу, что может привести к прерыванию ее обслуживания. В разделе 3.1 подробно описана РеСМО с сигналами, выписана система уравнений равновесия, численное решение которой позволяет вычислять вероятностные характеристики.

В разделе 3.2 разработан метод приближенного анализа РеСМО с сигналами при помощи имитирующей модели без сигналов, но с дополнительным входящим потоком, интенсивность которого вычисляется итерационно. Так как для ресурсных систем без сигналов получены аналитические решения, разработанный метод позволяет использовать эти решения для приближенного расчета вероятностных характеристик, избегая численного решения систем уравнений.

В разделе 3.3. изложена модификация метода приближенного анализа РеСМО с сигналами. Для этого получено аналитическое решение для

стационарного распределения РеСМО без сигналов по цепи Маркова, вложенной по моментам окончания обслуживания. Для расчета вероятности прерывания использовано распределение не по времени, а по вложенной цепи, что позволило снизить относительную погрешность метода, доведя ее до уровня, не превышающего 5% – 10% на множестве исходных данных, характерных для типовых сценариев функционирования сетей радиодоступа.

Глава 3 написана на основании публикаций автора [74, 97, 99, 175, 211, 215, 221, 225].

В **четвертой главе** исследованы прикладные аспекты применения РеСМО к анализу сетей радиодоступа стандарта 5G New Radio (NR), использующих так называемый диапазон миллиметровых длин волн (30 – 300 ГГц). Для соединений в этом диапазоне характерны резкие изменения качества радиоканалов, поэтому анализ процесса обслуживания пользовательских сессий передачи данных удобно проводить при помощи РеСМО с сигналами. В разделе 4.1 изложен полученный в литературе метод моделирования эффектов блокировок пути прямого распространения сигнала в диапазоне миллиметровых длин волн, в том числе способ учета этих эффектов в параметрах РеСМО с сигналами.

В разделе 4.2 проведен анализ эффективности механизма резервирования частотного ресурса для снижения вероятности прерывания обслуживания, вызванного резкими скачками качества радиоканала. В разделе 4.3 проведен анализ другого механизма, мультисвязности, предполагающего поддержание пользовательским устройством активного соединения с несколькими БС, а также совместного использования механизмов резервирования ресурса и мультисвязности. Численный анализ показал, что совместное использование этих механизмов усиливает их преимущества и снижает их негативные эффекты.

В разделе 4.4 проведен анализ эффектов повторных вызовов и адаптации скорости передачи данных при снижении пропускной способности на показатели эффективности функционирования сети радиодоступа 5G NR. Выписана система уравнений равновесия и предложен итерационный метод расчета вероятностных характеристик.

Глава 4 написана на основании публикаций автора [4, 81, 98, 115, 117, 118, 194, 216, 220, 222, 224].

В **пятой главе** проведен анализ показателей эффективности гетерогенных сетей доступа, в который используются БС с несколькими технологиями радиодоступа.

В разделе 5.1 исследована сеть радиодоступа шестого поколения с БС, использующими еще более высокий терагерцевый диапазон частот для обеспечения высокой пропускной способности, а также с БС, использующими диапазон миллиметровых длин волн, необходимых для увеличения зоны покрытия и снижения вероятности прерывания обслуживания пользовательских сессий передачи данных.

В разделе 5.2 с использованием аппарата РеСМО проведен анализ сети 5G NR-U (NR-Unlicensed), в которой для увеличения пропускной способности используется нелицензированный диапазон частот наряду с лицензированным. Получены распределение добавочной скорости, которую может получить БС за счет использования нелицензированного диапазона, а также вероятность того, что скорость передачи данных в рамках сессии снизится ниже необходимого порога.

Глава 5 написана на основании публикаций автора [23, 116, 126–129, 144, 161, 171, 223].

Глава 1. Модели ресурсных систем массового обслуживания для анализа беспроводных сетей

Ключевыми особенностями сетей радиодоступа с точки зрения анализа их показателей эффективности являются ограниченность доступного частотно-временного ресурса, а также неоднородность требований сессий к нему. Неоднородность требований к ресурсу возникает вследствие того, что параметры качества канала (отношение сигнала к шуму, отношение сигнала к шуму и интерференции) могут существенно различаться у разных сессий в зависимости от расстояния до базовой станции (БС), наличия препятствий между устройством пользователя и БС и другие. Фундаментальная связь между отношением сигнала к шуму (ОСШ) и теоретической верхней границей скорости передачи данных отражена в формуле Шеннона.

Для учета этих особенностей беспроводных сетей ранее разрабатывались модели с детерминированными требованиями к ресурсам. Из них стоит отметить работы F.P. Kelly [152], K.W. Ross [207], а также Г.П. Башарина и К.Е. Самуйлова [112]. Предложенные в дальнейшем ресурсные системы массового обслуживания (РеСМО), рассматривающие случайные требования к ресурсу, представляются одним из наиболее точных инструментов моделирования беспроводных сетей с централизованным распределением частотно-временных ресурсов.

Данная глава организована следующим образом. В разделе 1.1 сделан краткий обзор основных результатов в области анализа ресурсных систем. В разделе 1.2 введены понятия случайного списка и псевдосписка как методов построения случайного процесса, описывающего поведение РеСМО. В разделе 1.3 описан полученный автором метод построения функции распределения ступенчатого вида, описывающей случайные требования сессий пользователей к объему ресурсов сети. Метод позволяет сводить задачи расчета показателей эффективности сетей мобильной связи к расчету вероятностных характеристик РеСМО.

1.1. Обзор систем массового обслуживания с ограниченным ресурсом

Общий вид РеСМО без ожидания представлен на рис. 1.1. Система содержит $N \leq \infty$ приборов и M типов ресурсов, объем которых задается вектором $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_M)$. В систему поступают L потоков заявок с функциями распределения (ФР) интервалов между поступлениями $A_l(x)$, $l = 1, 2, \dots, L$. Векторы объемов ресурсов, требуемых для обслуживания заявок типа l , и длительности их обслуживания являются случайными величинами с совместной ФР $H_l(t, \mathbf{x})$. В случае независимости длительности обслуживания от объема требуемых ресурсов получаем

$$H_l(t, \mathbf{x}) = B_l(t)F_l(\mathbf{x}). \quad (1.1)$$

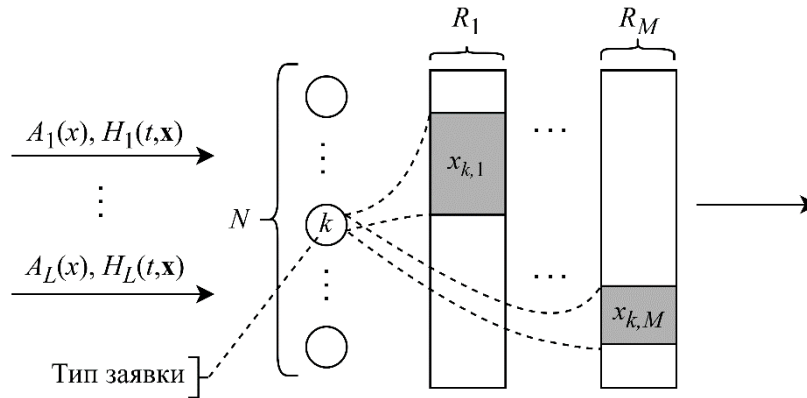


Рис. 1.1. Схема РеСМО общего вида.

Рассмотрим подробнее функционирование системы.

1. Если при поступлении заявки объем требуемого ресурса хотя бы одного типа превышает объем свободного ресурса этого типа, то заявка теряется.
2. Если свободного объема ресурса всех типов достаточно для удовлетворения требований заявки, то она принимается в систему, а суммарный занятый объем ресурса увеличивается на величину ресурса, выделенного заявке.
3. В момент окончания обслуживания заявка освобождает занятый ранее объем ресурса всех типов.

Подобные СМО, в которых для обслуживания заявок требуется некоторый

случайный объем ресурса, были впервые рассмотрены в работах [29, 66] еще в 1970-х годах. В частности, в [66] проведен анализ бесконечно линейной ресурсной СМО с одним типом ресурса объема R , пуассоновским входящим потоком интенсивности λ и экспоненциальным обслуживанием с интенсивностью μ . В результате решения системы уравнений равновесия (СУР) была получена следующая формула для стационарных вероятностей того, что в системе находится k заявок.

$$P_n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k F^{(k)}(R)}{\mu^k k!} \right)^{-1} \frac{\lambda^n F^{(n)}(R)}{\mu^n n!}, \quad (1.2)$$

где $F^{(n)}(x)$ - n -кратная свертка ФР $F(x)$, $n \geq 2$, причем $F^{(1)}(x) = F(x)$, а свертка нулевой кратности $F^{(0)}(x)$ представляет собой функцию Хевисайда. Заметим, что полученная в работе СУР и распределение числа заявок представляет собой, по сути, обобщение модели Эрланга.

Потеря заявки в описанной системе возможна только из-за нехватки свободного ресурса, поэтому вероятность потери заявки имеет вид

$$\pi_B = 1 - \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k F^{(k)}(R)}{\mu^k k!} \right)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n F^{(n+1)}(R)}{\mu^n n!}. \quad (1.3)$$

Для более подробного ознакомления с особенностями построения РеСМО и анализа их вероятностных характеристик рассмотрим функционирование одной РеСМО на примере статьи [56]. Как и в предыдущей работе, на систему поступает пуассоновский поток интенсивностью λ , времена обслуживания являются независимыми случайными величинами, распределенными согласно экспоненциальному закону с параметром μ . Кроме того, в системе имеется N приборов и M типов ресурсов суммарным объемом $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_M)$. Случайные вектора требований заявок к ресурсам независимы друг от друга, независимы от процессов поступления и обслуживания и одинаково распределены в соответствии с ФР $F(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_M)$. Поведение системы описывается полумарковским процессом $X(t) = (\xi(t), \Gamma(t))$, где $\xi(t)$ – число заявок в момент времени t , а

$\Gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_{\xi(t)}(t))$ – набор векторов занимаемых заявками ресурсов, причем $\gamma_1(t) + \gamma_2(t) + \dots + \gamma_{\xi(t)}(t) \leq \mathbf{R}$. Будем считать, что при поступлении заявок они перенумеровываются в порядке убывания остаточного времени обслуживания. Таким образом, заканчивает обслуживание всегда последняя в списке заявка. Рассмотрим стационарные вероятности системы:

$$p_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = 0\},$$

$$P_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = n, \gamma_1(t) \leq \mathbf{x}_1, \gamma_2(t) \leq \mathbf{x}_2, \dots, \gamma_n(t) \leq \mathbf{x}_n\}.$$

В этом случае СУР принимает вид

$$\lambda F(\mathbf{R}) p_0 = \mu P_1(\mathbf{R}); \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} & \lambda \int_{\mathbf{0} \leq \mathbf{y}_i \leq \mathbf{x}_i, i=1, \dots, n} F(\mathbf{R} - \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 - \dots - \mathbf{y}_n) P_n(d\mathbf{y}_1, d\mathbf{y}_2, \dots, d\mathbf{y}_n) + n\mu P_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \\ & = \frac{\lambda}{n} \sum_{i=1}^n P_{n-1}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_n) F(\mathbf{x}_i) + (n+1)\mu \int_{\substack{\mathbf{0} \leq \mathbf{y}_i \leq \mathbf{x}_i, i=1, \dots, n \\ \mathbf{0} \leq \mathbf{y}_{n+1} \leq \mathbf{R} - \mathbf{y}_1 - \dots - \mathbf{y}_n}} P_{n+1}(d\mathbf{y}_1, d\mathbf{y}_2, \dots, d\mathbf{y}_{n+1}), \\ & \mathbf{x}_i \geq \mathbf{0}, i=1, 2, \dots, n, \quad \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_n \leq \mathbf{R}, \quad 1 \leq n \leq N-1; \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} N\mu P_N(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) &= \frac{\lambda}{N} \sum_{i=1}^N P_{N-1}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_N) F(\mathbf{x}_i), \\ & \mathbf{x}_i \geq \mathbf{0}, i=1, 2, \dots, N, \quad \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_N \leq \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что решением системы (1.4) – (1.6) являются следующие выражения:

$$p_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^N \frac{\rho^n}{n!} F^{(n)}(\mathbf{R}) \right)^{-1}, \quad (1.7)$$

$$P_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = p_0 \frac{\rho^n}{n!} F(\mathbf{x}_1) \dots F(\mathbf{x}_n), \quad \mathbf{x}_i \geq \mathbf{0}, 1 \leq i \leq n, \quad \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \leq \mathbf{R}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (1.8)$$

где $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Стоит отметить, что распределение (1.7) – (1.8) дает крайне детализированную информацию о состоянии системы. При использовании РеСМО

для анализа показателей эффективности беспроводных сетей, как правило, информация об объеме занятого ресурса каждой заявкой является излишней, поэтому в большинстве приложений имеет смысл рассматривать суммарный объем ресурса, занятого всеми заявками, вместо набора векторов $\Gamma(t)$. Пусть

$\delta(t) = \sum_{i=1}^{\xi(t)} \gamma_i(t)$, тогда предельное распределение $Q_n(\mathbf{x})$ принимает вид

$$Q_n(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = n, \delta(t) \leq \mathbf{x}\} = p_0 \frac{\rho^n}{n!} F^{(n)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{R}, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (1.9)$$

Важным для применений в области анализа систем мобильной связи частным случаем является РеСМО с дискретным распределением требований к ресурсу. В этом случае распределение требований удобнее задавать рядом $\{f_j\}$, $\mathbf{0} \leq \mathbf{j} \leq \mathbf{R}$, где f_j - вероятность того, что заявке для обслуживания требуется вектор ресурса \mathbf{j} . Стационарное распределение [7] в этом случае принимает вид

$$q_n(\mathbf{r}) = P\{\xi(t) = n, \delta(t) = \mathbf{r}\} = p_0 \frac{\rho^n}{n!} f_{\mathbf{r}}^{(n)}, \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{R}, \quad (1.10)$$

$$p_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^N \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{R}} \frac{\rho^n}{n!} f_{\mathbf{r}}^{(n)} \right)^{-1}. \quad (1.11)$$

Здесь ряд $\{f_{\mathbf{r}}^{(n)}\}$, $\mathbf{0} \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{R}$ представляет собой n -кратную свертку исходного распределения и имеет смысл вероятности того, что n заявок совместно требуют суммарно вектор \mathbf{r} ресурса.

Анализ моделей РеСМО с несколькими пуассоновскими потоками заявок был проведен в работах [53, 182], в том числе с участием автора. Пусть теперь в систему поступают L пуассоновских потоков заявок с интенсивностями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L$, а время обслуживания заявок типа l имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_l , $1 \leq l \leq L$. Объемы требований заявок типа l являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с ФР $F_l(\mathbf{x})$. В этом случае поведение системы описывается полумарковским процессом $X(t) = (\xi(t), \theta(t), \Gamma(t))$, где $\theta(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_{\xi(t)}(t))$ – вектор типов заявок,

находящихся на обслуживании. Определим стационарное распределение следующим образом:

$$p_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = 0\},$$

$$P_{l_1, \dots, l_n}^n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = k, \theta_1(t) = l_1, \dots, \theta_n(t) = l_n, \gamma_1(t) \leq \mathbf{x}_1, \dots, \gamma_n(t) \leq \mathbf{x}_n\}.$$

Решая соответствующую СУР, получим

$$p_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^N \sum_{n_1 + \dots + n_L = n} \frac{\rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} \dots \rho_L^{n_L}}{n_1! n_2! \dots n_L!} (F_1^{(n_1)} * F_2^{(n_2)} * \dots * F_L^{(n_L)}) (\mathbf{R}) \right)^{-1}, \quad (1.12)$$

$$P_{l_1, \dots, l_n}^n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = p_0 F_{l_1}(\mathbf{x}_1) \dots F_{l_n}(\mathbf{x}_n) \prod_{k=1}^n \frac{\lambda_{l_k}}{\sum_{i=1}^L \mu_i}, \quad 1 \leq l_1, l_2, \dots, l_n \leq L,$$

$$\mathbf{x}_i \geq \mathbf{0}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \leq \mathbf{R}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (1.13)$$

где символ * означает свертку ФР, а $\rho_l = \lambda_l / \mu_l$, $1 \leq l \leq L$.

Кроме того, в [53] было показано для РеСМО с одним типом ресурса (впрочем, данный результат легко обобщается на случай M типов), что стационарные вероятности того, что в системе n_l заявок типа l , $1 \leq l \leq L$, которые суммарно занимают не более \mathbf{x}_l ресурсов, имеют мультипликативный вид:

$$P_{n_1, \dots, n_L}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_L) = p_0 \prod_{l=1}^L \frac{\rho_l^{n_l}}{n_l!} F_l^{(n_l)}(\mathbf{x}_l), \quad \sum_{l=1}^L n_l \leq N, \quad \sum_{l=1}^L \mathbf{x}_l \leq \mathbf{R}. \quad (1.14)$$

Мультипликативность стационарного распределения РеСМО сохраняется и при наличии отрицательных заявок, но при соблюдении некоторых условий. Так, в статье [184] проведен анализ РеСМО, в которой объем ресурса, запрашиваемого заявкой, может быть не только положительным, но и отрицательным. Заявка с отрицательным требованием увеличивает объем ресурса, доступного для других заявок с положительными требованиями, на время пребывания в системе. Для сохранения мультипликативности стационарного распределения необходимо дополнительно потребовать, чтобы заявки с отрицательным требованием к ресурсу не могли покинуть систему в ситуации, когда объем ресурса, добавленный ими в систему, используется заявками с положительными требованиями.

В той же работе [184] рассматривается экспоненциальная РеСМО, интенсивности поступления и обслуживания в которой зависят от состояния системы. В систему поступают L пуассоновских потоков заявок, интенсивности которых зависят от числа заявок соответствующего типа в системе. Пусть $\lambda_l(n_l)$ и $\mu_l(n_l)$ – интенсивности поступления и обслуживания заявок типа l при условии, что в системе n_l заявок данного типа. Поведение системы описывается, как и прежде, процессом $X(t) = (\xi(t), \theta(t), \Gamma(t))$, а стационарное распределение суммарного числа заявок в системе и объема занятого ими ресурса имеет вид

$$p_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^N \sum_{n_1+\dots+n_L=n} (F_1^{(n_1)} * F_2^{(n_2)} * \dots * F_L^{(n_L)}) (\mathbf{R}) \prod_{l=1}^L \prod_{j=1}^{n_l} \frac{\lambda_l(j-1)}{\mu_l(j)} \right)^{-1}, \quad (1.15)$$

$$P_{n_1, \dots, n_L}(\mathbf{x}) = p_0 \Phi_{n_1, \dots, n_L}(\mathbf{x}) \prod_{l=1}^L \prod_{j=1}^{n_l} \frac{\lambda_l(j-1)}{\mu_l(j)}, \quad n_1 + \dots + n_L \leq N, \quad \mathbf{x} \leq \mathbf{R}. \quad (1.16)$$

В статье [185] проведен анализ ресурсной системы в случайной среде, задаваемой двумерным марковским процессом, в которой при получении запроса на ресурсы из среды процесс обслуживания информирует среду о том, был ли запрос принят. При поступлении заявки предварительное состояние системы обслуживания выбирается случайным образом из набора, который содержит ее пространство состояний, но может также включать недостижимые состояния. Если выбранное состояние достижимо, то изменение состояния принимается и происходит переход. В противном случае состояние системы обслуживания не меняется. Способ изменения состояния окружающей среды зависит от того, изменилось ли состояние системы обслуживания. Были выведены необходимые и достаточные условия для того, чтобы стационарное распределение соответствующего скачкообразного марковского процесса имело мультипликативный вид. В этом случае стационарное распределение состояния окружающей среды будет таким же, как если бы вероятность принятия допустимого состояния зависела только от типа перехода, а не от состояния процесса обслуживания. Более того, стационарное распределение системы

обслуживания такое же, как если бы процесс поступления запросов являлся пуассоновским с интенсивностями, зависящими от типа перехода.

В ряде приложений необходимо рассматривать системы, в которых время обслуживания заявки зависит от объема требований к ресурсу. В этом случае задается совместная ФР $H(t, x)$ времени обслуживания и объема требуемого ресурса, причем $H(\infty, x) = F(x)$, $H(t, \infty) = B(x)$. Так, в статье [87] рассматривается система типа $M/G/1/m$, $m \leq \infty$ с дисциплиной разделения процессора (Egalitarian Processor Sharing, EPS) и одним типом ресурса. Для данной системы определены стационарные вероятности числа заявок в системе и вероятность потери заявки.

Более общая модель типа $M_L|G|1|m$ с разделением процессора, ограничением на общий объем ресурса $R < \infty$ и L пуассоновскими потоками заявок предложена в работе [236]. Заявки каждого класса характеризуются числом приборов n_l , $l = 1, \dots, L$, необходимым для их обслуживания, а также совместной ФР времени обслуживания и объема требований к ресурсу. Для этой РеСМО были получены стационарные вероятности числа заявок в системе и вероятности потери заявок каждого типа.

Случай многолинейной РеСМО с рекуррентным обслуживанием без разделения процессора рассмотрен в работе [235]. В отличие от предыдущей работы, каждая заявка характеризуется уже тремя случайными величинами: помимо времени обслуживания и объема требуемого ресурса еще и случайное число требуемых приборов. Рассматривается система с одним типом ресурса и несколькими классами обслуживания, для каждого из которых задана своя совместная ФР времени обслуживания и требуемого объема ресурса. Для данной системы, как и предыдущей, получены стационарное распределение числа заявок в системе и вероятности потери заявок каждого класса.

В работе [55] проведен анализ многолинейной РеСМО с зависимыми временем обслуживания и требованием к ресурсу и с несколькими типами ресурса. Рассматривается система с пуассоновским входящим потоком интенсивностью λ , N приборами и M типами ресурсов. Стационарное распределение описывающего

функционирование РеСМО случайного процесса $X(t) = (\xi(t), \delta(t))$, где $\xi(t)$ – число заявок в системе в момент t , а $\delta(t)$ – вектор суммарного объема занятого ресурса, имеет вид

$$p_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = 0\} = \left(1 + \sum_{n=1}^N \frac{\rho^n}{n!} G^{(n)}(\mathbf{R})\right)^{-1}; \quad (1.17)$$

$$Q_n(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = n, \delta(t) \leq \mathbf{x}\} = p_0 \frac{\rho^n}{n!} G^{(n)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{R}, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (1.18)$$

Здесь $\rho = \lambda b$, где b – среднее время обслуживания, $b = \int_0^\infty td(B(t))$, а $G^{(n)}(\mathbf{x})$ представляет собой n -кратную свертку ФР $G(\mathbf{x})$:

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{b} \int_0^\infty tH(dt, \mathbf{x}). \quad (1.19)$$

Были также проведены исследования РеСМО, функционирующих в дискретном времени. Так, в статье [28] исследуется СМО типа $Geo_k | G | 1 | m$ с одним прибором, геометрическим второго рода входящим потоком, временем обслуживания, зависящим от объема требований к ресурсу, одним типом ресурса и инверсионным порядком обслуживания без прерывания. Получены соотношения для вычисления стационарных вероятностей и распределения времени пребывания заявки в системе.

Аналогичная РеСМО бесконечной емкости типа $Geo_k | G | 1 | \infty$ с дискретным распределением объема требований была рассмотрена в работе [63]. Дискретное распределение требований позволило получить более простые соотношения для вычисления основных вероятностно-временных характеристик.

Ряд исследователей занимались анализом РеСМО с неограниченным объемом ресурса. В работах [40, 41, 164] исследованы однофазные и двухфазные РеСМО с непуассоновскими потоками, неэкспоненциальным обслуживанием и неограниченным объемом ресурса методом асимптотического анализа. Асимптотический анализ в условиях роста средней интенсивности входящего потока позволил получить асимптотические выражения для стационарных вероятностей числа заявок в системе и суммарного занятого ресурса. Кроме того,

по результатам анализа получен вывод о том, что асимптотическое распределение суммарного объема занятого ресурса является гауссовым.

Частным случаем РеСМО можно считать системы, в которых отсутствует ресурс, но заявкам для обслуживания требуется случайное число приборов. В этом случае ресурсом можно считать сами приборы, а случайными требованиями к ресурсу – случайное число приборов, необходимых для обслуживания заявки. Так, в работе [208] проведён анализ такой системы с бесконечным числом приборов и доказана теорема о критерии стабильности обобщенного процесса рождения гибели (Quasi Birth-Death process, QBD), описывающего поведение системы.

В работе [233] исследованы РеСМО с несколькими типами ресурсов бесконечного объема и временем обслуживания, зависящим от объема требований. В этом случае исследователей интересовало распределение вектора суммарных требований к ресурсу каждого типа. В результате были получены преобразования Лапласа-Стилтьеса (ПЛС) для РеСМО типа $M|G|N|0$, $M|G|1|\infty$ и $M|G|1|\infty - EPS$ с разделением процессора.

Для РеСМО без ограничения на суммарный объем требований были получены некоторые результаты в случае ненадежного прибора. Так, в работе [234] исследована однолинейная РеСМО типа $M|G|1|\infty$ временем обслуживания, зависящим от объема требований и ненадежным прибором. Получено распределение суммарного объема занятого ресурса в терминах ПЛС.

1.2. Применение случайных списков и псевдосписков к анализу ресурсных систем

Удобным инструментом изучения РеСМО являются предложенный в [210] новый тип случайных процессов, названных случайными списками.

Пусть S - некоторое измеримое множество. Элементы множества S^k будем называть списками длины k , а множество всех списков с элементами из S обозначим $\bar{S} = \bigcup_{k=0}^L S^k$, где $L \leq \infty$ – максимальная длина списков. Единственным

элементом множества \mathcal{S}^0 является число 0, обозначающее пустой список. Номер элемента списка – это номер его позиции в списке. Длину списка $\xi \in \bar{\mathcal{S}}$ будем обозначать $|\xi|$.

Результатом операции удаления i -го элемента списка $\xi = (s_1, s_2, \dots, s_k)$ является список $\text{Del}_i(\xi) = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_k)$, $1 \leq i \leq k$. Результатом операции вставки в ξ j -го элемента $u \in \mathcal{S}$ является список $\text{Ins}_i(\xi, u) = (s_1, \dots, s_{i-1}, u, s_i, \dots, s_k)$, $1 \leq i \leq k+1$. В результате операции замены элемента $\text{Sub}_i(\xi, u)$ i -й элемент списка ξ заменяется на элемент $u \in \mathcal{S}$, $1 \leq i \leq k$. Таким образом, элемент добавляется в список либо в результате вставки, либо в результате замены им другого элемента. Элемент покидает список либо в результате удаления, либо после замены его другим элементом.

Пусть $\xi(t) \in \bar{\mathcal{S}}$, $t \geq 0$, – скачкообразный случайный процесс со скачками в моменты $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$. Положим $\tau_0 = 0$ и $\xi_n = \xi(\tau_n)$, $n \geq 0$. Будем называть процесс $\xi(t)$ случайным списком, если для любого $n \geq 1$ его значения до и после момента τ_n связаны одним из следующих равенств:

1. $\xi_n = \text{Del}_j(\xi_{n-1})$ для некоторого индекса j ;
2. $\xi_n = \text{Ins}_i(\xi_{n-1}, u)$ для некоторого элемента $u \in \mathcal{S}$ и некоторого индекса i , $1 \leq i \leq |\xi_n|$;
3. $\xi_n = \text{Sub}_i(\xi_{n-1}, u)$ для некоторого элемента $u \in \mathcal{S}$ и некоторого индекса i , $1 \leq i \leq |\xi_n|$.

Проще говоря, процесс $\xi(t) \in \bar{\mathcal{S}}$ является случайным списком, если каждое его следующее состояние получается из предыдущего либо вставкой некоторого элемента, либо удалением некоторого элемента, либо заменой одного элемента другим.

Далее мы будем рассматривать только списки, элементами которых являются M -мерные действительные векторы. Замкнутое борелевское подмножество $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^M$, содержащее нулевой вектор, будем называть множеством ограничений. Так как $\mathbf{0} \in \mathcal{C}$, то для любого $1 \leq i \leq M$, либо $\sup_{x \in \mathcal{C}} x_i = \infty$, либо $\sup_{x \in \mathcal{C}} x_i$ конечен и

неотрицателен. Аналогично, либо $\inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} x_i = -\infty$, либо $\inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} x_i$ конечен и неположителен. Неотрицательный вектор \mathbf{c}_{\max} с координатами $\sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} x_i$ назовём верхней границей множества \mathcal{C} , а неположительный вектор \mathbf{c}_{\min} с координатами $\inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} x_i$ его нижней границей. При этом допускаем, что некоторые координаты вектора \mathbf{c}_{\max} могут быть равны ∞ , а некоторые координаты вектора \mathbf{c}_{\min} могут быть равны $-\infty$. Очевидно, $\mathbf{c}_{\min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{c}_{\max}$ для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$.

Простыми примерами множеств ограничений являются множества $\mathcal{C}_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^M \mid \mathbf{x} \leq \mathbf{c}\}$ и $\mathcal{C}_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^M \mid \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{c}\}$, где $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^M$ – некоторый неотрицательный вектор. Для первого множества $\mathbf{c}_{\min} = (-\infty, -\infty, \dots, -\infty)$, а для второго $\mathbf{c}_{\min} = \mathbf{0}$. Для обоих множеств $\mathbf{c}_{\max} = \mathbf{c}$.

Пусть $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^M$ – некоторое множество ограничений с верхней границей \mathbf{c} . Случайный список $\xi(t) = (\zeta_1(t), \dots, \zeta_{n(t)}(t))$ векторов длины M назовем списком с множеством ограничений \mathcal{C} , если в любой момент времени t выполняется неравенство $\zeta_1(t) + \dots + \zeta_{n(t)}(t) \in \mathcal{C}$. Элементы такого списка $\zeta_k(t) = (\zeta_{1,k}(t), \zeta_{2,k}(t), \dots, \zeta_{M,k}(t))$ назовём объёмами занятых ресурсов. Суммарные объёмы занятых ресурсов задаются вектором $\sigma(t) = \zeta_1(t) + \dots + \zeta_{n(t)}(t)$, который будем называть объёмом списка. Разница $\mathbf{c} - \sigma(t)$ есть вектор объёмов доступных ресурсов. Если в некоторый момент времени t список пуст, то $\sigma(t) = \mathbf{0}$ и вектор объёмов доступных ресурсов совпадает с вектором \mathbf{c} . Это можно принять за определение вектора \mathbf{c} сказав, что \mathbf{c} – это вектор объёмов ресурсов доступных при пустом списке. Множество \mathcal{S} элементов списка является подмножеством множества ограничений \mathcal{C} .

Поток требований ресурсов – это последовательность (a_k, \mathbf{r}_k) , $k = 1, 2, \dots$, в которой a_k – момент поступления требования, и $\mathbf{r}_k \in \mathbb{R}^M$ – вектор требуемых объёмов ресурсов, или коротко, требование. Момент a_k поступления требования –

это момент времени, на который запланировано либо включение вектора \mathbf{r}_k в список, либо замена этим вектором некоторого элемента списка.

Поступающие требования можно разбить на три класса. Первый класс образуют требования с неотрицательными векторами \mathbf{r}_k , представляющие исследовательский интерес и которые будем называть основными. Требования двух других классов могут отсутствовать. Они предназначены для моделирования динамически изменяемых объёмов ресурсов доступных основным требованиям. Один из этих вспомогательных классов образуют требования с неотрицательными векторами \mathbf{r}_k , которые попав в список снижают объёмы ресурсов доступных основным требованиям. Другой вспомогательный класс образуют требования, у которых одна или несколько компонент вектора \mathbf{r}_k отрицательны. Занимая отрицательный объём соответствующего ресурса такие требования увеличивают объём этого ресурса доступный основным требованиям.

Если выполнение какой-нибудь операции может привести к нарушению условия $\zeta_1(t) + \dots + \zeta_{n(t)}(t) \in \mathcal{C}$, то она отменяется и список остаётся неизменным. Если запланированная на момент поступления a_k требования \mathbf{r}_k операция выполнена быть не может, будем говорить, что поступившее требование потеряно. Время пребывания вектора \mathbf{r}_k в списке обозначим w_k , а в случае потери требования будем считать $w_k = 0$. Произведение $w_k \mathbf{r}_k$ будем называть объёмом использования требования \mathbf{r}_k .

1.2.1. Формулы Литтла

Пусть для каждого $k \geq 1$ задана функция $f_k(t)$, $t \geq 0$, равная нулю вне конечного интервала $[a_k, a_k + w_k]$, и такая, что

$$\int_0^{\infty} |f_k(t)| dt < \infty, \quad A(t) = \sup\{k \mid a_k \leq t\} < \infty, \quad t \geq 0.$$

Обозначим,

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{t}, \quad g_k = \int_0^{\infty} f_k(t) dt, \quad k \geq 1, \quad g = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g_k,$$

$$h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t), \quad t \geq 0, \quad h = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(t) dt.$$

Теорема 1.1. (Обобщённая формула Литтла) [168]. Если существуют конечные пределы λ и g и $w_k / a_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то предел h также существует и

$$h = \lambda g. \quad (1.20)$$

Рассмотрим два следствия из этой теоремы применительно к случайным спискам. Обозначим

$$\delta_k(t) = \begin{cases} 1, & a_k \leq t < a_k + w_k, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если применить теорему 1.1 к функциям $f_k(t) = \delta_k(t)$, то получим классический вариант формулы Литтла:

$$n = \lambda w_0, \quad (1.21)$$

где n – средняя длина списка, λ – интенсивность поступающего потока требований и w_0 – среднее время пребывания вектора \mathbf{r}_k в списке.

Кроме классической формулы Литтла также справедлив её другой вариант, характерный для РеСМО. Если применить Теорему 1.1 к компонентам векторов $\mathbf{f}_k(t) = \delta_k(t)\mathbf{r}_k$, то получим

$$\mathbf{h} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{f}_k(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k(t) \mathbf{r}_k dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \boldsymbol{\sigma}(t) dt = \boldsymbol{\sigma},$$

$$\mathbf{g} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_0^{\infty} \mathbf{f}_k(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_0^{\infty} \delta_k(t) \mathbf{r}_k dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k \mathbf{r}_k = \mathbf{u}_0,$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – средний объём списка и \mathbf{u}_0 – средний объём использования требований.

Таким образом формула Литтла (1.20) для среднего объёма списка приобретает вид

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \mathbf{u}_0. \quad (1.22)$$

Заметим, что в формуле (1.21) w_0 есть среднее время пребывания в списке векторов \mathbf{r}_k , учитывая и потерянные требования, время пребывания которых в

списке равно нулю. Обозначим через π_B вероятность потери требования, и через w среднее время пребывания элементов в списке. Тогда для w_0 в формуле (1.21) справедливо выражение $w_0 = (1 - \pi_B)w$. Аналогично, средний объём использования требований \mathbf{u}_0 в формуле (1.20) можно представить как $\mathbf{u}_0 = (1 - \pi_B)\mathbf{u}$, где \mathbf{u} есть средний объём использования элементов списка. Таким образом формулы Литтла для стационарных характеристик списков приобретают вид

$$\pi = \lambda(1 - \pi_B)w, \quad \sigma = \lambda(1 - \pi_B)\mathbf{u}, \quad (1.23)$$

Из этих равенств вытекает следующее соотношение

$$\pi \mathbf{u} = w \sigma. \quad (1.24)$$

1.2.2. Функции распределения элементов списка

Предположим, что вставляемые в список $\xi(t)$ векторы \mathbf{r}_k независимы и одинаково распределены с ФР $F(\mathbf{x})$. Функцию распределения $F^{(n)}(\mathbf{x})$ суммы $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \dots + \mathbf{r}_n$, называемую n -кратной свёрткой ФР $F(\mathbf{x})$, можно вычислить с помощью рекуррентной формулы

$$F^{(1)}(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}), \quad F^{(n)}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M} F^{(n-1)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})F(d\mathbf{y}), \quad n > 1.$$

Если ФР $F(\mathbf{x})$ имеет плотность $f(\mathbf{x})$, то ФР $F^{(n)}(\mathbf{x})$ также имеют плотности $f^{(n)}(\mathbf{x})$ связанные равенствами

$$f^{(1)}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad f^{(n)}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M} f^{(n-1)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})f(\mathbf{y})d\mathbf{y}, \quad n > 1.$$

Определим ФР элементов списка $F_n(\mathbf{x} | \mathbf{y})$ равенством

$$F_n(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \mathbf{P}\{\mathbf{r}_n \leq \mathbf{x} | \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \dots + \mathbf{r}_n = \mathbf{y}\}, \quad n \geq 1. \quad (1.25)$$

Функция $F_1(\mathbf{x} | \mathbf{y})$ есть ФР постоянного вектора равного \mathbf{y} , а при $k \geq 2$ неравенство $\mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{r}_{k-1} \leq \mathbf{x}$ эквивалентно неравенству $\mathbf{r}_k \geq \mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{r}_k - \mathbf{x}$. Отсюда вытекает, что функция $F_k(\mathbf{x} | \mathbf{y})$ является решением следующего уравнения, левая и правая части которого равны вероятности $\mathbf{P}\{\mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{r}_{k-1} \leq \mathbf{x}, \mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{r}_k \leq \mathbf{y}\}$:

$$\int_{\mathbf{z} \leq \mathbf{y}} \int_{\mathbf{u} \geq \mathbf{z} - \mathbf{x}} F_k(d\mathbf{u} | \mathbf{z})F^{(k)}(d\mathbf{z}) = \int_{\mathbf{z} \leq \mathbf{x}} F(\mathbf{y} - \mathbf{z})F^{(k-1)}(d\mathbf{z}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^M. \quad (1.26)$$

Если ФР $F(\mathbf{x})$ имеет плотность $f(\mathbf{x})$, то для тех векторов \mathbf{y} , для которых $f^{(k)}(\mathbf{y}) \neq 0$, ФР $F_k(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ имеет плотность

$$f_k(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) \frac{f^{(k-1)}(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{f^{(k)}(\mathbf{y})}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^M. \quad (1.27)$$

Так же легко находятся ФР $F_n(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ в случае арифметических ФР требований к ресурсу. Пусть векторы \mathbf{r}_j с положительной вероятностью могут принимать лишь значения вида $\mathbf{D}\mathbf{k} = (k_1\Delta_1, k_2\Delta_2, \dots, k_M\Delta_M)$, где $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_M)$ – целочисленный вектор и \mathbf{D} – диагональная матрица с элементами $\Delta_i > 0$ на диагонали. Обозначим $p(\mathbf{i}) = \mathbf{P}\{\mathbf{r}_j = \mathbf{D}\mathbf{i}\}$ и

$$p^{(k)}(\mathbf{j}) = \mathbf{P}\{\mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{r}_k = \mathbf{D}\mathbf{j}\} = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^M} p^{(k-1)}(\mathbf{j} - \mathbf{i})p(\mathbf{i}), \quad \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^M.$$

Тогда, если $p^{(k)}(\mathbf{j}) > 0$, то вероятности $p_k(\mathbf{i}|\mathbf{j}) = \mathbf{P}\{\mathbf{r}_k = \mathbf{D}\mathbf{i} | \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \dots + \mathbf{r}_k = \mathbf{D}\mathbf{j}\}$ даются формулой

$$p_k(\mathbf{i}|\mathbf{j}) = p(\mathbf{i}) \frac{p^{(k-1)}(\mathbf{j} - \mathbf{i})}{p^{(k)}(\mathbf{j})}, \quad \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^M. \quad (1.28)$$

1.2.3. Псевдосписки

Рассмотрим некоторый список $\xi(t)$ с множеством ограничений \mathcal{C} , на который поступает поток требований ресурсов (a_k, \mathbf{r}_k) , $k = 1, 2, \dots$, интенсивности λ . Для анализа объёма списка $\xi(t)$ можно попробовать использовать более простой чем $\xi(t)$ ступенчатый процесс $(\kappa(t), \mathfrak{Q}(t))$, который назовем псевдосписком с множеством ограничений \mathcal{C} . Этот процесс имеет целочисленную компоненту $\kappa(t) \in \mathbb{N}$, называемую длиной псевдосписка, и векторную компоненту $\mathfrak{Q}(t) \in \mathcal{C}$, называемую объёмом псевдосписка. Псевдосписок $(\kappa(t), \mathfrak{Q}(t))$ имитирует поведение пары $(\mathfrak{n}(t), \mathfrak{\sigma}(t))$, где $\mathfrak{n}(t)$ – длина списка $\xi(t)$ и $\mathfrak{\sigma}(t)$ – его объём. На длину и объём псевдосписка распространяются те же ограничения, что на длину и объём списка $\xi(t)$.

Если в некоторый момент из $\sigma(t)$ вычитается некоторый вектор, это может быть только вектор, ранее прибавленный к $\sigma(t)$. Если же в некоторый момент t надо вычесть вектор из $\mathfrak{Q}(t)$, то вместо вектора, ранее прибавленного к нему, из $\mathfrak{Q}(t)$ вычитается особый вектор $\delta(t)$. При заданном состоянии (n, \mathbf{y}) псевдосписка перед моментом t , вектор $\delta(t)$ не зависит от поведения процессов $\kappa(t)$, $\mathfrak{Q}(t)$, $\delta(t)$ до момента t и имеет функцию распределения

$$P\{\delta(t) \leq \mathbf{x} \mid \kappa(t-0) = n, \mathfrak{Q}(t-0) = \mathbf{y}\} = F_n(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}). \quad (1.29)$$

Над псевдосписком допустимы следующие операции:

1. Вставка в момент a_k элемента в псевдосписок: длина псевдосписка увеличивается на 1, а его объём увеличивается на вектор \mathbf{r}_k .
2. Удаление в момент t элемента из псевдосписка: длина псевдосписка уменьшается на 1, а его объём уменьшается на $\delta(t)$.
3. Замена в момент a_k элемента псевдосписка: длина псевдосписка не меняется, а его объём увеличивается на вектор $\mathbf{x}_k = \mathbf{r}_k - \delta(a_k)$.

Эти операции над псевдосписком выполняются в те же моменты времени, что и соответствующие операции над списком $\xi(t)$. Их выполнение отменяется, если это может привести к нарушению ограничений на длину и объём псевдосписка. Отмена операции, запланированной на момент поступления требования ресурсов, называется потерей требования псевдосписка. Обозначим $\tilde{\pi}_B$ вероятность потери требования ресурсов псевдосписка.

Допустим, что стационарные средние значения длины $n = M n(t)$ и объёма $\sigma = M \sigma(t)$ списка хорошо аппроксимируются соответствующими стационарными характеристиками псевдосписка $\kappa = M \kappa(t)$ и $\mathfrak{Q} = M \mathfrak{Q}(t)$. Тогда вычисленные с использованием формул Литтла (1.23) величины

$$\tilde{w} = \frac{\kappa}{\lambda(1 - \tilde{\pi}_B)}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \frac{1}{\lambda(1 - \tilde{\pi}_B)} \mathfrak{Q} \quad (1.30)$$

могут служить приближениями для среднего времени пребывания w элемента в списке и для вектора \mathbf{u} средних объёмов использования требований списка. Далее

мы покажем, что не только параметры w и \tilde{w} , \mathbf{u} и $\tilde{\mathbf{u}}$, могут быть близки, но в ряде случаев совпадают даже стационарные распределения процессов $(n(t), \sigma(t))$ и $(\kappa(t), \mathfrak{A}(t))$.

Рассмотрим многолинейную экспоненциальную РеСМО без ожидания с одним типом ресурса объема R . В систему с N приборами поступает пуассоновский поток заявок интенсивностью λ . Объемы ресурса, необходимые для обслуживания заявок, является независимыми одинаково распределенными одномерными случайными величинами с ФР $F(x)$. Времена обслуживания распределены экспоненциально с параметром μ .

Поведение данной РеСМО может быть описано случайным списком $\xi(t) = (\zeta_1(t), \dots, \zeta_{n(t)}(t))$ с допустимыми операциями вставки и удаления элементов списка. Стационарное распределение пары $(n(t), \sigma(t))$ длины случайного списка и его объема имеет вид, аналогичный формулам (1.7), (1.9), но для одного типа ресурса:

$$p_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{n(t) = 0\} = \left(1 + \sum_{n=1}^N \frac{\rho^n}{n!} F^{(n)}(R)\right)^{-1}, \quad (1.31)$$

$$Q_k(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{n(t) = k, \sigma(t) \leq x\} = p_0 \frac{\rho^n}{n!} F^{(n)}(x), \quad 0 \leq x \leq R, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (1.32)$$

Рассмотрим теперь поведение псевдосписка $(\kappa(t), \mathfrak{A}(t))$, имитирующего поведение пары $(n(t), \sigma(t))$. Стационарное распределение $\tilde{p}_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\kappa(t) = 0\}$, $\tilde{Q}_k(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\kappa(t) = k, \mathfrak{A}(t) \leq x\}$, $1 \leq n \leq N$, $0 \leq x \leq R$ является решением следующей системы уравнений равновесия:

$$\lambda F(R) \tilde{p}_0 = \mu \tilde{Q}_1(R); \quad (1.33)$$

$$\lambda \int_0^x F(R-y) \tilde{Q}_1(dy) + \mu \tilde{Q}_1(x) = \lambda F(x) \tilde{p}_0 + 2\mu \int_{\substack{0 \leq z \leq y \leq R \\ y-z \leq x}} F_2(dz | y) \tilde{Q}_2(dy), \quad 0 \leq x \leq R; \quad (1.34)$$

$$\lambda \int_0^x F(R-y) \tilde{Q}_k(dy) + k\mu \tilde{Q}_k(x) = \lambda \int_0^x F(x-y) \tilde{Q}_{k-1}(dy) + \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned}
& +(k+1)\mu \int_{\substack{0 \leq z \leq y \leq R \\ y-z \leq x}} F_{k+1}(dz|y) \tilde{Q}_{k+1}(dy), \quad 0 \leq x \leq R, \quad 2 \leq k \leq N-1; \\
& \lambda \int_0^x F(R-y) \tilde{Q}_N(dy) = \lambda \int_0^x F(x-y) \tilde{Q}_{N-1}(dy), \quad 0 \leq x \leq R. \quad (1.36)
\end{aligned}$$

Подставляя в данную систему выражения (1.31) и (1.32), учитывая также тождество (1.26), можно убедиться, что они являются решением системы (1.33) – (1.36). Таким образом, доказано, что в условиях пуассоновского входящего потока и экспоненциального времени обслуживания, не зависящего от объема требований, стационарное распределение пары $(n(t), \sigma(t))$ длины случайного списка и его объема совпадает со стационарным распределением соответствующего псевдосписка $(\kappa(t), \mathcal{Y}(t))$. Очевидно, что данный результат легко распространяется на случай M -мерных требований к ресурсу. Более того, в разделе 2.3 будет показано, что равенство распределений имеет место и в более общем случае рекуррентного обслуживания заявок при пуассоновском входящем потоке.

Отметим, что полученный результат является крайне важным для применения аппарата РеСМО к анализу показателей эффективности систем беспроводной мобильной связи. Во-первых, в большинстве приложений, как правило, не требуется детальная информация о структуре случайного списка требований, только характеристики его длины и объема, что можно исследовать и при помощи псевдосписка. Во-вторых, в большинстве применений моделей РеСМО к анализу систем мобильной связи приходится рассматривать более сложные модели с различными особенностями, которые не позволяют получить аналитические решения. В результате, для анализа показателей эффективности систем, моделируемых при помощи РеСМО, приходится прибегать к численным методам решения системы уравнений равновесия, для которых размерность пространства состояний является одним из важнейших факторов. Поэтому в следующих главах изложенный здесь метод анализа объема случайного списка при помощи псевдосписка часто используется.

1.3. Распределение требований к ресурсу в беспроводных сетях

Ключевая особенность ReCMO, неоднородность заявок с точки зрения потребления ресурсов системы, позволяет с высокой точностью моделировать процессы обслуживания пользовательских сессий в беспроводных сетях. Однако для прикладных расчетов показателей эффективности функционирования сетей мобильной связи необходимо понимать, каким образом огромное множество параметров технологии беспроводного доступа, параметров антенн, особенностей распространения сигнала и характеристик расположения и подвижности пользовательских устройств переводятся в параметры ресурсной модели.

Интуитивно понятно, что процесс поступления пользовательских сессий моделируется параметрами входящих потоков, а их продолжительность – параметрами обслуживания. Таким образом, остальные параметры технологий и особенности сценария функционирования моделируются распределением требований к ресурсу. Поэтому в данном разделе описывается полученный автором с коллегами универсальный метод вывода распределения требований к ресурсу.

Сети беспроводного доступа четвертого поколения и последующих, разрабатываемые в рамках 3GPP (3rd Generation Partnership Project), обладают некоторыми общими особенностями. Во-первых, частотный ресурс выделяется дискретным образом, физическими ресурсными блоками (Physical Resource Block, PRB), которые представляют собой минимальную единицу частотно-временного ресурса. Во-вторых, базовая станция (БС) регулярно измеряет качество радиоканала пользовательского устройства и определяет один из K индикаторов качества радиоканала (Channel Quality Indicator, CQI), каждому из которых соответствует одна из K доступных модуляционно-кодовых схем (Modulation and Coding Scheme, MCS). Схема MCS определяет способ кодирования передаваемых данных, при этом каждая MCS характеризуется уровнем избыточности кода и, следовательно, спектральной эффективностью. Спектральная эффективность измеряется в бит/с/Гц и показывает, какой скорости передачи полезной информации (в бит/с) можно достичь на полосе пропускания шириной 1 Гц. В таблице 1.1 представлен пример набора доступных MCS для сети радиодоступа

четвертого поколения E-UTRAN (Evolved Universal Terrestrial Radio Access Network) с указанием их спектральных эффективностей. Как видно из таблицы, в сети радиодоступа четвертого поколения определены $K=16$ уровней качества радиоканала, а, к примеру, в сети пятого поколения «Новое радио» (New Radio, NR) уже $K=32$.

Таблица 1.1. Набор схем MCS в сети радиодоступа E-UTRAN¹

CQI	MCS	Спектральная эффективность
0	-	-
1	QPSK, 78/1024	0,15237
2	QPSK, 120/1024	0,2344
3	QPSK, 193/1024	0,3770
4	QPSK, 308/1024	0,6016
5	QPSK, 449/1024	0,8770
6	QPSK, 602/1024	1,1758
7	16QAM, 378/1024	1.4766
8	16QAM, 490/1024	1.9141
9	16QAM, 616/1024	2.4063
10	64QAM, 466/1024	2.7305
11	64QAM, 567/1024	3.3223
12	64QAM, 666/1024	3.9023
13	64QAM, 772/1024	4.5234
14	64QAM, 873/1024	5.1152
15	64QAM, 948/1024	5.5547

Правила назначения MCS не стандартизированы и являются интеллектуальной собственностью производителей оборудования. Однако оптимальным считается назначение MCS таким образом, чтобы частота ошибочных блоков (Block Error Rate, BLER) не превышала 10%. Из этих

¹ 3GPP TS 36.213 Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); Physical layer procedures

соображений можно определить нижние границы отношения сигнала к шуму (ОСШ) s_i , $i=1,2,\dots,K$ для назначения i -й MCS. И тогда, если известна ФР ОСШ $F_S(x)$, то можно определить вероятности m_i , $i=1,2,\dots,K$ того, что пользовательской сессии будет назначена i -я MCS по формулам

$$m_i = F_S(s_{i+1}) - F_S(s_i), \quad i=1,\dots,K-1, \quad (1.37)$$

$$m_K = 1 - F_S(s_K). \quad (1.38)$$

Пусть e_i , $i=1,2,\dots,K$, обозначает спектральную эффективность (бит/с/Гц) i -й MCS, C – требуемую пользовательскими сессиями скорость передачи данных (бит/с), а B – ширина полосы частот ресурсного блока (Гц). Тогда требуемое число r_i , $i=1,2,\dots,K$ ресурсных блоков для поддержания скорости C на i -й MCS принимает вид

$$r_i = \left\lceil \frac{C}{Be_i} \right\rceil, \quad i=1,\dots,K, \quad (1.39)$$

где $\lceil \cdot \rceil$ означает операцию округления вверх. В результате получается, что с вероятностью m_i поступающей на обслуживание на БС сессии передачи данных требуется r_i ресурсных блоков для поддержания требуемой скорости C . Таким образом, набором пар (r_i, m_i) , $i=1,2,\dots,K$, задается дискретный ряд распределения требований к частотно-временному ресурсу БС, который может быть использован при моделировании показателей эффективности функционирования сети с использованием аппарата РеСМО.

Стоит отметить, что данный подход нетрудно расширить на случай, если имеется L типов сессий с различными требуемыми скоростями C_l , $l=1,2,\dots,L$ передачи данных. Тогда для каждого l -го типа сессий выводится свой ряд распределения $(r_{l,i}, m_{l,i})$, $i=1,2,\dots,K$ требований к частотно-временному ресурсу. Анализ показателей эффективности в этом случае можно проводить с использованием РеСМО с несколькими входящими потоками. Далее, в разделе 2.2 показано, что в таких РеСМО несколько потоков можно агрегировать в один средневзвешенный для упрощения вычислений вероятностных характеристик.

Вернемся теперь к ФР ОСШ $F_S(x)$. Для ее вывода необходимо учитывать расположение пользовательских устройств внутри зоны покрытия БС и модель распространения сигнала. В общем случае зависимость ОСШ $S(d)$ от расстояния d можно записать в виде

$$S(d) = \frac{P_T G_B G_U L(d) S_F}{C_L N_0 I}, \quad (1.40)$$

где P_T – излучаемая мощность, G_B и G_U – коэффициенты усиления антенн на БС и пользовательском устройстве соответственно, $L(x)$ – потери распространения на расстоянии x , S_F – теневое замирание, C_L – потери в кабеле, N_0 – тепловой шум и I – интерференция.

Часть параметров (1.40) являются константами, такие как излучаемая мощность P_T , потери в кабеле C_L и тепловой шум N_0 . Коэффициенты усиления антенн зависят от их конфигурации и в прикладных исследованиях тоже могут считаться одинаковыми для всех пользовательских устройств. Значения коэффициентов можно вычислять согласно [125].

Теневое замирание и интерференция являются, вообще говоря, случайными величинами. Однако во многих приложениях для упрощения расчетов можно заменить их константами M_S и M_I по верхней границе возможных значений.

Отметим все же, что при необходимости более точного учета вклада этих случайных величин, это тоже можно сделать. Принято считать, что теневое замирание имеет логнормальное распределение в линейной шкале и нормальное по шкале децибелл, а параметры распределения определены в стандарте 3GPP TR 38.901. При переходе в логарифмическую шкалу выражение для ОСШ (1.40) превращается в сумму, что позволяет получить сумму случайных величин по формуле свертки.

Что касается учета интерференции, то в ряде случаев это возможно сделать методами стохастической геометрии [148]. В работах [162, 199] предложены методы оценки значений интерференции в различных сценариях.

Таким образом, после всех допущений выражение для ОСШ (1.40) зависит только от модели распространения и расстояния между приемником и передатчиком. Наиболее распространенным подходом построения моделей распространения для прикладных исследований является уточнение коэффициентов теоретической модели Фрииса. Уточнение коэффициентов проводится на основе эмпирического подхода, путем измерений сигнала в областях, обладающих схожей геометрией. Так, стандарт 3GPP TR 38.901 определяет несколько эмпирических моделей, включая модели распространения в городских условиях, загородных и для условий расположения БС внутри помещений. В линейной шкале потери распространения представляются в виде

$$L(d) = Ad^{-\zeta}, \quad (1.41)$$

где параметры A и ζ для каждой модели определены в стандарте 3GPP TR 38.901. Подставляя (1.41) в выражение (1.40) и объединяя константы, получаем

$$S(d) = \tilde{A}d^{-\zeta}. \quad (1.42)$$

Предполагая, что пользовательские устройства распределены равномерно в пределах зоны покрытия БС, ФР расстояния d между устройством и БС принимает вид

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \leq |h_s - h_u|, \\ \frac{x^2 - (h_s - h_u)^2}{r_c^2}, & |h_s - h_u| < x < \sqrt{r_c^2 + (h_s - h_u)^2}, \end{cases} \quad (1.43)$$

где h_s , h_u – высота расположения БС и пользовательского устройства соответственно, а r_c – радиус зоны покрытия. Нетрудно видеть, что ОСШ является монотонно убывающей функцией от случайной величины расстояния d . Тогда ФР ОСШ может быть записана через обратную функцию в виде

$$F_\zeta(x) = 1 - D\left(\left(\frac{x}{\tilde{A}}\right)^{-1/\zeta}\right). \quad (1.44)$$

Глава 2. Анализ простейших ресурсных систем массового обслуживания

В данной главе рассматриваются простейшие РеСМО, под которыми понимаются ресурсные системы без ожидания и с потерями, в которых происходят только два типа событий – поступление и завершение обслуживания заявки. В разделе 2.1 представлены методы расчета простейшей экспоненциальной РеСМО с одним потоком, объемы требований заявок к ресурсу в которой не зависят от процессов поступления и обслуживания. В разделе 2.2 показано, что аналогичная РеСМО с несколькими входящими потоками может быть сведена к РеСМО с одним средневзвешенным потоком, что означает, в том числе, что алгоритмы расчета из раздела 2.1 могут применяться и к системам с несколькими входящими потоками. Далее в разделе 2.3 доказано свойство инвариантности стационарного распределения простейшей РеСМО от вида ФР времени обслуживания при условии пуассоновского входящего потока. Более того, показано, что данное свойство справедливо и для более широкого класса РеСМО, в которых интенсивности поступления и обслуживания зависят от числа заявок в системе. Наконец, в разделе 2.4 предложен численный метод вычисления вероятностных характеристик РеСМО с более сложным входящим МАР-потокм заявок.

2.1. Методы расчета вероятностно-временных характеристик экспоненциальных РеСМО

Рассмотрим базовую экспоненциальную РеСМО, являющуюся обобщением первой модели Эрланга на случай неоднородных по объему требований заявок, с N приборами и M -мерным ресурсом объема $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_M)$. В систему поступает пуассоновский поток заявок интенсивностью λ , времена обслуживания заявок являются независимыми случайными величинами, экспоненциально распределенными с параметром μ . Объемы требований $\mathbf{r}_j = (r_1, \dots, r_M)$, $j = 1, 2, \dots$ не

зависят друг от друга, от процессов поступления и обслуживания заявок и являются M -мерными случайными векторами с ФР $F(\mathbf{x}) = P\{\mathbf{r}_j \leq \mathbf{x}\}$.

Поведение этой системы описывается случайным процессом $X(t) = (\xi(t), \gamma(t))$, где $\xi(t)$ – число заявок в момент t , а $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_{\xi(t)}(t))$ – список векторов требований заявок. Как было показано ранее в разделе 1.1, совместное стационарное распределение числа заявок в системе и суммарного объема занятого ресурса $\sigma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t) + \dots + \gamma_{\xi(t)}(t)$ имеет вид [186]

$$q_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = 0\} = \left(1 + \sum_{n=1}^N F^{(n)}(\mathbf{R}) \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}, \quad (2.1)$$

$$q_n(\mathbf{r}) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = n; \sigma(t) \leq \mathbf{r}\} = q_0 F^{(n)}(\mathbf{r}) \frac{\rho^n}{n!}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{R}. \quad (2.2)$$

Вероятность потери заявки и средний объем занятого ресурса имеют вид

$$\pi_B = 1 - q_0 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^n}{n!} F^{(n+1)}(\mathbf{R}), \quad (2.3)$$

$$\sigma = q_0 \sum_{n=1}^N \sigma_n \frac{\rho^n}{n!}, \quad (2.4)$$

где $\sigma_n = \int_0^{\mathbf{R}} \mathbf{x} F^{(n)}(d\mathbf{x})$. Таким образом, формулы для основных вероятностных характеристик подразумевают вычисление многократных сверток ФР требований к ресурсу. В работе [188] был разработан алгоритм расчета стационарного распределения (2.1) – (2.2) для случая непрерывного распределения требований к ресурсу с использованием прямого и обратного дискретного преобразования Фурье на основе работы [193]. Далее представлен алгоритм расчета для случая дискретных требований заявок к ресурсу.

Пусть теперь требования заявок к ресурсу могут принимать только целые неотрицательные значения, причем f_r – вероятность того, что заявке для обслуживания требуется объем $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_M)$, $\mathbf{r} \leq \mathbf{R}$ ресурсов. Тогда стационарное распределение (2.1), (2.2) принимает вид

$$q_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = 0\} = \left(1 + \sum_{n=1}^N \frac{\rho^n}{n!} \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{R}} f_{\mathbf{r}}^{(n)}\right)^{-1}, \quad (2.5)$$

$$q_n(\mathbf{r}) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = n; \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{r}\} = q_0 \frac{\rho^n}{n!} f_{\mathbf{r}}^{(n)}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{R}. \quad (2.6)$$

где $f_{\mathbf{r}}^{(n)}$ обозначает вероятность того, что для обслуживания n заявок требуется суммарно \mathbf{r} ресурсов. Здесь $f_{\mathbf{0}}^{(0)} = 1$ и $f_{\mathbf{r}}^{(0)} = 0$, $\mathbf{r} > \mathbf{0}$, $f_{\mathbf{r}}^{(1)}$ совпадает с исходным рядом распределения, $f_{\mathbf{r}}^{(1)} = f_{\mathbf{r}}$, $\mathbf{r} \geq \mathbf{0}$, а при больших значениях n $f_{\mathbf{r}}^{(n)}$ вычисляется как n -кратная свертка распределения $f_{\mathbf{r}}$, $\mathbf{r} \geq \mathbf{0}$.

Введем обозначение

$$G(n, \mathbf{r}) = \sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{j} \leq \mathbf{r}} f_{\mathbf{j}}^{(k)}, \quad 0 \leq n \leq N, \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{R}. \quad (2.7)$$

Отметим, что, согласно определению (2.7), $G(0, \mathbf{r}) = 1$ для всех $\mathbf{r} \geq \mathbf{0}$, а также $G(N, \mathbf{R}) = q_0^{-1}$, т.е. представляет собой нормирующую константу. Обозначим также

$$H(n, \mathbf{r}) = G(n, \mathbf{r}) - G(n-1, \mathbf{r}), \quad 1 \leq n \leq N, \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{R}. \quad (2.8)$$

Отметим, что из определений (2.7) и (2.8) следует, что $H(n, \mathbf{r})$ является суммой неотрицательных выражений.

Утверждение 2.1. Функции $H(n, \mathbf{r})$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$H(n, \mathbf{r}) = \frac{\rho}{n} \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{j} \leq \mathbf{r}} f_{\mathbf{j}} H(n-1, \mathbf{r} - \mathbf{j}), \quad 2 \leq n \leq N \quad (2.9)$$

с начальными условиями

$$H(1, \mathbf{r}) = \rho \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{j} \leq \mathbf{r}} f_{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{R}. \quad (2.10)$$

Доказательство.

Согласно определению,

$$H(n, \mathbf{r}) = G(n, \mathbf{r}) - G(n-1, \mathbf{r}) = \frac{\rho^n}{n!} \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{j} \leq \mathbf{r}} f_{\mathbf{j}}^{(n)}. \quad (2.11)$$

Подставляя $n=1$ в выражение (2.11), получим начальное условие (2.10).
Далее, используя свойства свертки и правила преобразования сумм, получаем

$$\begin{aligned} H(n, \mathbf{r}) &= \frac{\rho^n}{n!} \sum_{0 \leq j \leq \mathbf{r}} f_j^{(n)} = \frac{\rho^n}{n!} \sum_{0 \leq j \leq \mathbf{r}} \sum_{0 \leq i \leq j} f_i f_{j-i}^{(n-1)} = \\ &= \frac{\rho^n}{n!} \sum_{0 \leq i \leq \mathbf{r}} \sum_{i \leq j \leq \mathbf{r}} f_i f_{j-i}^{(n-1)} = \frac{\rho}{n} \sum_{0 \leq i \leq \mathbf{r}} f_i \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{0 \leq j \leq \mathbf{r}-i} f_{j-i}^{(n-1)} = \\ &= \frac{\rho}{n} \sum_{0 \leq i \leq \mathbf{r}} f_i H(n-1, \mathbf{r}-\mathbf{i}). \blacksquare \end{aligned}$$

Утверждение 2.2. Функции $G(n, \mathbf{r})$ удовлетворяют соотношению

$$G(n, \mathbf{r}) = H(n, \mathbf{r}) + G(n-1, \mathbf{r}), \quad 2 \leq n \leq N \quad (2.12)$$

с начальными значениями

$$G(1, \mathbf{r}) = 1 + H(1, \mathbf{r}), \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{R}. \quad (2.13)$$

Доказательство следует из определения функций $H(n, \mathbf{r})$ и $G(n, \mathbf{r})$. ■

Таким образом, утверждения 2.1 и 2.2 задают сверточный алгоритм типа Бузена [122] расчета нормирующей константы $G(N, \mathbf{R})$, сложность которого можно оценить как $O(NR^2)$. Однако применения данного алгоритма не ограничиваются только расчетом нормирующей константы. В следующих утверждениях показано, что функции $G(N, \mathbf{r})$ и $G(N-1, \mathbf{r})$, $\mathbf{0} \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{R}$ позволяют вычислить многие стационарные характеристики системы напрямую, без вычисления стационарного распределения (2.5), (2.6).

Утверждение 2.3. Вероятность потери заявки π_B можно вычислить по формуле

$$\pi_B = 1 - G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{0 \leq j \leq \mathbf{R}} f_j G(N-1, \mathbf{R}-\mathbf{j}). \quad (2.14)$$

Доказательство.

В рассматриваемом случае дискретного распределения требований вероятность потери заявки (2.3) принимает вид

$$\pi_B = 1 - q_0 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^n}{n!} \sum_{0 \leq j \leq \mathbf{R}} f_j^{(n+1)}. \quad (2.15)$$

Тогда, применяя формулу свертки и правила изменения порядка суммирования, получаем

$$\begin{aligned}\pi_B &= 1 - G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^n}{n!} \sum_{0 \leq j \leq \mathbf{R}} \sum_{0 \leq i \leq j} f_i f_{j-i}^{(n)} = 1 - G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{0 \leq i \leq \mathbf{R}} f_i \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^n}{n!} \sum_{0 \leq j \leq \mathbf{R}-i} f_j^{(n)} = \\ &= 1 - G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{0 \leq j \leq \mathbf{R}} f_j G(N-1, \mathbf{R}-j). \blacksquare\end{aligned}$$

Утверждение 2.4. Средний объем занятого ресурса σ можно вычислить по формуле

$$\sigma = \mathbf{R} - G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{m=1}^M \mathbf{e}_m \sum_{r=1}^{R_m} G(N, \mathbf{R} - r\mathbf{e}_m), \quad (2.16)$$

где \mathbf{e}_m - вектор из нулей с единицей на m -м месте.

Доказательство.

Обозначим $\bar{\sigma}$ - средний объем незанятого ресурса системы, тогда

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} &= \sum_{0 \leq j \leq \mathbf{R}} (\mathbf{R} - j) \sum_{n=0}^N q_0 \frac{\rho^n}{n!} f_j^{(n)} = G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} \sum_{0 \leq j \leq \mathbf{R}} (\mathbf{R} - j) f_j^{(n)} = \\ &= G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} \sum_{0 \leq j \leq \mathbf{R}} \sum_{m=1}^M \mathbf{e}_m (R_m - j_m) f_j^{(n)} = G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} \sum_{0 \leq j \leq \mathbf{R}} \sum_{m=1}^M \mathbf{e}_m \sum_{i=1}^{R_m - j_m} f_j^{(n)} = \\ &= G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} \sum_{m=1}^M \mathbf{e}_m \sum_{i=1}^{R_m} \sum_{0 \leq j \leq \mathbf{R} - i\mathbf{e}_m} f_j^{(n)} = G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{m=1}^M \mathbf{e}_m \sum_{i=1}^{R_m} \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} \sum_{0 \leq j \leq \mathbf{R} - i\mathbf{e}_m} f_j^{(n)} = \\ &= G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{m=1}^M \mathbf{e}_m \sum_{i=1}^{R_m} G(N, \mathbf{R} - i\mathbf{e}_m).\end{aligned}$$

Учитывая $\sigma = \mathbf{R} - \bar{\sigma}$, получаем формулу (2.16). \blacksquare

Утверждение 2.5. Второй момент объема занятого ресурса $\sigma^{(2)}$ вычисляется по формуле

$$\sigma^{(2)} = 2G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{0 \leq r \leq \mathbf{R}} \mathbf{r} (G(N, \mathbf{R}) - G(N, \mathbf{r})) - \sigma. \quad (2.17)$$

Доказательство.

Для вывода формулы (2.17) воспользуемся известным тождеством: второй момент дискретной случайной величины с непрерывной справа ФР $A(x)$ и средним a вычисляется по формуле $2 \sum_i i(1 - A(i)) - a$. Тогда

$$\begin{aligned}
\sigma^{(2)} &= 2 \sum_{0 \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{R}} \mathbf{r} \left(1 - \sum_{0 \leq \mathbf{j} \leq \mathbf{r}} \sum_{n=0}^N q_0 \frac{\rho^n}{n!} f_{\mathbf{j}}^{(n)} \right) - \sigma = \\
&= 2G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{0 \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{R}} \mathbf{r} \left(G(N, \mathbf{R}) - \sum_{0 \leq \mathbf{j} \leq \mathbf{r}} \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} f_{\mathbf{j}}^{(n)} \right) - \sigma = \\
&= 2G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{0 \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{R}} \mathbf{r} (G(N, \mathbf{R}) - G(N, \mathbf{r})) - \sigma. \blacksquare
\end{aligned}$$

Отметим, что применения функций $G(n, \mathbf{r})$ не ограничиваются рассмотренными в утверждениях 2.3, 2.4 и 2.5 характеристиками. В следующих главах показано, что предложенный подход может быть адаптирован для расчета и других стационарных характеристик РеСМО.

Более того, схожий подход к расчету вероятностных характеристик можно применять и к другим типам РеСМО, стационарное распределение которых имеет мультипликативный вид. Так, для РеСМО с пуассоновским потоком и временем обслуживания, зависящим от объема требований, был выведен аналогичный вычислительный алгоритм.

Рассматривается РеСМО с N приборами и одномерным ресурсом объема R единиц. В систему поступает пуассоновский поток заявок интенсивностью λ , а времена обслуживания заявок и их требования к ресурсу задаются совместной ФР $H(t, x)$. Основные результаты, полученные для данной системы, изложены в разделе 1.1, а стационарное распределение задается формулами (1.17) – (1.19). В случае дискретного ресурса совместную ФР $H(t, x)$ удобнее задать дискретным распределением требований $\{f_j\}$, $0 \leq j \leq R$, и набором условных ФР $B_j(t)$ времени обслуживания при условии занятия заявкой j единиц ресурса. Формулы (1.17) – (1.18) в этом случае примут вид

$$q_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = 0\} = \left(1 + \sum_{n=1}^N \frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=0}^R g_r^{(n)} \right)^{-1}, \quad (2.18)$$

$$q_n(r) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = n, \delta(t) = r\} = q_0 \frac{\rho^n}{n!} g_r^{(n)}, \quad (2.19)$$

где $\{g_r^{(n)}\}$ – n -кратная свертка распределения $\{g_r\}$, $g_r = b_r f_r / b$, $0 \leq r \leq R$, b_r –

условное среднее времени обслуживания, $b_r = \int_0^{+\infty} td(B_r(t))$, а b – среднее время обслуживания заявки, $b = \sum_{r=0}^R b_r f_r$.

Нетрудно видеть, что, функции

$$\tilde{G}(n,r) = \sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} \sum_{j=0}^r g_j^{(k)}, \quad 0 \leq n \leq N, \quad 0 \leq r \leq R, \quad (2.20)$$

можно вычислять по тем же рекуррентным соотношениям (2.8) – (2.10), заменив распределение $\{f_j\}$, $0 \leq j \leq R$ на $\{g_j\}$, $0 \leq j \leq R$. Тогда вероятностные характеристики данной РеСМО можно вычислять с использованием утверждений 2.3, 2.4 и 2.5.

2.2. Агрегирование входящих потоков

Рассмотрим теперь экспоненциальную РеСМО с несколькими потоками заявок. На систему поступает L пуассоновских потоков заявок с интенсивностями λ_l , $l=1,2,\dots,L$. Времена обслуживания заявок l -го типа не зависят от процесса поступления заявок, независимы друг от друга и имеют экспоненциальное распределение с параметром μ_l , $l=1,2,\dots,L$. Требования к ресурсу заявок l -го типа не зависят от процессов поступления и обслуживания, не зависят друг от друга и заданы ФР требований к ресурсам обозначим $F_l(\mathbf{x})$, $l=1,2,\dots,L$. Поведение системы описывается случайным процессом $X(t) = (\xi(t), \theta(t), \Gamma(t))$, где $\xi(t)$ – число заявок в момент t , $\theta(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_{\xi(t)}(t))$ – вектор типов заявок, находящихся на обслуживании, а $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_{\xi(t)}(t))$ – список векторов требований заявок.

В работе [53] было показано, что стационарные вероятности $Q_n(\mathbf{x})$ того, что в системе n заявок, которые суммарно занимают объем не более \mathbf{x} ресурса имеют вид

$$Q_n(\mathbf{x}) = q_0 \sum_{\substack{n_1, \dots, n_L \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_L = n}} \prod_{l=1}^L \frac{\rho_l^{n_l}}{n_l!} (F_1^{(n_1)} * \dots * F_L^{(n_L)})(\mathbf{x}), \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{R}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (2.21)$$

$$q_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^N \sum_{n_1 + \dots + n_L = n} \prod_{l=1}^L \frac{\rho_l^{n_l}}{n_l!} (F_1^{(n_1)} * \dots * F_L^{(n_L)})(\mathbf{R}) \right)^{-1}, \quad (2.22)$$

где символ $*$ означает свертку ФР, а $\rho_l = \lambda_l / \mu_l$, $1 \leq l \leq L$.

Расчет стационарного распределения по формулам (2.21), (2.22) также осложняется вычислением многократных сверток функций распределения $F_l(\mathbf{x})$, $l=1,2,\dots,L$. В следующей теореме доказано, что стационарные вероятности рассмотренной РеСМО с несколькими входящими потоками равны стационарным вероятностям РеСМО с одним агрегированным потоком, имеющим средневзвешенное распределение требований к ресурсу.

Теорема 2.1. Стационарные вероятности $Q_n(\mathbf{x})$ того, что в системе n заявок, которые суммарно занимают объем не более \mathbf{x} ресурса, могут быть вычислены по формулам

$$Q_n(\mathbf{x}) = q_0 \frac{\rho^n}{n!} F^{(n)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{R}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (2.23)$$

$$q_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^N \frac{\rho^n}{n!} F^{(n)}(\mathbf{R}) \right)^{-1}, \quad (2.24)$$

где $\rho = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_L$ и $\phi_l = \rho_l / \rho$, $l=1,2,\dots,L$, а $F(\mathbf{x})$ представляет собой смесь ФР $F_l(\mathbf{x})$ с весами $\phi_l = \rho_l / \rho$:

$$F(\mathbf{x}) = \phi_1 F_1(\mathbf{x}) + \phi_2 F_2(\mathbf{x}) + \dots + \phi_L F_L(\mathbf{x}). \quad (2.25)$$

Доказательство.

Пусть $V_n(\mathbf{x})$ такие функции, что $V_0(\mathbf{x}) = 1$ для любого неотрицательного M -мерного вектора \mathbf{x} , и $V_0(\mathbf{x}) = 0$, если вектор \mathbf{x} не является неотрицательным. Для целых положительных n определим функции $V_n(\mathbf{x})$ следующим образом:

$$V_n(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_L \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_L = n}} \prod_{l=1}^L \frac{\rho_l^{n_l}}{n_l!} (F_1^{(n_1)} * F_2^{(n_2)} * \dots * F_L^{(n_L)})(\mathbf{x}). \quad (2.26)$$

Рассмотрим ПЛС $\tilde{V}_n(s)$ функции $V_n(\mathbf{x})$. Согласно свойствам ПЛС, его можно записать в виде

$$\tilde{V}_n(s) = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_L \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_L = n}} \prod_{l=1}^L \frac{\rho_l^{n_l}}{n_l!} \tilde{F}_1^{n_1}(s) \tilde{F}_2^{n_2}(s) \dots \tilde{F}_L^{n_L}(s), \quad (2.27)$$

где $\tilde{F}_l(s)$ – ПЛС ФР $F_l(\mathbf{x})$. Теперь, применяя полиномиальную теорему, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{V}_n(s) &= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_L \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_L = n}} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_L!} \prod_{l=1}^L \rho_l^{n_l} \tilde{F}_l^{n_l}(s) = \frac{\rho^n}{n!} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_L \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_L = n}} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_L!} \prod_{l=1}^L \frac{\rho_l^{n_l}}{\rho^{n_l}} \tilde{F}_l^{n_l}(s) = \\ &= \frac{\rho^n}{n!} \left(\phi_1 \tilde{F}_1(s) + \phi_2 \tilde{F}_2(s) + \dots + \phi_L \tilde{F}_L(s) \right)^n. \end{aligned}$$

Переходя обратно к прообразу $V_n(\mathbf{x})$, получаем

$$V_n(\mathbf{x}) = \frac{\rho^n}{n!} F^{(n)}(\mathbf{x}),$$

где $F(\mathbf{x}) = \phi_1 F_1(\mathbf{x}) + \phi_2 F_2(\mathbf{x}) + \dots + \phi_L F_L(\mathbf{x})$, что и доказывает утверждение теоремы. ■

Доказанная теорема не только упрощает вид стационарного распределения экспоненциальной РеСМО с L входящими потоками, но и позволяет применять вычислительные алгоритмы из раздела 2.1 для расчета стационарных вероятностей, а также вероятности потери заявки и среднего объема занятого ресурса.

Кроме того, интерес может представлять вероятность потери $\pi_{B,l}$ заявки типа l . С учетом теоремы 2.1 она имеет вид

$$\pi_{B,l} = 1 - q_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\rho^n}{n!} \left(F^{(n)} * F_l \right) (\mathbf{R}) \right). \quad (2.28)$$

В частном случае дискретного распределения требований к ресурсу для расчета вероятности потери заявки типа l можно использовать сверточный метод расчета через функции $G(n, \mathbf{r})$, подробно изложенный в разделе 2.1.

Утверждение 2.6. В случае дискретного распределения требований вероятность $\pi_{B,l}$ потери заявки типа l вычисляется по формуле

$$\pi_{B,l} = 1 - G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{0 \leq \mathbf{j} \leq \mathbf{R}} f_{l,j} G(N-1, \mathbf{R} - \mathbf{j}), \quad (2.29)$$

где $f_{l,j}$ – вероятность того, что заявка типа l требует для обслуживания объем ресурса \mathbf{j} , а при расчете функций $G(n, \mathbf{r})$ используется распределение $\{f_j\}$, $l=1,2,\dots,L$, являющееся смесью распределений $\{f_{l,j}\}$, $l=1,2,\dots,L$, с весами $\phi_l = \rho_l / \rho$, $l=1,2,\dots,L$.

Доказательство.

В дискретном случае вероятность $\pi_{B,l}$ (2.28) принимает вид

$$\pi_{B,l} = 1 - q_0 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^n}{n!} \sum_{0 \leq \mathbf{j} \leq \mathbf{R}} \sum_{0 \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{j}} f_{l,i} f_{\mathbf{j}-\mathbf{i}}^{(n)}. \quad (2.30)$$

Тогда, применяя формулу свертки и правила изменения порядка суммирования по аналогии с доказательством утверждения 2.3, получаем

$$\begin{aligned} \pi_{B,l} &= 1 - G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^n}{n!} \sum_{0 \leq \mathbf{j} \leq \mathbf{R}} \sum_{0 \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{j}} f_{l,i} f_{\mathbf{j}-\mathbf{i}}^{(n)} = \\ &= 1 - G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{0 \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{R}} f_{l,i} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^n}{n!} \sum_{0 \leq \mathbf{j} \leq \mathbf{R}-\mathbf{i}} f_{\mathbf{j}}^{(n)} = \\ &= 1 - G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{0 \leq \mathbf{j} \leq \mathbf{R}} f_{l,j} G(N-1, \mathbf{R}-\mathbf{j}). \blacksquare \end{aligned}$$

2.3. Нечувствительность стационарного распределения к виду распределения времени обслуживания

Рассмотренная в разделе 2.1 простейшая РеСМО является обобщением первой модели Эрланга (СМО типа $M|M|n|0$) на случай неоднородных требований. Как было показано Севастьяновым Б.А. в [75], стационарное распределение первой модели Эрланга обладает свойством инвариантности относительно вида ФР времени обслуживания. Возникает вопрос, а не распространяется ли это свойство и на более общую ресурсную систему.

Рассмотрим теперь РеСМО с одним пуассоновским входящим потоком интенсивностью λ и независимыми от процесса поступления заявок и независимыми друг от друга временами обслуживания, задаваемыми ФР $B(x)$.

Объемы требований заявок, как и прежде, не зависят от процессов поступления и обслуживания заявок, не зависят друг от друга и одинаково распределены с ФР $F(\mathbf{x})$. Далее будет показано, что свойство инвариантности стационарного распределения справедливо и для данной РеСМО.

Поведение системы будем описывать в терминах псевдосписка, т.е. марковским процессом $(\xi(t), \delta(t), \beta(t))$, где $\xi(t)$ – число заявок в момент времени t , $\delta(t)$ – суммарный объем занятого ресурса, а $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \dots, \beta_{\xi(t)}(t))$ – вектор прошедших времен обслуживания заявок. При этом объем ресурса, освобождаемого заявкой в момент ухода из системы, является случайной величиной с ФР $F_k(\mathbf{x} | \mathbf{y})$, заданной в (1.25).

Будем считать, что в момент поступления заявки система из состояния $(k, \mathbf{x}, t_1, \dots, t_k)$ с вероятностью $\frac{F(\mathbf{y})}{k+1}$ переходит в одно из состояний $(k, \mathbf{x} + \mathbf{y}, t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_k)$, $i = 1, 2, \dots, k+1$. Обозначим

$$q_0(t) = P\{\xi(t) = 0\}, \quad (2.31)$$

$$Q_k(\mathbf{x}, t_1, \dots, t_k; t) = P\{\xi(t) = k, \delta(t) < \mathbf{x}, \beta_1(t) < t_1, \dots, \beta_k(t) < t_k\}. \quad (2.32)$$

Пусть P_t – вероятностное распределение в момент t , а P_0 – начальное распределение в момент $t=0$. Очевидно, что, если начальное распределение симметрично относительно переменных t_1, t_2, \dots, t_k прошедших времен обслуживания, то и P_t тоже будет симметрично.

Лемма 2.1. При любом начальном распределении P_0 распределение P_t имеет k -мерную плотность $q_k(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_k; t)$ в $(\xi(t) = k, \delta(t) < \mathbf{x}, y_1, y_2, \dots, y_k; t)$ при $t > \max(y_1, y_2, \dots, y_k)$ и выполняется

$$q_k(\mathbf{x}, y_1, y_2, \dots, y_k; t) \leq \lambda^k F^{(k)}(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^k [1 - B(y_i)], \quad 1 \leq k \leq N. \quad (2.33)$$

Доказательство.

Обозначим через A событие, состоящее в том, что в момент времени t в системе находятся k заявок, занимающих объем ресурса менее \mathbf{x} , а прошедшие времена обслуживания заключены в интервалах $(y_i, y_i + \Delta_i)$, $1 \leq i \leq k$. Тогда

$$P(A) = P\{\xi(t) = k, \delta(t) < \mathbf{x}, y_i < \beta_i(t) < y_i + \Delta_i, \quad 1 \leq i \leq k\} \leq \\ \leq F^{(k)}(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^k [1 - B(y_i)] [1 - e^{-\lambda \Delta_i}] \leq \lambda^k F^{(k)}(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^k [1 - B(y_i)] \Delta_i,$$

так как $1 - e^{-\lambda \Delta_i} \leq \lambda \Delta_i$, и для события A необходимо, чтобы заявки поступали в моменты $(t - (y_i + \Delta_i), t - y_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$ с временем обслуживания не менее y_i , $i = 1, 2, \dots, k$, а суммарный объем занятого ими ресурса не превосходил \mathbf{x} . Таким образом, плотность существует и выполняется неравенство (2.33). ■

Теорема 2.2. Если время обслуживания заявок с ФР $B(x)$ имеет конечное среднее $b > 0$, то стационарные плотности $q_k(\mathbf{x}, t_1, \dots, t_k)$ случайного процесса $(\xi(t), \delta(t), \beta(t))$ имеют вид

$$q_k(\mathbf{x}, t_1, \dots, t_k) = q_0 \frac{\lambda^k}{k!} F^{(k)}(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^k [1 - B(t_i)], \quad 0 \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{R}, 1 \leq k \leq N, \quad (2.34)$$

$$q_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^N \frac{\rho^k}{k!} F^{(k)}(\mathbf{x}) \right)^{-1}, \quad (2.35)$$

где $\rho = \lambda b$.

Доказательство.

Выпишем переходные вероятности за малый интервал времени Δt :

$$q_0(t + \Delta t) = q_0(t)(1 - \lambda F(\mathbf{R})\Delta t) + \quad (2.36)$$

$$+ \int_{0 \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{R}} \int_0^\infty q_1(d\mathbf{x}, y_1; t) \frac{B(y_1 + \Delta t) - B(y_1)}{1 - B(y_1)} dy_1 + o(\Delta t);$$

$$q_k(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_k; t + \Delta t) = \int_{0 \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{x}} q_k(d\mathbf{y}, y_1 - \Delta t, \dots, y_k - \Delta t; t) (1 - \lambda F(\mathbf{R} - \mathbf{y})\Delta t) \cdot \quad (2.37)$$

$$\cdot \prod_{1 \leq j \leq k} \frac{1 - B(y_j)}{1 - B(y_j - \Delta t)} + (k + 1) \int_{\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{R}} (1 - F_k(\mathbf{y} - \mathbf{x} | \mathbf{y})) \int_0^\infty [q_{k+1}(d\mathbf{y}, y_1 - \Delta t, \dots, y_k - \Delta t, y_{k+1}; t) \cdot \\ \cdot \frac{B(y_{k+1} + \Delta t) - B(y_{k+1})}{1 - B(y_{k+1})}] dy_{k+1} \prod_{1 \leq j \leq k} \frac{1 - B(y_j)}{1 - B(y_j - \Delta t)} + o(\Delta t),$$

$$1 \leq k \leq N - 1, \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{R};$$

$$q_N(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_k; t + \Delta t) = q_N(\mathbf{x}, y_1 - \Delta t, \dots, y_k - \Delta t; t) \prod_{j=1}^N \frac{1 - B(y_j)}{1 - B(y_j - \Delta t)}, \quad (2.38)$$

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{R}.$$

Обозначим

$$q_k^*(\mathbf{x}, y_1, y_2, \dots, y_k; t) = \frac{q_k(\mathbf{x}, y_1, y_2, \dots, y_k; t)}{[1 - B(y_1)][1 - B(y_2)] \dots [1 - B(y_k)]}. \quad (2.39)$$

Предполагая существование частных производных $\frac{\partial q_k^*}{\partial t}$, $\frac{\partial q_k^*}{\partial y_i}$, $1 \leq i \leq k$,

$0 \leq k \leq N$, из равенств (2.36) – (2.38), получаем систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial q_0^*(t)}{\partial t} + \lambda q_0^*(t) F(\mathbf{R}) = \int_{\mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{R}} \int_0^\infty q_1^*(d\mathbf{x}, y_1; t) dB(y_1), \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial q_k^*(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_k; t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial q_k^*(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_k; t)}{\partial y_i} + \lambda \int_{\mathbf{0} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{x}} q_k^*(d\mathbf{y}, y_1, \dots, y_k; t) F(\mathbf{R} - \mathbf{y}) = \quad (2.41)$$

$$= (k+1) \int_{\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{R}} (1 - F_k(\mathbf{y} - \mathbf{x} | \mathbf{y})) \int_0^\infty q_{k+1}^*(d\mathbf{y}, y_1, \dots, y_{k+1}; t) dB(y_{k+1}),$$

$$\frac{\partial q_N^*(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_k; t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial q_N^*(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_k; t)}{\partial y_i} = 0, \quad (2.42)$$

с граничными условиями

$$\lambda \int_{\mathbf{0} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{x}} F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) q_k^*(d\mathbf{y}, y_1, y_2, \dots, y_k; t) = (k+1) q_{k+1}^*(\mathbf{x}, y_1, y_2, \dots, y_k, 0; t), \quad 0 \leq k \leq N-1. \quad (2.43)$$

которые следуют из соотношений

$$\int_{\mathbf{0} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{x}} F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) q_k(d\mathbf{y}, y_1, \dots, y_k; t) \prod_{1 \leq j \leq k} \frac{1 - B(y_j)}{1 - B(y_j - \Delta t)} \left(\frac{\lambda \Delta t}{k+1} + o(\Delta t) \right) = \quad (2.44)$$

$$= \int_0^{\Delta t} q_{k+1}(\mathbf{x}, y_1 + \Delta t, \dots, y_k + \Delta t, y; t + \Delta t) dy.$$

Переходя к стационарному распределению, нетрудно убедиться при помощи прямой подстановки, что следующие выражения являются решением системы (2.40) – (2.42) с граничными условиями (2.43):

$$q_k^*(\mathbf{x}, y_1, y_2, \dots, y_k) = q_0^* \frac{\lambda^k}{k!} F^{(k)}(\mathbf{x}), \quad (2.45)$$

$$q_0^* = \left(1 + \sum_{k=1}^N \frac{\lambda^k}{k!} F^{(k)}(\mathbf{R}) \right)^{-1}. \quad (2.46)$$

Возвращаясь к плотностям $q_k(\mathbf{x}, t_1, \dots, t_k)$ и учитывая (2.39), получаем утверждение теоремы. Доказательство того, что система (2.40) – (2.43) имеет единственное вероятностное решение, можно провести аналогично работе [179]. ■

Следствие 2.1. Стационарное распределение $Q_k(\mathbf{x}) := Q_k(\mathbf{x}, \infty, \dots, \infty)$ имеет вид

$$Q_k(\mathbf{x}) = q_0 \frac{\rho^k}{k!} F^{(k)}(\mathbf{x}), \quad (2.47)$$

$$q_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^N \frac{\rho^k}{k!} F^{(k)}(\mathbf{R}) \right)^{-1}. \quad (2.48)$$

Доказательство следует в результате прямого интегрирования выражений (2.34) по переменным t_1, \dots, t_k . ■

Таким образом, стационарное распределение РеСМО с рекуррентным временем обслуживания не зависит от вида ФР времени обслуживания, а зависит только от среднего значения.

Данное свойство нечувствительности к виду ФР времени обслуживания имеет место и для более широкого класса РеСМО, с интенсивностями поступления и обслуживания, зависящими от состояния системы, анализ которой в случае экспоненциального обслуживания был проведен в [184].

Рассматривается многолинейная РеСМО с N приборами и M -мерным ресурсом объема \mathbf{R} . В систему поступает пуассоновский поток заявок интенсивностью λ_k , зависящей от числа k заявок в системе. Заявки приносят с собой некоторый объем работы, который необходимо выполнить для их обслуживания. Объемы работ не зависят друг от друга, не зависят от поступающего потока и имеют одинаковую ФР $B(x)$ со средним b . Каждый прибор выполняет необходимую для обслуживания заявок работу с постоянной, зависящей от числа k

заявок в системе, скоростью σ_k . Помимо объема работы, заявке на все время обслуживания необходим некоторый случайный объем ресурса $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_M)$. Объемы требуемого ресурса не зависят от процессов поступления и обслуживания, независимы друг от друга и имеют ФР $F(\mathbf{x})$.

На этот раз опишем поведение системы в терминах случайных списков. В случае, если объемы работ заявки распределены экспоненциально, поведение системы описывается процессом $X(t) = (\xi(t), \gamma(t))$, где $\xi(t)$ – число заявок в момент t , и $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_{\xi(t)}(t))$, где $\gamma_i(t)$ – вектор объема ресурса, занятого i -й заявкой. В [184] было показано, что стационарное распределение в случае экспоненциального распределения объемов работ заявок имеет вид

$$p_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P(\xi(t) = 0) = \left(1 + \sum_{k=1}^N F^{(k)}(\mathbf{R}) \frac{b^k}{k!} \prod_{i=1}^k \frac{\lambda_{i-1}}{\sigma_i} \right)^{-1}, \quad (2.49)$$

$$p_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(\xi(t) = k, \gamma_1(t) \leq \mathbf{r}_1, \dots, \gamma_k(t) \leq \mathbf{r}_k) = \quad (2.50)$$

$$= p_0 F(\mathbf{r}_1) F(\mathbf{r}_2) \dots F(\mathbf{r}_k) \frac{b^k}{k!} \prod_{i=1}^k \frac{\lambda_{i-1}}{\sigma_i}, \quad 1 \leq k \leq N, \mathbf{r}_1 \geq \mathbf{0}, \dots, \mathbf{r}_k \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^k \mathbf{r}_i \leq \mathbf{R}, 1 \leq k \leq N.$$

Рассмотрим теперь поведение системы в случае неэкспоненциального распределения объемов работ. В дальнейшем будем предполагать наличие плотности $b(x)$ объема работы на полуоси $[0, \infty)$, однако изложенные ниже результаты можно получить и в более общем случае, опираясь на свойства слабой непрерывности [244]. Поведение системы описывается процессом $\tilde{X}(t) = (\xi(t), \gamma(t), \beta(t))$, где добавленная третья компонента обозначает вектор объемов обслуженной работы каждой заявки, $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \dots, \beta_{\xi(t)}(t))$, где $\beta_i(t)$ – объем обслуженной работы i -й заявки. Как и ранее, будем считать, что при поступлении заявки с объемом требований \mathbf{r} заявка из состояния $(k, (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k), (x_1, \dots, x_k))$ переходит в одно из состояний $(k+1, (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_k), (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_k))$, $0 \leq i \leq k$, с вероятностью $\frac{1}{k+1}$.

Обозначим

$$q_0(t) = P(\xi(t) = 0), \quad (2.51)$$

$$Q_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k, x_1, \dots, x_k; t) = P(\xi(t) = k, \gamma_i(t) \leq \mathbf{r}_i, \beta_i(t) < x_i, i = 1, 2, \dots, k), \quad 1 \leq k \leq N, \quad (2.52)$$

вероятности состояний системы в момент t , а $q_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k, x_1, \dots, x_k; t)$ – плотности вероятностей $Q_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k, x_1, \dots, x_k; t)$, $k > 0$.

Теорема 2.3. Если средний объем работ b конечен, то стационарное распределение случайного процесса $(\xi(t), \gamma(t), \beta(t))$ имеет вид

$$Q_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k, x_1, \dots, x_k) = q_0 F(\mathbf{r}_1) \dots F(\mathbf{r}_k) \frac{b^k}{k!} \prod_{i=1}^k \frac{\lambda_{i-1}}{\sigma_i} \tilde{B}(x_i), \quad (2.53)$$

$$1 \leq k \leq N, \mathbf{r}_1 \geq \mathbf{0}, \dots, \mathbf{r}_k \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^k \mathbf{r}_i \leq \mathbf{R},$$

$$q_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^N \frac{b^k}{k!} \prod_{i=1}^k \frac{\lambda_{i-1}}{\sigma_i} \sum_{\mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{r}_k = \mathbf{R}} F(\mathbf{r}_1) \dots F(\mathbf{r}_k) \right)^{-1}. \quad (2.54)$$

где $\tilde{B}(x)$ – ФР остаточного объема работы

$$\tilde{B}(x) = \frac{1}{b} \int_0^x (1 - B(y)) dy. \quad (2.55)$$

Доказательство.

Выпишем уравнения изменения плотностей $q_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k, x_1, \dots, x_k; t)$, за малое время Δt .

$$q_0(t + \Delta t) = q_0(t) (1 - \lambda_0 F(\mathbf{R}) \Delta t) + \int_{\mathbf{0} \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{R}} \int_0^\infty q_1(d\mathbf{r}, x; t) \frac{b(x) \sigma_1 \Delta t}{1 - B(x)} dx + o(\Delta t), \quad (2.56)$$

$$q_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k, x_1, \dots, x_k; t + \Delta t) = \quad (2.57)$$

$$= \int_{\substack{\mathbf{0} \leq \mathbf{s}_i \leq \mathbf{r}_i, \\ i=1, 2, \dots, k}} q_k(d\mathbf{s}_1, \dots, d\mathbf{s}_k, x_1 - \sigma_k \Delta t, \dots, x_k - \sigma_k \Delta t; t) \left[1 - \left(\lambda_k F(\mathbf{R} - \sum_{i=1}^k \mathbf{s}_i) + \sum_{i=1}^k \frac{b(x_i) \sigma_k}{1 - B(x_i)} \right) \Delta t \right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k+1} \int_{\substack{\mathbf{0} \leq \mathbf{s}_i \leq \mathbf{r}_i, \\ i=1, 2, \dots, k \\ \mathbf{s} \leq \mathbf{R} - \mathbf{s}_1 - \dots - \mathbf{s}_k}} \int_0^\infty q_{k+1}(d\mathbf{s}_1, \dots, d\mathbf{s}_{j-1}, d\mathbf{s}, d\mathbf{s}_j, \dots, d\mathbf{s}_k, x_1 - \sigma_{k+1} \Delta t, \dots)$$

$$\dots, x_{j-1} - \sigma_{k+1}\Delta t, x, x_j - \sigma_{k+1}\Delta t, x_k - \sigma_{k+1}\Delta t; t) \frac{b(x)\sigma_{k+1}\Delta t}{1-B(x)} dx + o(\Delta t),$$

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{r}_i \leq \mathbf{R}, \quad 1 \leq k \leq N-1.$$

$$= q_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, x_1, \dots, x_N; t + \Delta t) = \quad (2.58)$$

$$= q_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, x_1 - \sigma_N\Delta t, \dots, x_N - \sigma_N\Delta t; t) \left[1 - \sum_{i=1}^N \frac{b(x_i)\sigma_N\Delta t}{1-B(x_i)} \right] + o(\Delta t), \quad \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \leq \mathbf{R}.$$

Здесь множитель $\frac{b(x)\sigma_{k+1}\Delta t}{1-B(x)}$ имеет смысл вероятности того, что заявка будет

обслужена на интервале $(t, t + \Delta t)$ при условии, что объем работы, принесенной ею, превышает x . Далее, аналогично предыдущему доказательству, поделив уравнения (2.56) – (2.58) на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем

$$\frac{\partial q_0(t)}{\partial t} + \lambda q_0(t) F(\mathbf{R}) = \sigma_1 \int_{0 \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{R}} \int_0^\infty q_1(d\mathbf{r}, x; t) \frac{b(x)}{1-B(x)} dx, \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial q_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k, x_1, \dots, x_k; t)}{\partial t} + \sigma_k \sum_{i=1}^k \frac{\partial q_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k, x_1, \dots, x_k; t)}{\partial x_i} = \quad (2.60)$$

$$= - \int_{\substack{0 \leq \mathbf{s}_i \leq \mathbf{r}_i, \\ i=1, 2, \dots, k}} q_k(ds_1, \dots, ds_k, x_1, \dots, x_k; t) \left(\lambda_k F(\mathbf{R} - \sum_{i=1}^k \mathbf{s}_i) + \sum_{i=1}^k \frac{b(x_i)\sigma_k}{1-B(x_i)} \right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k+1} \int_{\substack{0 \leq \mathbf{s}_i \leq \mathbf{r}_i, \\ i=1, 2, \dots, k \\ \mathbf{s} \leq \mathbf{R} - \mathbf{s}_1 - \dots - \mathbf{s}_k}} \int_0^\infty q_{k+1}(ds_1, \dots, ds_{j-1}, ds, ds_j, \dots, ds_k, x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_j, x_k; t) \frac{b(x)\sigma_{k+1}}{1-B(x)} dx,$$

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{r}_i \leq \mathbf{R}, \quad 1 \leq k \leq N-1,$$

$$\frac{\partial q_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, x_1, \dots, x_N; t)}{\partial t} + \sigma_N \sum_{i=1}^N \frac{\partial q_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, x_1, \dots, x_N; t)}{\partial x_i} = \quad (2.61)$$

$$= -q_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, x_1, \dots, x_N; t) \sum_{i=1}^N \frac{b(x_i)\sigma_N}{1-B(x_i)}, \quad \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \leq \mathbf{R}.$$

Граничные условия следуют из поведения в моменты поступления заявок:

$$\int_0^{\sigma_k \Delta t} q_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_{k-1}, x_1 + \sigma_k \Delta t, \dots, x_{i-1} + \sigma_k \Delta t, x, x_i + \sigma_k \Delta t, \dots, x_{k-1} + \sigma_k \Delta t; t + \Delta t) dx =$$

$$= \frac{\lambda_k \Delta t}{k} F(\mathbf{r}) q_{k-1}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{k-1}, x_1, \dots, x_{k-1}; t) + o(\Delta t), \quad \sum_{i=1}^k \mathbf{r}_i \leq \mathbf{R} - \mathbf{r}, \quad 0 < k \leq N. \quad (2.62)$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем

$$\sigma_k q_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_{k-1}, x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{k-1}; t) = \quad (2.63)$$

$$= \frac{\lambda_k}{k} F(\mathbf{r}) q_{k-1}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{k-1}, x_1, \dots, x_{k-1}; t), \quad \sum_{i=1}^k \mathbf{r}_i \leq \mathbf{R} - \mathbf{r}, \quad 0 < k \leq N$$

Для стационарных вероятностей, не зависящих от времени t , уравнения (2.59) – (2.61) и граничное условие (2.63) принимают вид

$$\lambda q_0(t) F(\mathbf{R}) = \sigma_1 \int_{0 \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{R}} \int_0^\infty q_1(d\mathbf{r}, x; t) \frac{b(x)}{1 - B(x)} dx, \quad (2.64)$$

$$\sigma_k \sum_{i=1}^k \frac{\partial q_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k, x_1, \dots, x_k)}{\partial x_i} = \quad (2.65)$$

$$= - \int_{\substack{0 \leq \mathbf{s}_i \leq \mathbf{r}_i, \\ i=1, \dots, k}} q_k(ds_1, \dots, ds_k, x_1, \dots, x_k) \left(\lambda_k F(\mathbf{R} - \sum_{i=1}^k \mathbf{s}_i) + \sum_{i=1}^k \frac{b(x_i) \sigma_k}{1 - B(x_i)} \right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k+1} \int_{\substack{0 \leq \mathbf{s}_i \leq \mathbf{r}_i, \\ i=1, 2, \dots, k \\ \mathbf{s} \leq \mathbf{R} - \mathbf{s}_1 - \dots - \mathbf{s}_k}} \int_0^\infty q_{k+1}(ds_1, \dots, ds_{j-1}, ds, ds_j, \dots, ds_k, x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_j, x_k) \frac{b(x) \sigma_{k+1}}{1 - B(x)} dx,$$

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{r}_i \leq \mathbf{R}, \quad 1 \leq k \leq N - 1,$$

$$\sigma_N \sum_{i=1}^N \frac{\partial q_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, x_1, \dots, x_N)}{\partial x_i} = -q_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, x_1, \dots, x_N) \sum_{i=1}^N \frac{b(x_i) \sigma_N}{1 - B(x_i)}, \quad \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \leq \mathbf{R}. \quad (2.66)$$

$$\sigma_k q_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_{k-1}, x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{k-1}) = \quad (2.67)$$

$$= \frac{\lambda_k}{k} F(\mathbf{r}) q_{k-1}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{k-1}, x_1, \dots, x_{k-1}), \quad \sum_{i=1}^k \mathbf{r}_i \leq \mathbf{R} - \mathbf{r}, \quad 0 < k \leq N.$$

Нетрудно убедиться при помощи прямой подстановки, что решение системы (2.64) – (2.67) задается выражениями

$$q_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k, x_1, \dots, x_k) = q_0 F(\mathbf{r}_1) \dots F(\mathbf{r}_k) \frac{1}{k!} \prod_{i=1}^k \frac{\lambda_{i-1}}{\sigma_i} (1 - B(x_i)), \quad (2.68)$$

$$0 \leq k \leq N, \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0}, \dots, \mathbf{x}_k \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^k \mathbf{x}_i \leq \mathbf{R}.$$

Переходя от плотностей $q_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k, x_1, \dots, x_k)$ к вероятностям $Q_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k, x_1, \dots, x_k)$ интегрированием по переменным x_1, \dots, x_k и учитывая условие нормировки, получаем утверждение теоремы. ■

Следствие 2.2. Формулы для вероятностей $Q_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k) = Q_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k, \infty, \dots, \infty)$ идентичны выражениям для случая экспоненциального распределения объема работы, приносимой заявками. Таким образом, стационарное распределение РеСМО с интенсивностями поступления и обслуживания, зависящими от числа заявок в системе, не зависит от вида распределения объема работы, а зависит только от среднего объема.

Доказательство.

Переходя к пределу при $x_i \rightarrow \infty, i = 1, 2, \dots, k$, выражения (2.53) становятся тождественно равны формулам (2.50) для случая экспоненциального распределения объемов работы. ■

2.4. Анализ ресурсной системы с марковским входящим потоком

Преыдущие результаты данной главы получены для РеСМО с пуассоновским входящим потоком. В текущем разделе проведен анализ РеСМО с более общим марковским потоком заявок (Markovian Arrival Process, MAP).

Рассматривается базовая РеСМО, описанная в разделе 2.1 с N приборами и объемом ресурса R . Для краткости изложения будем полагать $M = 1$, т.е. рассматривается РеСМО с одномерным ресурсом. Заявки поступают в соответствии с MAP-потоком, управляемым скачкообразным марковским процессом с конечным числом K состояний. MAP-поток характеризуется двумя матрицами \mathbf{A}_0 и \mathbf{A}_1 , причем $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1$ является инфинитезимальной матрицей управляющего марковского процесса [114, 172]. Пусть матрица \mathbf{A} неразложима,

тогда управляющий марковский процесс имеет стационарное распределение θ . Средняя интенсивность λ поступления заявок может быть вычислена по формуле

$$\lambda = \theta \mathbf{a}, \quad (2.69)$$

где $\mathbf{a} = \mathbf{A}_1 \mathbf{1}$, а $\mathbf{1}$ - вектор из единиц соответствующей длины.

Поступающей в систему заявке для обслуживания требуется один прибор и некоторый дискретный объем ресурса, задаваемый рядом $\{f_j\}, 0 \leq j \leq R$. Времена обслуживания заявок распределены экспоненциально с параметром μ .

Правила функционирования РеСМО остаются такими же. Если при поступлении заявки в системе нет свободного прибора или недостаточно свободного ресурса, то она теряется. В противном случае она занимает прибор и требуемый объем ресурса на все время обслуживания. По окончании времени обслуживания заявка покидает систему, освобождая прибор и занятый объем ресурса.

Функционирование системы будем описывать в терминах псевдосписков, т.е. процессом $(\xi(t), \delta(t), \eta(t))$, где $\xi(t)$ обозначает число заявок в системе в момент времени t , $\delta(t)$ – суммарный объем занятого всеми заявками ресурса, а $\eta(t)$ – состояние управляющего марковского процесса. Для определения объемов ресурса, освобождаемых в моменты уходов заявок, будем использовать вместо ФР (1.25) следующий условный ряд распределения:

$$\varphi_j(n, r) = \frac{f_{r-j}^{(n-1)} f_j}{f_r^{(n)}}, \quad j = 0, 1, \dots, r, \quad (2.70)$$

где $f_r^{(n)}$ имеет смысл вероятности того, что суммарные требования n заявок составляют объем r , и представляют собой n -кратную свертку исходного распределения $\{f_j\}, 0 \leq j \leq R$.

Множество S состояний процесса $(\xi(t), \delta(t), \eta(t))$ может быть разбито на непересекающиеся подмножества $S_0 = \{(0, k) : 1 \leq k \leq K\}$ и $S_n = \{(n, r, k) : 0 \leq n \leq N, 0 \leq r \leq R, f_r^{(n)} > 0, 1 \leq k \leq K\}, 1 \leq n \leq N$. Обозначим s_n – число ненулевых вероятностей в свертках $f_r^{(n)}, 0 \leq r \leq R$. Тогда подмножество S_0 содержит K

состояний, а подмножества $S_n - s_n K$ состояний. Упорядочим ненулевые вероятности $\{f_r^{(n)}\}$, $0 \leq r \leq R$ по возрастанию r , а $I(n, j)$, $j = 0, 1, \dots, R$, обозначает порядковый номер ненулевой вероятности $f_j^{(n)}$ в ряду $\{f_r^{(n)}\}$, $0 \leq r \leq R$.

Стационарные вероятности процесса $(\xi(t), \delta(t), \eta(t))$ определяются следующим образом:

$$q_0(k) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = 0, \eta(t) = k\}, 1 \leq k \leq K, \quad (2.71)$$

$$q_n(r, k) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = n, \delta(t) = r, \eta(t) = k\}, (n, r, k) \in S_n. \quad (2.72)$$

Все переходы между состояниями процесса $(\xi(t), \delta(t), \eta(t))$ происходят либо внутри некоторого подмножества S_n (при изменении состояния управляющего входным потоком процесса $\eta(t)$), либо между соседними подмножествами (при поступлении или уходе заявки из системы). Поэтому инфинитезимальная матрица процесса $(\xi(t), \delta(t), \eta(t))$ естественным образом принимает блочный трехдиагональный вид:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_0 & \Lambda_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_1 & \mathbf{D}_1 & \Lambda_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{D}_2 & \Lambda_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \mathbf{M}_{n-1} & \mathbf{D}_{n-1} & \Lambda_{n-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{M}_n & \mathbf{D}_n \end{pmatrix}. \quad (2.73)$$

А система уравнений равновесия для векторов стационарных вероятностей $\mathbf{q}_n = (\mathbf{q}_n(r_1), \dots, \mathbf{q}_n(r_{s_n}))$, $1 \leq n \leq N$, где $\mathbf{q}_n(r_i) = (q_n(r_i, 1), \dots, q_n(r_i, K))$, $(n, r_i, K) \in S_n$, и $\mathbf{q}_0 = (q_0(1), q_0(2), \dots, q_0(K))$ принимает вид

$$\mathbf{q}_0 \mathbf{D}_0 + \mathbf{q}_1 \mathbf{M}_1 = \mathbf{0}, \quad (2.74)$$

$$\mathbf{q}_{n-1} \Lambda_{n-1} + \mathbf{q}_n \mathbf{D}_n + \mathbf{q}_{n+1} \mathbf{M}_{n+1} = \mathbf{0}, 1 \leq n \leq N-1, \quad (2.75)$$

$$\mathbf{q}_{N-1} \Lambda_{N-1} + \mathbf{q}_N \mathbf{D}_N = \mathbf{0}. \quad (2.76)$$

Здесь диагональный блок $\mathbf{D}_0 = \mathbf{A}_0$, а $\mathbf{D}_n, 1 \leq n \leq N$ представляют собой квадратные матрицы размерностью $s_n K \times s_n K$ и имеют блочно-диагональный вид

с размерностью блоков $K \times K$. Диагональные блоки $\mathbf{d}_n(j, j), 1 \leq j \leq s_n$ матриц $\mathbf{D}_n, 1 \leq n \leq N-1$ задаются выражениями

$$\mathbf{d}_n(I(n, r), I(n, r)) = \mathbf{A} - n\mu\mathbf{I} - \left(\sum_{j=0}^{R-r} f_j \right) \mathbf{A}_1, \quad 0 \leq r \leq R, \quad f_r^{(n)} > 0, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (2.77)$$

где \mathbf{I} обозначает единичную матрицу. Наконец, диагональные блоки матрицы \mathbf{D}_N одинаковы и имеют вид

$$\mathbf{d}_N(I(N, r), I(N, r)) = \mathbf{A} - N\mu\mathbf{I}. \quad (2.78)$$

Матрица Λ_0 представляет собой строку из s_1 блоков $\lambda_0(i), 1 \leq i \leq s_1$ размерности $K \times K$, причем

$$\lambda_0(I(1, r)) = f_r \mathbf{A}_1, \quad 0 \leq r \leq R, \quad f_r > 0. \quad (2.79)$$

Остальные блочные матрицы верхней диагонали $\Lambda_n, 1 \leq n \leq N-1$ имеют размерность $s_n K \times s_{n+1} K$, а их блоки $\lambda_n(i, j), 1 \leq i \leq s_n, 1 \leq j \leq s_{n+1}$ задаются выражениями

$$\lambda_n(I(n, r), I(n+1, s)) = f_{s-r} \mathbf{A}_1, \quad 0 \leq r \leq s \leq R, \quad f_r^{(n)} > 0, \quad f_s^{(n+1)} > 0. \quad (2.80)$$

Матрица \mathbf{M}_1 представляет собой столбец из блоков размерности $K \times K$, а составляющие блоки $\mathbf{m}_1(i), 1 \leq i \leq s_1$ имеют вид

$$\mathbf{m}_1(I(1, r)) = \mu\mathbf{I}, \quad 0 \leq r \leq R, \quad f_r > 0. \quad (2.81)$$

Остальные матрицы нижней диагонали $\mathbf{M}_n, 2 \leq n \leq N$ имеют размерность $s_n K \times s_{n-1} K$, а составляющие их блоки $\mathbf{m}_n(i, j), 1 \leq i \leq s_n, 1 \leq j \leq s_{n-1}$ имеют вид

$$\mathbf{m}_n(I(n, r), I(n-1, s)) = \varphi_{r-s}(n, r) n \mu \mathbf{I}, \quad 0 \leq s \leq r \leq R, \quad f_r^{(n)} > 0, \quad f_s^{(n-1)} > 0. \quad (2.82)$$

Блочный трехдиагональный вид (2.73) инфинитезимальной матрицы позволяет применять эффективные численные методы [183] решения системы уравнений (2.74) – (2.76). Получив стационарное распределение, можно переходить к вычислению вероятностных характеристик, таких как вероятность потери заявки π_B и средний объем занятого ресурса σ .

Средний объем занятого ресурса σ вычисляется по известной формуле математического ожидания:

$$\sigma = \sum_{(n,r,k) \in S} r q_n(r,k). \quad (2.83)$$

Наконец, согласно свойствам МАР-потока, вероятность потери заявки выражается формулой

$$\pi_B = 1 - \lambda^{-1} \left(\sum_{\substack{n,r: 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 \leq r \leq R, f_r^{(n)} > 0}} \mathbf{q}_n(r) \sum_{j=0}^{R-r} f_j \right) \mathbf{a}. \quad (2.84)$$

На рисунке 2.1 показано влияние параметров коррелированного потока на вероятность потери при постоянной средней интенсивности. Из параметров средней длительности λ^{-1} и коэффициента вариации c интервалов между поступлениями, а также автокорреляционной функции (АКФ) β с лагом 1 можно получить параметры ММРР-потока с двумя состояниями, являющегося частным случаем МАР-потока. Как видно на рисунке, высокие значения АКФ с лагом 1 и коэффициента вариации c приводят к значительному росту вероятности потери.

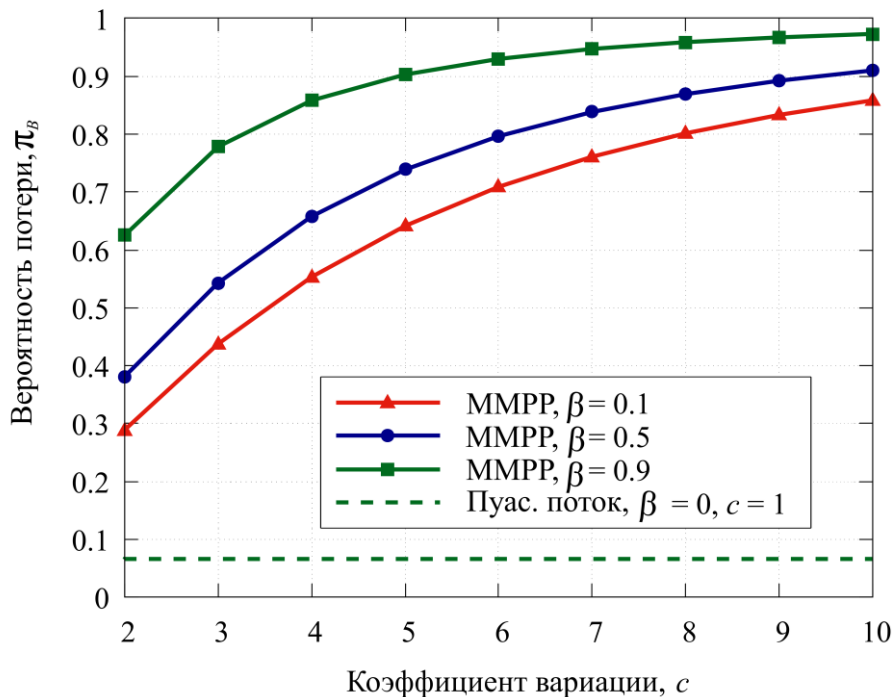


Рис. 2.1. Вероятности потери в зависимости от коэффициента вариации и разных значений АКФ с лагом 1 интервалов между поступлениями.

Глава 3. Методы анализа и расчета ресурсных систем массового обслуживания с сигналами

При применении моделей РеСМО для анализа показателей эффективности сетей сотовой мобильной связи необходимо учитывать, что объемы частотно-временного ресурса, выделяемые пользовательским сессиям в момент их начала, могут изменяться в течение времени жизни сессий. Эти изменения связаны с мобильностью пользователей, приводящей к изменению мощности принимаемого сигнала, или, что более характерно для высокочастотных сетей, с блокировками пути прямого распространения сигнала. Для моделирования этих особенностей сетей мобильной связи в РеСМО, представленных в главе 2, добавлен новый тип событий, называемый поступлением сигнала. При поступлении сигнала заявка освобождает ранее занимаемый ею объем ресурса и генерирует новое требование в соответствии с тем же распределением и пытается занять новый объем. Термин «сигнал» был впервые введен Э. Геленбе в работах [139, 142] для описания потока внешних событий, которые вызывают изменения в процессе обслуживания заявок в G-сетях. Стоит отметить, что в дальнейшем, в работах других ученых, например [107, 158, 166] и многих других, вместо сигналов стали использовать, как правило, термин «отрицательные заявки». Однако в контексте ресурсных систем этот термин оказался занят [184], отрицательными заявками в РеСМО называют заявки с отрицательным требованием к ресурсу, т.е. при их поступлении увеличивается доступный системе объем ресурса. Поэтому в рамках теории ресурсных систем пришлось вернуться к термину «сигнал».

Анализ РеСМО с сигналами в данной главе проводится для случаев дискретного распределения требований к ресурсу. Это связано с тем, что данный класс РеСМО особенно часто используется для анализа производительности систем мобильной связи, требования к частотно-временному ресурсу в которых, как показано в разделе 1.3, удобнее описывать именно дискретными распределениями. Раздел 3.1 посвящен разработке и анализу РеСМО с сигналами, представлены численные методы вычисления вероятностных характеристик. В

последующих разделах изложены методы приближенного расчета вероятностных характеристик. В разделе 3.2 изложена основная идея метода, основанного на построении имитирующей РеСМО без сигналов, но с дополнительным входящим потоком. А в разделе 3.3 предложена модификация исходной идеи метода, которая позволяет проводить вычисления с меньшими погрешностями.

3.1. Модель ресурсной системы с сигналами и ее вероятностные характеристики

Рассмотрим РеСМО с N приборами и объемом ресурса R единиц. Входящий поток заявок является пуассоновским с интенсивностью λ . Как и прежде, каждой заявке для обслуживания требуется один свободный прибор и случайное число единиц ресурса. Требования к ресурсу не зависят друг от друга, не зависят от процессов поступления и обслуживания и задаются рядом распределения $\{f_j\}$, $0 \leq j \leq R$. Поступающая заявка с требованием r единиц ресурса принимается к обслуживанию, если в системе есть свободный прибор и общее число занятых единиц ресурса в системе не превышает $R - r$. В противном случае заявка теряется. Время обслуживания распределено экспоненциально с интенсивностью μ . По окончании времени обслуживания заявка освобождает занятый объем ресурса.

На каждую заявку, находящуюся на обслуживании в системе, поступает независимый пуассоновский поток сигналов с интенсивностью γ . При поступлении сигнала от соответствующего потока заявка освобождает занятый объем ресурса, формирует новые ресурсные требования в соответствии с тем же распределением $\{f_j\}$, $0 \leq j \leq R$, и пытается продолжить свое обслуживание. Если число свободных единиц ресурса меньше нового требования заявки, процесс обслуживания прекращается, и заявка покидает систему. В противном случае процесс обслуживания заявки продолжается. Согласно свойству отсутствия последействия экспоненциального распределения, остаточное время обслуживания после поступления сигнала распределено экспоненциально с той же интенсивностью μ . Схема описанной системы представлена на рис. 3.1.

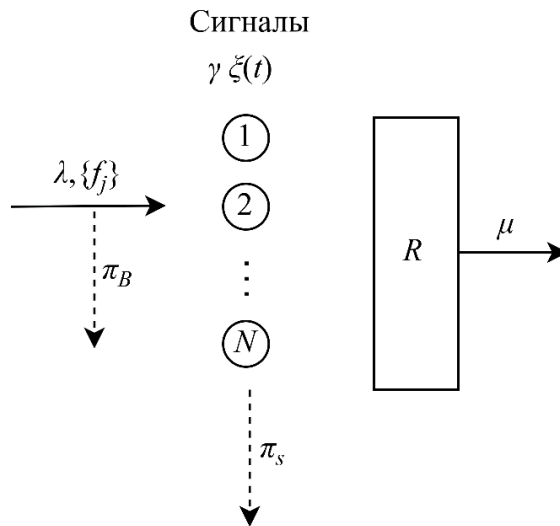


Рис. 3.1. Схема РеСМО с сигналами

Поведение системы будем описывать в терминах псевдосписков, рассмотренных в разделе 1.2. Рассматриваем процесс $X(t) = \{\xi(t), \delta(t)\}$, где $\xi(t)$ – число заявок в системе в момент времени t , а $\delta(t)$ – суммарное число единиц ресурса, занимаемых всеми заявками. Для определения объемов ресурса, освобождаемых в моменты уходов заявок, можно использовать ФР (1.25), однако в рассматриваемом случае дискретных требований к ресурсу удобнее использовать вероятности $\varphi_j(n, r)$ того, что уходящая заявка освободила j единиц ресурса при условии, что в момент до ухода в системе было n заявок, которые суммарно занимали r единиц ресурса:

$$\varphi_j(n, r) = \frac{f_{r-j}^{(n-1)} f_j}{f_r^{(n)}}, \quad j = 0, 1, \dots, r. \quad (3.1)$$

Здесь, как и ранее, $f_r^{(n)}$ – вероятность того, что n заявок занимают ровно r единиц ресурса. Вероятности $\{f_r^{(n)}\}$, $0 \leq j \leq R$ можно вычислить как n -кратную свертку начального распределения $\{f_r\}$, $0 \leq j \leq R$ требований к ресурсу по рекуррентному соотношению

$$f_r^{(n)} = \sum_{j=0}^r f_j f_{r-j}^{(n-1)}, \quad 0 \leq r \leq R, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (3.2)$$

с начальными значениями

$$f_0^{(0)} = 1, \quad f_r^{(0)} = 0, \quad r > 0. \quad (3.3)$$

Множество состояний процесса $X(t)$ можно разделить на $N+1$ непересекающихся подмножеств следующим образом:

$$S = \bigcup_{n=0}^N S_n, \quad S_0 = \{0\},$$

$$S_n = \{(n, r) : 0 \leq r \leq R, f_r^{(n)} > 0\}, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (3.4)$$

Число состояний в подмножестве S_n обозначим s_n , при этом $s_0 = 1$. Упорядочим состояния в множествах S_n по возрастанию числа занятых единиц ресурса и обозначим $I(n, r)$ – порядковый номер состояния (n, r) в множестве S_n . Стационарные вероятности процесса $X(t)$ определяются следующим образом:

$$q_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = 0\}, \quad (3.5)$$

$$q_k(r) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = k, \delta(t) = r\}, \quad (k, r) \in S_k. \quad (3.6)$$

Для вывода системы уравнений равновесия, характеризующих стационарное поведение системы, необходимо определить все возможные события в системе и соответствующие им переходы состояний. В системе возможны три типа событий: 1) поступление заявки, 2) уход заявки и 3) поступление сигнала. Пусть система находится в состоянии (n, r) . Поступающая заявка, которой требуются j единиц ресурса, принимается для обслуживания, если $n < N$ и $r + j \leq R$, и состояние системы изменяется на $(n+1, r+j)$. В противном случае поступающая заявка теряется, а состояние остается неизменным. В момент ухода заявки состояние системы изменяется на $(n-1, r-j)$ с вероятностью $\varphi_j(n, r)$. При поступлении сигнала соответствующая заявка освобождает j единиц ресурса с вероятностью $\varphi_j(n, r)$ и пытается занять i единиц ресурса с вероятностью f_i . Если $r - j + i \leq R$, то ее обслуживание продолжается, и система переходит в состояние $(n, r - j + i)$. В противном случае процесс обслуживания прерывается, и состояние системы изменяется на $(n-1, r-j)$.

С учетом рассмотренных событий и переходов, уравнения равновесия можно записать в виде

$$\lambda q_0 = \mu \sum_{j:(1,j) \in S_1} q_1(j), \quad (3.7)$$

$$\left(\lambda \sum_{j=0}^{R-r} f_j + k\mu + k\gamma \right) q_k(r) = \lambda \sum_{j \geq 0, (k-1, r-j) \in S_{k-1}} q_{k-1}(r-j) f_j + \quad (3.8)$$

$$+(k+1)\mu \sum_{j \geq 0, (k+1, r+j) \in S_{k+1}} q_{k+1}(r+j) \varphi_j(k+1, j+r) + k\gamma \sum_{j:(k,j) \in S_k} q_k(j) \sum_{i=\max(0, j-r)}^j f_{r-j+i} \varphi_i(k, j) +$$

$$+(k+1)\gamma \sum_{j \geq 0, (k+1, r+j) \in S_{k+1}} q_{k+1}(r+j) \varphi_j(k+1, j+r) \sum_{s=R-r+1}^R f_s, \quad 1 \leq k \leq N-1, \quad (k, r) \in S_k,$$

$$(N\mu + N\gamma) q_N(r) = \lambda \sum_{j \geq 0, (N-1, r-j) \in S_{N-1}} q_{N-1}(r-j) f_j + \quad (3.9)$$

$$+ N\gamma \sum_{j:(N,j) \in S_N} q_N(j) \sum_{i=\max(0, j-r)}^j \varphi_i(N, j) f_{r-j+i}, \quad (N, r) \in S_N.$$

Так как переходы возможны только между состояниями из соседних подмножеств, то инфинитезимальная матрица \mathbf{A} естественным образом принимает блочный-трехдиагональный вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_0 & \Lambda_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_1 & \mathbf{D}_1 & \Lambda_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{D}_2 & \Lambda_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \mathbf{M}_{n-1} & \mathbf{D}_{n-1} & \Lambda_{n-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{M}_n & \mathbf{D}_n \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Здесь первый диагональный блок \mathbf{D}_0 представляет собой скаляр, причем $\mathbf{D}_0 = -\lambda$. Элементы $d_n(i, j)$ других диагональных блоков \mathbf{D}_n , $1 \leq n \leq N-1$ размерностью $s_n \times s_n$ имеют вид

$$d_n(I(n, i), I(n, j)) = \begin{cases} -\left[\lambda \sum_{k=0}^{R-i} f_k + n\mu + \right. \\ \left. + n\gamma \left(1 - \sum_{s=0}^i \varphi_s(n, i) f_s \right) \right], & i = j, \\ n\gamma \sum_{s=\max(0, i-j)}^i \varphi_s(n, i) f_{j-i+s}, & i \neq j, \end{cases} \quad (3.11)$$

$$1 \leq n \leq N-1, \quad (n, i) \in S_n, \quad (n, j) \in S_n.$$

Элементы последнего диагонального блока \mathbf{D}_N имеют вид

$$d_N(I(N, i), I(N, j)) = \begin{cases} -N \left[\mu + \gamma \left(1 - \sum_{s=0}^i \varphi_s(N, i) f_s \right) \right], & i = j, \\ N\gamma \sum_{s=\max(0, i-j)}^i \varphi_s(N, i) f_{j-i+s}, & i \neq j, \end{cases} \quad (3.12)$$

$$(N, i) \in S_N, \quad (N, j) \in S_N.$$

Первый верхний диагональный блок Λ_0 представляет собой строку длиной s_1 , причем ее элементы $\lambda_1(j)$, $1 \leq j \leq s_1$ имеют вид:

$$\lambda_1(I(1, r)) = \lambda f_r, \quad (1, r) \in S_1. \quad (3.13)$$

Элементы $\lambda_n(i, j)$ остальных верхних диагональных блоков Λ_n , $1 \leq n \leq N-1$ размерностью $s_n \times s_{n+1}$ задаются выражениями

$$\lambda_n(I(n, i), I(n+1, j)) = \begin{cases} 0, & j < i, \\ \lambda f_{j-i}, & j \geq i, \end{cases} \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (n, i) \in S_n, \quad (n+1, j) \in S_{n+1}. \quad (3.14)$$

Первый нижний диагональный блок \mathbf{M}_1 представляет собой столбец длиной s_1 , причем его элементы $\mu_1(j)$, $1 \leq j \leq s_1$ имеют вид

$$\mu_1(j) = \mu, \quad 1 \leq j \leq s_1. \quad (3.15)$$

Элементы $\mu_n(i, j)$ остальных нижних диагональных блоков \mathbf{M}_n , $2 \leq n \leq N$ размерностью $s_{n+1} \times s_n$ задаются выражениями

$$\mu_n(I(n, i), I(n-1, j)) = \begin{cases} n\mu\varphi_{i-j}(n, i) + n\gamma\varphi_{i-j}(n, i) \sum_{s=R-j+1}^R f_s, & j \leq i, \\ 0, & j > i, \end{cases} \quad (3.16)$$

$$2 \leq n \leq N, \quad (n, i) \in S_n, \quad (n-1, j) \in S_{n-1}.$$

Блочный трехдиагональный вид матрицы \mathbf{A} позволяют переписать систему уравнений равновесия (3.7) – (3.9) в виде

$$q_0 \mathbf{D}_0 + \mathbf{q}_1 \mathbf{M}_1 = \mathbf{0}, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{q}_{n-1} \Lambda_{n-1} + \mathbf{q}_n \mathbf{D}_n + \mathbf{q}_{n+1} \mathbf{M}_{n+1} = \mathbf{0}, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{q}_{N-1} \Lambda_{N-1} + \mathbf{q}_N \mathbf{D}_N = \mathbf{0}, \quad (3.19)$$

где \mathbf{q}_n – вектор-строка, состоящая из стационарных вероятностей $q_n(r)$ таких, что $(n,r) \in S_n$. Так как матрица \mathbf{A} конечна и неразложима, то система (3.17) – (3.19) имеет единственное вероятностное решение. Для решения системы (3.17) – (3.19) можно применять специальные численные методы [183], использующие блочную трехдиагональную структуру инфинитезимальной матрицы.

Получив стационарное распределение, можно перейти к вычислению вероятностных характеристик. Во-первых, вероятность потери заявки π_B и средний объем σ занятого ресурса задаются выражениями, аналогичными выражениям для РеСМО без сигналов:

$$\pi_B = 1 - \sum_{n < N, (n,r) \in S_n} q_n(r) \sum_{j=0}^{R-r} f_j, \quad (3.20)$$

$$\sigma = \sum_{(n,r) \in S} r q_n(r). \quad (3.21)$$

Особый интерес при анализе РеСМО вызывают эффекты прерывания обслуживания заявок из-за поступления сигналов. Заметим, что в течение времени обслуживания заявки могут поступить несколько сигналов, каждый из которых может вызвать прерывание ее обслуживания. Будем называть вероятностью прерывания π_T долю заявок, обслуживание которых было прервано, среди всех принятых на обслуживание.

Утверждение 3.1. Вероятность прерывания π_T имеет вид

$$\pi_T = \frac{\gamma \bar{N} \pi_S}{\lambda(1 - \pi_B)}, \quad (3.22)$$

где π_S имеет смысл вероятности того, что при поступлении сигнала соответствующая заявка прерывается:

$$\pi_S = \sum_{(n,r) \in S, n > 0} q_n(r) \sum_{j=0}^r \varphi_j(n,r) \sum_{i=R-r+j+1}^R f_i, \quad (3.23)$$

а \bar{N} – среднее число заявок в системе:

$$\bar{N} = \sum_{(n,r) \in S} n q_n(r). \quad (3.24)$$

Доказательство.

Начнем с вывода вероятности π_s . Пусть система находится в состоянии (n, r) . Учтем, что каждый из потоков сигналов является пуассоновским, и они независимы друг от друга. Тогда и суммарный поток сигналов также является пуассоновским с суммарной интенсивностью $n\gamma$. Если в этом состоянии на одну из находящихся на обслуживании заявок поступает сигнал, то с вероятностью $\varphi_j(n, r)$ она освобождает j единиц ресурса, и с вероятностью $\sum_{i=R-r+j+1}^R f_i$ ее новое требование превышает свободный объем ресурса, включая освободившиеся j единиц, что приводит к прерыванию обслуживания. Просуммировав по всем стационарным вероятностям системы, получаем выражение (3.23).

Рассмотрим достаточно длинный период времени T . Средняя интенсивность поступления сигналов за этот период может быть записана как $\gamma\bar{N}$, где \bar{N} – среднее число заявок в системе. Тогда интенсивность прерываний обслуживания заявок равна $\gamma\bar{N}\pi_s$, а среднее число прерываний за период T имеет вид $\gamma\bar{N}\pi_s T$. За то же время T в систему в среднем принимается $\lambda(1-\pi_B)T$ заявок. Тогда вероятность прерывания имеет вид

$$\pi_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\gamma\bar{N}\pi_s T}{\lambda(1-\pi_B)T} = \frac{\gamma\bar{N}\pi_s}{\lambda(1-\pi_B)}. \blacksquare$$

3.2. Метод приближенного расчета вероятностных характеристик

При больших значениях числа приборов N и объема ресурса R численные методы решения системы уравнений равновесия (3.7) – (3.9), в том числе приближенные итерационные, сталкиваются с растущим временем выполнения. Более того, в ряде приложений, как показано в последующих главах, некоторые показатели эффективности сетей мобильной связи приходится вычислять, итерационно приближая вероятностными характеристиками РеСМО с сигналами, что приводит к необходимости многократно решать соответствующие системы уравнений с разными параметрами. Поэтому возникает необходимость в более

эффективных приближенных методах вычисления вероятностных характеристик РеСМО с сигналами.

Рассматривается экспоненциальная РеСМО с одним входящим потоком интенсивностью λ , интенсивностями обслуживания μ и потоком сигналов на каждую обслуживаемую заявку интенсивностью γ . Поведение этой системы будем имитировать РеСМО без сигналов, но с интенсивностями обслуживания $\mu + \gamma$ и с дополнительным входящим потоком интенсивностью $\gamma\bar{N}$, где \bar{N} – среднее число заявок в системе.

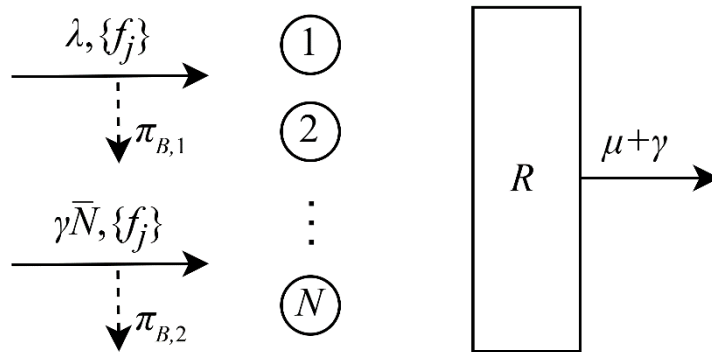


Рис. 3.2. Схема имитирующей РеСМО без сигналов и с дополнительным входящим потоком

Для иллюстрации связи систем интерпретируем поведение исходной РеСМО с сигналами следующим образом. Будем считать, что при поступлении сигнала заявка покидает систему, но с вероятностью $\frac{\gamma}{\mu + \gamma}$ тут же возвращаются обратно с новым требованием к ресурсу. В этом случае времена пребывания заявок на обслуживании будут так же экспоненциальными с суммарным параметром $\mu + \gamma$, среднюю интенсивность ухода заявок из системы можно выразить $(\mu + \gamma)\bar{N}$, а с учетом вероятности возврата средняя интенсивность потока возвращающихся заявок равна $\gamma\bar{N}$. Очевидно, что поток возвращающихся заявок не является пуассоновским в исходной системе, но в имитирующей будем считать его таковым.

Стационарное распределение РеСМО без сигналов имеет мультипликативный вид, а ее вероятностные характеристики могут быть вычислены с использованием эффективных алгоритмов, изложенных в разделе 2.1.

Поэтому предложенный подход вычисления вероятностных характеристик позволяет значительно снизить вычислительную сложность.

Будем называть поток впервые поступающих заявок потоком первичных заявок с интенсивностью $\lambda_1 = \lambda$, а поток возвращающихся – потоком вторичных заявок с интенсивностью $\lambda_2 = \gamma \bar{N}$. Нетрудно видеть, что интенсивность потока вторичных заявок зависит от среднего числа \bar{N} заявок в системе, при этом эта же интенсивность влияет на \bar{N} . Поэтому для расчета интенсивности потока вторичных заявок используется итерационный подход.

Начинается итерационная процедура при $\lambda_1 = \lambda$ и $\lambda_2^{(0)} = 0$. Так как поток вторичных заявок в имитирующей модели предполагается пуассоновским, а интенсивности обслуживания и распределения требований к ресурсу одинаковы, то, согласно теореме 2.1, суммарная нагрузка равна $\rho^{(0)} = \frac{\lambda}{\mu + \gamma}$. Далее на первом шаге вычисляется вероятность $\pi_B^{(0)}$ потери заявки при помощи вычислительного алгоритма из раздела 2.1 по формуле (2.14). Приравнявая интенсивности принятия и ухода заявок из системы, получаем

$$\bar{N} = \rho(1 - \pi_B), \quad (3.25)$$

что позволяет получить среднее число $\bar{N}^{(0)}$ заявок в системе. Затем пересчитываются нагрузочные параметры, т.е. $\lambda_2^{(1)} = \gamma \bar{N}^{(0)}$ и $\rho^{(1)} = \frac{\lambda + \gamma \bar{N}^{(0)}}{\mu + \gamma}$, и начинается следующая итерация для расчета $\bar{N}^{(1)}$. Процедура продолжается до тех пор, пока выполняется $|\bar{N}^{(k+1)} - \bar{N}^{(k)}| \geq \varepsilon$, где ε – заданное положительное число.

Когда заданная точность достигнута, можно переходить к вычислению вероятностных характеристик. Так, вероятность потери π_B в исходной системе имитируется вероятностью потери $\pi_{B,1}$ первичных заявок, а вероятность π_S того, что при поступлении сигнала заявка прерывается, – вероятностью потери $\pi_{B,2}$ вторичных заявок. И-за равенства распределений требований у обоих типов заявок и в силу предположения о пуассоновском потоке вторичных заявок, в

имитирующей модели всегда $\pi_{B,1} = \pi_{B,2} = \pi_B$. Наконец, вероятность прерывания π_T получается по формуле (3.22).

Для обоснования сходимости описанной итерационной процедуры введем

$$Z(x) = \frac{\lambda + \gamma x}{\mu + \gamma} \left(1 - \pi \left(\frac{\lambda + \gamma x}{\mu + \gamma} \right) \right), \quad (3.26)$$

где

$$\pi(y) = 1 - \left(1 + \sum_{n=1}^N \frac{y^n}{n!} \sum_{r=0}^R f_r^{(n)} \right)^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{y^n}{n!} \sum_{r=0}^R f_r^{(n+1)}. \quad (3.27)$$

Нетрудно видеть, что формула (3.26) задает формулу для итерационного вычисления \bar{N} , а формула (3.27) описывает зависимость вероятности потери заявки от предложенной нагрузки.

Теорема 3.1. Уравнение $x = Z(x)$ имеет единственное решение при $x \geq 0$, которое может быть получено методом простой итерации.

Доказательство.

Покажем, что $Z(x)$ является сжимающим отображением. Для этого достаточно показать, что $|Z'(x)| < 1$. Дифференцируя выражение (3.26), получаем

$$Z'(x) = \frac{\gamma}{\mu + \gamma} \left(1 - \pi \left(\frac{\lambda + \gamma x}{\mu + \gamma} \right) \right) - \frac{\lambda + \gamma x}{\mu + \gamma} \frac{\gamma}{\mu + \gamma} \pi' \left(\frac{\lambda + \gamma x}{\mu + \gamma} \right). \quad (3.28)$$

Обозначим $\rho = \frac{\lambda + \gamma x}{\mu + \gamma}$. При $x \geq 0$ выполняется $\rho > 0$, и тогда выражение

(3.28) принимает вид

$$Z'(x) = \frac{\gamma}{\mu + \gamma} (1 - \pi(\rho) - \rho \pi'(\rho)). \quad (3.29)$$

Оценим теперь $\pi'(\rho)$. Введем функцию

$$G(\rho) = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=0}^R f_r^{(n)}. \quad (3.30)$$

Нетрудно заметить, что функция $\pi(\rho)$ может быть записана через $G(\rho)$ в виде

$$\pi(\rho) = 1 - \frac{G'(\rho)}{G(\rho)}, \quad (3.31)$$

а ее производная –

$$\pi'(\rho) = \left(\frac{G'(\rho)}{G(\rho)} \right)^2 - \frac{G''(\rho)}{G(\rho)}. \quad (3.32)$$

Оценим каждое слагаемое (3.32) по отдельности. Первое слагаемое принимает вид

$$\frac{G'(\rho)}{G(\rho)} = G^{-1}(\rho) \sum_{n=1}^N \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{r=0}^R f_r^{(n)} = \frac{1}{\rho} G^{-1}(\rho) \sum_{n=1}^N n \frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=0}^R f_r^{(n)}.$$

Получившееся выражение без первого множителя представляет собой математическое ожидание числа заявок в РеСМО без сигналов с предложенной нагрузкой ρ . Таким образом, первое слагаемое выражения (3.32) можно представить в следующем виде:

$$\left(\frac{G'(\rho)}{G(\rho)} \right)^2 = \left(\frac{\bar{N}}{\rho} \right)^2. \quad (3.33)$$

Перейдем ко второму слагаемому выражения (3.32). По аналогии получаем

$$\begin{aligned} \frac{G''(\rho)}{G(\rho)} &= G^{-1}(\rho) \sum_{n=2}^N \frac{\rho^{n-2}}{(n-2)!} \sum_{r=0}^R f_r^{(n)} = \frac{1}{\rho^2} G^{-1}(\rho) \sum_{n=2}^N n(n-1) \frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=0}^R f_r^{(n)} = \\ &= \frac{1}{\rho^2} \left(G^{-1}(\rho) \sum_{n=1}^N n^2 \frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=0}^R f_r^{(n)} - G^{-1}(\rho) \sum_{n=1}^N n \frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=0}^R f_r^{(n)} \right). \end{aligned}$$

Теперь первое слагаемое в скобках получившегося выражения представляет собой второй момент числа заявок в РеСМО без сигналов с предложенной нагрузкой ρ , а второе – первый момент. Таким образом, второе слагаемое выражения (3.32) принимает вид

$$\frac{G''(\rho)}{G(\rho)} = \frac{\bar{N}^{(2)} - \bar{N}}{\rho^2}. \quad (3.34)$$

Тогда выражение (3.32) представляется в виде

$$\pi'(\rho) = \frac{\bar{N}^2 - \bar{N}^{(2)} + \bar{N}}{\rho^2} = \frac{\bar{N} - (\bar{N}^{(2)} - \bar{N}^2)}{\rho^2}. \quad (3.35)$$

Выражение в скобках в (3.35) представляет собой неотрицательную дисперсию числа заявок в системе. С другой стороны, из физического смысла

следует, что $\pi'(\rho) > 0$, так как вероятность потери растет с ростом предложенной нагрузки. Поэтому, с учетом соотношения (3.25), справедливо неравенство

$$0 < \pi'(\rho) \leq \frac{\bar{N}}{\rho^2} < \frac{1}{\rho}. \quad (3.36)$$

Наконец, подставляя полученное неравенство (3.36) в (3.29), получаем

$$|Z'(x)| < \frac{\gamma}{\mu + \gamma} < 1. \quad (3.37)$$

Таким образом, $Z(x)$ является сжимающим отображением. Но тогда из принципа сжимающих отображений прямо следует существование единственной неподвижной точки, являющейся решением уравнения $x = Z(x)$, которую можно получить методом простой итерации. ■

Стоит отметить, что изложенная идея построения имитирующей системы для приближенного расчета не является новой. Ранее схожий подход использовался для расчета характеристик систем массового обслуживания с повторными вызовами [83]. Однако для РеСМО с сигналами изложенный метод приближенного расчета дает приемлемую погрешность только для сравнительно небольшого диапазона структурных и нагрузочных параметров системы. В следующем разделе предложена модификация метода, позволяющая значительно снизить погрешность вычислений.

3.3. Модифицированный метод приближенного расчета

Ключевой недостаток метода, изложенного в предыдущем разделе, заключается в следующем. В исходной модели при поступлении сигнала заявка уходит из системы и тут же возвращается обратно с новым требованием к ресурсу. Поэтому в момент ее возврата в системе имеется, как минимум, тот объем, что она освободила в момент ухода. И если новое требование заявки к ресурсу меньше прошлого, то она с вероятностью 1 принимается в систему и продолжает обслуживание. Прерывание может происходить только если новое требование превосходить предыдущее. Поэтому в РеСМО с сигналами вероятность π_s того,

что в момент поступления сигнала заявка прерывается, меньше вероятности потери π_B вновь поступающих заявок. А в имитирующей системе из раздела 3.2 они всегда совпадают.

Для увеличения точности вычислений необходимо предлагать, что вторичные заявки в имитирующей модели могут поступать только в моменты окончания обслуживания. Тогда для расчета вероятности π_S того, что в момент поступления сигнала обслуживание заявки прерывается, будут использоваться не стационарные вероятности по времени, а вероятности по цепи Маркова (ЦМ), вложенной по моментам окончания обслуживания заявок.

3.3.1. Цепь Маркова, вложенная по моментам окончания обслуживания заявок

Рассматривается тот же марковский процесс $X(t) = \{\xi(t), \delta(t)\}$ из раздела 3.1 с интенсивностью поступления сигналов $\gamma = 0$. Пусть $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$ – моменты окончания обслуживания заявок. Процесс $X_n = \{\xi(\tau_n + 0), \delta(\tau_n + 0)\}$ представляет собой ЦМ, вложенную по моментам окончания обслуживания. Пространство состояний S ЦМ X_n может быть представлено как объединение N непересекающихся подмножеств:

$$S = \bigcup_{n=0}^{N-1} S_n, \quad (3.38)$$

$$S_n = \{(n, r) : 0 \leq r \leq R, f_r^{(n)} > 0, \exists j : 0 \leq j \leq R - r, f_j > 0\}. \quad (3.39)$$

Пусть $\beta_{k,j}(n, r)$ – вероятность того, что при условии нахождения в системе n заявок с суммарным требованием r единиц ресурса, до первого завершения обслуживания поступит ровно k новых заявок с суммарным требованием j единиц ресурса. Если система находится в состоянии (n, r) , то интервалы между принятиями заявок в систему являются экспоненциальными с параметром $\lambda \sum_{i=0}^{R-r} f_i$.

Из свойств экспоненциального распределения следует, что вероятность принятия заявки до того, как любая из находящихся на обслуживании заявок покинет

систему имеет вид $\lambda \sum_{i=0}^{R-r} f_i / \left(\lambda \sum_{i=0}^{R-r} f_i + n\mu \right)$. Вероятность того, что принятая заявка

требует для обслуживания j ресурсных единиц, задается условной вероятностью

$f_j / \sum_{i=0}^{R-r} f_i$. Таким образом, вероятности $\beta_{k,j}(n,r)$ можно представить в следующем

виде:

$$\beta_{k,i}(n,j) = \sum_{i_1+\dots+i_k=i} \frac{\lambda f_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} f_s + n\mu} \prod_{m=1}^{k-1} \frac{\lambda f_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-i_1-\dots-i_m} f_s + (n+m)\mu} \cdot \frac{(n+k)\mu}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-i} f_s + (n+k)\mu}, \quad (3.40)$$

$$1 \leq k+n \leq N-1,$$

$$\beta_{k,i}(n,j) = \sum_{i_1+\dots+i_k=i} \frac{\lambda f_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} f_s + n\mu} \prod_{m=1}^{k-1} \frac{\lambda f_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-i_1-\dots-i_m} f_s + (n+m)\mu}, \quad k+n=N. \quad (3.41)$$

Вероятности $\beta_{k,j}(n,r)$ представляют собой переходные вероятности ЦМ X_n .

Стационарные вероятности определим следующим образом:

$$\hat{q}_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\xi(\tau_n + 0) = 0\}, \quad (3.42)$$

$$\hat{q}_n(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\xi(\tau_n + 0) = n, \delta(\tau_n + 0) = r\}, \quad n > 0, (n,r) \in \hat{S}. \quad (3.43)$$

Выпишем систему уравнений равновесия для стационарных вероятностей:

$$\hat{q}_0 = \hat{q}_0 \sum_{j=0}^R f_j \beta_{0,0}(1,j) + \sum_{j=0}^R \hat{q}_1(j) \beta_{0,0}(1,j), \quad (3.44)$$

$$\hat{q}_n(r) = \hat{q}_0 \sum_{j=0}^R f_j \sum_{i=0}^{R-j} \beta_{n,i}(1,j) \varphi_{j+i-r}(n+1, j+i) + \sum_{j=0}^R \hat{q}_{n+1}(j) \beta_{0,0}(n+1, j) \varphi_{j-r}(n+1, j) + \quad (3.45)$$

$$+ \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^R \hat{q}_k(j) \sum_{i=0}^{R-j} \beta_{n-k+1,i}(k,j) \varphi_{j+i-r}(n+1, j+i), \quad 1 \leq n \leq N-2, 0 \leq r \leq R,$$

$$\hat{q}_{N-1}(r) = \hat{q}_0 \sum_{j=0}^R f_j \sum_{i=0}^{R-j} \beta_{N-1,i}(1,j) \varphi_{j+i-r}(N, j+i) + \quad (3.46)$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^R \hat{q}_k(j) \sum_{i=0}^{R-j} \beta_{N-k,i}(k,j) \varphi_{j+i-r}(N, j+i), \quad 0 \leq r \leq R.$$

Теорема 3.2. Стационарные вероятности ЦМ X_n (3.42) – (3.43), являющиеся решением системы (3.44) – (3.46) имеют вид

$$\hat{q}_k(r) = \hat{q}_0 \frac{\rho^k}{k!} f_r^{(k)} \sum_{s=0}^{R-r} f_s, \quad 1 \leq k \leq N-1, 0 \leq r \leq R, \quad (3.47)$$

$$\hat{q}_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{r=0}^R \frac{\rho^k}{k!} f_r^{(k)} \sum_{s=0}^{R-r} f_s \right)^{-1}. \quad (3.48)$$

Доказательство.

Поскольку цепь Маркова X_n неприводима, а пространство состояний S конечно, система уравнений равновесия (3.44) – (3.46) имеет единственное вероятностное решение. Непосредственно подставляя выражения (3.47) в уравнения равновесия, можно убедиться, что они являются решением.

Покажем это на примере наиболее общего уравнения (3.45). Подставим (3.47) в правую часть уравнения (3.45), получаем

$$\begin{aligned} & \hat{q}_0 \sum_{j=0}^R f_j \sum_{i=0}^{R-j} \beta_{n,i}(1, j) \varphi_{j+i-r}(n+1, j+i) + \\ & + \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^R \hat{q}_0 \frac{\lambda^k}{k! \mu^k} f_j^{(k)} \sum_{s=0}^{R-j} f_s \sum_{i=0}^{R-j} \beta_{n-k+1,i}(k, j) \varphi_{j+i-r}(n+1, j+i) + \\ & + \sum_{j=0}^R \hat{q}_0 \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)! \mu^{n+1}} f_j^{(n+1)} \sum_{s=0}^{R-j} f_s \beta_{0,0}(n+1, j) \varphi_{j-r}(n+1, j). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Теперь подставим выражения (3.40), (3.41) для вероятностей $\beta_{n,r}(k, j)$, и формулу (3.1), выражающую вероятности $\varphi_j(n, r)$ через свертки распределения требований к ресурсу. В результате перестановок множителей (3.49) приводится к виду

$$\left[\sum_{j=0}^R f_j \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+\dots+i_n=i} \frac{(n+1)\mu^{n+1} f_{j+i-r}}{\left(\lambda \sum_{v=0}^{R-j} f_v + \mu \right) f_{j+i}^{(n+1)}} \prod_{m=1}^n \frac{f_{i_m}}{\lambda \sum_{v=0}^{R-j-i_1-\dots-i_m} f_v + (m+1)\mu} + \right. \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^R \frac{f_j^{(k)}}{k!} \sum_{s=0}^{R-j} f_s \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+\dots+i_{n-k+1}=i} \frac{(n+1)\lambda\mu^{n-k+1} f_{j+i-r}}{\left(\lambda \sum_{v=0}^{R-j} f_v + k\mu\right) f_{j+i}^{(n+1)}} \prod_{m=1}^{n-k+1} \frac{f_{i_m}}{\lambda \sum_{v=0}^{R-j-i_1-\dots-i_m} f_v + (k+m)\mu} + \\
& \left. + \sum_{j=0}^R \frac{\lambda}{(n+1)!\mu} \sum_{s=0}^{R-j} f_s \frac{(n+1)\mu f_{j-r}}{\lambda \sum_{v=0}^{R-j} f_v + (n+1)\mu} \right] q_0 \frac{\lambda^n}{\mu^n} f_r^{(n)}.
\end{aligned}$$

Можно заметить, что первая сумма и первое слагаемое (при $k=1$) второй суммы в скобках в (3.50) имеют одинаковый знаменатель. Упростим их.

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^R \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+\dots+i_n=i} \frac{(n+1)\mu^{n+1} f_j f_{j+i-r}}{\left(\lambda \sum_{v=0}^{R-j} f_v + \mu\right) f_{j+i}^{(n+1)}} \prod_{m=1}^n \frac{f_{i_m}}{\lambda \sum_{v=0}^{R-j-i_1-\dots-i_m} f_v + (m+1)\mu} + \\
& + \sum_{j=0}^R \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+\dots+i_n=i} \frac{(n+1)\lambda\mu^n f_j^{(1)} f_{j+i-r} \sum_{s=0}^{R-j} f_s}{\left(\lambda \sum_{v=0}^{R-j} f_v + \mu\right) f_{j+i}^{(n+1)}} \prod_{m=1}^n \frac{f_{i_m}}{\lambda \sum_{v=0}^{R-j-i_1-\dots-i_m} f_v + (m+1)\mu} = \\
& = \sum_{j=0}^R \sum_{i=0}^{R-j} \frac{(n+1)\mu^n f_j f_{j+i-r} \left(\mu + \lambda \sum_{s=0}^{R-j} f_s\right)}{\left(\lambda \sum_{v=0}^{R-j} f_v + \mu\right) f_{j+i}^{(n+1)}} \sum_{i_1+\dots+i_n=i} \prod_{m=1}^n \frac{f_{i_m}}{\lambda \sum_{v=0}^{R-j-i_1-\dots-i_m} f_v + (m+1)\mu} = \\
& = \sum_{j=0}^R \sum_{i=0}^{R-j} \frac{(n+1)\mu^n f_j f_{j+i-r}}{f_{j+i}^{(n+1)}} \sum_{i_1+\dots+i_n=i} \prod_{m=1}^n \frac{f_{i_m}}{\lambda \sum_{v=0}^{R-j-i_1-\dots-i_m} f_v + (m+1)\mu}.
\end{aligned}$$

Таким образом, в результате преобразований получилось сократить одну скобку в знаменателе. Изменив порядок суммирования в последнем выражении, его можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^R \sum_{i=0}^{R-j} \frac{(n+1)\mu^n f_j f_{j+i-r}}{f_{j+i}^{(n+1)}} \sum_{i_1+\dots+i_n=i} \prod_{m=1}^n \frac{f_{i_m}}{\lambda \sum_{v=0}^{R-j-i_1-\dots-i_m} f_v + (m+1)\mu} = \\
& = \sum_{j=0}^R \sum_{i=0}^{R-j} \frac{(n+1)\mu^n f_j f_{j+i-r}}{f_{j+i}^{(n+1)}} \sum_{z=0}^i \sum_{i_1+\dots+i_{n-1}=i-z} \frac{f_z}{\lambda \sum_{v=0}^{R-j-z} f_v + 2\mu} \prod_{m=1}^{n-1} \frac{f_{i_m}}{\lambda \sum_{v=0}^{R-j-z-i_1-\dots-i_m} f_v + (m+2)\mu} =
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^R \sum_{z=0}^{R-j} \sum_{i=z}^{R-j-z} \frac{(n+1)\mu^n f_j f_{j+i-r}}{f_{j+i}^{(n+1)}} \sum_{i_1+\dots+i_{n-1}=i-z} \frac{f_z}{\lambda \sum_{v=0}^{R-j-z} f_v + 2\mu} \prod_{m=1}^{n-1} \frac{f_{i_m}}{\lambda \sum_{v=0}^{R-j-z-i_1-\dots-i_m} f_v + (m+2)\mu} =$$

$$\sum_{j=0}^R \sum_{z=0}^{R-j} \sum_{i=0}^{R-j-z} \frac{f_z}{\lambda \sum_{v=0}^{R-j-z} f_v + 2\mu} \frac{(n+1)\mu^n f_j f_{j+i+z-r}}{f_{j+i+z}^{(n+1)}} \sum_{i_1+\dots+i_{n-1}=i} \prod_{m=1}^{n-1} \frac{f_{i_m}}{\lambda \sum_{v=0}^{R-j-z-i_1-\dots-i_m} f_v + (m+2)\mu}.$$

Пусть $u = j + z$, тогда сумму $\sum_{j=0}^R \sum_{z=0}^{R-j}$ можно заменить на сумму $\sum_{u=0}^R \sum_{z=0}^u$,

подставив $u - z$ вместо j :

$$\sum_{u=0}^R \sum_{z=0}^u \sum_{i=0}^{R-u} \frac{f_z (n+1)\mu^n f_{u-z} f_{u+i-r}}{\left(\lambda \sum_{v=0}^{R-u} f_v + 2\mu \right) f_{u+i}^{(n+1)}} \sum_{i_1+\dots+i_{n-1}=i} \prod_{m=1}^{n-1} \frac{f_{i_m}}{\lambda \sum_{v=0}^{R-u-i_1-\dots-i_m} f_v + (m+2)\mu}.$$

Легко видеть, что суммирование по z влияет только на два множителя и z не зависит от других индексов суммирования, кроме u . Тогда

$$\sum_{u=0}^R \sum_{i=0}^{R-u} \frac{(n+1)\mu^n f_{u+i-r}}{\left(\lambda \sum_{v=0}^{R-u} f_v + 2\mu \right) f_{u+i}^{(n+1)}} \sum_{i_1+\dots+i_{n-1}=i} \prod_{m=1}^{n-1} \frac{f_{i_m}}{\lambda \sum_{v=0}^{R-u-i_1-\dots-i_m} f_v + (m+2)\mu} \sum_{z=0}^u f_z f_{u-z}.$$

Последняя сумма по z представляет собой формулу свертки. Подставляя j вместо u , окончательно получаем

$$\sum_{j=0}^R \sum_{i=0}^{R-j} \frac{(n+1)\mu^n f_j^{(2)} f_{j+i-r}}{\left(\lambda \sum_{v=0}^{R-j} f_v + 2\mu \right) f_{j+i}^{(n+1)}} \sum_{i_1+\dots+i_{n-1}=i} \prod_{m=1}^{n-1} \frac{f_{i_m}}{\lambda \sum_{v=0}^{R-j-i_1-\dots-i_m} f_v + (m+2)\mu}. \quad (3.51)$$

Таким образом, выражение (3.51) является результатом сложения первой суммы в скобках с первым слагаемым (при $k = 1$) второй суммы выражения (3.50). Нетрудно видеть, что знаменатели (3.51) и второго слагаемого (при $k = 2$) второй суммы в скобках выражения (3.50) одинаковы. Поэтому их можно сложить следующим образом

$$\sum_{j=0}^R \sum_{i=0}^{R-j} \frac{(n+1)\mu^n f_j^{(2)} f_{j+i-r}}{\left(\lambda \sum_{v=0}^{R-j} f_v + 2\mu \right) f_{j+i}^{(n+1)}} \sum_{i_1+\dots+i_{n-1}=i} \prod_{m=1}^{n-1} \frac{f_{i_m}}{\lambda \sum_{v=0}^{R-j-i_1-\dots-i_m} f_v + (m+2)\mu} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=0}^R \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+\dots+i_{n-1}=i}^{R-j} \frac{(n+1)\lambda\mu^{n-1}f_j^{(2)}f_{j+i-r} \sum_{s=0}^{R-j} f_s}{2! \left(\lambda \sum_{v=0}^{R-j} f_v + 2\mu \right) f_{j+i}^{(n+1)}} \prod_{m=1}^{n-1} \frac{f_{i_m}}{\lambda \sum_{v=0}^{R-j-i_1-\dots-i_m} f_v + (m+2)\mu} = \\
& = \sum_{j=0}^R \sum_{i=0}^{R-j} \frac{(n+1)\mu^{n-1}f_j^{(2)}f_{j+i-r}}{2! f_{j+i}^{(n+1)}} \sum_{i_1+\dots+i_{n-1}=i} \prod_{m=1}^{n-1} \frac{f_{i_m}}{\lambda \sum_{v=0}^{R-j-i_1-\dots-i_m} f_v + (m+2)\mu}.
\end{aligned}$$

Таким образом, удается сократить еще один множитель знаменателя. Применяя аналогичные преобразования сумм, последнее выражение принимает вид

$$\sum_{j=0}^R \sum_{i=0}^{R-j} \frac{(n+1)\mu^{n-1}f_j^{(3)}f_{j+i-r}}{2! \left(\lambda \sum_{v=0}^{R-j} f_v + 3\mu \right) f_{j+i}^{(n+1)}} \sum_{i_1+\dots+i_{n-2}=i} \prod_{m=1}^{n-2} \frac{f_{i_m}}{\lambda \sum_{v=0}^{R-j-i_1-\dots-i_m} f_v + (m+3)\mu}. \quad (3.52)$$

И снова знаменатель выражения (3.52) совпадают со знаменателем третьего слагаемого (при $k=3$) второй суммы выражения (3.50). Проведя по аналогии суммирование с третьим, а затем и со всеми остальными слагаемыми второй суммы выражения (3.50), сокращая каждый раз по одному множителю в знаменателе, оно приводится к виду

$$\hat{q}_0 \frac{\lambda^n}{\mu^n} f_r^{(n)} \left[\sum_{j=0}^R \sum_{i=0}^{R-j} \frac{(n+1)\mu f_j^{(n)} f_i f_{j+i-r}}{n! \left(\lambda \sum_{v=0}^{R-j-i} f_v + (n+1)\mu \right) f_{j+i}^{(n+1)}} + \sum_{j=0}^R \frac{\lambda(n+1)\mu f_{j-r} \sum_{s=0}^{R-j} f_s}{(n+1)! \mu \left(\lambda \sum_{v=0}^{R-j} f_v + (n+1)\mu \right)} \right]. \quad (3.53)$$

И опять, для упрощения первой суммы (3.53) пусть $u = i + j$, $j = u - i$, тогда суммы $\sum_{j=0}^R \sum_{i=0}^{R-j}$ можно заменить на $\sum_{u=0}^R \sum_{i=0}^u$, а значит

$$\hat{q}_0 \frac{\lambda^n}{\mu^n} f_r^{(n)} \left[\sum_{u=0}^R \sum_{i=0}^u \frac{(n+1)\mu f_{u-i}^{(n)} f_i f_{u-r}}{n! \left(\lambda \sum_{v=0}^{R-u} f_v + (n+1)\mu \right) f_u^{(n+1)}} + \sum_{j=0}^R \frac{\lambda(n+1)\mu f_{j-r} \sum_{s=0}^{R-j} f_s}{(n+1)! \mu \left(\lambda \sum_{v=0}^{R-j} f_v + (n+1)\mu \right)} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \hat{q}_0 \frac{\lambda^n}{\mu^n n!} f_r^{(n)} \left[\sum_{u=0}^R \frac{(n+1)\mu f_{u-r}}{\lambda \sum_{v=0}^{R-u} f_v + (n+1)\mu} + \sum_{j=0}^R \frac{\lambda f_{j-r} \sum_{s=0}^{R-j} f_s}{\lambda \sum_{v=0}^{R-u} f_v + (n+1)\mu} \right] = \\
&= \hat{q}_0 \frac{\lambda^n}{\mu^n n!} f_r^{(n)} \sum_{j=0}^R \frac{f_{j-r} \left(\lambda \sum_{s=0}^{R-j} f_s + (n+1)\mu \right)}{\left(\lambda \sum_{v=0}^{R-j} f_v + (n+1)\mu \right)} = \hat{q}_0 \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} f_r^{(n)} \sum_{j=0}^{R-r} f_j.
\end{aligned}$$

Таким образом, в результате всех преобразований показано, что при подставлении выражения (3.47) правая часть уравнения (3.45) становится равна левой. Подставляя (3.47) в остальные уравнения системы, (3.44) и (3.46), можно убедиться, что выражения (3.47) являются решением системы. Из условия нормировки выводится нормировочная константа (3.48).■

Стоит отметить, что в первой модели Эрланга, являющейся частным случаем экспоненциальной РеСМО без сигналов, стационарное распределение ЦМ, вложенной по моментам окончания обслуживания, отличается от распределения по времени только нормировочной константой. Как показано в теореме 3.2, в более общем случае это не выполняется.

3.3.2. Алгоритм расчета вероятностных характеристик

Результат теоремы 3.2 позволяет вычислять вероятность $\pi_{B,2}$ блокировки вторичных заявок, которая имитирует вероятность π_S того, что при поступлении сигнала заявка прерывается. Использование для расчета $\pi_{B,2}$ распределения ЦМ, вложенной по моментам окончания обслуживания, позволяет учитывать в имитирующей модели, что в момент перед поступлением вторичной заявки из системе ушла заявка и освободила некоторый объем ресурса.

$$\pi_{B,2} = 1 - \sum_{(n,r) \in S, n>0} \hat{q}_n(r) \sum_{i=0}^{R-r} f_i. \quad (3.54)$$

Вычисления по формуле (3.54) осложняются необходимостью вычисления стационарного распределения ЦМ $\{\hat{q}_n(r)\}$. Для снижения вычислительных затрат предлагается адаптировать сверточный алгоритм из раздела 2.1.

Введем дополнительные обозначения $\hat{G}(n, r)$ и $L(n, r)$:

$$\hat{G}(n, r) = \sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} \sum_{j=0}^r f_j^{(k)} \sum_{i=0}^{r-j} f_i = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\rho^k}{k!} \sum_{j=0}^r f_j^{(k)} \sum_{i=0}^{r-j} f_i, \quad (3.55)$$

$$L(n, r) = \sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} \sum_{j=0}^r f_j^{(k)} \left(\sum_{i=0}^{r-j} f_i \right)^2 = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\rho^k}{k!} \sum_{j=0}^r f_j^{(k)} \left(\sum_{i=0}^{r-j} f_i \right)^2. \quad (3.56)$$

Можно заметить, что $\hat{G}(N-1, R)$ представляет собой нормировочную константу стационарного распределения $\{\hat{q}_n(r)\}$ вложенной ЦМ. Запишем формулу (3.54) через $\hat{G}(n, r)$ и $L(n, r)$. Подставляя выражения (3.47) для стационарного распределения, получим

$$\pi_{B,2} = 1 - \hat{q}_0 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=0}^R f_r^{(n)} \sum_{i=0}^{R-r} f_i \sum_{m=0}^{R-r} f_m. \quad (3.57)$$

Так как $\hat{q}_0 = 1/\hat{G}(N-1, R)$, а сумма в выражении (3.57) есть $L(N-1, R)$, то можно записать

$$\pi_{B,2} = \frac{\hat{G}(N-1, R) - L(N-1, R)}{\hat{G}(N-1, R)}. \quad (3.58)$$

Значения функций $\hat{G}(N-1, R)$ и $L(N-1, R)$ можно выразить через $G(n, r)$, задаваемые формулой (2.7).

Утверждение 3.2. Вероятность $\pi_{B,2}$ потери вторичных заявок может быть выражена через функции $G(n, r)$ в виде

$$\pi_{B,2} = \frac{\sum_{j=0}^R f_j \sum_{i=0}^j f_i [G(N-1, R-i) - G(N-1, R-j)]}{\sum_{i=0}^R f_i G(N-1, R-i)}. \quad (3.59)$$

Доказательство.

Распишем $\hat{G}(N-1, R)$, используя правила перемены порядка суммирования:

$$\hat{G}(N-1, R) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} \sum_{j=0}^R f_j^{(k)} \sum_{i=0}^{R-j} f_i = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} \sum_{i=0}^R f_i \sum_{j=0}^{R-i} f_j^{(k)} = \sum_{i=0}^R f_i \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} \sum_{j=0}^{R-i} f_j^{(k)}.$$

Нетрудно видеть, что выражение, состоящее из двух внутренних сумм, есть $G(N-1, R-i)$, поэтому

$$\hat{G}(N-1, R) = \sum_{i=0}^R f_i G(N-1, R-i). \quad (3.60)$$

Перейдем к выводу $L(N-1, R)$, используя правила перемены порядка суммирования.

$$\begin{aligned} L(N-1, R) &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} \sum_{r=0}^R f_r^{(n)} \sum_{i=0}^{R-r} f_i \sum_{j=0}^{R-r} f_j = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} \sum_{i=0}^R f_i \sum_{r=0}^{R-i} f_r^{(n)} \sum_{j=0}^{R-r} f_j = \\ &= \sum_{i=0}^R f_i \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} \sum_{r=0}^{R-i} f_r^{(n)} \sum_{j=0}^{R-r} f_j = \sum_{i=0}^R f_i \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} \left[\sum_{j=0}^R f_j \sum_{r=0}^{R-j} f_r^{(n)} - \sum_{j=0}^i f_j \sum_{r=R-i+1}^{R-j} f_r^{(n)} \right] = \\ &= \sum_{i=0}^R f_i \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} \sum_{j=0}^R f_j \sum_{r=0}^{R-j} f_r^{(n)} - \sum_{i=0}^R f_i \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} \sum_{j=0}^i f_j \sum_{r=R-i+1}^{R-j} f_r^{(n)} = \\ &= \sum_{j=0}^R f_j \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} \sum_{r=0}^{R-j} f_r^{(n)} - \sum_{i=0}^R f_i \sum_{j=0}^i f_j \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} \sum_{r=R-i+1}^{R-j} f_r^{(n)}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое представляет собой $\hat{G}(N-1, R-j)$, согласно формуле (3.60), а две внутренние суммы второго – разность $G(N-1, R-j)$ и $G(N-1, R-i)$.

Таким образом, получаем

$$L(N-1, R) = \hat{G}(N-1, R) - \sum_{j=0}^R f_j \sum_{i=0}^j f_i [G(N-1, R-i) - G(N-1, R-j)]. \quad (3.61)$$

Подставляя выражения (3.60) и (3.61) в тождество (3.58), получаем требуемую формулу (3.59).■

Стоит отметить, что для расчета вероятности потери первичных заявок $\pi_{B,1}$ используется сверточный алгоритм из раздела 2.1, а значит, вычисляются функции $G(n, r)$. Поэтому для расчета $\pi_{B,2}$ не требуется ничего дополнительно вычислять, можно использовать тот же набор значений функции $G(n, r)$.

Итак, вероятность $\pi_{B,1}$ потери первичных заявок имитирует вероятность потери π_B в РеСМО с сигналами, а вероятность $\pi_{B,2}$ потери вторичных заявок – вероятность π_S того, что поступление сигнала приводит к прерыванию

обслуживания. Из равенства интенсивностей принятия и ухода заявок из системы в РеСМО с сигналами получаем соотношение

$$\lambda(1 - \pi_B) = \bar{N}\mu + \bar{N}\gamma\pi_S, \quad (3.62)$$

из которого выводится следующее тождество:

$$\bar{N} = \frac{\lambda(1 - \pi_B)}{\mu + \gamma\pi_S}. \quad (3.63)$$

В результате можно сформулировать модифицированный итерационный метод приближенного расчета вероятностных характеристик РеСМО с сигналами. Схема алгоритма представлена на рис. 3.3.

0. Начинается итерационная процедура при $\rho^{(0)} = \frac{\lambda}{\mu + \gamma}$.
1. Вычисляется вероятность $\pi_B^{(0)}$ потери заявки при помощи сверточного алгоритма из раздела 2.1 по формуле (2.14), а также среднее число $\bar{N}^{(0)}$ заявок в системе по формуле (3.25). Переходим к первому циклу итерации ($k = 1$).
2. Пересчитываются нагрузочные параметры, т.е. $\rho^{(k)} = \frac{\lambda + \gamma\bar{N}^{(k-1)}}{\mu + \gamma}$, а также вероятность потери $\pi_B^{(k)}$ и вероятность $\pi_S^{(k)}$ того, что поступление сигнала приводит к прерыванию обслуживания. Вероятности вычисляются при помощи сверточного алгоритма из раздела 2.1 по формулам (2.14) и (3.59) соответственно.
3. Пересчитывается среднее число $\bar{N}^{(k)}$ заявок в системе по формуле (3.63). Если $|\bar{N}^{(k)} - \bar{N}^{(k-1)}| \geq \varepsilon$, где ε – заданный уровень точности, то возвращаемся к шагу 2 и начинаем следующий цикл итерации ($k := k + 1$). В противном случае переходим к последнему шагу 4.
4. Вычисляются финальные вероятности π_B и π_S , а также вероятность прерывания π_T по формуле (3.22).

3.3.3. Численный анализ погрешности метода приближенного расчета

Далее проведено сравнение погрешностей при использовании предложенных методов приближенного вычисления вероятностных характеристик РеСМО с сигналами.

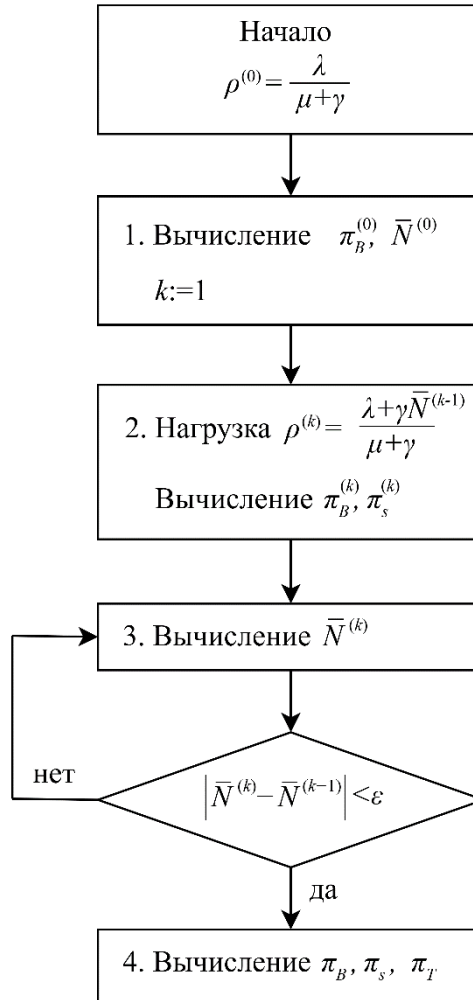


Рис. 3.3. Схема итерационного алгоритма

Использовался следующий набор исходных параметров: число приборов $N=100$, объем ресурса $R=100$ единиц, интенсивность обслуживания $\mu=1$. Предполагается, что требования заявок к ресурсу имеют усеченное геометрическое распределение с параметром $p=0.2$, т.е.

$$f_j = \frac{(1-p)p^{j-1}}{1-p^R}, \quad 1 \leq j \leq R.$$

Анализ погрешности вычислений проведен для основных вероятностных характеристик: вероятности потери π_B и вероятности прерывания π_T . На рисунке 3.4 приведены результаты расчетов данных вероятностей при интенсивности

поступления сигналов $\gamma = 2$, а на рисунке 3.5 – относительные погрешности расчетов.

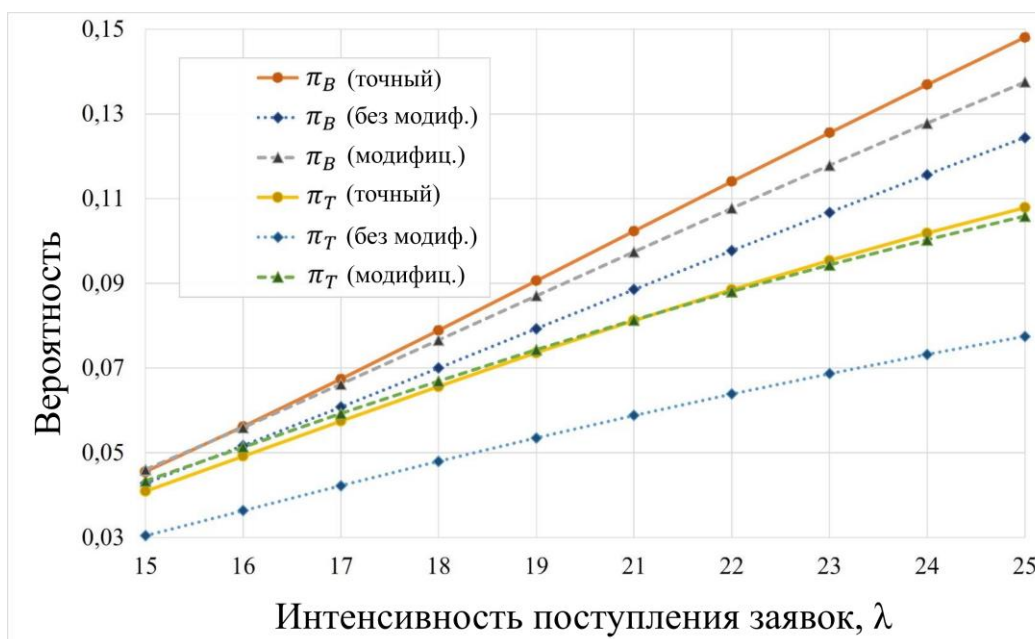


Рис. 3.4. Вероятности потери и прерывания в зависимости от интенсивности поступления заявок при $\gamma = 2$ и геометрическом распределении требований

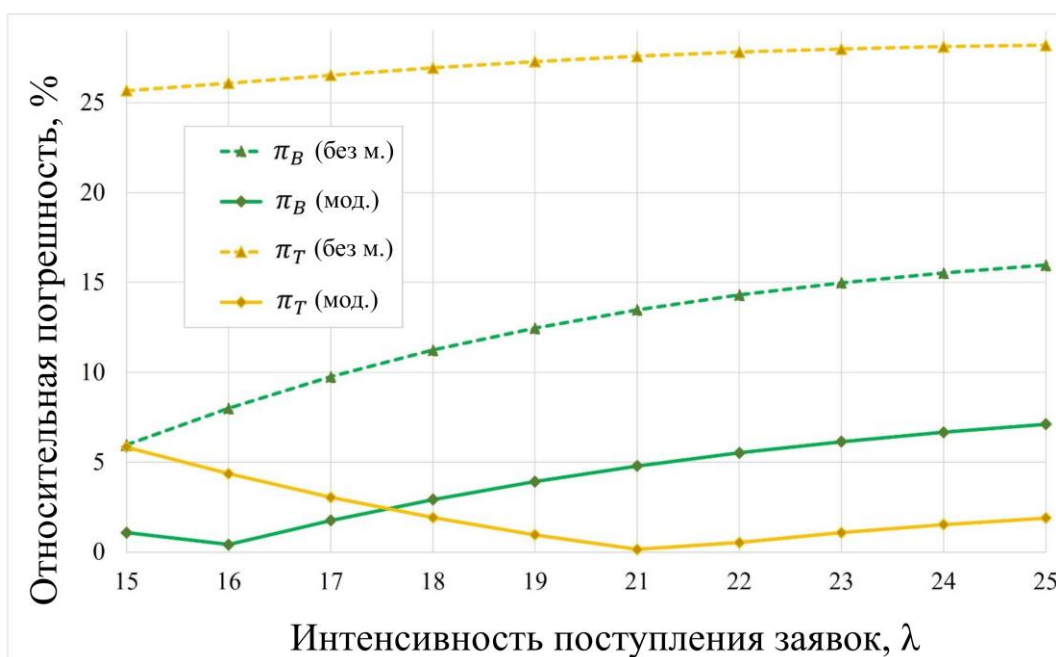


Рис. 3.5. Относительная погрешность вычисления вероятностей потери и прерывания при $\gamma = 2$ и геометрическом распределении требований

В таблице 3.1 и 3.2 приведены результаты расчетов для других значений γ : сравнительно небольшой интенсивности поступления сигналов, $\gamma = 0.5$, а в

таблице 3.2 – для высокой, $\gamma = 5$, соответствующей в среднем пяти сигналам в течение времени обслуживания одной заявки.

Табл. 3.1. Погрешность вычислений при $\gamma = 0.5$

λ	π_B , (точн.)	π_B , (прибл.)	Относ. погреш., %	π_T , (точн.)	π_T , (прибл.)	Относ. погреш., %
15	0,0528	0,0525	0,5	0,0125	0,0126	1,2
16	0,0644	0,0636	1,2	0,0149	0,015	0,6
17	0,0766	0,0752	1,8	0,0174	0,0174	0,03
18	0,0892	0,0871	2,4	0,0199	0,0198	0,5
19	0,1021	0,0992	2,9	0,0224	0,0221	1
20	0,1151	0,1113	3,3	0,0247	0,0244	1,4
21	0,1281	0,1234	3,7	0,0271	0,0266	1,7
22	0,141	0,1354	4	0,0293	0,0288	1,9
23	0,1538	0,1472	4,3	0,0315	0,0308	2,1

Табл. 3.2. Погрешность вычислений при $\gamma = 5$

λ	π_B , (точн.)	π_B , (прибл.)	Относ. погреш., %	π_T , (точн.)	π_T , (прибл.)	Относ. погреш., %
15	0,0372	0,0386	3,7	0,0785	0,0877	11,7
16	0,0446	0,0454	2	0,0913	0,1004	9,9
17	0,0522	0,0524	0,5	0,104	0,1126	8,3
18	0,0599	0,0594	0,9	0,1164	0,1244	6,9
19	0,0678	0,0664	2	0,1283	0,1356	5,7
20	0,0757	0,0734	3	0,1398	0,1462	4,6
21	0,0836	0,0803	3,9	0,1507	0,1657	3,7
22	0,0914	0,0872	4,7	0,1611	0,1747	2,9
23	0,0992	0,0939	5,4	0,1708	0,183	2,2

Сравнивая результаты расчетов в таблицах 3.1 и 3.2, можно отметить, что погрешность вычисления вероятности потери π_B от увеличения интенсивности

сигналов на порядок почти не повлияла. Однако погрешность вычисления вероятности прерывания π_T ощутимо возросла. Особенно выраженным этот эффект становится при сравнительно низкой интенсивности λ поступления заявок, при которой обе исследуемые вероятности малы. Абсолютные значения погрешности остаются небольшими, однако на фоне малых значений самих вероятностей относительная погрешность существенно увеличивается.

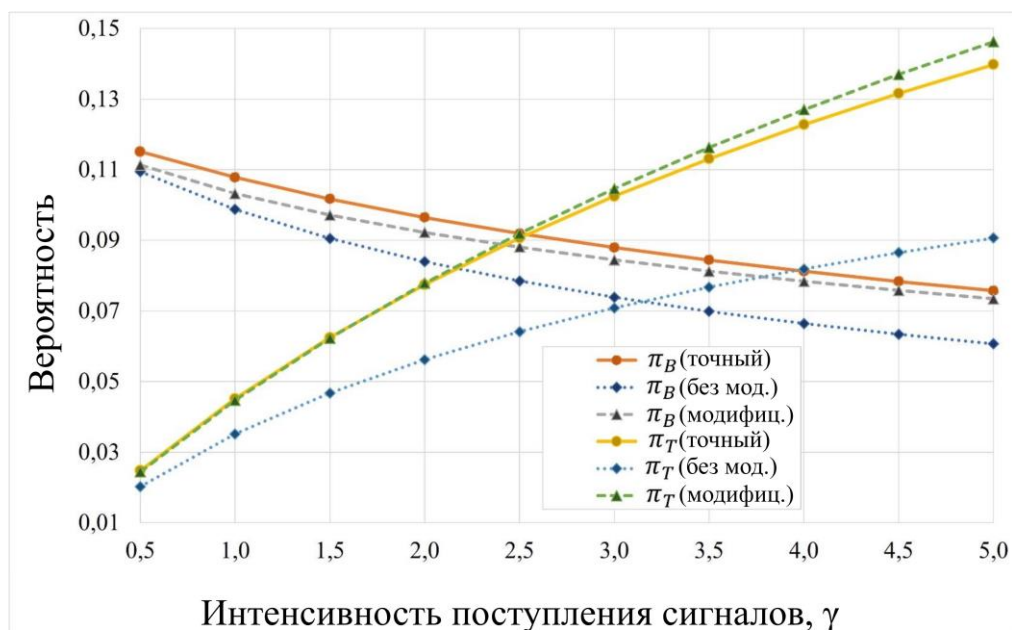


Рис. 3.6. Вероятности потери и прерывания в зависимости от интенсивности поступления сигналов, $\lambda = 20$ и геометрическом распределении требований

На рисунке 3.6 представлены результаты расчетов вероятности потери и прерывания в зависимости от интенсивности поступления сигналов при $\lambda = 20$, а на рисунке 3.7 – относительная погрешность вычислений.

В таблицах 3.3 и 3.4 приведены результаты вычислений при других интенсивностях поступления заявок. Значения в таблице 3.3 соответствуют низкой нагрузке ($\lambda = 15$), а в таблице 3.4 – высокой ($\lambda = 25$).

Сравнивая результаты в таблицах 3.3 и 3.4 можно отметить схожую тенденцию: при низкой нагрузке (вероятность потери $\pi_B < 0,05$) и высокой интенсивности поступления сигналов относительная погрешность вероятности прерывания π_T начинает существенно увеличиваться. Это связано с тем, что при низкой интенсивности поступления и, наоборот, высокой интенсивности

поступления сигналов растет доля потока вторичных заявок в общей предложенной нагрузке имитирующей системы значительно превышает долю потока первичных заявок.

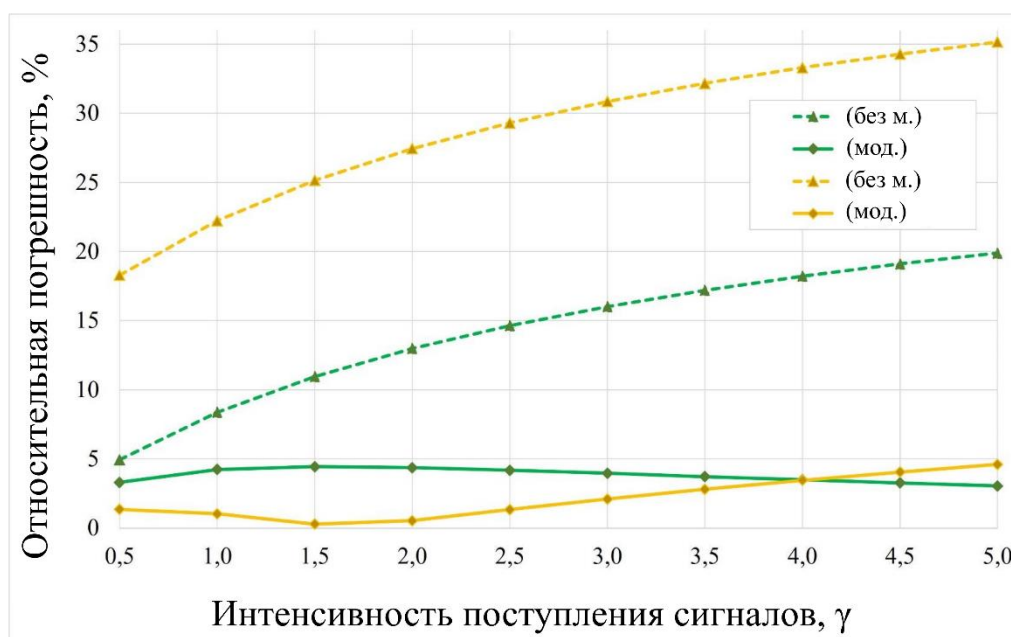


Рис. 3.7. Относительная погрешность вычисления вероятностей потери и прерывания при $\lambda = 20$ и геометрическом распределении требований

Табл. 3.3. Погрешность вычислений при $\lambda = 15$

γ	π_B , (точн.)	π_B , (прибл.)	Относ. погреш., %	π_T , (точн.)	π_T , (прибл.)	Относ. погреш., %
0,1	0,0556	0,0555	0,3	0,0027	0,0027	0,1
0,5	0,0528	0,0525	0,5	0,0125	0,0126	1,2
1	0,0499	0,0499	0,1	0,0232	0,0238	2,8
1,5	0,0476	0,0478	0,5	0,0326	0,034	4,4
2	0,0455	0,046	1,1	0,0409	0,0433	5,8
2,5	0,0437	0,0445	1,6	0,0485	0,052	7,1
3	0,0422	0,0431	2,1	0,0555	0,06	8,2
3,5	0,0407	0,0418	2,6	0,0619	0,0676	9,3
4	0,0395	0,0407	3	0,0678	0,0747	10,2

Кроме того, можно отметить, что при росте интенсивности поступления сигналов исследуемые вероятности изменяются разнонаправленно: вероятность потери уменьшается, а вероятность прерывания растет. Это связано с тем, что более частые поступления сигналов приводят к тому, что заявки в течение времени обслуживания чаще проходят процедуру сброса объема занятого ресурса и принятия на обслуживания заново с новым требованием. Это и приводит к росту вероятности прерывания. Однако увеличение вероятности прерывания приводит к тому, что заявки чаще недообслуживаются, освобождая занятый объем ресурса преждевременно. В свою очередь это приводит к тому, что для новых поступающих заявок в системе остается больше свободного ресурса, в результате вероятность потери (при поступлении) падает.

Табл. 3.4. Погрешность вычислений при $\lambda = 25$

γ	π_B , (точн.)	π_B , (прибл.)	Относ. погреш., %	π_T , (точн.)	π_T , (прибл.)	Относ. погреш., %
0,1	0,19	0,1873	1,4	0,0078	0,0077	0,8
0,5	0,1786	0,1702	4,7	0,0354	0,0346	2,4
1	0,1666	0,1561	6,3	0,0639	0,0622	2,7
1,5	0,1566	0,1458	6,9	0,0877	0,0856	2,4
2	0,148	0,1375	7,1	0,1079	0,1058	1,9
2,5	0,1406	0,1306	7,1	0,1254	0,1238	1,3
3	0,1342	0,1247	7	0,1409	0,1398	0,8
3,5	0,1284	0,1195	6,9	0,1547	0,1543	0,2
4	0,1233	0,1149	6,8	0,1671	0,1676	0,2

Далее был проведен анализ погрешности вычисления характеристик РеСМО с сигналами по предложенным методам приближенного расчета при исходных данных, соответствующих близким к реальным условиям эксплуатации сетей радиодоступа 5G NR. Из моделей распространения и параметров сценария использования, описанных в численном анализе раздела 4.2, получено следующее

распределение требований к ресурсу (таблица 3.5), по принципам, изложенным в разделе 1.3.

Табл. 3.5. Распределение требований к ресурсу

Число ресурсных блоков	3	4	5	6	8	10
Вероятность, f_r	0,101	0,082	0,058	0,143	0,092	0,086
Число ресурсных блоков	12	16	24	37	60	70
Вероятность, f_r	0,093	0,086	0,083	0,072	0,06	0,044

Рассматривается РеСМО с $N=70$ приборами и ресурсом объема $R=70$ единиц, соответствующих ресурсным блокам. Средняя длительность обслуживания заявки равна $\mu^{-1} = 30$ с.

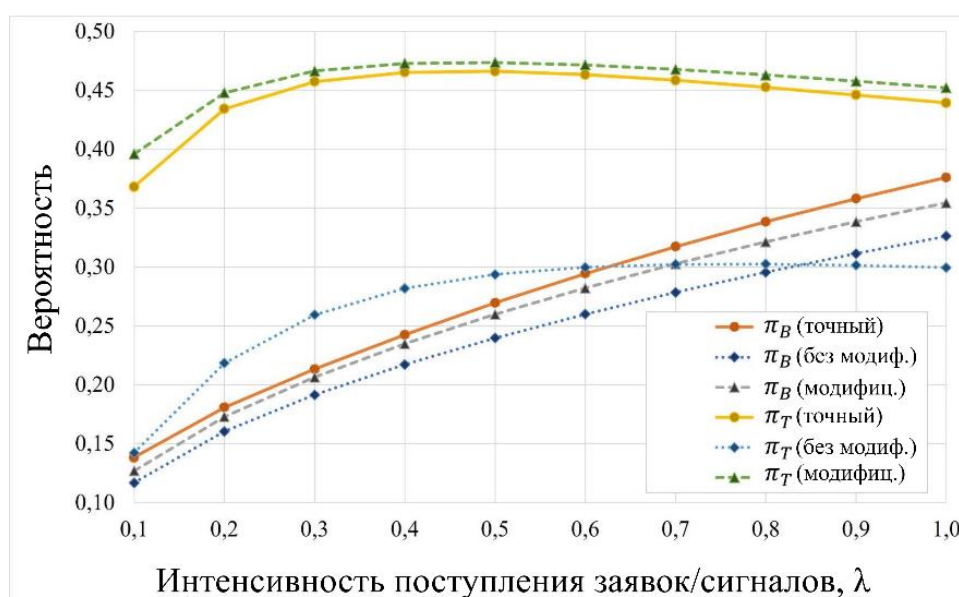


Рис. 3.8. Вероятности потери и прерывания при различных интенсивностях поступления заявок

На рисунке 3.8 представлены результаты расчета вероятностных характеристик при изменении интенсивности поступления заявок λ при интенсивности поступления сигналов $\gamma = 0,33$, что соответствует высокой плотности расположения блокаторов. Для сравнения приведены также результаты расчета по приближенному методу без модификаций (из раздела 3.2). На рисунке 3.9 показана относительная погрешность вычисления обоими методами.

Результаты показывают, что оба метода сохраняют качественное поведение характеристик, однако погрешность метода вычисления без модификаций достаточно высока. Если погрешность вычисления вероятности потери еще можно считать приемлемой, то погрешность вероятности прерывания доходит до 60%. При этом погрешность вычисления с использованием модифицированного метода приближенного вычисления на всем исследуемом интервале нагрузки не превышает 10%.

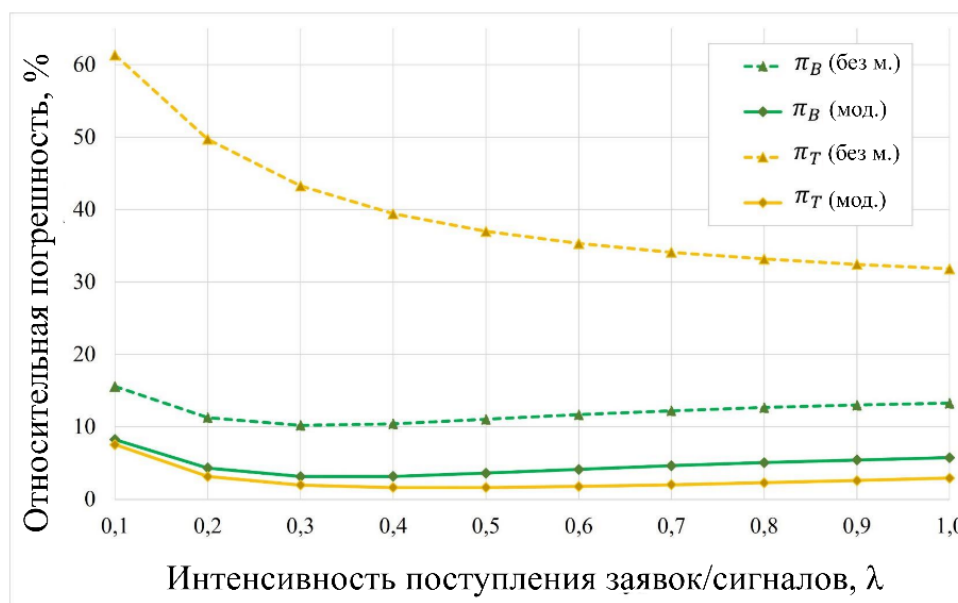


Рис. 3.9. Относительная погрешность вычисления вероятностей потери и прерывания

На рисунке 3.10 представлены вероятности потери и прерывания при тех же исходных данных, но в зависимости от интенсивности γ поступления сигналов при $\lambda = 1$. На рисунке 3.11 показаны относительные погрешности вычислений. Результаты показывают, что относительная погрешность модифицированного метода приближенного вычисления характеристик РеСМО с сигналами остается ниже 5% на всем исследуемом интервале интенсивностей поступления сигналов.

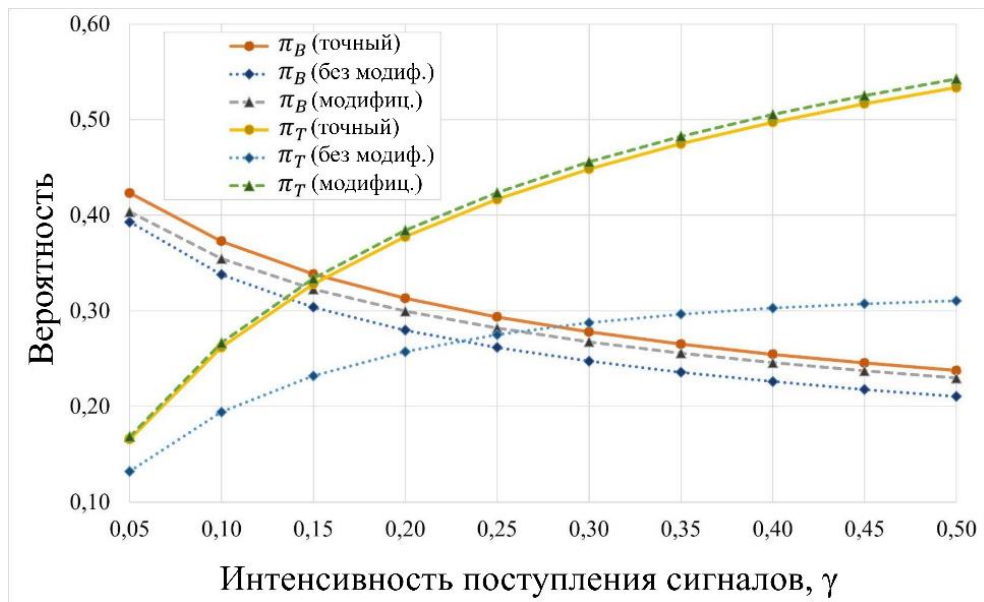


Рис. 3.10. Вероятности потери и прерывания при различных интенсивностях поступления сигналов

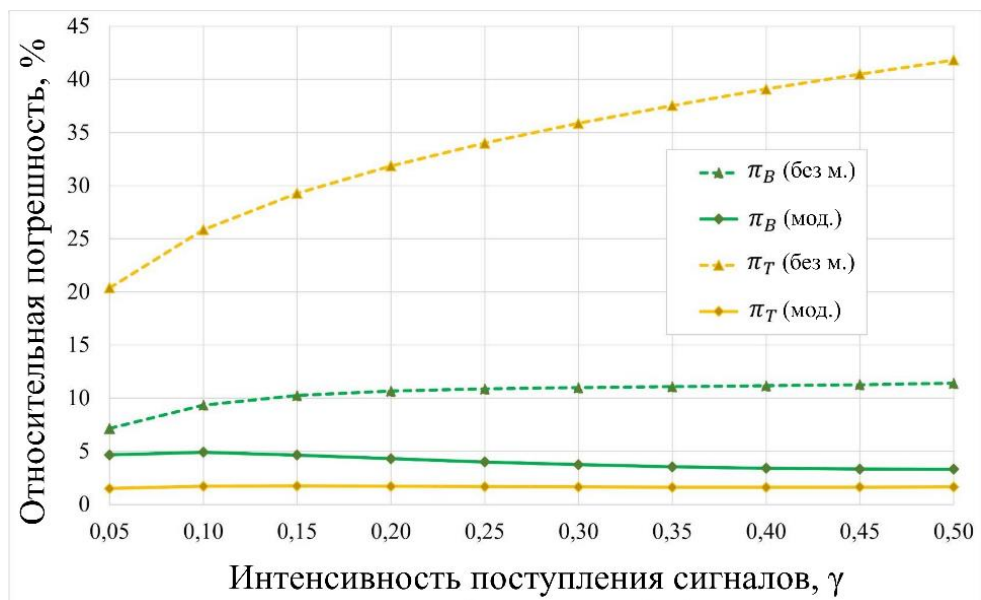


Рис. 3.11. Вероятности потери и прерывания при различных интенсивностях поступления сигналов

Глава 4. Применение ресурсных моделей к анализу сети радиодоступа «Новое радио» в диапазоне миллиметровых длин волн

В данной главе приведены примеры применения аппарата РеСМО к анализу показателей эффективности сети радиодоступа пятого поколения (5G) Новое радио (New Radio, NR), использующей так называемый диапазон миллиметровых длин волн (30 – 300 ГГц). В этом диапазоне много неиспользуемых частот, которые позволяют достигать требуемых в сетях 5G скоростей на участке радиодоступа. С другой стороны, для преодоления значительно более сильного затухания в атмосфере предлагается использовать сложные антенные системы, которые концентрируют энергию в узких лучах шириной несколько градусов. Такое решение позволяет увеличить зону покрытия базовых станций до нескольких сотен метров, но порождает новую проблему. Если на пути распространения такого узкого луча возникает даже небольшой объект, например, автомобиль или человек, то уровень сигнала на приемнике может упасть на значение до 20 дБ (в 100 раз в линейной шкале), что приводит к резкому увеличению требуемого объема частотного ресурса для поддержания необходимой скорости передачи данных или даже к прерыванию обслуживания сессии.

При эксплуатации в городской среде сетей радиодоступа, использующих миллиметровый диапазон длин волн, описанные эффекты блокировки пути распространения сигнала приводят к нестабильности качества радиоканалов и высокой вероятности прерывания пользовательских сессий передачи данных. Отметим, что прерывания сессий передачи данных являются одним из наиболее важных факторов, снижающих качество восприятия (Quality of Experience, QoE) пользователями услуг мобильной связи. Для решения этой проблемы был предложен ряд механизмов, в том числе резервирование части полосы пропускания, механизмы мультисвязности, основанные на поддержании соединений с несколькими БС, а также их комбинации.

Для анализа указанных выше механизмов повышения непрерывности сессий применяются РеСМО с сигналами. Поступление и обслуживание заявок в РеСМО моделирует поступление запросов на установление сессий передачи данных и их обслуживание базовой станцией, а сигналы моделируют резкие скачки качества радиоканала. В разделе 4.1 изложен метод моделирования эффектов блокировок пути прямого распространения сигнала в диапазоне миллиметровых длин волн, в том числе способ учета этих эффектов в параметрах РеСМО с сигналами, основанный на работах других авторов. В разделе 4.2 проведен анализ модели резервирования части частотного ресурса БС для снижения вероятности прерывания обслуживания сессий, а в разделе 4.3 – совместного механизма резервирования и мультисвязности. Завершается глава анализом показателей эффективности сети радиодоступа при учете эффектов повторных вызовов и адаптации скорости передачи данных.

4.1. Моделирование эффектов блокировок пути прямого распространения сигнала

Для начала рассмотрим статичный случай. Имеется одна БС высотой h_S и одно пользовательское устройство, находящееся на высоте h_U и на расстоянии x от БС. Предполагается, что блокаторы представляют собой цилиндры высотой h_B и радиусом основания r_B , которые моделируют тела людей. В предположении, что блокаторы расположены на плоскости в соответствии с пуассоновским точечным процессом (ПТП) плотностью λ_B на квадратный метр, в [134] получено выражение для вероятности $p_B(x)$ блокировки пути прямого распространения сигнала от БС до пользовательского устройства:

$$p_B(x) = 1 - e^{-2\lambda_B r_B \left[\sqrt{x^2 + (h_S - h_U)^2} \frac{h_B - h_U}{h_S - h_U} + r_B \right]}. \quad (4.1)$$

Согласно свойствам ПТП, точки, попавшие в некоторую ограниченную область плоскости, распределены в ней равномерно по площади, а плотность

распределения двумерного расстояния (без учета высоты) между БС и точками, равномерно распределенными в зоне покрытия БС, имеет вид

$$d(x) = \frac{2x}{r_C^2}, \quad 0 < x \leq r_C, \quad (4.2)$$

где r_C – радиус зоны покрытия. Проинтегрировав выражение (4.1) с учетом плотности (4.2), получим усредненную по зоне покрытия вероятность блокировки p_B :

$$p_B = \int_0^{r_C} p_B(x) \frac{2x}{r_C^2} dx. \quad (4.3)$$

В связи с тем, что блокаторами выступают тела людей, параметр λ_B характеризует еще и плотность расположения пользовательских устройств. Тогда, обозначив α_U – интенсивность поступления запросов на установление сессии от одного пользователя, получим суммарную интенсивность λ поступления сессий на БС в виде

$$\lambda = \alpha_U \lambda_B \pi r_C^2. \quad (4.4)$$

Стоит отметить, что в предположении о независимости поступления запросов от пользователей суммарный поток поступающих на БС сессий является пуассоновским с параметром λ .

Из-за эффектов блокировок пути прямого распространения сигнала необходимо внести небольшие изменения в метод вычисления ФР требований к ресурсу, изложенный в разделе 1.3. В стандарте² определены две функции потери распространения: $L_B(d)$, в случае заблокированного пути прямого распространения, и $L_{nB}(d)$, в случае отсутствия блокировки. Поэтому вычисляются две ФР ОСШ $F_{S,B}(x)$ и $F_{S,nB}(x)$ для заблокированных и незаблокированных состояний с использованием функций потерь $L_B(d)$ и $L_{nB}(d)$, соответственно. Итоговая ФР ОСШ $F_S(x)$ получается путем взвешивания ФР $F_{S,B}(x)$ и $F_{S,nB}(x)$ с

² 3GPP TR 38.901 Study on channel model for frequencies from 0.5 to 100 GHz

весами p_B и $1 - p_B$. Дальнейшие шаги из раздела 1.3 по выводу дискретного ряда распределения требований к ресурсу остаются неизменными.

Перейдем теперь к характеристике процесса изменения состояния блокировки во времени, вызываемого подвижностью блокаторов. Предполагается, что блокаторы передвигаются в соответствии с моделью RDM (Random Direction Model). Согласно модели RDM, блокатор начинает движение из случайной точки на плоскости, движется с постоянной скоростью v_B в некотором направлении в течение экспоненциально распределенного времени с фиксированным параметром. По завершении движения, блокатор выбирает новое направление и движется в нем с той же скоростью в течение следующего экспоненциального интервала, и так далее.

В работах [135, 136] было показано, что длительности интервалов пребывания в заблокированном и незаблокированном состояниях при условии нахождения на расстоянии x от БС хорошо аппроксимируются экспоненциальным распределением с интенсивностями $\gamma_B(x)$ и $\gamma_{nB}(x)$, соответственно:

$$\gamma_B(x) = \frac{\varepsilon(x)}{e^{\varepsilon(x)v_B/2r_B} - 1}, \quad (4.5)$$

$$\gamma_{nB}(x) = \varepsilon(x), \quad (4.6)$$

где

$$\varepsilon(x) \approx \frac{2}{5} \lambda_B v_B \left[4r_B + \frac{2x(h_B - h_U)}{h_S - h_U} \right]. \quad (4.7)$$

Проинтегрировав по x с учетом плотности (4.2), по аналогии с формулой (4.3), получим усредненные по зоне покрытия БС интенсивности γ_B и γ_{nB} . Так как оба типа изменений состояний, из заблокированного в незаблокированное и из незаблокированного в заблокированное, моделируется интенсивностью γ поступлений сигналов в РеСМО, то она вычисляется как среднее арифметическое γ_B и γ_{nB} .

Предложенный подход к расчету параметров РеСМО с сигналами применяется в последующих разделах данной и следующей глав.

4.2. Резервирование ресурса для повышения непрерывности сессий передачи данных

Механизм резервирования позволяет зарезервировать некоторую часть θ , $\theta \in [0,1)$, ресурса системы для использования только теми сессиями передачи данных, качество радиоканала которых резко снизилось из-за блокировки пути прямого распространения сигнала, и для предотвращения прерывания обслуживания им требуется дополнительный объем частотного ресурса.

Предполагается, что система функционирует следующим образом. Пусть в некоторый момент времени в системе из суммарного объема частотного ресурса R занято V . Если в этот момент поступает новый запрос на установление сессии, которой требуется объем U ресурса, то сессия принимается на обслуживание, если $U \leq (1-\theta)R - V$, а в противном случае сессия теряется. Иными словами, зарезервированный объем ресурса недоступен для новых сессий. Если же в этот момент одной из находящихся на обслуживании сессии с объемом занятого частотного ресурса U_1 потребуется увеличить объем используемого ресурса до U_2 , то ей доступен весь имеющийся объем R ресурса. Иначе говоря, сессия продолжает обслуживание, если $U_2 - U_1 \leq R - V$, а в противном случае происходит прерывание обслуживания.

4.2.1. Построение и анализ модели

Рассматривается РеСМО с N приборами, одномерным дискретным ресурсом объема R единиц, только часть которого $R_0 = (1-\theta)R$ доступна новым заявкам. Входящий поток заявок является пуассоновским с интенсивностью λ , требования заявок к ресурсу являются независимыми случайными величинами, задаваемыми рядом распределения $\{f_j\}$, $j = 0, 1, \dots, R$, не зависят от процессов поступления и обслуживания. Длительности обслуживания распределены экспоненциально с параметром μ .

На каждую обслуживаемую в системе заявку поступает пуассоновский процесс сигналов с интенсивностью γ . При поступлении сигнала заявка

освобождает занятый ранее объем ресурса, формирует новое требование к ресурсу с тем же распределением и пытается продолжить обслуживание, заняв новый объем ресурса. Если в системе достаточно ресурса для удовлетворения нового требования, то заявка продолжает обслуживание, в противном случае происходит прерывание.

Случайный процесс, описывающий функционирование системы, определим в терминах псевдописька, т.е. в виде $X(t) = \{\xi(t), \delta(t)\}$, где $\xi(t)$ – число заявок в системе в момент времени t , а $\delta(t)$ – суммарное число единиц ресурса, занимаемых всеми заявками. В этом случае вероятности $\varphi_j(n, r)$ того, что уходящая заявка освобождает j единиц ресурса при условии, что в момент до ухода в системе было n заявок, которые суммарно занимали r единиц ресурса, имеет вид

$$\varphi_j(n, r) = \frac{f_{r-j}^{(n-1)} f_j}{f_r^{(n)}}, \quad j = 0, 1, \dots, r. \quad (4.8)$$

Пространство состояний процесса $X(t)$ можно разделить на $N+1$ непересекающихся подмножеств следующим образом:

$$S = \bigcup_{n=0}^N S_n, \quad S_0 = \{0\},$$

$$S_n = \{(n, r) : 0 \leq r \leq R, f_r^{(n)} > 0\}, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (4.9)$$

Как и в разделе 3.1, упорядочим состояния в множествах S_n по возрастанию числа занятых единиц ресурса и обозначим $I(n, r)$ – порядковый номер состояния (n, r) в множестве S_n . Стационарные вероятности процесса $X(t)$ определяются следующим образом:

$$q_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = 0\},$$

$$q_k(r) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = k, \delta(t) = r\}, \quad (k, r) \in S_k.$$

Стационарные вероятности являются решением следующей системы уравнений равновесия:

$$\lambda q_0 \sum_{j=0}^{R_0} f_j = \mu \sum_{j:(1,j) \in S_1} q_1(j) + \gamma \sum_{j:(1,j) \in S_1} q_1(j) \sum_{s=R-j+1}^R f_s, \quad (4.10)$$

$$\left(\lambda \sum_{j=0}^{R_0-r} f_j + k\mu + k\gamma \right) q_k(r) = H(R_0 - r) \lambda \sum_{j \geq 0: (k-1, r-j) \in S_{k-1}} q_{k-1}(r-j) f_j + \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} & + (k+1)\mu \sum_{j \geq 0: (k+1, r+j) \in S_{k+1}} q_{k+1}(r+j) \varphi_j(k+1, r+j) + \\ & + (k+1)\gamma \sum_{s=R-r+1}^R f_s \sum_{j \geq 0: (k+1, r+j) \in S_{k+1}} q_{k+1}(r+j) \varphi_j(k+1, r+j) + \\ & + k\gamma \sum_{j \geq 0: (k, j) \in S_k} q_k(j) \sum_{i=0}^{\min(j, r)} \varphi_{j-i}(k, j) f_{r-i}, \quad 1 \leq k \leq N-1, (k, r) \in S_k, \end{aligned}$$

$$N(\mu + \gamma) q_N(r) = H(R_0 - r) \lambda \sum_{j \geq 0: (N-1, j) \in S_{N-1}} q_{N-1}(r-j) f_j + \quad (4.12)$$

$$+ N\gamma \sum_{j \geq 0: (N, j) \in S_N} q_N(j) \sum_{i=0}^{\min(j, r)} \varphi_{j-i}(N, j) f_{r-i}, \quad (N, r) \in S_N,$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда,

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Инфинитезимальная матрица \mathbf{A} имеет блочный трехдиагональный вид с диагональными блоками $\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_N$, верхними диагональными блоками $\mathbf{\Lambda}_0, \mathbf{\Lambda}_1, \dots, \mathbf{\Lambda}_{N-1}$ и нижними диагональными блоками $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_N$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_0 & \mathbf{\Lambda}_0 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_1 & \mathbf{D}_1 & \mathbf{\Lambda}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{D}_2 & \mathbf{\Lambda}_2 & \mathbf{0} & \dots \\ \dots & \mathbf{0} & \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{N-1} & \mathbf{D}_{N-1} & \mathbf{\Lambda}_{N-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{M}_N & \mathbf{D}_N \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Первый диагональный блок представляет собой скаляр, причем

$$\mathbf{D}_0 = -\lambda \sum_{j=0}^{R_0} f_j, \quad (4.15)$$

Элементы $d_n(i, j)$ других диагональных блоков \mathbf{D}_n , $1 \leq n \leq N$ имеют вид

$$d_n(I(n,i), I(n,j)) = \begin{cases} -\left[\lambda \sum_{k=0}^{R_0-i} f_k + n\mu + \right. \\ \left. + n\gamma \left(1 - \sum_{s=0}^i \varphi_s(n,i) f_s \right) \right], & i = j, \\ n\gamma \sum_{s=\max(0,i-j)}^i \varphi_s(n,i) f_{j-i+s}, & i \neq j, \end{cases} \quad (4.16)$$

$$1 \leq n \leq N-1, \quad (n,i) \in S_n, \quad (n,j) \in S_n.$$

Элементы последнего диагонального блока \mathbf{D}_N имеют вид

$$d_N(I(N,i), I(N,j)) = \begin{cases} -N \left[\mu + \gamma \left(1 - \sum_{s=0}^i \varphi_s(N,i) f_s \right) \right], & i = j, \\ N\gamma \sum_{s=\max(0,i-j)}^i \varphi_s(N,i) f_{j-i+s}, & i \neq j, \end{cases} \quad (4.17)$$

$$(N,i) \in S_N, \quad (N,j) \in S_N.$$

Первый верхний диагональный блок Λ_0 представляет собой строку, а ее элементы имеют вид:

$$\lambda_1(I(1,r)) = \lambda f_r, \quad (1,r) \in S_1. \quad (4.18)$$

Элементы остальных верхних диагональных блоков Λ_n , $1 \leq n \leq N-1$ задаются выражениями

$$\lambda_n(I(n,i), I(n+1,j)) = \begin{cases} 0, & j < i, \\ \lambda f_{j-i}, & i \leq j \leq R_0, \end{cases} \quad (4.19)$$

$$1 \leq n \leq N-1, \quad (n,i) \in S_n, \quad (n+1,j) \in S_{n+1}.$$

Первый нижний диагональный блок \mathbf{M}_1 представляет собой столбец, а его элементы имеют вид

$$\mu_1(j) = \mu, \quad (1,j) \in S_1. \quad (4.20)$$

Элементы остальных нижних диагональных блоков \mathbf{M}_n , $2 \leq n \leq N$ размерностью $s_{n+1} \times s_n$ задаются выражениями

$$\mu_n(I(n,i), I(n-1,j)) = \begin{cases} n\mu\varphi_{i-j}(n,i) + n\gamma\varphi_{i-j}(n,i) \sum_{s=R-j+1}^R f_s, & j \leq i, \\ 0, & j > i, \end{cases} \quad (4.21)$$

$$2 \leq n \leq N, \quad (n, i) \in S_n, \quad (n-1, j) \in S_{n-1}.$$

Инфинитезимальная матрица \mathbf{A} неразложима по построению, поэтому система уравнений (4.10) – (4.12) имеет единственное вероятностное решение, которое можно получить, используя любой численный метод решения линейных уравнений вида $\mathbf{q}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}^T$, $\mathbf{q}^T \mathbf{1} = 1$. Блочная трехдиагональная форма (4.14) матрицы \mathbf{A} позволяет применять специальные эффективные алгоритмы [183].

Получив стационарное распределение, можно перейти к вычислению вероятностных характеристик.

Утверждение 4.1. Вероятности π_B потери заявки и π_T прерывания обслуживания принимают вид

$$\pi_B = 1 - \sum_{n < N, (n,r) \in S_n} q_n(r) \sum_{j=0}^{R_0-r} f_j, \quad (4.22)$$

$$\pi_T = \frac{\gamma \bar{N} \pi_S}{\lambda(1 - \pi_B)}, \quad (4.23)$$

где π_S – вероятность того, что при поступлении сигнала заявка прерывается:

$$\pi_S = \sum_{(n,r) \in S, n > 0} q_n(r) \sum_{j=0}^r \varphi_j(n,r) \sum_{i=R-r+j+1}^R f_i, \quad (4.24)$$

а \bar{N} – среднее число заявок в системе:

$$\bar{N} = \sum_{(n,r) \in S} n q_n(r). \quad (4.25)$$

Коэффициент использования ресурсов U вычисляется по формуле:

$$U = \frac{1}{R} \sum_{(n,r) \in S} r q_n(r). \quad (4.26)$$

Доказательство:

Учитывая, что при поступлении заявкам доступна только часть $R_0 < R$ ресурса, сумма в выражении (4.22) задает вероятность того, что поступающая заявка принимается в систему. Переходя к дополнительной вероятности, получаем выражение (4.22).

Для доказательства формулы для вероятности прерывания воспользуемся подходом, изложенным в доказательстве утверждения 3.1. Рассмотрим достаточно длинный интервал времени T . Среднее число заявок, принятых на обслуживание за это время равно $\lambda(1-\pi_B)T$, а среднее число заявок, обслуживание которых было прервано за это интервал, равно $\gamma\bar{N}\pi_S T$. Переходя к пределу при $T \rightarrow \infty$ для отношения числа прерванных заявок к принятым, получим формулу (4.23).

Наконец, коэффициент использования представляет собой отношение математического ожидания числа занятых единиц ресурса к общему объему, что приводит к формуле (4.26).■

4.2.2. Численный анализ эффективности резервирования ресурсов

Перейдем к численному анализу. В таблице 4.1 собраны исходные данные, которые соответствуют рекомендуемым 3GPP для моделирования показателей эффективности сетей радиодоступа NR.

Табл. 4.1. Исходные данные

Параметр	Значение
Несущая частота, f_c	28 ГГц
Ширина полосы пропускания, B_{total}	400 МГц
Ширина полосы ресурсного блока, B	2,88 МГц
Мощность передачи, P_T	2 Вт
Коэффициент усиления антенны БС, G_B	14,58 дБи
Коэффициент усиления антенны UE, G_U	5,57 дБи
Потери в кабеле, C_L	2 дБ
Верхняя граница интерференции, M_I	3 дБ
Термальный шум, N_0	-174 дБм / Гц
Высота БС, h_S	10 м
Высота блокатора, h_B	1,7 м
Высота расположения UE, h_U	1,5 м
Радиус блокатора, r_B	0,4 м

Скорость блокатора, v_B	2 м/с
Радиус зоны покрытия, r_C	355 м
Средняя длительность сессии, μ^{-1}	30 сек.

Для расчета потерь распространения $L(x)$ была взята модель UMi³ (Urban Micro Street Canyon). Стоит заметить, что в стандартах значения, связанные с моделированием передачи радио сигналов, приведены в дБ, т.е. в логарифмической шкале. Это необходимо учитывать при расчете распределения требований к ресурсу.

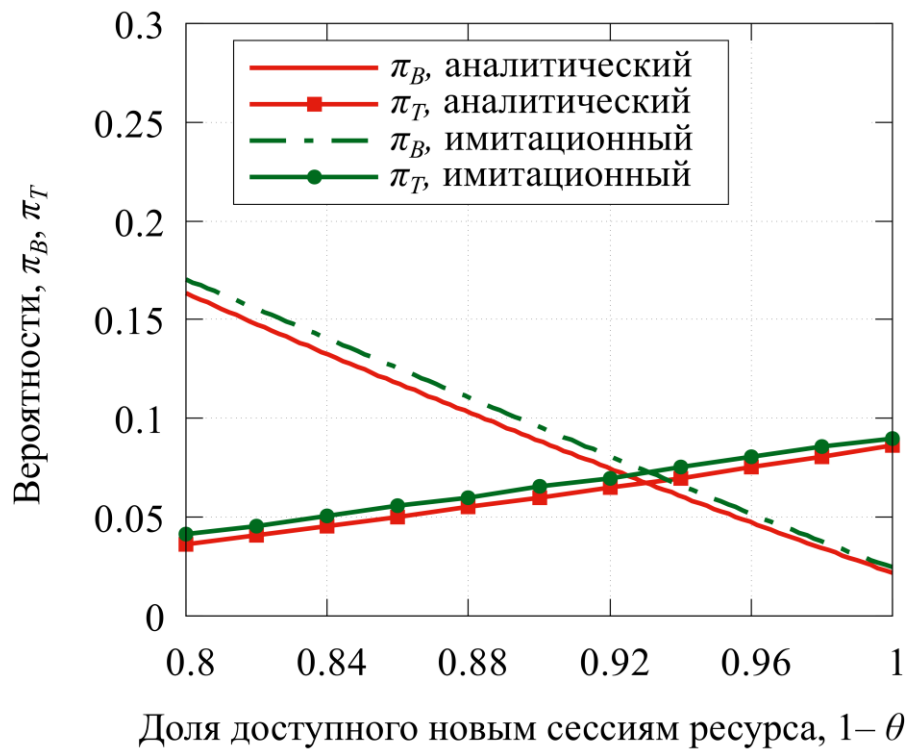


Рис. 4.1. Сравнение аналитических расчетов с имитационной моделью

Начнем с оценки погрешностей, вызванных использованием подхода к построению случайного процесса на базе псевдосписка, имитирующего поведение случайного списка. Для этого была разработана имитационная модель исследуемого процесса в терминах случайных списков и получены оценки вероятности потери и прерывания. Имитационная модель построена на принципах

³ 3GPP TR 38.901 Study on channel model for frequencies from 0.5 to 100 GHz

дискретно-событийного моделирования [6]. На рисунке 4.1 показаны результаты вычисления вероятностей потери и прерывания при помощи разработанной имитационной модели и при помощи аналитического подхода, изложенного в данной главе. Вычисления проводились при интенсивности поступления сессий $\lambda = 0,45$ сессий/с, средняя длительность сессии $\mu^{-1} = 30$ с, плотность блокаторов $\lambda_B = 0,04$ м⁻², а требуемая скорость передачи $C = 10$ Мбит/с. Отметим, что здесь приведены только точечные оценки, так как ширина 95% доверительного интервала не превышала 0,01 на всех исследованных наборах исходных данных.

Как можно видеть, данные имитационного моделирования согласуются с аналитическими результатами. Аналогичные результаты были отмечены для других входных параметров, характерных для близких к реальным сценариям функционирования сетей связи пятого поколения.

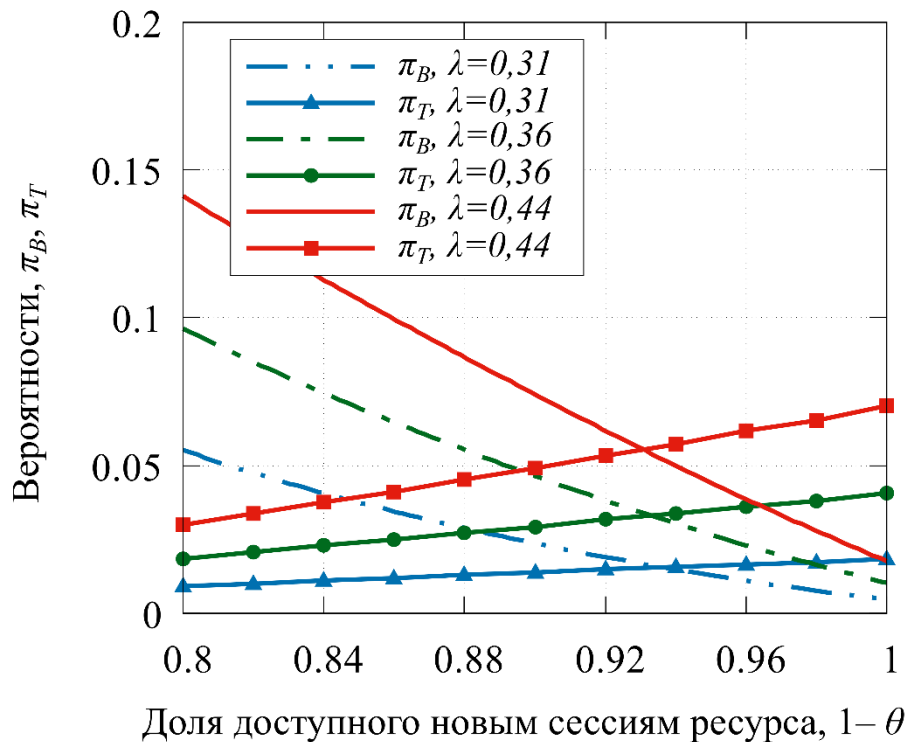


Рис. 4.2. Влияние доли зарезервированного ресурса на вероятностные характеристики в зависимости от интенсивности поступления сессий

Перейдем теперь к численному анализу влияния резервирования ресурса на показатели эффективности системы. На рисунке 4.2. показаны вероятности потери

и прерывания в зависимости от доли доступного новым сессиям ресурса, $1 - \theta$, при плотности блокаторов $\lambda_B = 0,04 \text{ м}^{-2}$, и требуемая скорость передачи $C = 10 \text{ Мбит/с}$.

Можно заметить, что использование резервирования части ресурса позволяет снизить вероятность прерывания π_T за счет сравнительно небольшого увеличения вероятности потери π_B при поступлении. Как и ожидалось, существует компромисс между вероятностями потери и прерывания, и преимущества очевидны для всех рассматриваемых интенсивностей поступления сессий. Важно отметить, что положительный эффект резервирования части ресурса для вероятности прерывания увеличивается по мере роста интенсивности поступления λ , то есть это позволяет достичь более высоких выигрышей в условиях перегрузки, что имеет решающее значение для потенциальных операторов сетей NR.

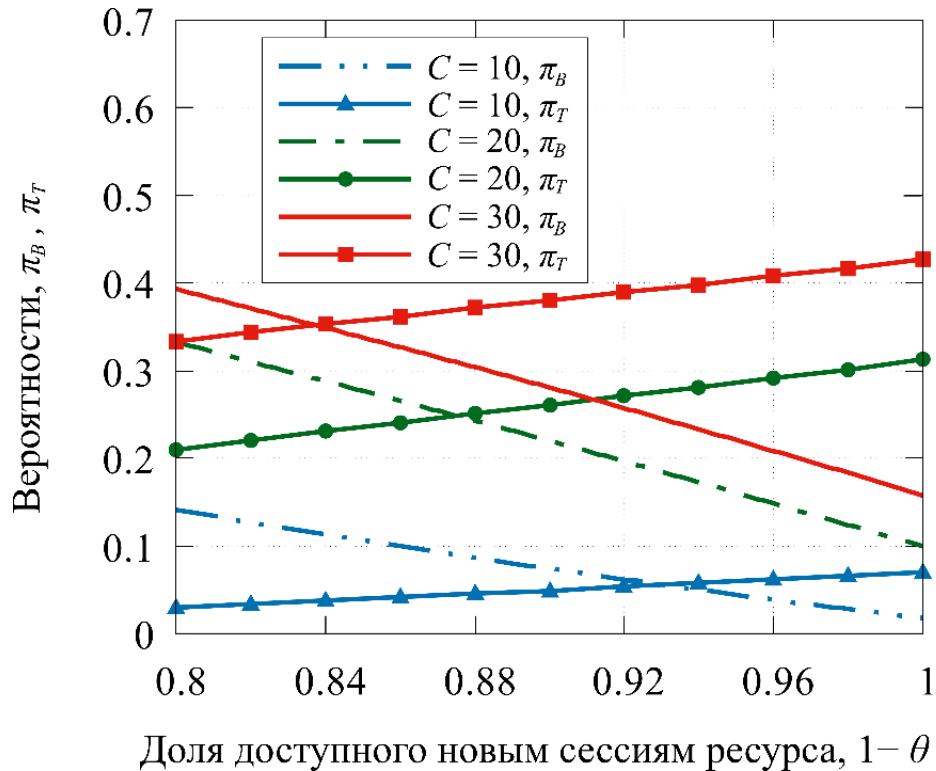


Рис. 4.3. Влияние доли зарезервированного ресурса на вероятностные характеристики в зависимости от требуемой скорости

Рассмотрим влияние требуемой для сессии скорости передачи данных C , показанное на рисунке 4.3, на вероятностные характеристики. Расчеты проводились при плотности $\lambda_B = 0.04$ блокаторов на м^2 и для трех различных скоростей, $C = 10 \text{ Мбит/с}$, 20 Мбит/с и 30 Мбит/с . Во-первых, увеличение

требуемой сессиям скорости передачи, очевидно, отрицательно влияет на обе вероятности. Во-вторых, и что более важно, преимущества резервирования части ресурса увеличиваются с увеличением требуемой скорости. В частности, для скорости передачи $C=30$ Мбит/с вероятность прерывания π_T уменьшается примерно с 0,42 для $\theta=0$ (т.е. без резервирования) до примерно 0,33 для $\theta=0.2$. Для тех же значений θ и $C=10$ Мбит/с положительный эффект от механизма резервирования уже не настолько очевиден. Следовательно, механизм резервирования части ресурсов особенно полезен для тяжелых сессий с экстремальными требованиями к скорости передачи данных. Обслуживания таких сессий является основной целью в сетях радиодоступа NR, использующих миллиметровый диапазон длин волн.

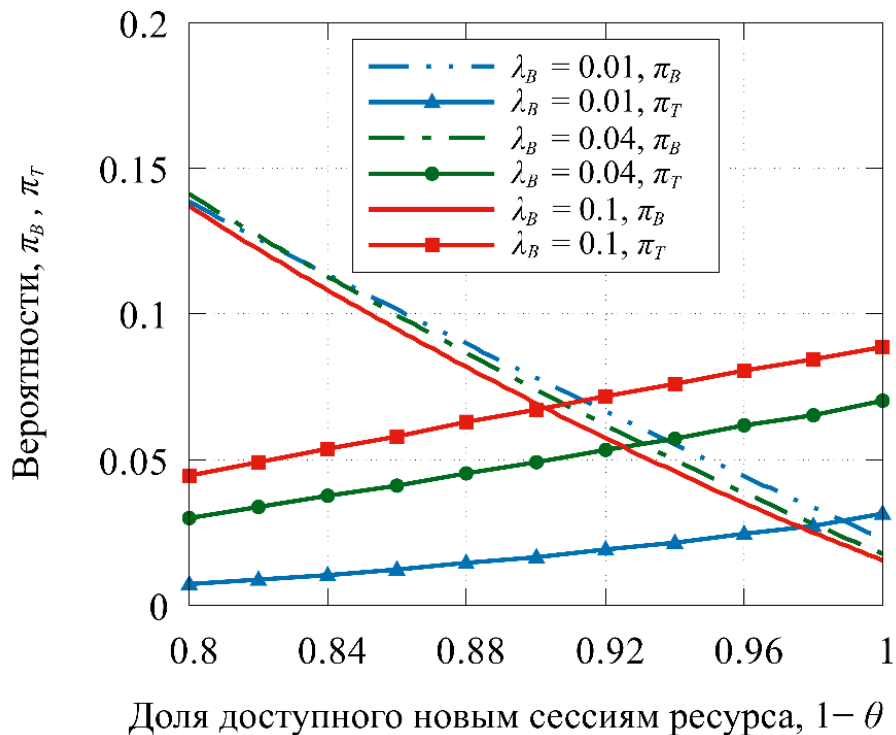


Рис. 4.4. Влияние доли зарезервированного ресурса на вероятностные характеристики в зависимости от плотности блокаторов

На рисунке 4.4 вычислены значения вероятностных характеристик для различных плотностей блокаторов при требуемой скорости $C=10$ Мбит/с. Во-первых, можно заметить большую разницу между вероятностями прерывания π_T , соответствующими различным значениям плотности блокаторов. Эта вероятность

увеличивается 0,03 до более 0,08 при $\theta=0$. Разница вероятностей потери π_B намного меньше и не превышает 0,01 во всем рассматриваемом диапазоне θ . Причина такого поведения заключается в том, что более высокие значения плотности блокаторов приводят к более высокой интенсивности переходов между заблокированным и незаблокированным состояниями, что приводит к увеличению вероятности прерывания. Кроме того, можно отметить эффективность механизма резервирования ресурса для снижения прерываний обслуживания, пусть и ценой чувствительного повышения вероятности потери сессий при поступлении.

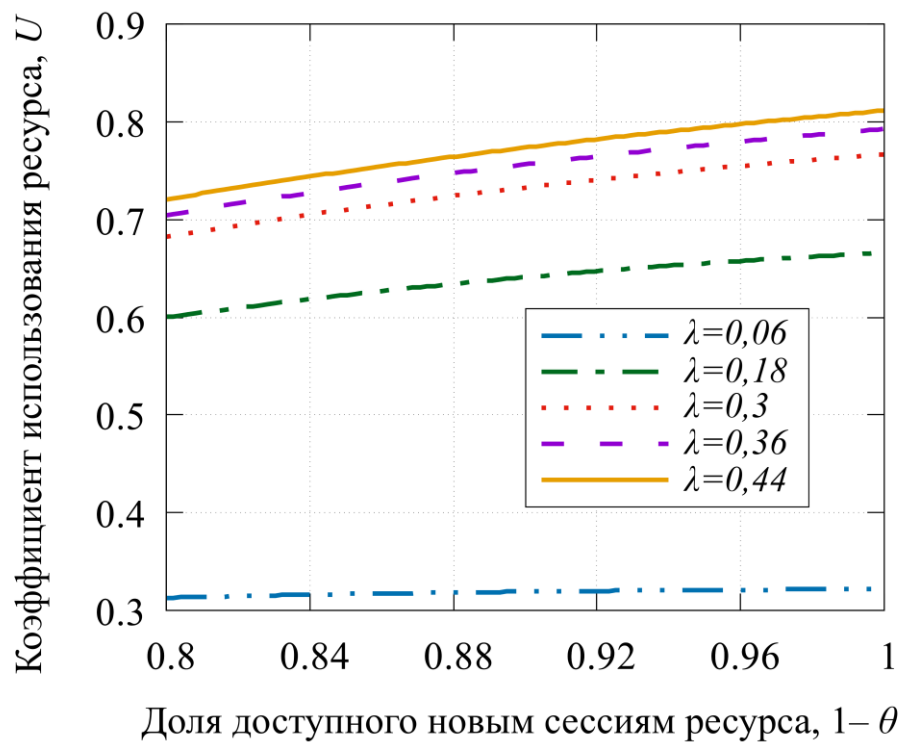


Рис. 4.5. Влияние доли зарезервированного ресурса на коэффициент использования ресурса системы

На рисунке 4.5 представлены значения коэффициента использования ресурса U в зависимости от интенсивности поступления сессий λ . Очевидно, что по мере роста λ использование ресурсов увеличивается во всем рассматриваемом диапазоне значений θ . Что еще более важно, хотя использование ресурсов действительно уменьшается по мере роста значения защитной емкости $1-\theta$, ухудшение не является слишком большим. В частности, для более низких значений λ , например, $\lambda=0,06$, коэффициент использования ресурсов остается

практически неизменным примерно 0,3 для $1-\theta \in [0,8; 1]$. Для более высоких значений интенсивности поступления сессий, например, $\lambda = 0,44$, где резервирование ресурса демонстрирует наилучший эффект, см. рис. 4.2, ухудшение составляет от примерно 0,81 для $1-\theta = 1$ до примерно 0,73 для $1-\theta = 0,8$. Это небольшое падение объясняется тем, что сессии, находящиеся на обслуживании занимают зарезервированные ресурсы в результате изменений состояния блокировки пути прямого распространения. Таким образом, резервирование ресурса обеспечивает повышение производительности за счет небольшого снижения коэффициента использования ресурса системы.

4.3. Совместное использование механизмов резервирования ресурса и мультисвязности

Еще один способ повышения непрерывности пользовательских сессий передачи данных называется технологией мультисвязности. Мультисвязность подразумевает, что пользовательские устройства поддерживают соединение одновременно с M базовыми станциями. Тогда при возникновении блокировки пути прямого распространения между устройством и БС оно может переключиться на соединение с другой БС.

Следует учитывать, что поддержание каждого дополнительного соединения требует от пользовательских устройств значительных затрат энергии. Поэтому важно определить минимальное M , при котором обеспечивается наибольший эффект снижения вероятности прерывания. В данном разделе проведен анализ совместного использования двух механизмов, мультисвязности и резервирования ресурса, что позволяет снизить отрицательные эффекты этих технологий по отдельности на показатели эффективности функционирования.

Предполагается, что пользователи со своими мобильными устройствами находятся в круговой области радиуса r_c , а K БС размещаются на окружности на постоянном расстоянии $2\pi r_c / K$ друг от друга. Радиус r_c определяется таким образом, чтобы все UE, расположенные в рассматриваемой области, не

испытывали потери соединения даже в условиях блокировки прямого пути распространения. Рассматриваемый сценарий развертывания сети изображен на рисунке 4.6.

При поступлении в систему новой сессии передачи данных, только часть радиоресурса становится ей доступна, исключая часть, обозначенную желтым прямоугольником на рисунке 4.6. Если в системе достаточно свободного (обозначенного белым) ресурса для обеспечения требований сессии, то она принимается на обслуживание. При блокировке прямой видимости (блокатор пересекает красный активный канал), сессия перенаправляется на другую БС, где ей становится доступен весь объем ресурса. На этой БС запрашивается новый объем ресурсов, отмеченный красным прямоугольником. Если в новой БС достаточно ресурса, то сессия продолжает обслуживаться, в противном случае обслуживание прерывается.

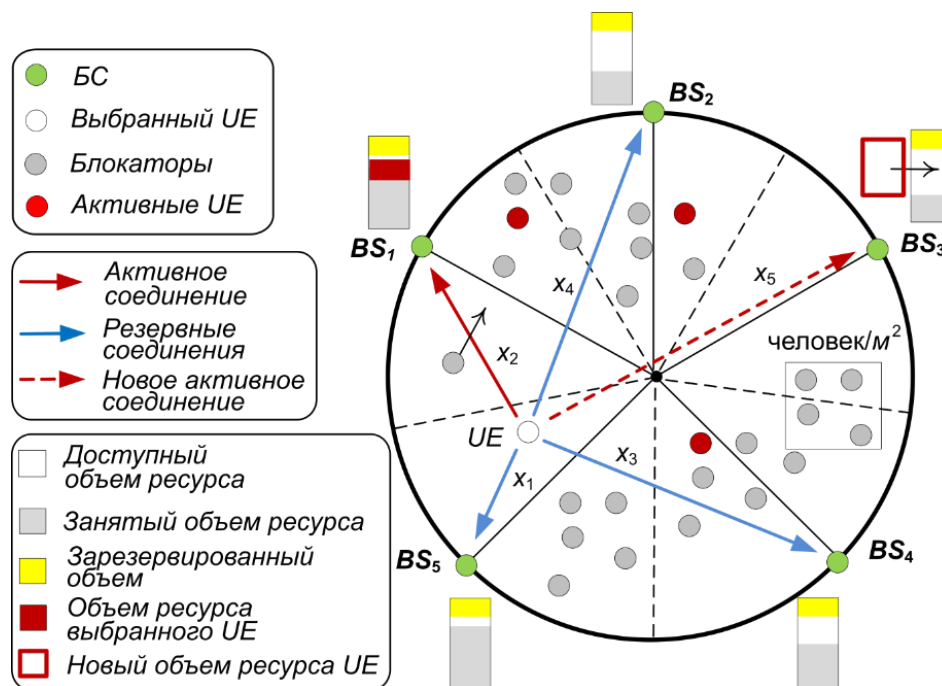


Рис. 4.6. Сценарий развертывания сети мобильной связи

Все остальные предположения относительно расположения пользователей, моделей распространения, движения блокаторов остаются такими же, как описано в разделе 4.1.

4.3.1. Построение модели в виде сети РеСМО

Рассмотрим сеть РеСМО, состоящую из K узлов, k -й узел является РеСМО с N_k приборами и одномерным ресурсом объема $R_{k,1}$ единиц. На каждый узел поступает пуассоновский поток заявок с одинаковой для всех узлов интенсивностью λ_k , $k=1,2,\dots,K$, а суммарный поток заявок на все узлы $\lambda = \sum_{k=1}^K \lambda_k$. Требования к ресурсу поступающих в k -й узел заявок задаются рядом распределения $\{f_{0,r}\}$, $r > 0$. Для новых заявок доступны только $R_{k,0}$ единиц ресурса, $R_{k,0} = R_{k,1}(1 - \theta)$. Если при поступлении заявки в узле недостаточно свободного ресурса или нет свободного прибора, то заявка теряется. В противном случае заявка занимает требуемый объем ресурса на все время обслуживания или до поступления сигнала. Времена обслуживания распределены экспоненциально с параметром μ .

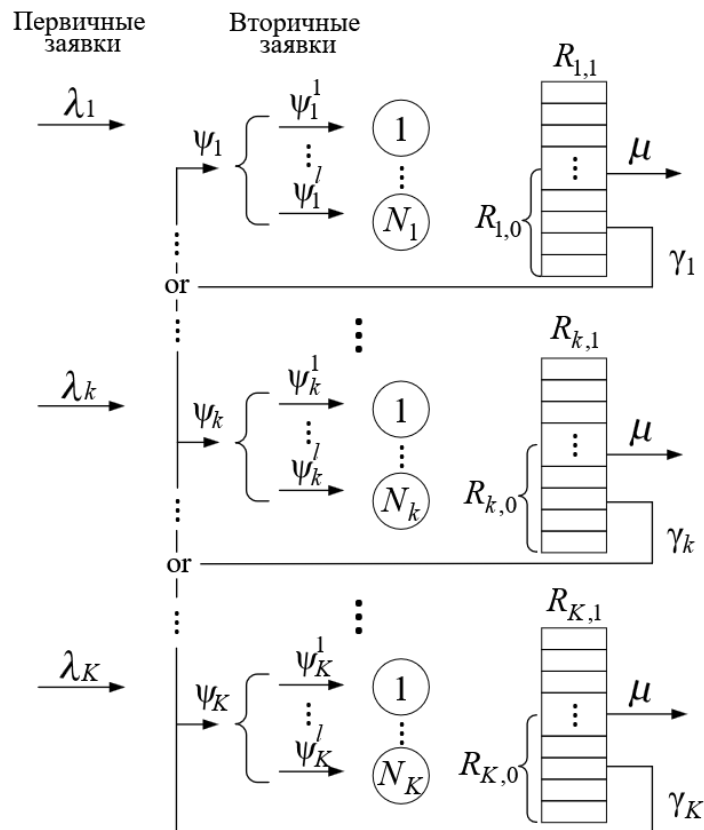


Рис. 4.7. Схема исследуемой сети РеСМО

На каждую заявку, находящуюся на обслуживании в узле k , поступает пуассоновский поток сигналов интенсивностью γ_k , $k=1,2,\dots,K$. При

поступлении сигнала соответствующая заявка освобождает занятый ею объем ресурса, генерирует новое требование в соответствии с рядом распределения $\{f_{1,r}\}$, $r > 0$. Если в узле k достаточно свободного ресурса для удовлетворения нового требования, то заявка продолжает обслуживание в том же узле. В противном случае, если $M > 1$, заявка покидает узел k и пытается продолжить обслуживание на любом другом узле с вероятностью $1/K$.

Такие перенаправленные заявки будем называть вторичными, «уровнем» v вторичной заявки называется количество перенаправлений. Вторичные заявки образуют дополнительный пуассоновский входящий поток на каждый узел с интенсивностями ψ_k , $\psi_k = \sum_v \psi_k^v$, $k = 1, 2, \dots, K$. Вторичным заявкам доступен весь имеющийся объем ресурса на том узле, куда она перешла. Если на конечном узле недостаточно свободного ресурса или нет свободных приборов, то вторичная заявка теряется. Потеря вторичной заявки приводит к прерыванию обслуживания сессии. На рисунке 4.7 представлена схема описанной сети РеСМО.

Для анализа данной модели используется метод декомпозиции, который часто применяется для расчета сложных сетей массового обслуживания. Ключевое предположение заключается в том, что процесс обслуживания в каждом узле независим от процессов обслуживания в других узлах. Для расчета вероятностных характеристик используется итерационный подход, на v -й итерации которого вычисляется интенсивность поступления вторичных заявок уровня v . Подробнее метод вычисления будет представлен в подразделе 4.3.3.

4.3.2. Модель отдельного узла

Рассмотрим функционирование отдельного k -го узла сети РеСМО. На узел поступает два пуассоновских потока заявок: поток первичных и вторичных заявок с интенсивностями λ_k и ψ_k соответственно. Времена обслуживания распределены экспоненциально с параметром $\mu + \gamma_k$, учитывая поступления сигналов и связанных с ними перенаправлениями заявок.

Поведение системы будем описывать в терминах псевдосписков, процессом $X(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t), \delta(t)\}$, где $\xi_1(t)$ – число первичных заявок в системе, $\xi_2(t)$ – число

вторичных заявок, а $\delta(t)$ – суммарный объем занятого всеми заявками ресурса в момент времени t . Пространство состояний процесса задается выражением

$$S = \bigcup_{0 < n_1 + n_2 \leq N_k} S_{n_1, n_2} \cup \{0\}, \quad (4.27)$$

$$S_{n_1, n_2} = \left\{ (n_1, n_2, r) : 0 \leq r \leq R_{k,1}, \sum_{i=0}^{\min(r, R_0)} f_{0,i}^{(n_1)} f_{1,r-i}^{(n_2)} > 0 \right\}. \quad (4.28)$$

Стационарные вероятности определим выражениями

$$Q_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi_1(t) = 0, \xi_2(t) = 0\}, \quad (4.29)$$

$$Q_{n_1, n_2}(r) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi_1(t) = n_1, \xi_2(t) = n_2, \delta(t) = r\}, \quad 0 < n_1 + n_2 \leq N_k, (n_1, n_2, r) \in S_{n_1, n_2}. \quad (4.30)$$

Рассмотрим объем ресурсов, который освобождает заявка при уходе из узла. Обозначим $\beta_{i,j}(n_1, n_2, r)$ – вероятность того, что в результате ухода первичной ($i = 0$) или вторичной ($i = 1$) заявки j единиц ресурса освобождаются при условии, что система находится в состоянии (n_1, n_2, r) . Вероятности $\beta_{1,j}(n_1, n_2, r)$, а также $\beta_{0,j}(n_1, n_2, r)$ при $r \leq R_0$ могут быть легко вычислены по формуле условной вероятности:

$$\beta_{1,j}(n_1, n_2, r) = \frac{f_{1,j} \sum_{i=0}^{r-j} f_{0,i}^{(n_1)} f_{1,r-j-i}^{(n_2-1)}}{\sum_{i=0}^r f_{0,i}^{(n_1)} f_{1,r-i}^{(n_2)}}, \quad n_2 > 0, 0 < r \leq R_0, \quad (4.31)$$

$$\beta_{0,j}(n_1, n_2, r) = \frac{f_{0,j} \sum_{i=0}^{r-j} f_{0,i}^{(n_1-1)} f_{1,r-j-i}^{(n_2)}}{\sum_{i=0}^r f_{0,i}^{(n_1)} f_{1,r-i}^{(n_2)}}, \quad n_1 > 0, 0 < r \leq R_0. \quad (4.32)$$

Оценка вероятностей $\beta_{0,j}(n_1, n_2, r)$ и $\beta_{1,j}(n_1, n_2, r)$ в случае $r > R_0$ намного сложнее. Отметим, что эти вероятности зависят от порядка поступления первичных и вторичных заявок, что не может быть определено по состоянию процесса. Однако, так как поступления первичных и вторичных заявок независимы друг от друга и принимая во внимание известное число заявок каждого типа, любую их перестановку по времени поступления в систему можно считать равновероятной. Вероятность того, что пришедшая последней первичная заявка занимает k -е место

равна $\binom{k-1}{n_1-1} / \binom{n_1+n_2}{n_1}$, где $\binom{k-1}{n_1-1}$ равно числу способов поставить n_1-1 первичную заявку по первым $k-1$ местам (т.к. последняя займет k -е место), а $\binom{n_1+n_2}{n_1}$ – число всех способов расставить n_1 первичных заявок. Вероятность того, что n_1 первичных заявок и $k-n_1$ вторичных занимают $i \leq R_0$ вычисляется при помощи свертки $\sum_{s=0}^i f_{0,s}^{(n_1)} f_{1,i-s}^{(k-n_1)}$. Далее, вероятность того, что n_1 первичных и n_2 вторичных заявок занимают r ресурсов при условии, что пришедшая последней первичная заявка занимает k -е место, также вычисляется через свертки:

$$\sum_{i=0}^{\min(r, R_0)} f_{1,r-i}^{(n_2+n_1-k)} \sum_{s=0}^i f_{0,s}^{(n_1)} f_{1,i-s}^{(k-n_1)}. \quad (4.33)$$

Наконец, вероятность того, что n_1 первичных и n_2 вторичных заявок вместе занимают r ресурсов, имеет вид

$$\sum_{k=n_1}^{n_1+n_2} \frac{\binom{k-1}{n_1-1}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}} \sum_{i=0}^{\min(r, R_0)} f_{1,r-i}^{(n_2+n_1-k)} \sum_{s=0}^i f_{0,s}^{(n_1)} f_{1,i-s}^{(k-n_1)}. \quad (4.34)$$

Финальные формулы получаются довольно громоздкие, поэтому здесь они не приведены. Вычисление вероятностей $\beta_{0,j}(n_1, n_2, r)$ и $\beta_{1,j}(n_1, n_2, r)$ в случае $r > R_{k,0}$ представляет собой непростую вычислительную задачу. Поэтому, для уменьшения вычислительной сложности предлагается использовать подход формул (4.31) и (4.32) для всего диапазона r , пренебрегая порядком поступления заявок. Для реальных значений доли зарезервированного ресурса $\theta < 0.2$ такое допущение не приводит к существенным погрешностям.

Рассмотрим возможные переходы между состояниями для наиболее общего случая. Пусть система находится в состоянии (n_1, n_2, r) , причем $n_1 > 0$, $n_2 > 0$, $n_1 + n_2 < N_k$, а $r \leq R_{k,0}$, тогда состояние системы могут поменять четыре типа событий: поступление первичной или вторичной заявки и уход первичной или

вторичной заявки. При поступлении первичной заявки с вероятностью $f_{0,j}$, $j \leq R_{k,0} - r$ система переходит в состояние $(n_1 + 1, n_2, r + j)$, а при поступлении вторичной – с вероятностью $f_{1,j}$, $j \leq R_{k,1} - r$ переходит в состояние $(n_1, n_2 + 1, r + j)$. При уходе из системы первичной заявки система переходит в состояние $(n_1 - 1, n_2, r - j)$ с вероятностью $\beta_{0,j}(n_1, n_2, r)$, а при уходе вторичной – в состояние $(n_1, n_2 - 1, r - j)$ с вероятностью $\beta_{1,j}(n_1, n_2, r)$. В случае $R_{k,0} < r \leq R_{k,1}$ остаются все те же типы событий, кроме поступления первичной заявки. Учитывая возможные переходы, выпишем систему уравнений для стационарных вероятностей:

$$Q_0 \left[\lambda_k \sum_{j=0}^{R_{k,0}} f_{0,j} + \psi_k \sum_{j=0}^{R_{k,1}} f_{1,j} \right] = (\mu + \gamma_k) \left[\sum_{j:(1,0,j) \in S_{1,0}} Q_{1,0}(j) + \sum_{j:(0,1,j) \in S_{0,1}} Q_{0,1}(j) \right], \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} Q_{n_1, n_2}(r) \left[\lambda_k \sum_{j=0}^{R_{k,0}-r} f_{0,j} + \psi_k \sum_{j=0}^{R_{k,1}-r} f_{1,j} + (n_1 + n_2)(\mu + \gamma_k) \right] = & \quad (4.36) \\ = \lambda_k \sum_{j:(n_1-1, n_2, r-j) \in S_{n_1-1, n_2}} f_{0,j} Q_{n_1-1, n_2}(r-j) + \psi_k \sum_{j:(n_1, n_2-1, r-j) \in S_{n_1, n_2-1}} f_{1,j} Q_{n_1, n_2-1}(r-j) + \\ + (n_1 + 1)(\mu + \gamma_k) \sum_{j:(n_1+1, n_2, r+j) \in S_{n_1+1, n_2}} Q_{n_1+1, n_2}(r+j) \beta_{0,j}(n_1 + 1, n_2, r + j) + \\ + (n_2 + 1)(\mu + \gamma_k) \sum_{j:(n_1, n_2+1, r+j) \in S_{n_1, n_2+1}} Q_{n_1, n_2+1}(r+j) \beta_{1,j}(n_1, n_2 + 1, r + j), \quad n_1 + n_2 < N_k, r \leq R_{k,0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{n_1, n_2}(r) \left[\psi_k \sum_{j=0}^{R_{k,1}-r} f_{1,j} + (n_1 + n_2)(\mu + \gamma_k) \right] = \psi_k \sum_{j:(n_1, n_2-1, r-j) \in S_{n_1, n_2-1}} f_{1,j} Q_{n_1, n_2-1}(r-j) + & \quad (4.37) \\ + (n_1 + 1)(\mu + \gamma_k) \sum_{j:(n_1+1, n_2, r+j) \in S_{n_1+1, n_2}} Q_{n_1+1, n_2}(r+j) \beta_{0,j}(n_1 + 1, n_2, r + j) + \\ + (n_2 + 1)(\mu + \gamma_k) \sum_{j:(n_1, n_2+1, r+j) \in S_{n_1, n_2+1}} Q_{n_1, n_2+1}(r+j) \beta_{1,j}(n_1, n_2 + 1, r + j), \end{aligned}$$

$$n_1 + n_2 < N_k, \quad R_{k,0} < r \leq R_{k,1},$$

$$\begin{aligned} (n_1 + n_2)(\mu + \gamma_k) Q_{n_1, n_2}(r) = \lambda_k \sum_{j:(n_1-1, n_2, r-j) \in S_{n_1-1, n_2}} f_{0,j} Q_{n_1-1, n_2}(r-j) + & \quad (4.38) \\ + \psi_k \sum_{j:(n_1, n_2-1, r-j) \in S_{n_1, n_2-1}} f_{1,j} Q_{n_1, n_2-1}(r-j), \quad n_1 + n_2 = N_k, r \leq R_{k,0}. \end{aligned}$$

$$(n_1 + n_2)(\mu + \gamma_k)Q_{n_1, n_2}(r) = \psi_k \sum_{j: (n_1, n_2-1, r-j) \in S_{n_1, n_2-1}} f_{1, j} Q_{n_1, n_2-1}(r-j), \quad (4.39)$$

$$n_1 + n_2 = N_k, \quad R_{k,0} < r \leq R_{k,1}.$$

4.3.3. Итерационный метод вычисления вероятностных характеристик

Система уравнений равновесия (4.35) – (4.39) решается численно. В связи с тем, что число уравнений может достигать $N_k(N_k + 1)R_{k,1}/2$, для операций с инфинитезимальной матрицей рекомендуется использовать специальные библиотеки для разреженных матриц, а для решения СУР – приближенные итерационные методы, например, метод Гаусса-Зейделя.

Перейдем к вероятностным характеристикам. Вероятности $\pi_{B,k}$ блокировки новой заявки на узле k и вероятность $\tilde{\pi}_{S,k}$ того, что при переходе на другой узел вторичной заявки на целевом узле недостаточно ресурса для продолжения обслуживания, принимают вид

$$\pi_{B,k} = 1 - \sum_{\substack{0 \leq n_1 + n_2 \leq N_k - 1, \\ r \leq R_{k,0}, (n_1, n_2, r) \in S_{n_1, n_2}}} Q_{n_1, n_2}(r) \sum_{j=0}^{R_{k,0}-r} f_{0, j}, \quad (4.40)$$

$$\tilde{\pi}_{S,k} = 1 - \sum_{\substack{0 \leq n_1 + n_2 \leq N_k - 1 \\ (n_1, n_2, r) \in S_{n_1, n_2}}} Q_{n_1, n_2}(r) \sum_{j=0}^{R_{k,1}-r} f_{1, j}. \quad (4.41)$$

Учитывая параметр мультисвязности M , обслуживание заявки прерывается в случае, если она получила отказ в $M - 1$ узлах. Тогда, принимая во внимание симметричность рассматриваемого сценария и предположение о независимости функционирования узлов, вероятность $\pi_{S,k}$ того, что переход на другой узел вызовет блокировку вторичной заявки, можно записать в виде

$$\pi_{S,k} = \left(\tilde{\pi}_{S,k} \right)^{M-1}. \quad (4.42)$$

Интенсивности поступления вторичных заявок рассчитываются по рекуррентным формулам для всех узлов $k = 1, 2, \dots, K$:

$$\psi_k = \sum_{v=1}^{\infty} \psi_k^v, \quad (4.43)$$

$$\psi_k^1 = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \lambda_i (1 - \pi_{B,i}) \frac{\gamma_i}{\mu + \gamma_i}, \quad (4.44)$$

$$\psi_k^v = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \psi_i^{v-1} (1 - \pi_{S,i}) \frac{\gamma_i}{\mu + \gamma_i}, \quad v > 1. \quad (4.45)$$

Усредняя по всем узлам, получим вероятностные характеристики по всей сети: вероятность π_B блокировки новой заявки и вероятность π_S того, что переход на другой узел вызовет блокировку вторичной заявки.

$$\pi_B = \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_k}{\lambda} \pi_{B,k}, \quad \pi_S = \sum_{k=1}^K \frac{\psi_k}{\psi} \pi_{S,k}. \quad (4.46)$$

Под вероятностью прерывания обслуживания будем понимать предел отношения числа заявок, обслуживание которых было прервано при переходе на другой узел, к общему числу принятых на обслуживание заявок за время t при $t \rightarrow \infty$. Тогда, по аналогии с утверждением 3.1, получаем

$$\pi_T = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi_S t \sum_{k=1}^K \psi_k}{\lambda(1 - \pi_B)t} = \frac{\pi_S \sum_{k=1}^K \psi_k}{\lambda(1 - \pi_B)}. \quad (4.47)$$

Процесс расчета стационарных вероятностей и показателей эффективности системы является итерационным, так как на каждой итерации добавляется следующий уровень вторичных заявок. Процедура расчета заканчивается в момент достижения требуемой точности характеристик. На первой итерации интенсивности поступления вторичных заявок считаются равными нулю $\psi_k = 0, k = 1, 2, \dots, K$. Далее выполняется следующее:

1. Используя $\lambda_k, \mu, \gamma_k, \psi_k$, и распределения $\{p_{0,j}\}, \{p_{1,j}\}$, вычисляются показатели эффективности каждого узла по отдельности: вероятность блокировки новой заявки $\pi_{B,k}$, вероятность $\pi_{S,k}$ того, что переход на другой узел вызовет блокировку вторичной заявки и средний объем занятого ресурса σ_k .

2. Вычисляются параметры сети в целом: вероятность блокировки новой заявки π_B , вероятность того, что переход на другой узел вызовет блокировку вторичной заявки π_S и средний объем занятого ресурса σ .
3. Вычисляются интенсивности поступления вторичных заявок следующего уровня ψ_k^{v+1} . Если достигнут заданный уровень точности ($\max_k(\psi_k^{v+1}) < \varepsilon$), то вычисления прекращаются. В противном случае пересчитываются интенсивности ψ_k с учетом нового уровня $v+1$ и алгоритм возвращается к шагу 1.

4.3.4. Численный анализ эффективности совместного механизма

Перейдем к численному анализу. Вывод параметров РеСМО из параметров моделей распространения и особенностей сценария развертывания проведен по принципам, изложенным в разделе 4.1. Исходные параметры собраны в таблице 4.2.

Табл. 4.2. Исходные данные

Параметр	Значение
Несущая частота, f_c	28 ГГц
Ширина полосы пропускания, B_{total}	400 МГц
Ширина полосы ресурсного блока, B	2,88 МГц
Мощность передачи, P_T	2 Вт
Коэффициент усиления антенны БС, G_B	14,58 дБи
Коэффициент усиления антенны UE, G_U	5,57 дБи
Потери в кабеле, C_L	2 дБ
Верхняя граница интерференции, M_I	3 дБ
Термальный шум, N_0	-174 дБм / Гц
Высота БС, h_S	4 м
Высота блокатора, h_B	1,7 м
Высота расположения UE, h_U	1,5 м

Радиус блокатора, r_B	0,3 м
Скорость блокатора, v_B	1 м/с
Радиус зоны покрытия, r_C	100 м
Интенсивность поступления сессий от одного UE, α_U	$3,14 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$
Средняя длительность сессии, μ^{-1}	20 сек.

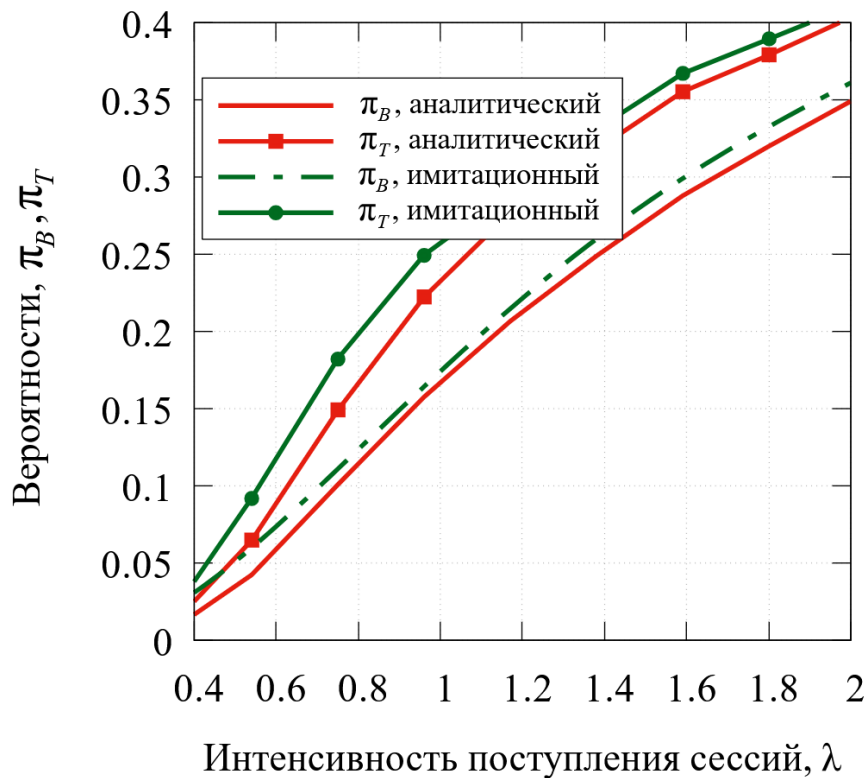


Рис. 4.8. Сравнение вычисления вероятности потери и прерывания с результатами имитационной модели.

Начнем с оценки погрешностей, вызванных использованием подхода к построению случайного процесса на базе псевдосписка, имитирующего поведение случайного списка, а также использованием формул (4.31) и (4.32) для вероятностей $\beta_{0,j}(n_1, n_2, r)$ и $\beta_{1,j}(n_1, n_2, r)$. Для этой цели была разработана имитационная модель по принципам дискретно-событийного моделирования. На рисунке 4.8 показаны результаты сравнения вероятностей потери и прерывания, вычисленные при помощи имитационной модели и при помощи описанного в данном разделе аналитического подхода при требуемой скорости скорости

передачи данных $C = 3$ Мбит/с, параметре мультисвязности $M = 3$ и доле зарезервированного ресурса $\theta = 0,9$.

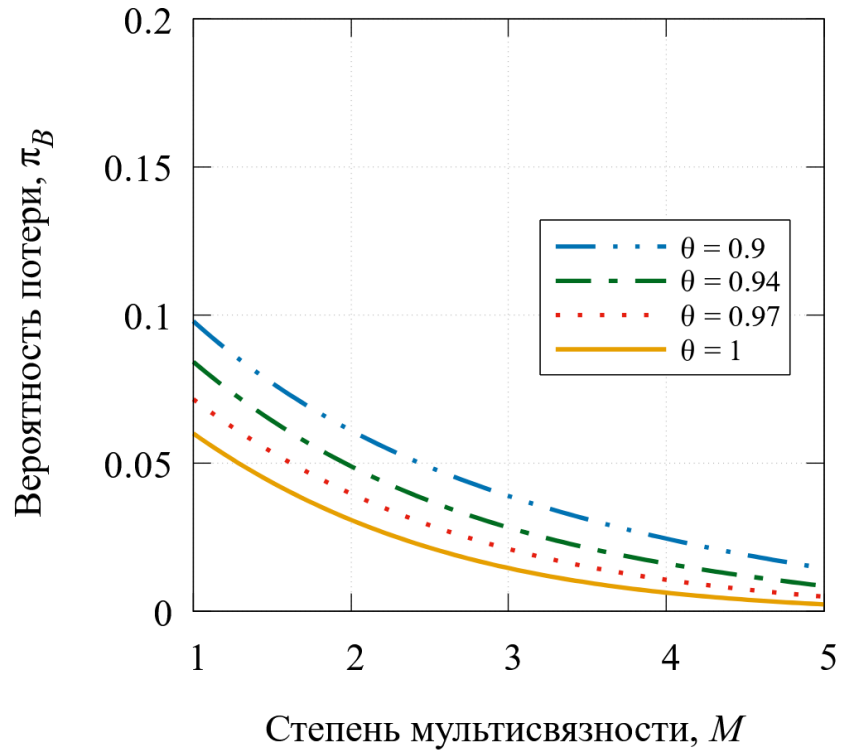


Рис. 4.9. Вероятность потери в зависимости от степени мультисвязности

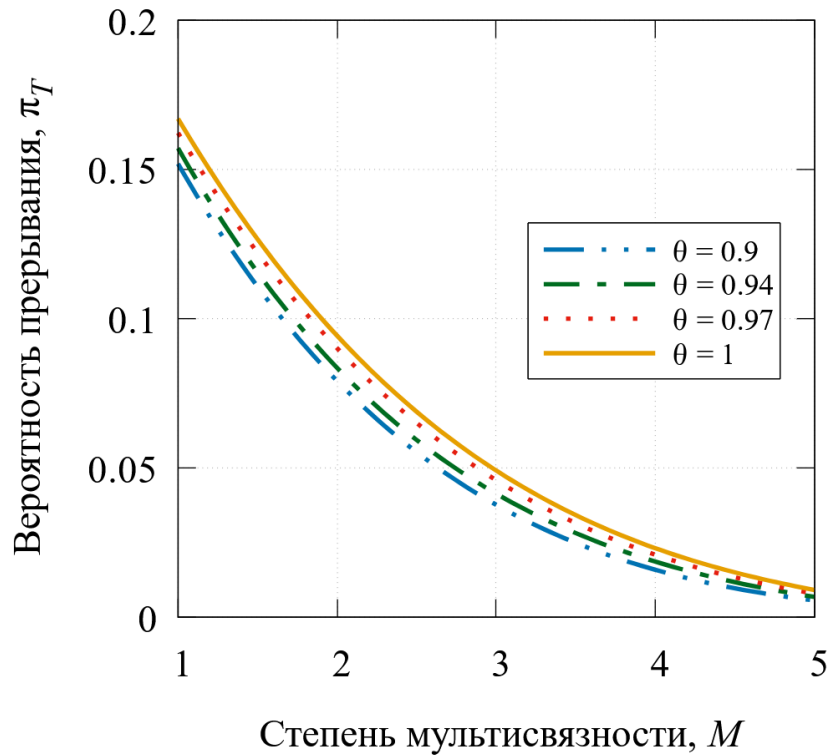


Рис. 4.10. Вероятность прерывания в зависимости от степени мультисвязности

На рисунках 4.9 – 4.11 показаны результаты расчета вероятностей потери и прерывания, а также коэффициента использования ресурса системы в зависимости от степени мультисвязности M для различных значений доли зарезервированного ресурса $1-\theta$, $\lambda=0.15$ и требуемой скорости передачи данных $C=3$ Мбит/с. Оценивая полученные результаты, можно заметить, что обе вероятности уменьшаются по мере роста степени мультисвязности для всех значений θ . Также очевидно, что резервирование части ресурса положительно влияет на вероятность прерывания, в то время как ее влияние на вероятность потери отрицательно, как и было показано в разделе 4.2.

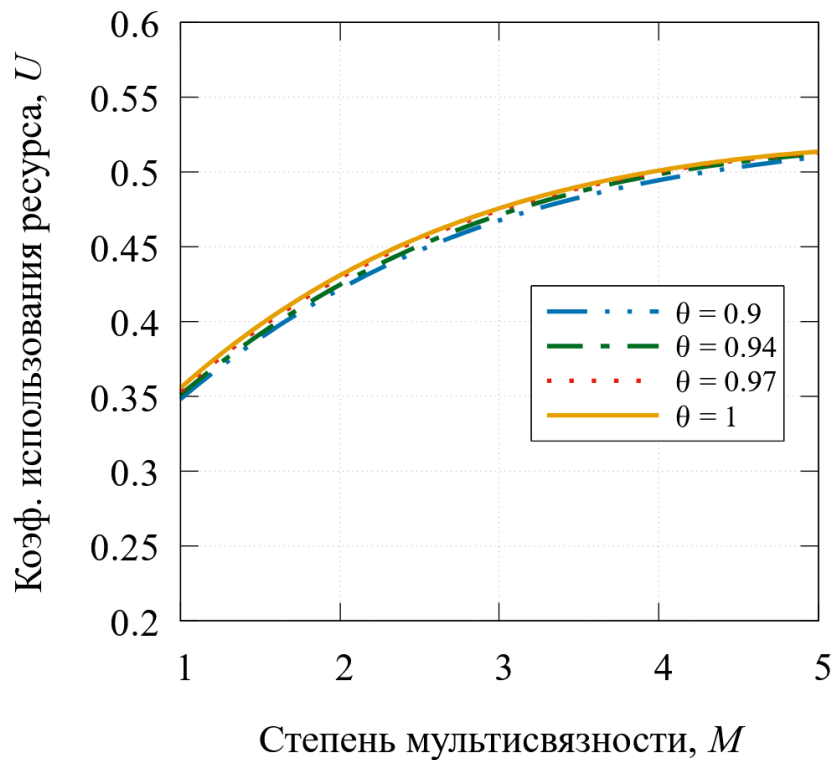


Рис. 4.11. Коэффициент использования ресурса системы в зависимости от степени мультисвязности

Кроме того, рисунок 4.11 показывает, что параметр резервирования части ресурса не оказывают существенного влияния на коэффициент использования ресурса системы. Объясняется это тем, что большая доля сессий, принятых базовыми станциями NR, остаются в системе до завершения их обслуживания. С практической точки зрения система тратит меньше ресурса на обслуживание сессий, которые прерываются. Таким образом, совместная реализация механизмов

мультиязычности и резервирования части ресурса действительно дает операторам дополнительную степень свободы в контроле производительности развертывания БС. Кроме того, пока значение θ остается в пределах $[0,9;1]$, потенциальный компромисс не оказывает отрицательного влияния на использование ресурсов на базовых станциях NR.

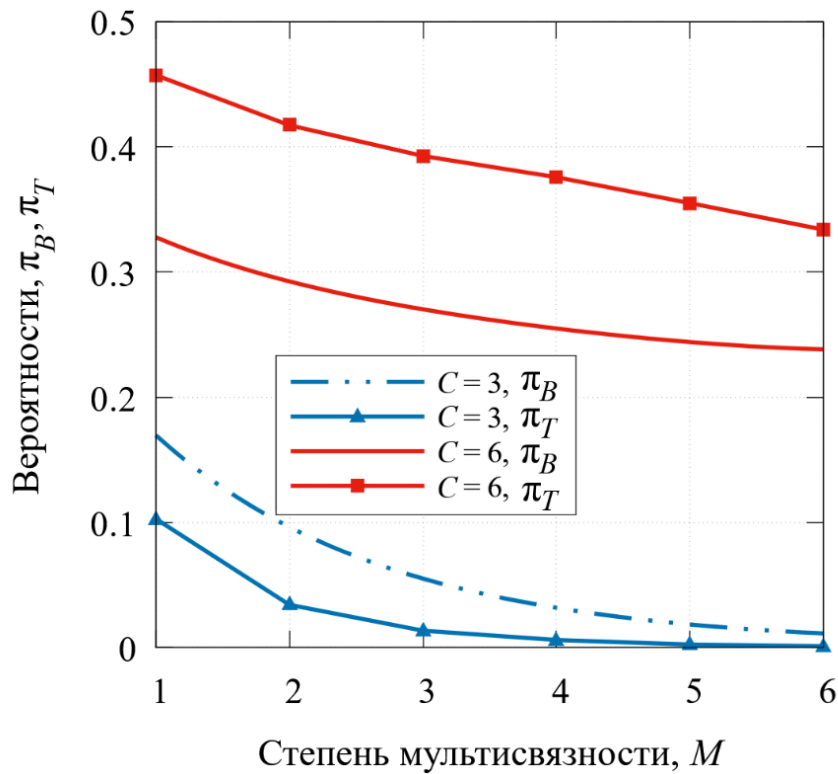


Рис. 4.12. Вероятностные характеристики при различных требуемых скоростях передачи данных

На рисунке 4.12 вычислены вероятностные характеристики системы в зависимости от степени мультиязычности для различных значений требуемой скорости передачи данных $C=3$ Мбит/с и $C=6$ Мбит/с. Вычисления проведены при уровне резервирования $\theta=0,05$ и плотности блокаторов $\lambda_B=0,1$ на m^2 . График показывает, что скорость передачи данных сессий влияет на обе вероятности, потери и прерывания, не только количественно, но и качественно. В частности, при меньшей скорости передачи C вероятность прерывания всегда выше вероятности потерь для всех рассматриваемых значений степени мультиязычности. Однако, когда требуемая скорость передачи данных увеличивается до $C=6$ Мбит/с, вероятность прерывания становится выше вероятности потерь. Причина в

том, что увеличение C приводит к более высоким средним требованиям к ресурсам, когда резервирование только 5% радиоресурсов недостаточно для снижения вероятности прерывания. Таким образом, требуемая сессиями скорость передачи данных влияет на выбор значений M и θ , обеспечивающих необходимый уровень показателей качества.

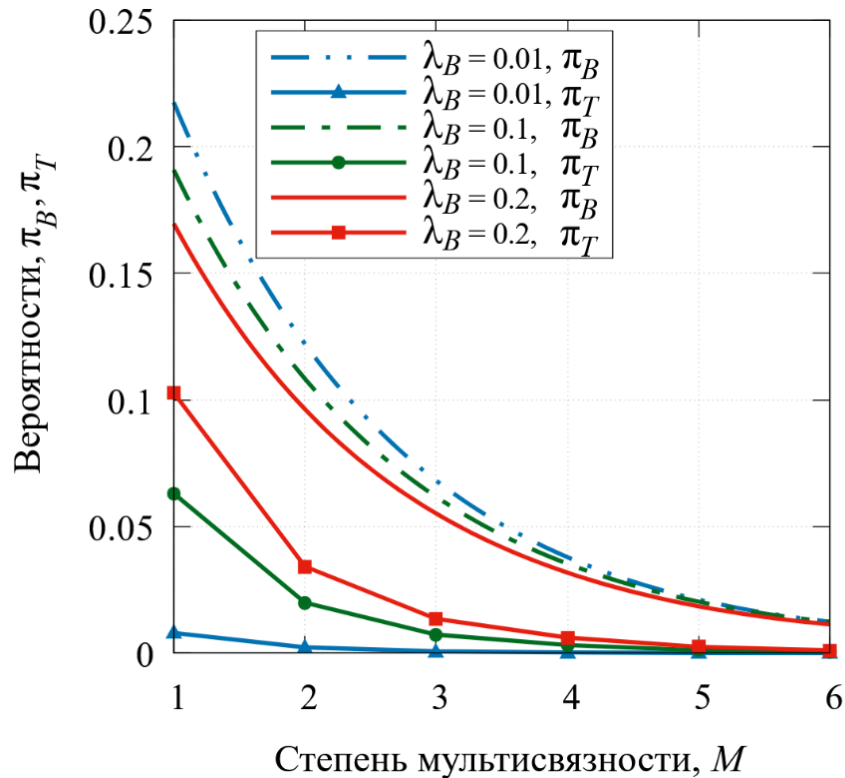


Рис. 4.13. Вероятностные характеристики при различных плотностях блокаторов

На рисунке 4.13 показаны вероятности потери и прерывания для разных значений плотности λ_B расположения пользователей, $C = 3$ Мбит/с, $\theta = 0.05$, $\lambda = 0.15$. Важно отметить, что для любой степени мультисвязности M малой плотности пользователей $\lambda_B = 0.01$ вероятность прерывания остается низкой. Как только плотность увеличивается, разница между двумя вероятностями уменьшается, и в конечном итоге вероятность прерывания может превысить вероятность потери в условиях высокой плотности устройств, что делает систему непригодной для использования. Поэтому в условиях высокой плотности устройств необходимо более высокое значение θ доли зарезервированного ресурса. Кроме того, проведенный анализ позволяет сделать вывод, что степень

мультисвязности $M > 3$ не приводит к значительному улучшению вероятности прерывания сессий.

4.4. Анализ эффектов повторных вызовов и адаптации скорости передачи данных

Мультимедийные приложения обычно нуждаются в обслуживании с постоянной скоростью передачи данных. Однако даже такие приложения часто оснащены возможностями адаптации скорости. В частности, приложение может отслеживать состояние соединения и реагировать на снижение пропускной способности сети и/или временную потерю связи путем снижения требуемой пропускной способности. Когда изменчивость скорости высока и/или связь часто теряется, пользователи воспринимают обслуживание как ухудшенное, например, с более низким разрешением или с более низкой частотой кадров в секунду.

Резкие изменения качества беспроводного канала, характерные для сетей радиодоступа 5G NR в диапазоне миллиметровых длин волн, на более поздних этапах развертывания этих систем будут частично компенсированы механизмами мультисвязности, анализу которых был посвящен предыдущий раздел. Однако на ранних этапах, когда системы 5G NR будут развернуты в изолированных местах «общественного притяжения», обрывы связи приведут к устойчивому поведению пользователей в виде повторных попыток восстановления сессии. Это может привести к ухудшению качества обслуживания пользователей. Анализу степени влияния этих эффектов на показатели эффективности функционирования сетей радиодоступа 5G NR и посвящен данный раздел.

Рассматривается сценарий с одной изолированной БС, с теми же предположениями относительно моделей распространения, антенн и движения пользователей, как и в предыдущих разделах данной главы. Предполагается, что пользователи запрашивают услуги с высокой скоростью передачи данных, такие как 4K HD видео, приложения на базе виртуальной/дополненной реальности (Virtual/Augmented Reality, VR/AR) или голографическая связь, характеризующийся неэластичным, но адаптивным характером трафика. Иными

словами, каждая поступающая сессия запрашивает постоянную скорость передачи данных C_{\max} . В случае прерывания обслуживания, вызванного блокировкой, механизм адаптации скорости на прикладном уровне снижает скорость до C_{\min} , $C_{\min} < C_{\max}$.

Процедура принятия пользовательских сессий на обслуживание следующая. При поступлении новая сессия запрашивает случайное число ресурсных блоков, заданное рядом распределения $f_{1,j}$, $1 \leq j \leq R$, соответствующей скорости C_{\max} . Если этот объем ресурса доступен, сессия принимается системой. В противном случае с вероятностью θ , отражающей настойчивое поведение пользователя, сессия ожидает экспоненциально распределенное время со средним значением α^{-1} и затем повторно иницирует запрос, а с вероятностью $1 - \theta$ покидает систему. При повторном запросе на обслуживание сессия возвращается с уменьшенными требованиями к ресурсу, которые задаются рядом $f_{2,j}$, $1 \leq j \leq R$, и соответствуют скорости C_{\min} . Процедура принятия возвращающихся сессий аналогична.

При возникновении блокировки прямой видимости качество радиоканала ухудшается, поэтому для продолжения обслуживания сессии требуется больший объем ресурса. Если в системе недостаточно свободного ресурса, то так же с вероятностью θ сессия ожидает экспоненциальное время и повторно запрашивает требуемый объем ресурса, а с вероятностью $1 - \theta$ прерывает обслуживание.

4.4.1. Построение модели

Такую систему будем моделировать РеСМО с сигналами и повторными вызовами. Пусть в системе N приборов и одномерный ресурс объема R единиц. Заявки поступают согласно пуассоновскому потоку интенсивностью λ , требования заявок к ресурсу заданы распределением $f_{1,j}$, $1 \leq j \leq R$. Если при поступлении заявки в системе достаточно свободного ресурса, то она принимается на обслуживание. В противном случае она уходит на орбиту с вероятностью θ или уходит из системы с вероятностью $1 - \theta$. На орбите заявка находится экспоненциально распределенное время с параметром α , по истечении которого пытается вернуться на обслуживание с новым требованием к ресурсу, которое

определяется согласно распределению $f_{2,j}$, $0 \leq j \leq R$. В результате заявка может либо начать обслуживание, заняв требуемый объем, либо, в случае отсутствия свободного ресурса, вернуться на орбиту или покинуть систему. Времена обслуживания распределены также экспоненциально с параметром μ .

На каждую заявку, находящуюся на обслуживании, поступает пуассоновский поток сигналов интенсивностью γ . При поступлении сигнала заявка освобождает занятый ранее объем ресурса, генерирует новое требование и пытается продолжить обслуживание. Если в системе недостаточно ресурса для удовлетворения требований заявки, то она с вероятностью θ уходит на орбиту и ожидает экспоненциальное время с параметром α до новой попытки поступить на обслуживание, либо покидает систему с вероятностью $1-\theta$. При попытке вернуться на обслуживание требования заявки распределены в соответствии с $f_{2,j}$, $0 \leq j \leq R$. Отметим, что согласно свойству экспоненциального распределения, остаточное время обслуживания заявки имеет то же экспоненциальное распределение с тем же параметром μ .

Поведение системы может быть описано трехмерным случайным процессом $X(t) = (\xi(t), \delta(t), \eta(t))$, где $\xi(t)$ – число заявок на обслуживании в момент t , $\delta(t)$ – суммарный объем занятого ими ресурса, и $\eta(t)$ – число заявок на орбите. В дальнейшем будем называть вновь поступающие заявки первичными, а поступающие с орбиты – вторичными.

Пространство состояний процесса $X(t)$ задается следующим образом:

$$S = \bigcup_{n=0}^N S_n, \quad S_n = \left\{ (n, r, m) : 0 \leq m \leq M, \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^r f_{1,j}^{(i)} f_{2,r-j}^{(n-i)} > 0 \right\}, \quad (4.48)$$

где M – максимальное число мест на орбите.

Для уменьшения пространства состояний системы в состоянии процесса нет различий между первичными и вторичными заявками. Поэтому предполагается, что требования заявок к ресурсу распределены в соответствии с рядом $f_{3,j}$, $1 \leq j \leq R$, который представляет собой смесь распределений $f_{1,j}$ и $f_{2,j}$:

$$f_{3,j} = \bar{N}_1 f_{1,j} + \bar{N}_2 f_{2,j}, \quad 0 \leq j \leq R, \quad (4.49)$$

где \bar{N}_1 и \bar{N}_2 , $\bar{N}_1 + \bar{N}_2 = 1$, – средние доли первичных и вторичных заявок в системе соответственно. Формулы для вычисления весов \bar{N}_1 и \bar{N}_2 будут даны ниже.

Существует четыре типа событий, которые могут вызвать переход состояния $X(t)$. Выпишем эти события и их вероятности, предполагая, что система находится в состоянии (n, r, m) :

1. Поступление первичной заявки, требующей j единиц ресурса для обслуживания. Если $j \leq R - r$ и $n < N$, то заявка принимается на обслуживание, и система переходит в состояние $(n+1, r+j, m)$. В противном случае, если $j > R - r$ или $n = N$ и $m < M$ тогда заявка либо отправляется на орбиту с вероятностью θ , изменяя состояние системы на $(n, r, m+1)$, либо покидает систему с вероятностью $1 - \theta$ без изменения состояния системы. Наконец, если на орбите нет места, $m = M$, заявка покидает систему, а состояние системы не изменяется.

2. Завершение обслуживания заявки. В этом случае освобождается объем ресурса, занятый данной заявкой. Тогда с вероятностью $\varphi_j(n, r)$, вычисляемой из распределения $f_{3,j}$,

$$\varphi_j(n, r) = \frac{f_{3,r-j}^{(n-1)} f_{3,j}}{f_{3,r}^{(n)}} \quad j = 0, 1, \dots, r, \quad (4.50)$$

система переходит в состояние $(n-1, r-j, m)$.

3. Поступление сигнала. Тогда соответствующая заявка освобождает j единиц ресурса с вероятностью $\varphi_j(n, r)$ и с вероятностью $f_{3,i}$ пытается занять i единиц ресурса. Если $i \leq R - r + j$, то заявка продолжает обслуживание, и система переходит в состояние $(n, r-j+i, m)$. В противном случае, если $i > R - r + j$, сессия либо отправляется в орбиту с вероятностью θ , а система переходит в состояние $(n-1, r-j, m+1)$, либо покидает систему с вероятностью $1 - \theta$, что приводит систему в состояние $(n-1, r-j, m)$. Если на орбите нет места, $m = M$, заявка покидает систему с вероятностью 1.

4. Поступление вторичной заявки, требующей j единиц ресурса. Если $j \leq R - r$ и $n < N$, то заявка принимается на обслуживание, и система переходит в состояние $(n+1, r+j, m-1)$. В противном случае сессия может либо вернуться на орбиту с вероятностью θ , а система останется в исходном состоянии (n, r, m) , либо покинуть систему с вероятностью $1-\theta$, что приведет систему в состояние $(n, r, m-1)$.

Эти четыре типа событий вызывают восемь типов изменений состояния системы: 1) поступление и принятие на обслуживание первичной заявки, 2) поступление первичной заявки и ее уход на орбиту, 3) завершение обслуживания заявки, 4) перераспределение ресурса, вызванное поступлением сигнала, 5) уход заявки с обслуживания на орбиту из-за недостатка свободного ресурса при поступлении сигнала, 6) уход заявки из системы из-за поступления сигнала, 7) принятие на обслуживание вторичной заявки после возвращения с орбиты и, наконец, 8) уход вторичной заявки из системы из-за недостатка свободного ресурса в момент поступления с орбиты.

Пусть $q(n, r, m)$ – вероятность стационарного состояния $X(t)$,

$$q(n, r, m) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = n, \delta(t) = r, \eta(t) = m\}. \quad (4.51)$$

Тогда на основе описанных выше переходов состояний можно вывести систему уравнений равновесия:

$$(\lambda + m\alpha)q(0, 0, m) = \mu \sum_{j:(1, j, m) \in S_1} q(1, j, m), \quad 0 \leq m \leq M, \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} & q(n, r, m) \left[\lambda \left(\sum_{j=0}^{R-r} f_{1,j} + u(M-m)\theta \sum_{j=R-r+1}^R f_{1,j} \right) + n\mu + \right. \\ & \left. + n\gamma \left(1 - \sum_{j=1}^r \varphi_j(n, r) f_{3,j} \right) + m\alpha \left(\sum_{j=1}^{R-r} f_{2,j} + (1-\theta) \sum_{j=R-r+1}^R f_{2,j} \right) \right] = \\ & = \lambda \sum_{j < r, (n-1, j, m) \in S_{n-1}} q(n-1, j, m) f_{1, r-j} + u(m)\lambda\theta q(n, r, m-1) \sum_{j=R-r+1}^R f_{1,j} + \\ & + (n+1)\mu \sum_{j > r, (n+1, j, m) \in S_{n+1}} q(n+1, j, m) \varphi_{j-r}(n+1, j) + \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned}
& +n\gamma \sum_{(n,j,m) \in S_n, j \neq r} q(n,j,m) \sum_{s=\max(0,j-r)}^j \varphi_s(n,j) f_{3,r-j+s} + \\
& +(n+1)\gamma \sum_{j>r, (n+1,j,m) \in S_{n+1}} u(m)\theta q(n+1,j,m-1)\varphi_{j-r}(n+1,j) \sum_{s=R-r+1}^R f_{3,s} + \\
& +(n+1)\gamma \sum_{j>r, (n+1,j,m) \in S_{n+1}} (1-\theta)q(n+1,j,m)\varphi_{j-r}(n+1,j) \sum_{s=R-r+1}^R f_{3,s} + \\
& +u(M-m)(m+1)\alpha(1-\theta)q(n,r,m+1) \sum_{j=R-r+1}^R f_{2,j} + \\
& +u(M-m)(m+1)\alpha \sum_{j<r, (n-1,j,m+1) \in S_{n-1}} q(n-1,j,m+1)f_{2,r-j}, \\
& 0 < n < N, \quad 0 \leq m \leq M, \quad (n,r,m) \in S, \\
& q(N,r,m) \left[u(M-m)\theta\lambda + N\mu + N\gamma \left(1 - \sum_{j=1}^r \varphi_j(N,r)p_{3,j} \right) + m\alpha(1-\theta) \right] = \quad (4.54) \\
& = \lambda \sum_{j<r, (N-1,j,m) \in S_{N-1}} q(N-1,j,m)f_{1,r-j} + u(m)\lambda\theta q(N,r,m-1) + \\
& +N\gamma \sum_{(N,j,m) \in S_N, j \neq r} q(N,j,m) \sum_{s=\max(0,j-r)}^j \varphi_s(N,j) f_{3,r-j+s} + \\
& +u(M-m)(m+1)\alpha \sum_{j<r, (N-1,j,m+1) \in S_{N-1}} q(N-1,j,m+1)f_{2,r-j} + \\
& +u(M-m)(m+1)\alpha(1-\theta)q(N,r,m+1), \quad 0 \leq m \leq M, (N,r,m) \in S_N,
\end{aligned}$$

где $u(x)$ функция Хевисайда,

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Система уравнений (4.52) – (4.54) решается численно с использованием условия нормировки. Так как пространство состояний трехмерное, при больших значениях числа приборов N и объема ресурса R рекомендуется использовать приближенные итерационные методы решения систем линейных уравнений.

4.4.2. Вероятностные характеристики и методы расчета

Получив стационарное распределение, можно перейти к выводу вероятностных характеристик системы. Стоит заметить, что время пребывания заявки в системе может содержать множество периодов обслуживания и ожидания. Под периодом обслуживания понимается интервал времени, в течение которого заявка непрерывно обслуживается, а по окончании либо уходит на орбиту, либо покидает систему. Аналогично, период ожидания – интервал времени, который заявка непрерывно проводит на орбите, а в конце либо принимается на обслуживание, либо покидает систему. Пример чередования периодов обслуживания и ожидания изображен на рисунке 4.14.

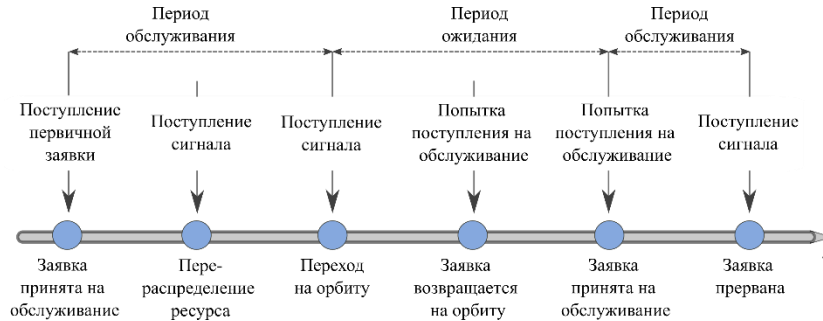


Рис. 4.14. Пример времени пребывания заявки в системе

Результаты данного раздела получены в предположении о том, что вероятности исходов при поступлении вторичных заявок с орбиты и при поступлении сигналов не зависят друг от друга при последовательном прохождении этих событий одной заявкой. Начнем с новой вероятности потери заявки π_B , которая представляет собой вероятность того, что заявка не получит обслуживания за все время пребывания в системе. Это может произойти в результате следующих двух событий: 1) поступившая первичная заявка не принимается на обслуживание и покидает систему, 2) поступившая первичная заявка сразу уходит на орбиту и в конце периода ожидания покидает систему.

Утверждение 4.1. Вероятность потери заявки π_B вычисляется по формуле

$$\pi_B = \pi_1 + \frac{(1 - \theta)\pi_2\pi_3}{1 - \theta(1 + \pi_3)}, \quad (4.55)$$

где π_1 – вероятность того, что первичная заявка при поступлении не принимается на обслуживание и покидает систему,

$$\pi_1 = \sum_{r=1}^R \left(q(N, r, M) + (1-\theta) \sum_{m=0}^{M-1} q(N, r, m) \right) + \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{r=1}^R \left(q(n, r, M) + (1-\theta) \sum_{m=0}^{M-1} q(n, r, m) \right) \sum_{j=R-r+1}^R f_{1,j}, \quad (4.56)$$

π_2 – вероятность того, что первичная заявка при поступлении не принимается на обслуживание и уходит на орбиту:

$$\pi_2 = \theta \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{r=1}^R \sum_{m=0}^{M-1} q(n, r, m) \sum_{j=R-r+1}^R f_{1,j} + \theta \sum_{r=1}^R \sum_{m=0}^{M-1} q(N, r, m), \quad (4.57)$$

π_3 – вероятность того, что вторичная заявка при поступлении с орбиты не принимается на обслуживание и уходит из системы:

$$\pi_3 = \frac{(1-\theta)}{\bar{M}} \left[\sum_{n=1}^{N-1} \sum_{r=1}^R \sum_{m=1}^M m q(n, r, m) \sum_{j=R-r+1}^R f_{2,j} + \sum_{r=1}^R \sum_{m=1}^M m q(N, r, m) \right], \quad (4.58)$$

а \bar{M} – среднее число заявок на орбите:

$$\bar{M} = \sum_{n=0}^N \sum_{r=0}^R \sum_{m=1}^M m q(n, r, m). \quad (4.59)$$

Доказательство.

При поступлении первичной заявки возможны три исхода: заявка не принимается на обслуживание и покидает систему, заявка не принимается на обслуживание и уходит на орбиту, заявка принимается на обслуживание. Вероятности первых двух событий обозначены π_1 и π_2 соответственно, а вероятность третьего можно определить как $1 - \pi_1 - \pi_2$.

В свою очередь, первое событие происходит, если при поступлении первичной заявки либо заняты все приборы и все места на орбите, либо заняты все приборы, места на орбите имеются, но заявка решает покинуть систему с вероятностью $1 - \theta$, либо имеется свободный прибор, но недостаточно свободного ресурса для удовлетворения требования заявки, а на орбите или нет мест или с вероятностью $1 - \theta$ заявка выбирает покинуть систему. Просуммировав соответствующие стационарные вероятности, получим выражение (4.56) для вероятности π_1 .

Рассуждая аналогично, второе событие (с вероятностью π_2) происходит, если при поступлении первичной заявки оказывается, что нет свободных приборов или приборы имеются, но объема свободного ресурса недостаточно для удовлетворения требований заявки, и она с вероятностью θ уходит на орбиту. Просуммировав соответствующие стационарные вероятности, получим выражение (4.57).

При поступлении вторичной заявки с орбиты тоже возможны три исхода: заявка не принимается на обслуживание и покидает систему, заявка не принимается на обслуживание и уходит на орбиту, заявка принимается на обслуживание. Вероятность первого из перечисленных событий можно получить как отношение интенсивности ν_3 ухода вторичных заявок из системы в моменты попыток возобновления обслуживания и суммарной интенсивности поступления вторичных заявок. Средняя интенсивность поступления вторичных заявок имеет вид $\alpha\bar{M}$, а ν_3 –

$$\nu_3 = (1 - \theta)\alpha \left[\sum_{n=1}^{N-1} \sum_{r=1}^R \sum_{m=1}^M mq(n, r, m) \sum_{j=R-r+1}^R f_{2,j} + \sum_{r=1}^R \sum_{m=1}^M mq(N, r, m) \right]. \quad (4.60)$$

Поделив (4.60) на $\alpha\bar{M}$, получим выражение (4.58) для вероятности π_3 . Нетрудно видеть, что вероятность π_4 второго возможного исхода при поступлении с орбиты вторичной заявки, т.е. вероятность того, что она не принимается на обслуживание и уходит на орбиту, отличается от π_3 только множителем:

$$\pi_4 = \frac{\theta}{1 - \theta} \pi_3. \quad (4.61)$$

Заметим, что вероятность третьего исхода, что вторичная заявка принимается на обслуживание при поступлении с орбиты, имеет вид $1 - \frac{\pi_3}{1 - \theta}$.

Теперь, согласно определению, π_B есть вероятность того, что заявка либо сразу при первом поступлении покинет систему, либо попадет на орбиту, и, спустя несколько периодов ожидания покинет систему. Вероятность того, что заявка сразу покинет систему, получена как π_1 . Далее, вероятность первичной заявке попасть

на орбиту равна π_2 . Вероятность того, что заявка проведет на орбите k последовательных интервалов ожидания на орбите, в предположении, что вероятности остаться на орбите при последовательных попытках попасть на обслуживание не зависят друг от друга, имеют вид $(\pi_4)^k$. И после всех периодов ожидания заявка с вероятностью π_3 уходит из системы. Таким образом, просуммировав по всем k и учитывая (4.61), получаем

$$\pi_B = \pi_1 + \pi_2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \pi_4^k \right) \pi_3 = \pi_1 + \frac{\pi_2 \pi_3}{1 - \pi_4} = \pi_1 + \frac{(1 - \theta) \pi_2 \pi_3}{1 - \theta(1 + \pi_3)}. \blacksquare$$

Перейдем теперь к вероятности прерывания заявки π_T . Определим ее как вероятность того, что заявка, хотя бы раз попавшая на обслуживание, не сумела его завершить и покинула систему.

Утверждение 4.2. Вероятность прерывания π_T можно вычислять по формуле

$$\pi_T = (1 - \pi_B) \frac{\pi_8 + \pi_9 \pi_7}{1 - \pi_9(1 - \pi_7)}, \quad (4.62)$$

где π_7 – вероятность того, что период ожидания заявки закончится ее уходом из системы:

$$\pi_7 = \frac{\pi_3}{1 - \pi_4}, \quad (4.63)$$

π_8 – вероятность того, что период обслуживания закончится уходом заявки из системы:

$$\pi_8 = \frac{\gamma \pi_5}{\mu + \gamma(\pi_5 + \pi_6)}, \quad (4.64)$$

а π_9 – вероятность того, что период обслуживания закончится уходом заявки на орбиту:

$$\pi_9 = \frac{\gamma \pi_6}{\mu + \gamma(\pi_5 + \pi_6)}. \quad (4.65)$$

Доказательство.

Рассмотрим сначала возможные исходы при поступлении сигнала. Их тоже три: заявка может покинуть систему, уйти на орбиту или продолжить

обслуживание. Вероятность π_5 покинуть систему при поступлении сигнала определим как отношение интенсивности ν_5 уходов заявок из системы, вызванных поступлениями сигналов, к общей интенсивности ν_A приема на обслуживание первичных и вторичных заявок. Интенсивность ν_5 принимает вид

$$\nu_5 = \gamma \sum_{n=2}^N \sum_{r=1}^R n \left(q(n, r, M) + \sum_{m=0}^{M-1} (1-\theta) q(n, r, m) \right) \sum_{j=1}^r \varphi_j(n, r) \sum_{s=R-r+j+1}^R f_{3,s}, \quad (4.66)$$

а суммарная интенсивность приема всех первичных и вторичных заявок имеет вид

$$\nu_A = \lambda(1 - \pi_1 - \pi_2) + \alpha \bar{M}(1 - \pi_3 - \pi_4). \quad (4.67)$$

Тогда, поделив (4.66) на (4.67), получим выражение для вероятности π_5 :

$$\pi_5 = \frac{\nu_5}{\lambda(1 - \pi_1 - \pi_2) + \alpha \bar{M}(1 - \pi_3 - \pi_4)}. \quad (4.68)$$

Аналогично, вероятность π_6 уйти на орбиту при поступлении сигнала равна отношению интенсивности ν_6 уходов заявок на орбиту, вызванных поступлениями сигналов, к общей интенсивности ν_A . Интенсивность ν_6 имеет вид

$$\nu_6 = \theta \gamma \sum_{n=2}^N \sum_{r=1}^R n \sum_{m=0}^{M-1} q(n, r, m) \sum_{j=1}^r \varphi_j(n, r) \sum_{s=R-r+j+1}^R f_{3,s}, \quad (4.69)$$

тогда, поделив (4.69) на (4.67), получим выражение для вероятности π_6 :

$$\pi_6 = \frac{\nu_6}{\lambda(1 - \pi_1 - \pi_2) + \alpha \bar{M}(1 - \pi_3 - \pi_4)}. \quad (4.70)$$

Отметим, что $1 - \pi_5 - \pi_6$ является вероятностью продолжения обслуживания заявки при поступлении сигнала. Рассмотрим теперь период ожидания одной заявки. Предполагая, что вероятности исходов при последовательных попытках поступления одной вторичной заявки на обслуживание остаются неизменными, вероятность π_7 того, что период ожидания на орбите закончится уходом заявки из системы можно записать в виде

$$\pi_7 = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_4^k \pi_3 = \frac{\pi_3}{1 - \pi_4}. \quad (4.71)$$

Отметим, что $1 - \pi_7$ означает вероятность того, что период ожидания закончится поступлением заявки на обслуживание.

Рассмотрим период обслуживания заявки. Период обслуживания может завершиться уходом из системы или уходом на орбиту, вызванным поступлением сигнала, либо завершением обслуживания заявки. Заметим, что вероятность поступления сигнала до завершения обслуживания имеет вид $\frac{\gamma}{\mu + \gamma}$. При тех же

предположениях относительно постоянства вероятностей исходов событий при их последовательном прохождении одной заявкой, вероятность π_8 того, что период обслуживания закончится уходом заявки из системы, можно записать в виде

$$\pi_8 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{\mu + \gamma} (1 - \pi_5 - \pi_6) \right)^k \frac{\gamma}{\mu + \gamma} \pi_5 = \frac{\gamma \pi_5}{\mu + \gamma (\pi_5 + \pi_6)}. \quad (4.72)$$

Аналогично, π_9 является вероятностью того, что период обслуживания закончится уходом заявки на орбиту:

$$\pi_9 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{\mu + \gamma} (1 - \pi_5 - \pi_6) \right)^k \frac{\gamma}{\mu + \gamma} \pi_6 = \frac{\gamma \pi_6}{\mu + \gamma (\pi_5 + \pi_6)}, \quad (4.73)$$

а вероятность π_{10} того, что период обслуживания закончится завершением обслуживания заявки имеет вид

$$\pi_{10} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{\mu + \gamma} (1 - \pi_5 - \pi_6) \right)^k \frac{\mu}{\mu + \gamma} = \frac{\mu}{\mu + \gamma (\pi_5 + \pi_6)}. \quad (4.74)$$

Теперь можем переходить к вычислению вероятности прерывания π_T . Для прерывания заявки необходимо, чтобы она получила хотя бы один период обслуживания (с вероятностью $1 - \pi_B$), далее пройдет $k \geq 0$ циклов обслуживания и ожидания с вероятностью $(\pi_9 (1 - \pi_7))^k$, после которых в конце последнего периода обслуживания либо сразу покинет систему с вероятностью π_8 , либо сначала перейдет на орбиту, а затем покинет систему после нескольких безуспешных попыток вернуться на обслуживание с вероятностью $\pi_9 \pi_7$. Таким образом,

$$\pi_T = (1 - \pi_B) \sum_{k=0}^{\infty} (\pi_9(1 - \pi_7))^k (\pi_8 + \pi_9\pi_7) = (1 - \pi_B) \frac{\pi_8 + \pi_9\pi_7}{1 - \pi_9(1 - \pi_7)}. \blacksquare$$

Другими важными вероятностными характеристиками являются вероятность π_S того, что заявка обслужена без периодов ожидания, а также вероятность π_W того, что заявка обслужена с одним или несколькими периодами ожидания. С учетом введенных вспомогательных вероятностей, формулы принимают вид

$$\pi_S = (1 - \pi_1 - \pi_2)\pi_{10}, \quad (4.75)$$

$$\pi_W = 1 - \pi_B - \pi_T - \pi_S. \quad (4.76)$$

Наконец, вероятность π_{orb} того, что заявка претерпит хотя бы один период ожидания, имеет вид

$$\pi_{orb} = 1 - \pi_1 - \pi_S. \quad (4.77)$$

Вернемся теперь к вычислению стационарных вероятностей системы. Для определения стационарного распределения путем решения системы уравнений (4.52) – (4.54) используется средневзвешенное распределение требований к ресурсу $p_{3,j}$, $1 \leq j \leq R$. Однако сами веса не могут быть определены до решения системы (4.52) – (4.54).

Для определения весов и, в конечном итоге, получения решения для $\{q(n,r,m)\}$ предлагается следующий итерационный алгоритм. Процедура начинается с $\bar{N}_1 = 1$ и $\bar{N}_2 = 0$, которые подставляются в (4.49). После этого решается система (4.52) – (4.54), и полученное стационарное распределение используется для оценки вспомогательных вероятностей π_1 , π_2 , π_3 и π_4 . Последние затем используются для вычисления обновленных значений весов по формулам

$$\bar{N}_1 = \frac{\lambda(1 - \pi_1 - \pi_2)}{\lambda(1 - \pi_1 - \pi_2) + \alpha\bar{M}(1 - \pi_3 - \pi_4)}, \quad (4.78)$$

$$\bar{N}_2 = \frac{\alpha\bar{M}(1 - \pi_3 - \pi_4)}{\lambda(1 - \pi_1 - \pi_2) + \alpha\bar{M}(1 - \pi_3 - \pi_4)}, \quad (4.79)$$

и нового распределения $p_{3,j}$, $1 \leq j \leq R$. Процедура продолжается до тех пор, пока разница между предыдущим и текущим значением \bar{N}_1 не достигнет желаемого уровня точности.

4.4.3. Пример численного анализа показателей эффективности

Вывод параметров РеСМО из параметров моделей распространения и особенностей сценария развертывания для численного анализа построенной модели проведен по принципам, изложенным в разделе 4.1. Исходные параметры собраны в таблице 4.3.

Табл. 4.3. Исходные данные

Параметр	Значение
Несущая частота, f_c	28 ГГц
Ширина полосы пропускания, B_{total}	100 МГц
Ширина полосы ресурсного блока, B	2,88 МГц
Мощность передачи, P_T	2 Вт
Коэффициент усиления антенны БС, G_B	14,58 дБи
Коэффициент усиления антенны UE, G_U	5,57 дБи
Потери в кабеле, C_L	2 дБ
Верхняя граница интерференции, M_I	3 дБ
Термальный шум, N_0	-174 дБм / Гц
Высота БС, h_s	10 м
Высота блокатора, h_B	1,7 м
Высота расположения UE, h_U	1,5 м
Радиус блокатора, r_B	0,4 м
Скорость блокатора, v_B	1 м/с
Максимальная требуемая скорость передачи данных, C_{max}	10 Мбит/с

Минимальная требуемая скорость передачи данных, C_{\min}	5 Мбит/с
Средняя длительность сессии, μ^{-1}	10 сек.
Интенсивность поступления сессий, λ	0,3 сек ⁻¹
Средняя длительность ожидания, α^{-1}	1 сек.

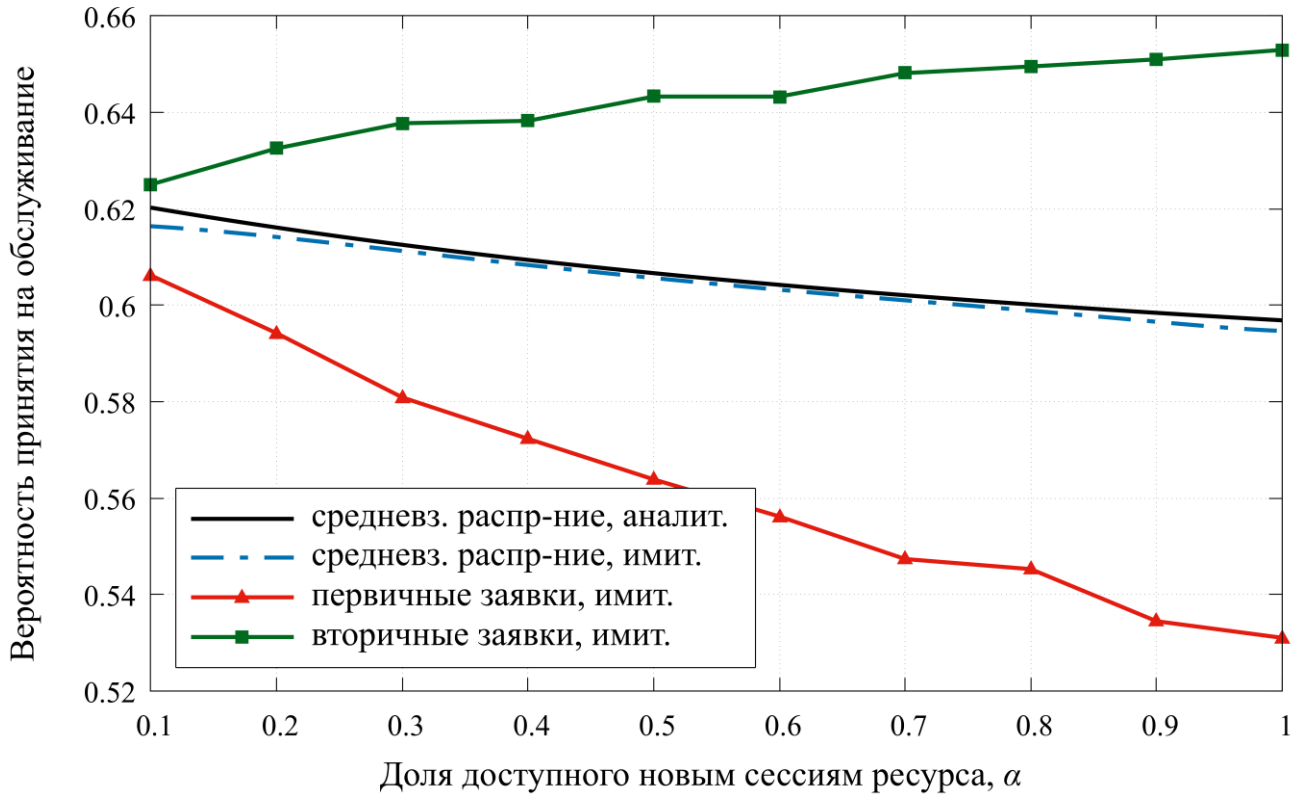


Рис. 4.15. Сравнение с имитационной моделью

Начнем, как и в предыдущих разделах данной главы, с оценки погрешности расчетов, вызванных использованием имитирующего псевдосписка вместо случайного списка, а также приближенным вычислением средневзвешенного распределения требований к ресурсу $\{f_{3,j}\}$, $0 \leq j \leq R$. По принципам дискретно-событийного моделирования была разработана имитационная модель, в которой отслеживается точное количество первичных и вторичных заявок, а также список требований к ресурсу каждой заявки. На рисунке 4.15 представлены результаты расчета вероятности принятия сессии на обслуживание на основе изложенного аналитического подхода и имитационной модели в зависимости от интенсивности

возвращения с орбиты. Кроме того, на графике представлены вероятности принятия на обслуживание первичных и вторичных заявок по-отдельности (красная и зеленая линии). Сравнение позволяет сделать вывод, что изложенный в текущем разделе 4.4 подход дает хорошее приближение вероятностных метрик.

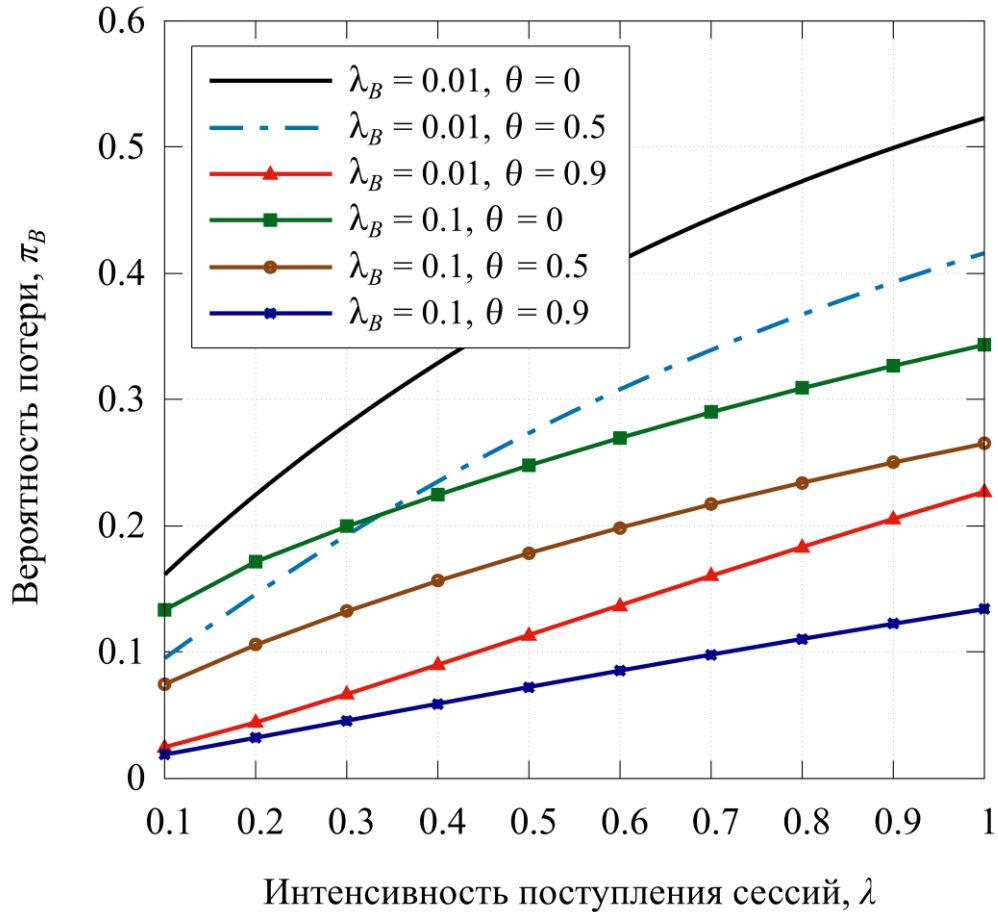


Рис. 4.16. Вероятность потери в зависимости от интенсивности поступления сессий

На рисунках 4.16 и 4.17 представлены вероятности потери π_B и прерывания π_T как функция от интенсивности λ поступления сессий при среднем времени ожидания на орбите $\alpha^{-1} = 1$ с и различных значений коэффициента θ настойчивости пользователей. Вероятность потери сессии возрастает с увеличением интенсивности поступления сессий, причем более высокая плотность блокираторов $\lambda_B = 0.1$ блокираторов/м² приводит к более низкой вероятности потери по сравнению с $\lambda_B = 0.01$ блокираторов/м² для всех значений коэффициента настойчивости θ . Следует отметить, что такое поведение типично для систем с

прерываниями сессий, так как объем ресурса, освобождаемый при прерывании сессии может быть использован для принятия на обслуживание новых сессий. Примечательно, что настойчивость пользователей значительно снижает вероятность потери. В частности, для $\lambda_B = 0.01$ блокаторов/м² и без повторных попыток ($\theta = 0$), рассматриваемая метрика равна 0.17 и уменьшается до 0.1 при двух повторных попытках в среднем, ($\theta = 0.5$).

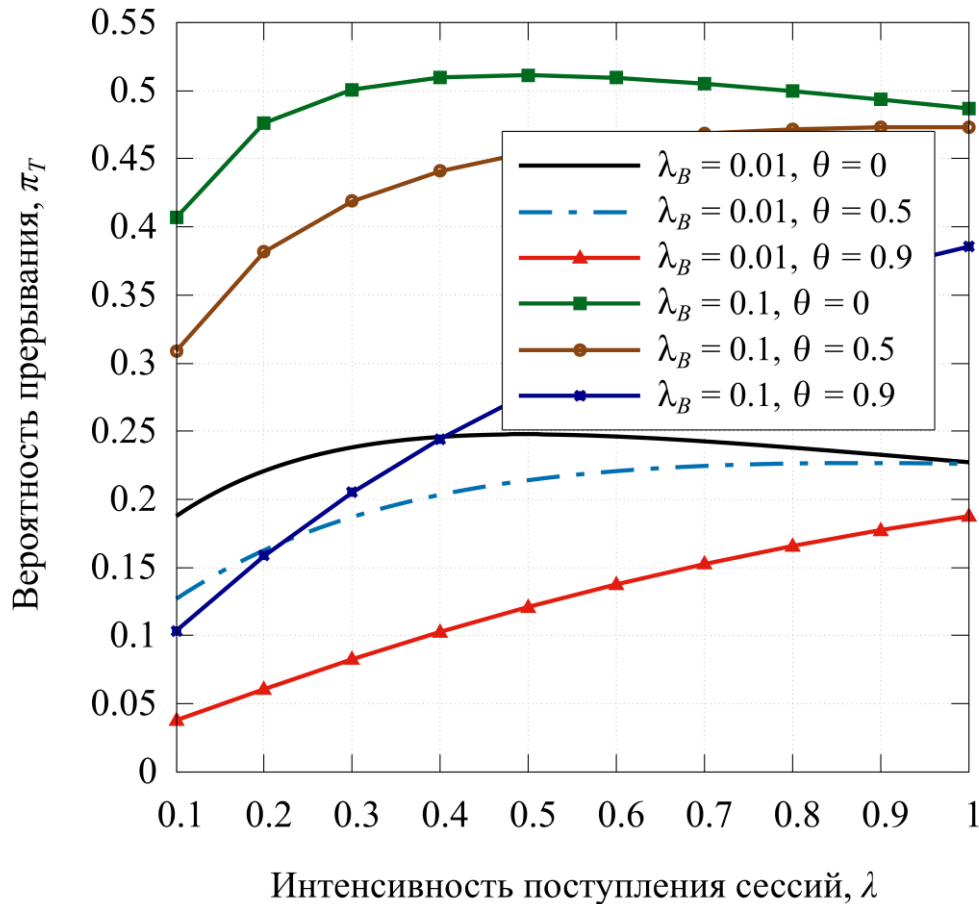


Рис. 4.17. Вероятность прерывания в зависимости от интенсивности поступления сессий

На рисунке 4.17 с расчетом вероятности прерывания сессии наблюдается резкое различие между кривыми, соответствующими $\lambda_B = 0.1$ и $\lambda_B = 0.01$ блокаторов/м², достигающим 0.2–0.3, то есть более высокая плотность блокаторов приводит к более высокой вероятности прерывания сессии, компенсируя более низкую вероятность потери, показанную на рисунке 4.16. В целом, для рассматриваемых значений интенсивности поступления сессий большая часть сессий, принятых к обслуживанию, в конечном итоге прерывается. Однако

настойчивость пользователя может значительно повысить вероятность успешного завершения обслуживания. В частности, для $\lambda = 0.1$ настойчивость пользователя при высокой плотности блокаторов $\lambda_B = 0.1$ снижает вероятность прерывания с 0.4 до 0.1. Можно также отметить, что влияние настойчивости пользователя более выражено для недогруженной системы, когда λ мало.

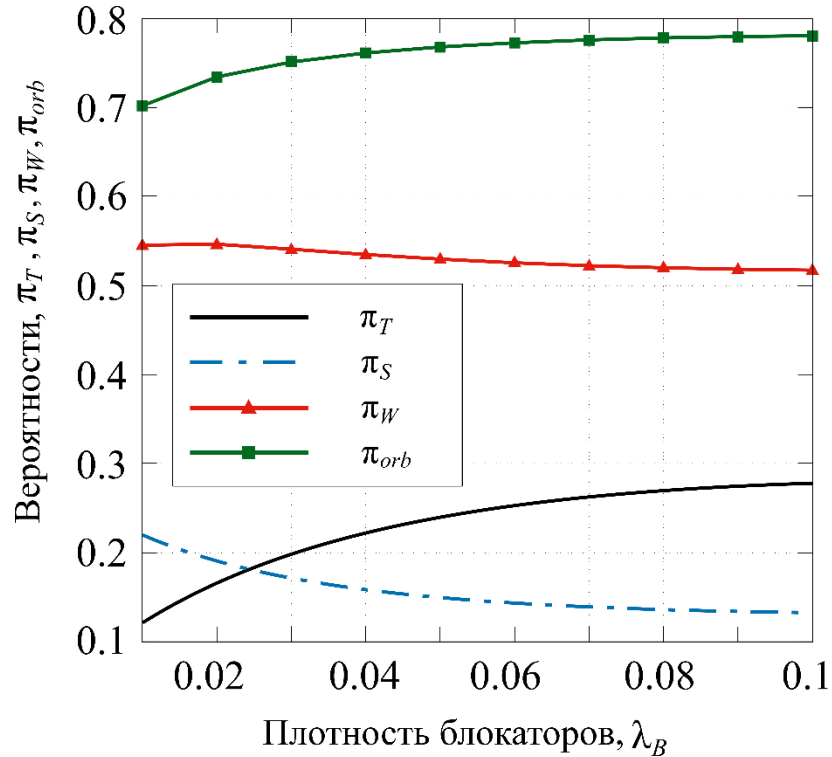


Рис. 4.18. Зависимость вероятностных характеристик от плотности блокаторов

На рисунке 4.18 показаны вероятности π_T , π_S , π_W и π_{orb} как функция плотности блокаторов λ_B . Вычисления проведены при параметре настойчивости пользователей $\theta = 0,9$. На рисунке видно, что с ростом плотности блокаторов растет и вероятность ожидания π_{orb} , и вероятность прерывания π_T . Это в конечном итоге приводит к снижению обеих вероятностей успешного завершения обслуживания, π_S и π_W . Из-за очень настойчивого поведения пользователей значительная часть сессий все еще успешно завершается даже при высокой плотности блокаторов $\lambda_B = 0,3$ блокаторов/м². Тем не менее, большинству пользователей приходится много ждать, поскольку вероятность завершения обслуживания с повторными попытками π_W в 3-4 раза выше, чем без повторных попыток.

Теперь перейдем к анализу влияния коэффициента θ настойчивости пользователя, показанного на рисунке 4.19. Вычисления проведены при сравнительно небольшой плотности $\lambda_B = 0,05$ блокаторов/м².

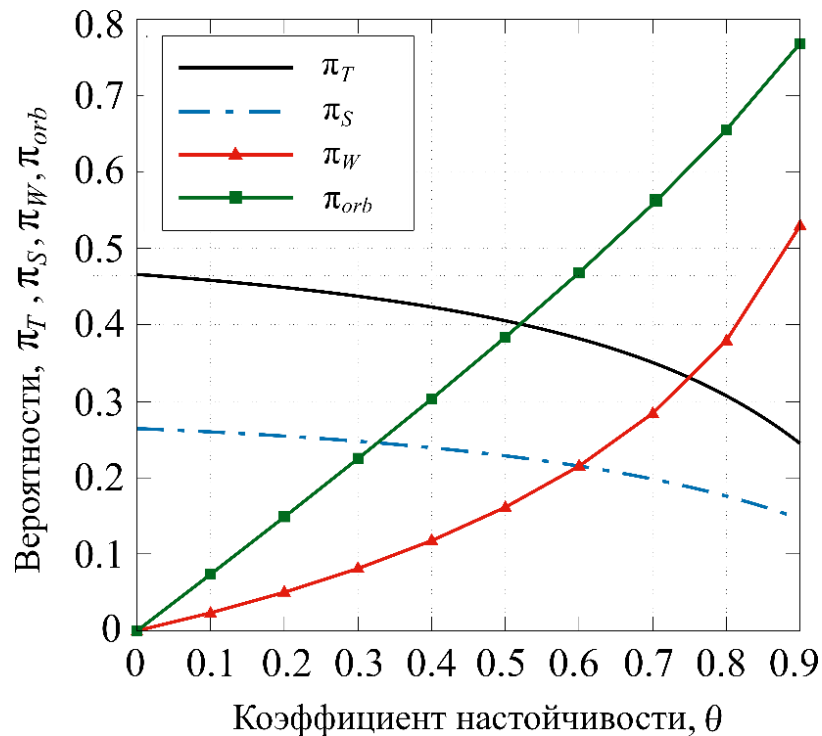


Рис. 4.19. Зависимость вероятностных характеристик от коэффициента настойчивости

Здесь мы видим, что с увеличением коэффициента θ вероятность повторной попытки π_{orb} также возрастает, как и вероятность π_W успешного завершения сессии с повторными попытками. Это происходит за счет снижения вероятности π_S завершения обслуживания сессии без повторных попыток. Причина заключается в том, что более высокий коэффициент настойчивости пользователя позволяет большему количеству сессий, прерванных из-за блокировки прямой видимости, продолжать обслуживание, тем самым ограничивая объем ресурсов, доступных для новых сессий. То есть, большая настойчивость пользователей заставляет и других пользователей проявлять настойчивость. С этой точки зрения, настойчивое поведение пользователей оказывает негативное влияние на качество восприятия услуги (QoE).

Глава 5. Применение ресурсных моделей для анализа гетерогенных сетей с несколькими технологиями радиодоступа

Данная глава посвящена применениям аппарата РеСМО к анализу показателей производительности гетерогенных сетей мобильной связи, базовые станции в которых используют различные технологии радиодоступа с различной емкостью и радиусом покрытия.

Так, в разделе 5.1 проводится анализ будущих развертываний сетей шестого поколения (6G), на участке радиодоступа которых будет использован терагерцевый диапазон частот (0,3 – 3 ГГц). Обеспечение непрерывности сессий передачи данных в сетях, использующих терагерцевый диапазон, представляет еще более сложную задачу, поскольку они не только унаследуют сложности, связанные с блокировками пути прямого распространения сигнала от сетей радиодоступа в миллиметровом диапазоне длин волн, но и будут испытывать кратковременные сбои соединения из-за рассинхронизации направленностей антенн на приемнике и передатчике из-за небольших поворотов и смещений устройства в руках человека. Исследуется сценарий мультисвязности, при котором обслуживание сессий передачи данных может быть перенаправлено с терагерцевой БС на БС 5G NR, использующей миллиметровый диапазон, на периоды сбоев соединения.

В разделе 5.2 проведен анализ технологии New Radio Unlicensed (NR-U), предложенной 3GPP⁴ для использования нелицензированного спектра при нехватке лицензированного частотного ресурса. Методы доступа к нелицензированным частотам принципиально отличаются, а гарантии производительности не всегда могут быть предоставлены. Поэтому исследуются вопросы оптимальной стратегии выгрузки сессий передачи данных в нелицензированный диапазон.

⁴ 3GPP TR 38.889 Study on NR-based access to unlicensed spectrum

5.1. Модель гетерогенной сети с совместным использованием технологий радиодоступа в миллиметровом диапазоне длин волн и в терагерцевых частотах

Беспроводной доступ в терагерцевом (ТГц) диапазоне рассматривается как важная часть сотовых систем шестого поколения (6G). Используя даже более высокие частоты, чем частоты, соответствующие миллиметровым волнам 5G NR, они будут работать в экстремальной полосе пропускания, обеспечивая беспрецедентные скорости на участке радиодоступа.

Однако эти системы не только унаследуют проблемы распространения миллиметровых волн, такие как резкие колебания качества радиоканала из-за блокировок путей прямого распространения сигнала, но и внесут свои собственные проблемы, связанные с микромобильностью пользовательских устройств (User Equipment, UE). Дело в том, что для преодоления еще больших потерь распространения и достижения приемлемого радиуса покрытия БС в терагерцевом диапазоне необходимо концентрировать энергию излучения в еще более узких лучах, шириной в доли градуса. Из-за этого даже небольшие смещения и повороты UE в руке человека, даже находящегося в статичном положении, могут приводить к рассинхронизации направленности антенн и запуску процедуры поиска луча, в течение которой передача данных прерывается. Длительность процедуры поиска луча, как правило, небольшая, порядка 1 мс или даже меньше, но это тоже может влиять на показатели обслуживания сессий.

Для улучшения непрерывности сессий передачи данных в высокочастотных беспроводных сетях, подверженных резким изменениям качества радиоканалов, предложена функциональность мультисвязности, анализ использования которой в сетях 5G NR проведен в разделе 4.3. Однако меньший радиус покрытия терагерцевых БС потребует очень плотных развертываний для эффективного использования мультисвязности с несколькими терагерцевыми БС.

Альтернативным подходом повышения надежности пользовательских сессий в будущих развертываниях сетей 6G является мультисвязность с БС, использующими различные технологии радиодоступа. Однако единственной сетью

радиодоступа, имеющим сопоставимый, хотя и гораздо меньший по объему ресурс на радиointерфейсе, является 5G NR, работающая в миллиметровом диапазоне длин волн. Несмотря на то, что обе технологии нацелены на схожий тип приложений, чувствительных к сбоям соединения и требующих высокой скорости передачи данных, между технологиями существует несоответствие пропускной способности. Таким образом, необходимо учитывать величину дополнительной нагрузки на БС 5G NR, вызванной временным перенаправлением сессий передачи данных с терагерцевых БС.

5.1.1. Системная модель

Рассматривается сценарий, в котором в зоне покрытия БС 5G NR, использующей миллиметровый диапазон длин волн, равномерно распределены K терагерцевых БС. Радиус покрытия r_M БС 5G NR определяется так, чтобы на границе соты не возникало потери связи в состоянии блокировки пути распространения сигнала. Радиус покрытия r_T терагерцевых БС определяется из модели распространения, однако фактически зависит от схемы ассоциации UE с БС, которые изложены ниже.

Предполагается, что объем частотного ресурса на терагерцевых БС не ограничен. В статье [200] показано, что подобные системы связи будут иметь столько частотного ресурса, что его будет достаточно для одновременного обслуживания сотен и даже тысяч пользовательских сессий с требованиями к скорости 10 – 40 Гбит/с (например, приложения на базе дополненной реальности). Учитывая небольшой радиус покрытия терагерцевых БС (как правило, не превышающий 100 м), такого объема ресурса будет достаточно при любой реалистичной нагрузке.

Предполагается, что сессии передачи данных поступают на одну из БС на основе геометрического расположения UE и покрытия терагерцевых БС. В частности, с вероятностью

$$p_T = \frac{K\pi r_T^2}{\pi r_M^2} = \frac{K r_T^2}{r_M^2} \quad (5.1)$$

сессия изначально поступает на одну из терагерцевых БС, а с вероятностью $(1 - p_T)$ – на БС 5G NR, где радиус покрытия r_T зависит от рассматриваемых схем первичной ассоциации пользователей с БС:

1) Повышение надежности, A1. В этой схеме ассоциации изначально на терагерцевые БС поступают только те сессии передачи данных, которые не испытывают на ней сбоев соединения в условиях блокировки пути прямого распространения. Как можно заметить, это приводит к уменьшению фактического радиуса покрытия r_T терагерцевых БС, а значит, к более высокой нагрузке на БС 5G NR, но может повысить надежность обслуживания сессий, изначально связанных с терагерцевыми БС, особенно для приложений, характеризующихся низкой микромобильностью и/или в условиях высокой плотности блокаторов.

2) Улучшение покрытия, A2. В этой схеме ассоциации максимизируется количество сессий, принятых на терагерцевые БС, допуская даже те, которые могут испытывать сбои соединения в условиях блокировки пути прямого распространения. Эта стратегия может улучшить покрытие терагерцевых БС (увеличить радиус r_T), снизить нагрузку на БС 5G NR, и может быть подходящей для условий с низкой плотностью блокаторов.

Сессии, обслуживаемые на обоих типах БС, испытывают блокировки пути прямого распространения сигнала из-за подвижных блокаторов. Модель блокировки используется такая же, как и в разделе 4.1. Если сессия, которая обслуживается на БС 5G NR, попадает в состоянии блокировки, то она увеличивает объем требований к ресурсу и пытается продолжить обслуживание. Если на БС недостаточно свободного ресурса, то обслуживание сессии прерывается.

Сессии передачи данных, которые обслуживаются на терагерцевых БС, испытывают не только блокировки путей прямого распространения, но и кратковременные потери связи из-за микромобильности устройств. Действия, предпринимаемые UE в этих случаях, зависят от используемой стратегии мультисвязности. Рассматриваются следующие четыре стратегии:

1) Без мультисвязности, S1. При использовании этой стратегии UE поддерживает соединение только с одной БС, с которой оно изначально было

ассоциировано. При потерях соединения, вызванных блокировкой пути прямого распространения или микромобильностью устройства, обслуживание сессии прерывается.

2) Использование мультисвязности при блокировке для приложений, нечувствительных к кратковременным сбоям из-за микромобильности, S2. В этом случае при возникновении блокировки пути прямого распространения сессия перенаправляется с терагерцевой БС на БС 5G NR на случайный интервал времени со средним β_B^{-1} , по истечении которого возвращается на исходную БС. Потери соединения, вызванные микромобильностью, никак не влияют на обслуживание сессий.

3) Использование мультисвязности при блокировке для приложений, чувствительных к кратковременным сбоям из-за микромобильности, S3. Эта стратегия похожа на предыдущую, S2, за исключением того, что при возникновении кратковременной потери связи из-за микромобильности обслуживание сессии прерывается.

4) Полная мультисвязность, S4. В этом случае при блокировках и потерях связи из-за микромобильности сессии перенаправляются с терагерцевых БС на БС 5G NR на случайные интервалы времени со средним β_B^{-1} и β_M^{-1} , соответственно. По истечении этого времени сессия возвращается на исходную БС.

5.1.2. Описание модели

Рассматривается сеть массового обслуживания с $K + 1$ узлами, где узлы с номерами $1, 2, \dots, K$ моделируют терагерцевые БС, а узел $K + 1$ – БС 5G NR. Из предположений о равномерности расположения и независимости процессов генерации ими запросов на установление сессий следует, что на узел k , $k = 1, 2, \dots, K + 1$ поступает пуассоновский поток заявок, интенсивность λ_k которого имеет вид

$$\lambda_{K+1} = (1 - p_T)\lambda_A\pi r_M^2, \quad \lambda_k = \frac{p_T\lambda_A\pi r_M^2}{K}, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (5.2)$$

Поскольку предполагается, что объем ресурсов на терагерцевых БС неограничен, узлы $1, 2, \dots, K$ моделируются как бесконечнолинейные СМО, а узел $K + 1$ – как РеСМО с сигналами. Времена обслуживания заявок предполагаются экспоненциальными с параметром μ . Узел $K + 1$ содержит N приборов и одномерный ресурс объема R единиц. Заявки, которые изначально поступают на узел $K + 1$, не перенаправляются и обслуживаются только на нем. Каждой заявке для обслуживания требуется один прибор и случайный объем ресурса. Требования заявок, изначально поступающих на узел $K + 1$, задаются распределением $\{f_{1,r}\}$, $0 \leq r \leq R$, а заявок, которые перенаправляются на узел $K + 1$ с других узлов, – распределением $\{f_{2,r}\}$, $0 \leq r \leq R$. Если в момент поступления или перенаправления заявки с другого узла свободного объема ресурса в узле недостаточно, то заявка теряется.

На каждую заявку, обслуживаемую на узле $K + 1$, поступает пуассоновский поток сигналов интенсивностью γ , при поступлении которого заявка освобождает занимаемый ранее объем ресурса, генерирует новое требование к ресурсу с тем же распределением $\{f_{1,r}\}$, $0 \leq r \leq R$, и пытается продолжить обслуживание. Если на узле недостаточно свободного ресурса, то обслуживание заявки прерывается.

На каждую заявку, обслуживаемую в узлах $1, 2, \dots, K$, поступают два пуассоновских потока сигналов с интенсивностями γ_B и γ_M , которые моделируют интенсивность прерываний связи, вызванных блокировкой и микромобильностью соответственно. В дальнейшем будем называть их b -сигналами и m -сигналами. Реакция заявки от поступления сигналов зависит от используемых схемы ассоциации и стратегии мультисвязности, описанных выше.

Так, при схеме ассоциации A1 заявки никак не реагируют на b -сигналы из-за того, что в этой схеме блокировка пути распространения на терагерцевых БС не приводит к потере связи. Более того, при использовании стратегии мультисвязности S2 заявки не реагируют и на m -сигналы. Поступление m -сигнала при стратегиях S1 и S3 приводит к прерыванию обслуживания заявки, а при стратегии S4 – к попытке перевода заявки на узел $K + 1$. На этом узле заявка

пребывает экспоненциально распределенное с параметром β_M время. Если до истечения этого времени заявка не завершает обслуживание, то она возвращается на исходный узел. Отметим, что остаточное время обслуживания также экспоненциальное с тем же параметром μ .

При схеме ассоциации A2 заявки вынуждены реагировать на b -сигналы. Так, при поступлении b -сигнала в случае стратегии S1 обслуживание заявки прерывается, а при стратегиях S2, S3 и S4 – заявка пытается перейти на обслуживание в узел $K + 1$. На этом узле заявка проводит экспоненциальное время с параметром β_B и, если к окончанию этого времени обслуживание не завершено, то она возвращается на исходный узел. Реакция на поступление m -сигналов такая же, как и для схемы A1.

Для анализа описанной модели используется метод декомпозиции в предположении о независимости функционирования узлов друг от друга, а интенсивности потоков перенаправленных заявок итерационно пересчитываются. Анализ моделей отдельных узлов проведен для схемы ассоциации A2, при которой заявки всегда реагируют на поступление b -сигналов. Схема ассоциации A1 анализируется аналогичным образом путем пересчета вероятности ассоциации с терагерцевыми БС p_T и обнуления интенсивности поступления b -сигналов, т.е. $\gamma_B = 0$.

5.1.3. Анализ моделей отдельных узлов при стратегии полной мультисвязности S4

Рассмотрим функционирование узлов $k = 1, 2, \dots, K$. При полной мультисвязности заявка реагирует на оба типа сигналов. На узел k поступают два потока заявок: первичные поступления интенсивностью λ_k , а также поток возвращающихся заявок с узла $K + 1$, интенсивностью $\nu_{B,k} + \nu_{M,k}$, где $\nu_{B,k}$ – интенсивность возвращения после окончания периодов блокировки, а $\nu_{M,k}$ – моменты восстановления связи после сбоев из-за микромобильности. Формулы для расчета интенсивностей $\nu_{B,k}$ и $\nu_{M,k}$ получены ниже. Общая интенсивность ухода

заявок с узла k , учитывая поступающие сигналы, равна $\mu + \gamma_B + \gamma_M$. Тогда среднее число \bar{N}_k заявок в узле k имеет вид

$$\bar{N}_k = \frac{\lambda_k + v_{B,k} + v_{M,k}}{\mu + \gamma_B + \gamma_M}. \quad (5.3)$$

Процесс обслуживания на узле $K + 1$ описывается РеСМО с сигналами. На данный узел поступает три типа заявок: первичные поступления интенсивностью λ_{K+1} , поток заявок, перенаправленных с узлов $k = 1, 2, \dots, K$ из-за блокировок, а также поток заявок, перенаправленных с узлов $k = 1, 2, \dots, K$ из-за микромобильности. Будем предполагать, что последние два потока также являются пуассоновскими с интенсивностями

$$v_{B,K+1} = \sum_{k=1}^K \bar{N}_k \gamma_B, \quad v_{M,K+1} = \sum_{k=1}^K \bar{N}_k \gamma_M. \quad (5.4)$$

Заметим, что перенаправленные заявки находятся на обслуживании в узле $K + 1$ экспоненциально распределенное время с параметрами $\mu + \beta_B$ и $\mu + \beta_M$ соответственно.

Для вычисления вероятностных характеристик узла $K + 1$ с учетом поступления пуассоновского потока сигналов на каждую первичную заявку будем использовать подход с построением имитирующей модели без сигналов по принципам, изложенным в разделе 3.3. Тогда вместо потока сигналов в имитирующей модели добавляется дополнительный поток вторичных заявок интенсивностью v_{K+1} , а параметр времени обслуживания первичных и вторичных заявок меняется на $\mu + \gamma$. Интенсивность поступления v_{K+1} вторичных заявок имеет вид

$$v_{K+1} = \bar{N}_{1,K+1} \gamma, \quad (5.5)$$

где $\bar{N}_{1,K+1}$ – среднее число первичных и вторичных заявок на узле $K + 1$. Схема имитирующей модели представлена на рисунке 5.1.

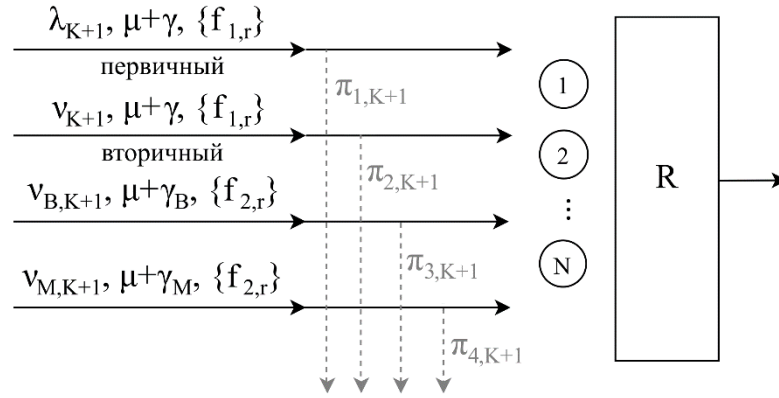


Рис. 5.1. Схема имитирующей модели узла $K + 1$.

Таким образом, имитирующая модель представляет собой РеСМО с четырьмя потоками, предложенная нагрузка которых имеет вид

$$\rho_1 = \frac{\lambda_{K+1}}{\mu + \gamma}, \quad \rho_2 = \frac{\nu_{K+1}}{\mu + \gamma}, \quad \rho_3 = \frac{\nu_{B,K+1}}{\mu + \beta_B}, \quad \rho_4 = \frac{\nu_{M,K+1}}{\mu + \beta_M}. \quad (5.6)$$

При этом требования к ресурсу заявок первых двух потоков распределены согласно $\{f_{1,r}\}$, $0 \leq r \leq R$, а двух других – $\{f_{2,r}\}$, $0 \leq r \leq R$. Из теоремы 2.1 раздела 2.2 следует, что совместное стационарное распределение числа заявок и суммарного занятого ими объема ресурса принимает вид

$$q_n(r) = q_0 \frac{\rho^n}{n!} f_r^{(n)}, \quad 0 \leq x \leq R, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (5.7)$$

$$q_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^N \frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=0}^R f_r^{(n)} \right)^{-1}, \quad (5.8)$$

где $\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4$ – суммарная предложенная нагрузка, а $f_r^{(n)}$ – n -кратная свертка средневзвешенного распределения

$$f_r = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho} f_{1,r} + \frac{\rho_3 + \rho_4}{\rho} f_{2,r}, \quad 0 \leq r \leq R. \quad (5.9)$$

Вероятность потери заявок первого, третьего и четвертого типов имеет вид

$$\pi_{1,K+1} = 1 - \sum_{n=1}^{N-1} q_n(r) \sum_{j=R-r+1}^R f_{1,j}, \quad (5.10)$$

$$\pi_{i,K+1} = 1 - \sum_{n=1}^{N-1} q_n(r) \sum_{j=R-r+1}^R f_{2,j}, \quad i = 3, 4. \quad (5.11)$$

Для вычисления вероятностей (5.10) и (5.11) можно использовать сверточный алгоритм, предложенный в разделе 2.1, и утверждение 2.6. Согласно модифицированному методу приближенного расчета РеСМО с сигналами, для вычисления вероятности $\pi_{2,K+1}$ потери вторичных заявок требуется использовать стационарные вероятности $\hat{q}_n(r)$ цепи Маркова, вложенной по моментам окончания обслуживания, вместо вероятностей по времени:

$$\pi_{2,K+1} = 1 - \sum_{n=1}^{N-1} \hat{q}_n(r) \sum_{j=R-r+1}^R f_{1,j}, \quad (5.12)$$

где вероятности $\hat{q}_n(r)$ получены в теореме 3.2, а метод их расчета с помощью сверточного алгоритма – в утверждении 3.2.

Утверждение 5.1. Интенсивности возвращения $v_{B,k}$ и $v_{M,k}$ заявок из узла $K+1$ на узлы k , $k=1,2,\dots,K$, вычисляются по формулам

$$v_{B,k} = \frac{\bar{N}_k \gamma_B (1 - \pi_{3,K+1}) \beta_B}{\mu + \beta_B}, \quad (5.13)$$

$$v_{M,k} = \frac{\bar{N}_k \gamma_M (1 - \pi_{4,K+1}) \beta_M}{\mu + \beta_M}. \quad (5.14)$$

Доказательство.

Интенсивность ухода заявок из узла k из-за поступления b -сигналов равна $\bar{N}_k \gamma_B$, а на узле $K+1$ эти заявки принимаются с вероятностью $1 - \pi_{3,K+1}$. Так как и длительность периода блокировки пути прямого распространения, и длительность обслуживания имеют экспоненциальное распределение, то вероятность того, что период блокировки закончится прежде завершения обслуживания и заявка вернется на узел k , имеет вид $\frac{\beta_B}{\mu + \beta_B}$. Перемножая эти составляющие, получаем

формулу (5.13).

Аналогично для m -сигналов. Интенсивность ухода заявок из узла k из-за m -сигналов равна $\bar{N}_k \gamma_M$, с вероятностью $1 - \pi_{4,K+1}$ они принимаются на обслуживание

на узле $K + 1$, а с вероятностью $\frac{\beta_M}{\mu + \beta_M}$ возвращаются на узел k до завершения обслуживания. Перемножая эти составляющие, получаем формулу (5.14). ■

Перейдем теперь к вычислению вероятностей потери и прерывания обслуживания. Потери заявок при поступлении возможны только на узле $K + 1$, поэтому вероятность потери $\pi_{B,K+1}$ на узле $K + 1$ равна $\pi_{1,K+1}$.

$$\pi_{B,K+1} = \pi_{1,K+1}. \quad (5.15)$$

Утверждение 5.2. Вероятность прерывания обслуживания заявки, изначально поступившей на узел $K + 1$, имеет вид

$$\pi_{T,K+1} = \frac{\gamma\pi_{2,K+1}}{\mu + \gamma\pi_{2,K+1}}, \quad (5.16)$$

а для заявок, изначально поступивших на узел k , вероятность прерывания вычисляется по формуле

$$\pi_{T,k} = \frac{\bar{N}_k (\gamma_B \pi_{3,K+1} + \gamma_M \pi_{4,K+1})}{\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (5.17)$$

Доказательство.

Из равенства интенсивностей принятия и ухода заявок в стационарном режиме на узле $K + 1$ получим выражение для суммарного среднего числа $\bar{N}_{1,K+1}$ первичных и вторичных заявок:

$$\lambda_{K+1} (1 - \pi_{1,K+1}) + \bar{N}_{1,K+1} \gamma (1 - \pi_{2,K+1}) = \bar{N}_{1,K+1} (\mu + \gamma), \quad (5.18)$$

откуда следует

$$\bar{N}_{1,K+1} = \frac{\lambda_{K+1} (1 - \pi_{1,K+1})}{\mu + \gamma\pi_{2,K+1}}. \quad (5.19)$$

Рассмотрим теперь достаточно длинный период длительностью T . За этот период в систему принимается в среднем $\lambda_{K+1} (1 - \pi_{1,K+1})T$ заявок, изначально поступающих на узел $K + 1$. А число прерванных заявок за тот же период времени – $\bar{N}_{1,K+1} \gamma \pi_{2,K+1} T$. Переходя к пределу при $T \rightarrow \infty$ и подставляя выражение (5.19), получаем формулу (5.16):

$$\begin{aligned}\pi_{T,K+1} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\bar{N}_{1,K+1} \gamma \pi_{2,K+1} T}{\lambda_{K+1} (1 - \pi_{1,K+1}) T} = \frac{\bar{N}_{1,K+1} \gamma \pi_{2,K+1}}{\lambda_{K+1} (1 - \pi_{1,K+1})} = \frac{\lambda_{K+1} (1 - \pi_{1,K+1})}{\mu + \gamma \pi_{2,K+1}} \cdot \frac{\gamma \pi_{2,K+1}}{\lambda_{K+1} (1 - \pi_{1,K+1})} = \\ &= \frac{\gamma \pi_{2,K+1}}{\mu + \gamma \pi_{2,K+1}}.\end{aligned}$$

Прерывания обслуживания заявок, изначально поступивших на узлы $k = 1, 2, \dots, K$, могут происходить только при перенаправлении на узел $K + 1$. Интенсивность таких прерываний на узле $K + 1$ имеет вид $\bar{N}_k (\gamma_B \pi_{3,K+1} + \gamma_M \pi_{4,K+1})$, а интенсивность принятия заявок на узле k равна λ_k , поэтому вероятности $\pi_{T,k}$, $k = 1, 2, \dots, K$, можно вычислять как отношение этих интенсивностей, что приводит к выражению (5.17). ■

5.1.4. Алгоритм вычисления вероятностных характеристик

Вычисление вероятностных характеристик модели требует итерационного подхода. Во-первых, это касается интенсивности ν_{K+1} поступления вторичных заявок в имитирующей РеСМО без сигналов, а во-вторых, интенсивностей $\nu_{B,k}$ и $\nu_{M,k}$ возвращения заявок на исходный узел k . Схема вычислительного алгоритма представлена на рисунке 5.2.

Алгоритм начинается с приближенного вычисления вероятностных характеристик узла $K + 1$ при учете только первичных поступлений ($\nu_{K+1} = \nu_{B,K+1} = \nu_{M,K+1} = 0$). Вычисляется стационарное распределение $q_n(r)$ по формулам (5.7) и (5.8), и среднее число первичных и вторичных заявок $\bar{N}_{1,K+1}$, по формуле (5.19). Используя полученное значение $\bar{N}_{1,K+1}$, вычисляется новое значение интенсивности ν_{K+1} поступления вторичных заявок по формуле (5.5). Если модуль разности между новым и предыдущим значениями ν_{K+1} больше заданного уровня точности, алгоритм переходит к новой итерации вычисления $\bar{N}_{1,K+1}$. Если требуемая точность достигнута, вероятности потери $\pi_{i,K+1}$, $i = 1, 2, 3, 4$, получаются в соответствии с (5.10) – (5.12).

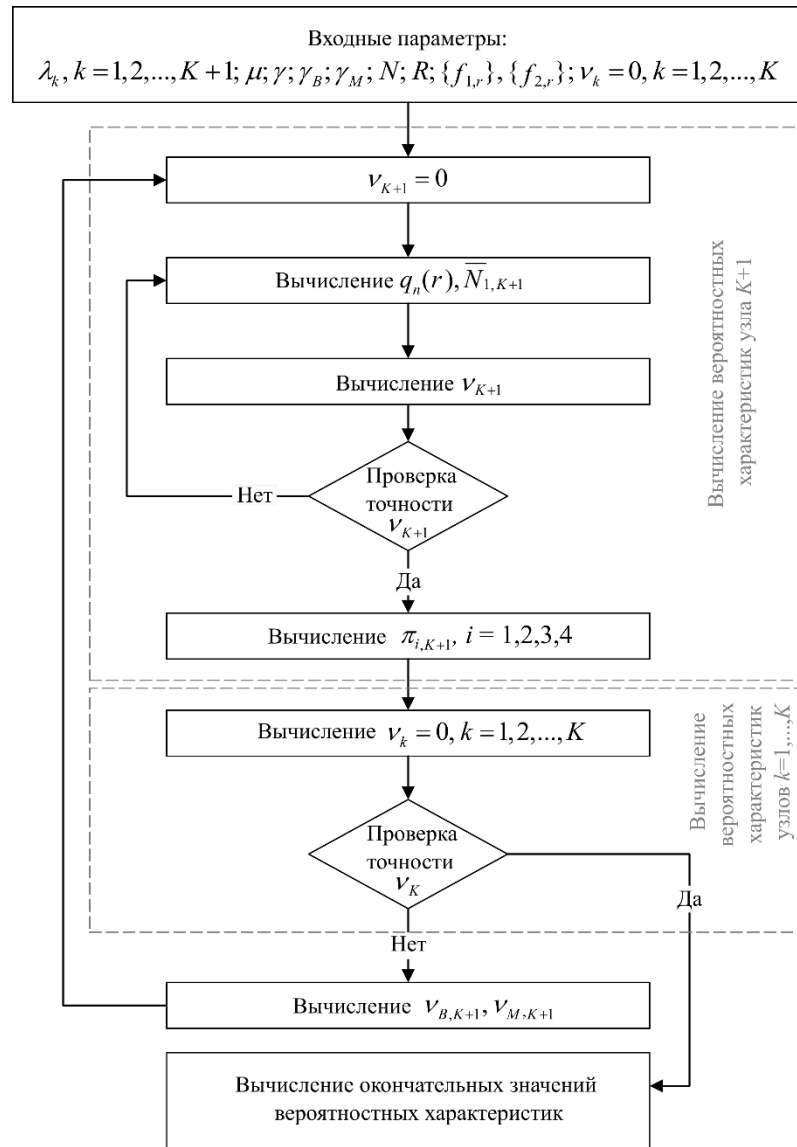


Рис. 5.2. Блок-схема вычислительного алгоритма

Далее вычисляются новые значения интенсивностей поступления $v_{B,k}$ и $v_{M,k}$ заявок, возвращающихся на узлы $k = 1, 2, \dots, K$ по формулам (5.13) и (5.14). Аналогично, если модуль разности между новыми и предыдущими значениями $v_{B,k}$ и $v_{M,k}$ больше заданного уровня точности, то пересчитываются интенсивности $v_{B,K+1}$ и $v_{M,K+1}$ переходов на узел $K + 1$ согласно (5.4), и алгоритм возвращается к итерационному расчету вероятностных характеристик узла $K + 1$ с новыми интенсивностями перенаправленных заявок и с нулевой интенсивностью поступления вторичных заявок, т.е. $v_{K+1} = 0$. Если же требуемый уровень точности достигнут, то переходим к вычислению окончательных метрик отдельных узлов по формулам (5.15) – (5.17).

Наконец, вычисляются вероятностные характеристики системы целиком путем усреднения по всем узлам. Тогда вероятность π_B потери заявки при поступлении имеет вид

$$\pi_B = \frac{\lambda_{K+1}}{\lambda} \pi_{B,K+1}, \quad (5.20)$$

а вероятность π_T прерывания обслуживания заявки –

$$\pi_T = \sum_{k=1}^{K+1} \frac{\lambda_k}{\lambda} \pi_{T,k}. \quad (5.21)$$

5.1.5. Вероятностные характеристики других стратегий мультисвязности

Рассмотрим теперь стратегию мультисвязности S2, при которой заявки вообще не реагируют на поступление m -сигналов. Данная стратегия фактически является частным случаем стратегии полной мультисвязности S4 при отсутствии m -сигналов, а расчетные формулы получаются подстановкой $\gamma_M = 0$ во все формулы раздела 5.1.3.

При использовании стратегии S3 поступление m -сигналов всегда приводит к прерыванию обслуживания заявки. В этом случае на всех узлах $k = 1, 2, \dots, K + 1$ обнуляются входящие потоки заявок, связанные с поступлением m -сигналов, $\nu_{M,k} = 0$, $k = 1, 2, \dots, K + 1$. При этом формула (5.3) среднего числа заявок на узлах $k = 1, 2, \dots, K$ принимает вид

$$\bar{N}_k = \frac{\lambda_k + \nu_{B,k}}{\mu + \gamma_B + \gamma_M}, \quad (5.22)$$

а формула (5.17) вероятности прерывания заявок, изначально поступивших на узел $k = 1, 2, \dots, K$ –

$$\pi_{T,k} = \frac{\bar{N}_k (\gamma_B \pi_{3,K+1} + \gamma_M)}{\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (5.23)$$

При использовании стратегии мультисвязности S1 функционирование узлов становится абсолютно независимым друг от друга. Пусть T_0 – верхняя граница интервала времени, потеря связи на котором не приводит к прерыванию

обслуживания. Тогда вероятности p_b и p_m того, что время потери связи из-за блокировки и микромобильности, соответственно, превышает T_0 , имеет вид

$$p_b = e^{-\beta_b T_0}, \quad p_m = e^{-\beta_m T_0}. \quad (5.24)$$

Суммарная интенсивность ухода заявок из узлов $k = 1, 2, \dots, K$ становится равной $\mu + \gamma_B p_b + \gamma_M p_m$, где $\gamma_B p_b$ и $\gamma_M p_m$ – интенсивности прерываний обслуживания, вызванных поступлением b - и m -сигналов соответственно. Тогда вероятность прерывания обслуживания заявок, изначально поступивших на узел $k = 1, 2, \dots, K$, принимает вид

$$\pi_{T,k} = \frac{\gamma_B p_b + \gamma_M p_m}{\mu + \gamma_B p_b + \gamma_M p_m}, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (5.25)$$

На узел $K + 1$ при отсутствии мультисвязности не поступают потоки перенаправленных с остальных узлов заявок, $\nu_{B,K+1} = \nu_{M,K+1} = 0$. Остальные формулы раздела 5.1.3 остаются без изменений.

5.1.6. Численный анализ схем ассоциации и стратегий мультисвязности

Перейдем к численному анализу. Вывод параметров РеСМО из параметров моделей распространения и особенностей сценария развертывания проведен по принципам, изложенным в разделе 4.1. Расчет параметров, связанных с микромобильностью и вызываемыми ею эффектами, проведен согласно статье [198]. Итоговые выражения для этих параметров очень громоздки, поэтому здесь не приводятся. Остальные исходные параметры собраны в таблице 5.1.

Табл. 5.1. Исходные данные

Параметр	Значение
Несущая частота БС 5G NR, $f_{M,c}$	28 ГГц
Несущая частота терагерцевой БС, $f_{T,c}$	300 ГГц
Ширина полосы пропускания на БС 5G NR, B_M	400 МГц
Ширина полосы пропускания на терагерцевой БС, B_T	4 ГГц
Требуемая скорость передачи данных, C	10 Мбит/с
Число терагерцевых БС, K	5

Мощность передачи, P_T	2 Вт
Коэффициент усиления антенны БС, G_B	8,57 дБи
Коэффициент усиления антенны UE, G_U	5,57 дБи
Потери в кабеле, C_L	2 дБ
Верхняя граница интерференции, M_I	3 дБ
Термальный шум, N_0	-174 дБм / Гц
Высота БС, h_S	10 м
Высота блокатора, h_B	1,7 м
Высота расположения UE, h_U	1,7 м
Радиус блокатора, r_B	0,4 м
Скорость блокатора, v_B	1 м/с
Средняя длительность состояния блокировки, β_B^{-1}	0.8 с
Средняя длительность состояния блокировки, β_M^{-1}	0.556 мс
Интенсивность поступления сессий от одного UE, α_U	10^{-4} с ⁻¹
Средняя длительность сессии, μ^{-1}	10 с

Начнем со сравнения стратегий мультисвязности для схемы ассоциации A1, при которой первичная ассоциация UE с терагерцевой БС происходит только тогда, когда блокировка пути прямого распространения не приводит к разрыву соединения. На рисунках 5.3 и 5.4 показаны вероятности потери и прерывания сессий для различных стратегий мультисвязности, S1-S4, в зависимости от интенсивности блокаторов λ_B . Напомним, что для рассматриваемой схемы ассоциации блокировка не влияет на процесс обслуживания сеансов, которые изначально связаны с терагерцевой БС. Однако она вызывает перераспределение ресурсов для сессий на БС 5G NR. Кроме того, сессии, изначально ассоциированные с терагерцевой БС, подвержены влиянию кратковременных прерываний из-за микромобильности.

На рисунке 5.3 видно, что вероятности потери практически совпадают для всех рассматриваемых стратегий мультисвязности. Объясняется это тем, что для схемы A1 только микромобильность может вызвать дополнительную нагрузку на БС 5G NR. Однако из-за того, что среднее время пребывания таких сессий на БС 5G NR меньше миллисекунды, вклад в нагрузку БС является незначительным, что приводит к одинаковой производительности для всех рассматриваемых стратегий мультисвязности.

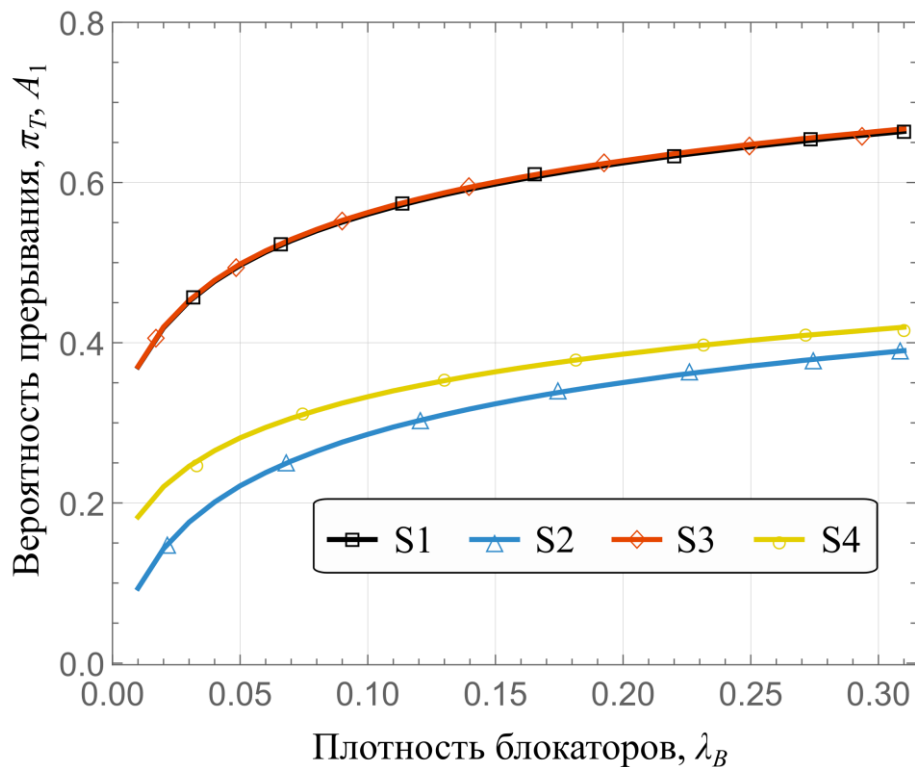


Рис. 5.3. Вероятность потери при использовании схемы ассоциации A1 и различных стратегиях мультисвязности

На рисунке 5.4 представлены вероятности прерывания для схемы ассоциации A1 и различных стратегий мультисвязности. На рисунке видно, что вероятность прерывания растет во всех рассматриваемых стратегиях S1-S4. Однако причина такого поведения для стратегий множественной связанности S1/S3 отличается от S2/S4. Напомним, что для S1/S3 микромобильность всегда приводит к потере сессии. По этой причине вероятность прерывания для этих схем совпадает. Кроме того, S2 предполагает использование приложений, нечувствительных к кратковременным сбоям из-за микромобильности, и, таким образом, значение

вероятности прерывания является самым низким из всех рассматриваемых стратегий, но все равно существенным. Объясняется это прерываниями сессий, которые изначально ассоциированы к БС 5G NR. Наконец, поскольку S4 предполагает, что микроподвижность всегда приводит к перенаправлению с терагерцевой БС на БС 5G NR, это приводит к небольшому росту вероятности прерывания относительно стратегии S2, поскольку часть сессий при переключении прерываются из-за нехватки доступного объема ресурса.

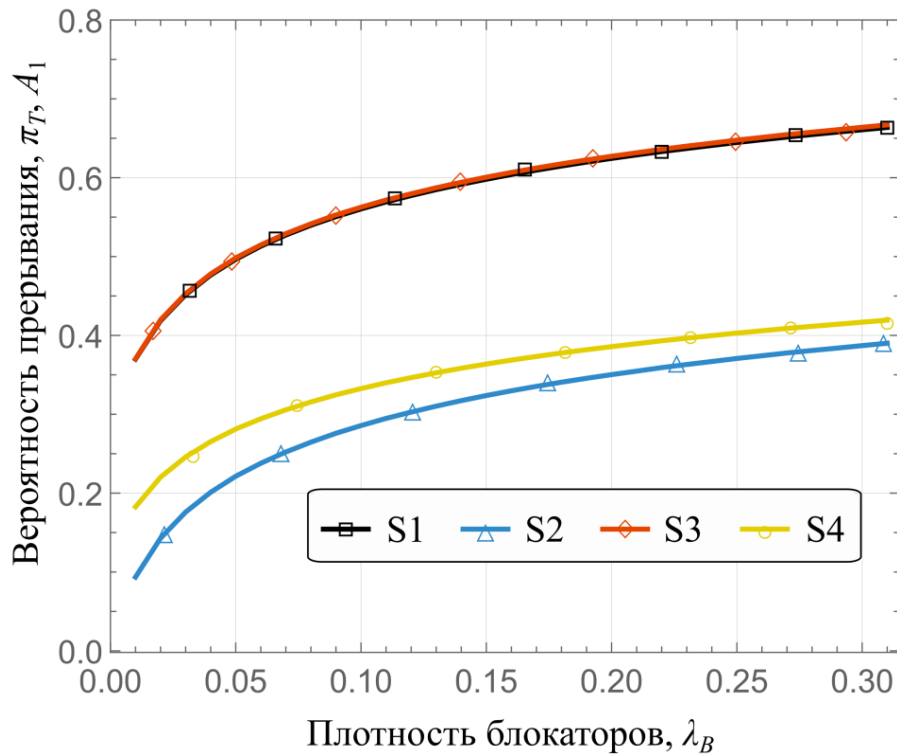


Рис. 5.4. Вероятность прерывания при использовании схемы ассоциации A1 и различных стратегиях мультисвязности

Рисунки 5.3 и 5.4 показывают, что существует компромисс между вероятностями потери и прерывания для всех рассматриваемых стратегий мультисвязности: при уменьшении вероятности потери вероятность прерывания растет. Причина в том, что увеличение вероятности прерывания приводит к увеличению объема доступных ресурсов, которые занимают при поступлении новых сессий.

Ключевой характеристикой модели является вероятность прерывания сессий передачи данных. Рассматриваемые стратегии мультисвязности S2-S4 характеризуются двумя компонентами, вносящими вклад в эту вероятность: 1)

вероятность прерывания $\pi_{T,K+1}$ на БС 5G NR из-за наступления события блокировку пути прямого распространения и последующей неудачной попытки перераспределения ресурсов и, 2) вероятность прерывания $\pi_{T,k}$ в результате перенаправления с терагерцевой БС на БС 5G NR. Для понимания структуры вероятности прерывания на рисунке 5.5 эти компоненты представлены в зависимости от плотности блокаторов при использовании различных стратегий мультисвязности.

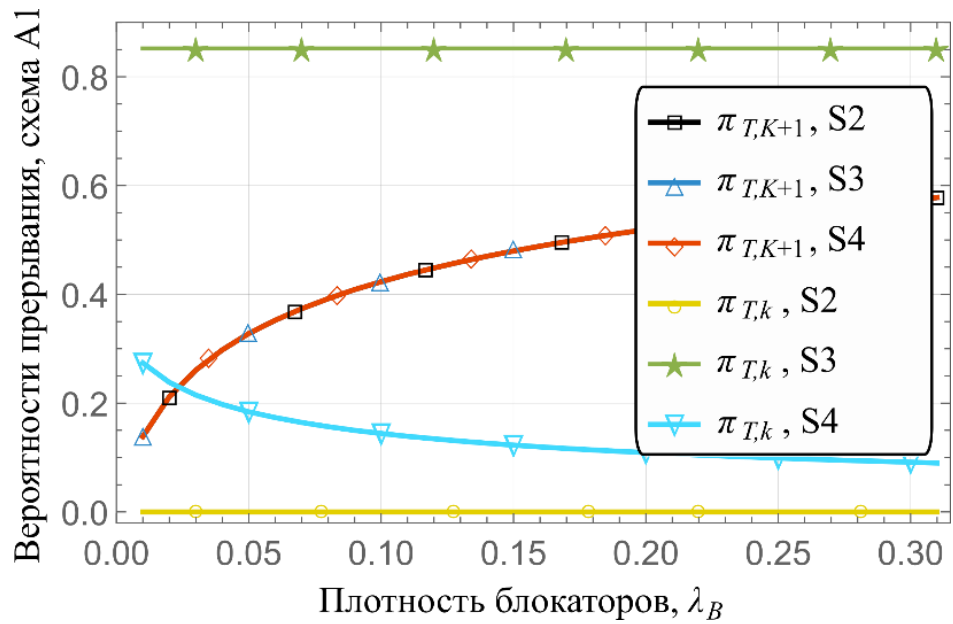


Рис. 5.5. Вероятность прерывания при использовании схемы ассоциации A1

Анализируя представленные на рисунке 5.5 данные, можно заметить, что для этой схемы вероятность прерывания на БС 5G NR совпадает для всех рассматриваемых схем и увеличивается с плотностью блокаторов. Основной причиной является перераспределение ресурса, вызванное сессиями, обслуживаемыми в данный момент на БС 5G NR, которые переходят в заблокированное состояние. Вероятность прерывания на терагерцевой БС постоянна и равна нулю для приложений, нечувствительных к сбоям (стратегия S2), и максимизируется для стратегии S3, где не предпринимается никаких действий в случае микромобильности. Наконец, стратегия S4 характеризуется уменьшающейся вероятностью прерывания на терагерцевых БС. Тем не менее, доля вероятности $\pi_{T,K+1}$ в случае схемы ассоциации A1 с меньшим радиусом

покрытия терагерцевых БС больше, что приводит к итоговому увеличению вероятности прерываний π_T .

Перейдем к анализу схемы ассоциации A2, в которой с терагерцевой БС ассоциируются все UE, находящиеся в ее зоне покрытия, даже если в состоянии блокировки они испытывают потерю соединения. На рисунках 5.6 и 5.7 показаны вероятности потери и прерывания для различных стратегий мультисвязности. Отметим, что качественное поведение большинства метрик меняется на противоположное. Так, вероятность потери π_B растет при увеличении плотности блокаторов для всех стратегий мультисвязности S2-S4. В целом, это объясняется увеличением нагрузки на БС 5G NR из-за увеличения интенсивности перенаправлений с терагерцевых БС, однако имеются особенности для каждой рассматриваемой стратегии мультисвязности.

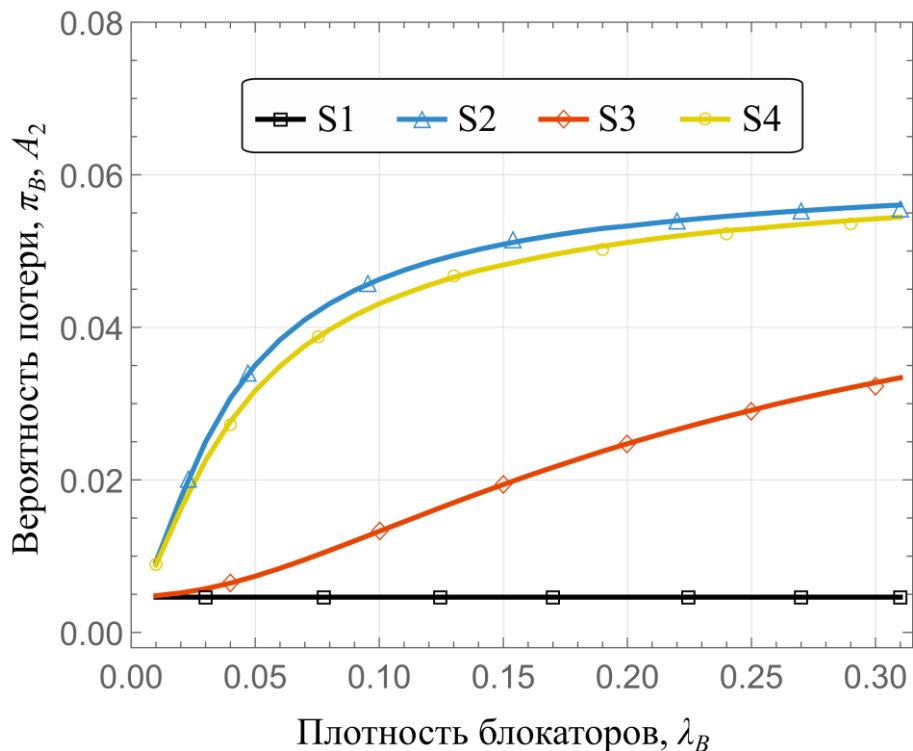


Рис. 5.6. Вероятность потери при использовании схемы ассоциации A2 и различных стратегиях мультисвязности

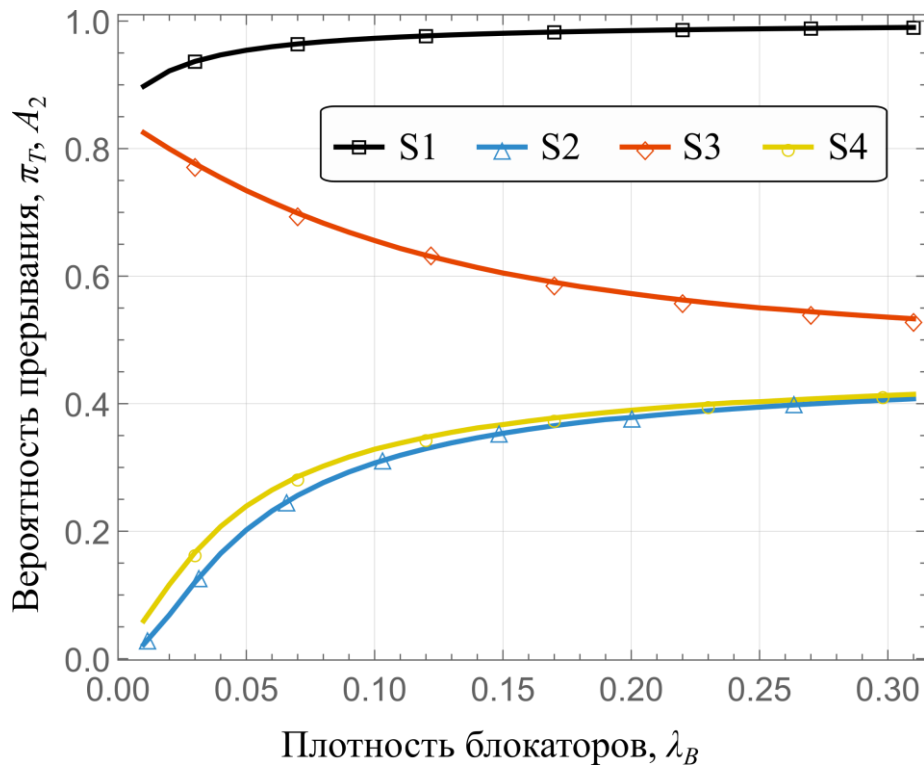


Рис. 5.7. Вероятность прерывания при использовании схемы ассоциации A2 и различных стратегиях мультисвязности

Прежде всего, самая простая стратегия множественной связности, которая показала относительно хорошую производительность для схемы ассоциации A1, S1, где не выполняется перенаправление с терагерцевых БС, теперь характеризуется абсолютно худшей производительностью. В схеме ассоциации A2 эта стратегия принимает почти все сессии на терагерцевые БС, но все они в конечном итоге теряются из-за блокировки и микромобильности. Стратегия полной мультисвязности S4 сохраняет вероятность прерывания на примерно том же уровне, что и в схеме ассоциации A1, но имеет более высокую вероятность потери. Однако в условиях низкой плотности блокаторов ($\lambda_B < 0.1$), стратегия мультисвязности S4 превосходит любую другую стратегию для схем ассоциации A1/A2 и может быть в целом рекомендована для сетевых операторов.

Стратегия мультисвязности S2 для приложений, нечувствительных к кратковременным сбоям из-за микромобильности, позволяет несколько снизить вероятность прерывания, что приводит к небольшому росту вероятности потери. Поведение вероятности прерывания при стратегии S3, в которой сбои из-за микромобильности всегда приводят к потере сессии, качественно меняется. Для

этой стратегии вероятность прерывания уменьшается с ростом плотности блокаторов, а вероятность потери растет, хотя и более умеренно по сравнению со стратегиями S2 и S4. Объясняется это тем, что с увеличением плотности блокаторов λ_B вероятность того, что сессия будет перенаправлена на БС 5G NR, увеличивается, а в периоды обслуживания на БС 5G NR сессии не страдают от сбоев из-за микромобильности, что снижает вероятность прерывания на терагерцевых БС.

Как и для стратегии A1, рассмотрим подробнее компоненты вероятности прерывания при стратегии ассоциации A2 на рисунке 5.8. Вероятность прерывания $\pi_{T,K+1}$ на БС 5G NR является возрастающей функцией от плотности блокаторов λ_B . Однако поведение вероятности прерывания $\pi_{T,k}$ на терагерцевых БС отличается. Для стратегии мультисвязности S2, где предполагаются нечувствительные к кратковременным потерям соединения приложения из-за микромобильности, вероятность прерывания на терагерцевых БС увеличивается. Однако для стратегии мультисвязности S3, где микромобильность приводит к потере сессий, увеличение плотности блокаторов приводит к снижению вероятности прерывания.

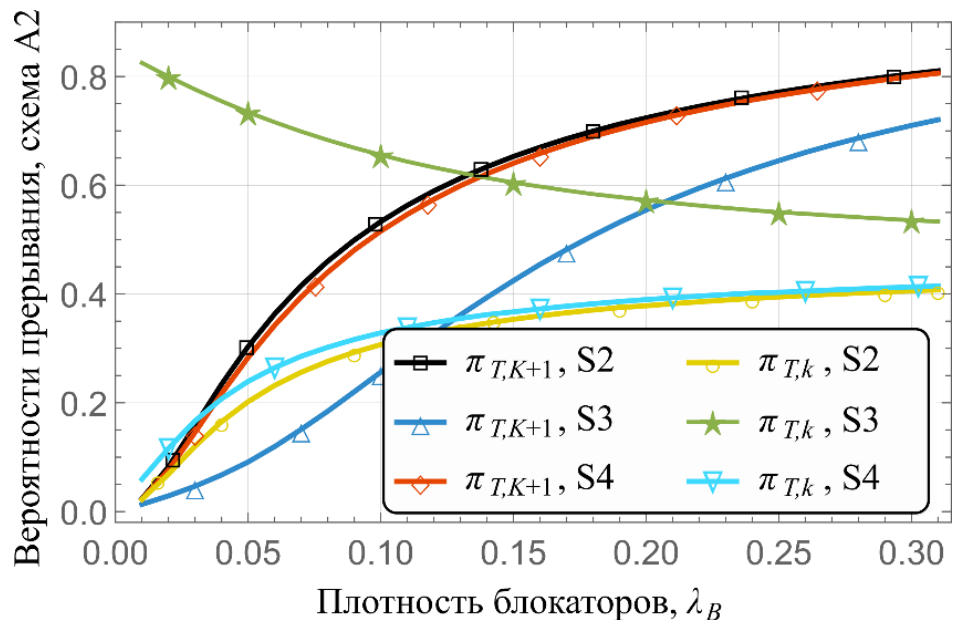


Рис. 5.8. Вероятность прерывания при использовании схемы ассоциации A2

Таким образом, ассоциация с терагерцевой БС всех сессий в ее зоне покрытия (схема A2) в целом хуже по сравнению со схемой A1 в условиях высокой плотности блокаторов. Напротив, при низкой плотности блокаторов ($\lambda_B < 0.1$) комбинации

схемы ассоциации A1 и стратегий многосвязности S2/S4 показывают наилучшую производительность.

5.2. Анализ модели гетерогенной сети с выгрузкой сессий в нелицензированный диапазон частот

Одним из решений, направленных на увеличение емкости сетей радиодоступа NR, является технология NR-U, которая подразумевает использование нелицензированного диапазона частот для сглаживания пиков потребления ресурса БС и выгрузки части сессий передачи данных в случае нехватки ресурса. Следует учитывать, что методы доступа в лицензированных и нелицензированных частотах принципиально отличаются, поэтому в данном разделе изложен метод расчета добавочной скорости передачи данных, который можно получить при выгрузке сессии в нелицензированные частоты.

5.2.1. Системная модель

Рассмотрим развертывание БС NR-U и точек доступа беспроводной сети стандарта IEEE 802.11 ad/ay (WiGig), размещенными в непосредственной близости. Лицензированная часть БС NR-U использует лицензированный диапазон 28 ГГц с полосой пропускания B_N МГц. Нелицензированная часть БС NR-U работает в диапазоне 60 ГГц, используя один канал с полосой пропускания B_W МГц. В непосредственной близости от каждой БС NR-U находится точка доступа WiGig, работающая в том же канале. БС NR-U размещены согласно пуассоновскому точечному процессу с плотностью λ_A . Радиус покрытия в лицензированном диапазоне обозначим r_L , а в нелицензированном – r_U , причем $r_U < r_L$.

Рассматриваются два типа пользовательских устройств (UE), NR-U UE и WiGig UE. Оба типа UE расположены согласно независимым пуассоновским точечным процессам с плотностями $\lambda_{B,N}$ и $\lambda_{B,W}$. NR-U UE могут использовать как нелицензированные (если находятся внутри меньшего круга радиуса r_U), так и лицензированные диапазоны, в то время как WiGig UE могут использовать только первый диапазон.

Предполагается, что для доступа к среде в нелицензированном диапазоне UE используют улучшенный механизм прослушивания перед передачей (Listen Before Talk, LBT), называемый LBT с наблюдением за каналом (Channel observation LBT, CoLBT). Согласно CoLBT, UE, у которого есть пакет, готовый к передаче, сначала выбирает счетчик отсрочки равновероятно в $[0, W_i - 1]$, где W_i – текущая длина конкурентного окна после i неудачных попыток передач. Значение счетчика отсрочки уменьшается на единицу на каждом слоте, если канал определяется как занятый. Как только он достигает нуля, инициируется передача пакета. Результат передачи может быть успешным или неудачным. Последнее может произойти в результате 1) коллизии с другой передачей NR-U или WiGig UE, или 2) попадания в состояние блокировки пути прямого распространения сигнала. При каждой неудачной попытке повторной передачи размер конкурентного окна W_i удваивается. Когда достигается максимальное количество попыток повторной передачи T , пакет считается потерянным.

Предполагается, что UE инициируют сессии передачи данных, связанных с требовательными к скорости приложениями, такими как потоковое видео, AR/VR, удаленное телеприсутствие. Требуемую скорость передачи данных обозначим C . В зависимости от расстояния между UE и БС для обеспечения скорости C требуется разный объем ресурса. Распределение требований сессий к ресурсу задается дискретным рядом $\{f_j\}$, $0 \leq j \leq R$, где R – число ресурсных блоков в лицензированном диапазоне БС NR-U. Будем считать, что запросы на установление сессий от UE поступают независимо друг от друга с интенсивностью α_U .

Рассматриваются следующие схемы выгрузки.

1) Базовая выгрузка. В этом случае NR-U UE подключается к ближайшей БС NR-U и пытаются использовать лицензированный диапазон. Если в нем недостаточно ресурсов для обслуживания сессии, то ее обслуживание выгружается в нелицензированный диапазон. Если текущая скорость, предоставляемая выгруженной сессии в этом диапазоне, меньше C , то сессия теряется.

2) Выгрузка «тяжелых» сессий. В этом случае решение о точке обслуживания сессии NR-U UE принимается при поступлении, исходя из объема ресурсов, необходимых для обеспечения скорости C . Если требуемый объем ресурса превышает заданный порог R_F , то сессия сразу выгружается в нелицензированный диапазон. В противном случае сессия сначала пытается зарезервировать ресурсы в лицензированном диапазоне БС NR-U и только при недостаточном объеме ресурса она выгружается в нелицензированный диапазон.

3) Выгрузка «легких» сессий. Эта схема является зеркальной версией предыдущей, где NR-U UE сразу направляется в нелицензированный диапазон БС NR-U, если объем ресурса, необходимый для обеспечения скорости C меньше или равна заданному порогу R_S . В противном случае сессия переходит на обслуживание в лицензированный диапазон и только при нехватке там ресурса, выгружается в нелицензированные частоты.

Целью данного раздела является анализ случайной величины C_U скорости передачи данных, достигаемых сессиями в нелицензированных частотах и вероятности π_C того, что скорость окажется меньше требуемого уровня C .

Для этого построение модели осуществляется в два этапа. Сначала построена модель обслуживания в лицензированном диапазоне в виде РеСМО, из которой выводятся вероятности π_B потери сессии, π_O выгрузки сессии и распределение $\{\tilde{f}_j\}$, $0 \leq j \leq R$ требований к ресурсу выгружаемых сессий. Далее вероятность π_O и распределение $\{\tilde{f}_j\}$, $0 \leq j \leq R$ используются как входные параметры модели обслуживания в нелицензированном диапазоне для анализа метрик C_U и π_C .

5.2.2. Модель обслуживания в лицензированном диапазоне частот

Учитывая различия в радиусе покрытия в лицензированном и нелицензированном диапазонах, (т.е. $r_L > r_U$), вводятся два типа сессий. Первый тип, сгенерированные UE, которые находятся на расстоянии $r_U < x \leq r_L$ от БС, может обслуживаться только в лицензированном диапазоне. Если при поступлении такой сессии ресурса в лицензированном диапазоне недостаточно, то она теряется.

Сессии второго типа, сгенерированные UE, которые находятся на расстоянии $x \leq r_U$ от БС, потенциально могут быть выгружены в нелицензированный диапазон. Тогда интенсивности поступления сессий каждого типа принимают вид

$$\lambda_1 = \lambda_{B,N} \pi (r_L^2 - r_U^2) \alpha_U, \quad (5.26)$$

$$\lambda_2 = \lambda_{B,N} \pi r_U^2 \alpha_U. \quad (5.27)$$

При этом распределение расстояния от UE до БС у сессий первого и второго типа будет различным, а значит различными будут и распределения требований к ресурсу, которые вычисляются из параметров исследуемого сценария по методу, изложенному в разделе 1.3.

Таким образом, процесс обслуживания сессий передачи данных в лицензированном диапазоне описывается РеСМО с двумя типами заявок. В РеСМО с N приборами и объемом ресурса R поступают два пуассоновских потока интенсивностями λ_1 и λ_2 , а требования заявок к ресурсу задаются распределениями $\{f_{1,j}\}$ и $\{f_{2,j}\}$, $0 \leq j \leq R$, соответственно. Времена обслуживания предполагаются экспоненциальными с параметром μ .

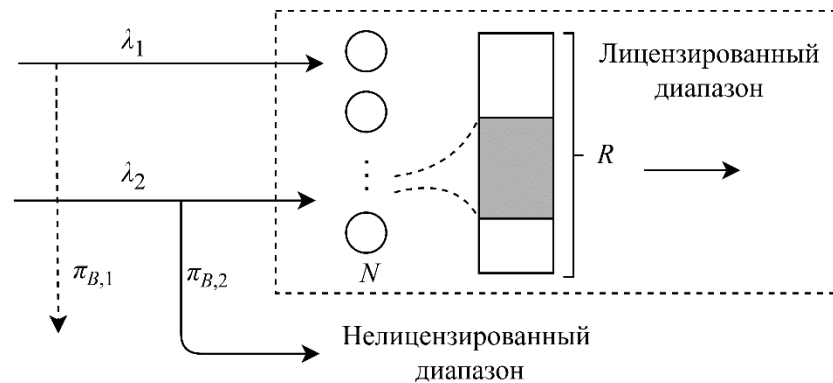


Рис. 5.9. Схема модели РеСМО в случае базовой схемы выгрузки

Схема РеСМО в случае **базовой схемы выгрузки** представлена на рисунке 5.9. Согласно теореме 2.1 из раздела 2.2, она может быть представлена как РеСМО с одним входящим потоком с предложенной нагрузкой

$$\rho = \rho_1 + \rho_2, \quad \rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu}, \quad \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu}, \quad (5.28)$$

и распределением требований

$$f_j = \frac{\rho_1}{\rho} f_{1,j} + \frac{\rho_2}{\rho} f_{2,j}, \quad 0 \leq j \leq R. \quad (5.29)$$

Вероятность π_B потери сессий первого типа в базовой схеме выгрузки равна вероятности потери $\pi_{B,1}$ заявок первого типа. Для данной РеСМО эта вероятность имеет вид

$$\pi_B = \pi_{B,1} = 1 - q_0 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=0}^R f_r^{(n)} \sum_{j=0}^{R-r} f_{1,j}, \quad (5.30)$$

где

$$q_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^N \frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=0}^R f_r^{(n)} \right)^{-1}. \quad (5.31)$$

Вероятность выгрузки π_O сессий второго типа в базовой схеме выгрузки равна вероятности потери заявок второго типа:

$$\pi_O = \pi_{B,2} = 1 - q_0 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=0}^R f_r^{(n)} \sum_{j=0}^{R-r} f_{2,j}. \quad (5.32)$$

Отметим, что вероятности π_B и π_O можно вычислять с помощью сверточного алгоритма из раздела 2.1, согласно утверждению 2.6.

Нетрудно видеть, что распределение требований к ресурсу потерянных заявок в РеСМО отличается от исходного распределения требований, так как заявки с большими требованиями имеют большую вероятность отказа в обслуживании. Вероятность \tilde{f}_j того, что заявка второго типа, получившая отказ в обслуживании, требует j единиц ресурса, имеет вид

$$\tilde{f}_j = \frac{f_{2,j}}{\pi_O} \left(q_0 \frac{\rho^N}{N!} \sum_{r=0}^R f_r^{(N)} + q_0 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=R-j+1}^R f_r^{(n)} \right), \quad 0 \leq j \leq R. \quad (5.33)$$

Утверждение 5.3. Распределение $\{\tilde{f}_j\}$, $0 \leq j \leq R$, требований к ресурсу выгружаемых заявок можно вычислять с помощью сверточного алгоритма из раздела 2.1 по формуле

$$\tilde{f}_j = \frac{f_{2,j}}{\pi_O} \frac{G(N, R) - G(N-1, R-j)}{G(N, R)}. \quad (5.34)$$

Доказательство.

Напомним, что функции $G(n, r)$ определяются выражением

$$G(n, r) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\rho^k}{k!} \sum_{j=0}^r f_j^{(k)}, \quad n \geq 0, \quad r \geq 0.$$

Тогда $q_0 = G^{-1}(N, R)$, а первое слагаемое в скобках в (5.33) принимает вид

$$\begin{aligned} q_0 \frac{\rho^N}{N!} \sum_{r=0}^R f_r^{(N)} &= \frac{1}{G(N, R)} \left[\left(1 + \sum_{n=1}^N \frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=0}^R f_r^{(n)} \right) - \left(1 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=0}^R f_r^{(n)} \right) \right] = \\ &= \frac{G(N, R) - G(N-1, R)}{G(N, R)}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Аналогично, второе слагаемое в скобках выражения (5.33) принимает вид

$$\begin{aligned} q_0 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=R-j+1}^R f_r^{(n)} &= \frac{1}{G(N, R)} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^n}{n!} \left(\sum_{r=0}^R f_r^{(n)} - \sum_{r=0}^{R-j} f_r^{(n)} \right) = \\ &= \frac{1}{G(N, R)} \left[\left(1 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=0}^R f_r^{(n)} \right) - \left(1 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=0}^{R-j} f_r^{(n)} \right) \right] = \frac{G(N-1, R) - G(N-1, R-j)}{G(N, R)}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Подставляя (5.35) и (5.36) в (5.33), получаем выражение (5.34), что доказывает утверждение. ■

Таким образом, все итоговые характеристики модели обслуживания в лицензированном диапазоне вычисляются с помощью сверточного алгоритма.

Схема РеСМО в случае *схемы выгрузки «тяжелых» сессий* представлена на рисунке 5.10.

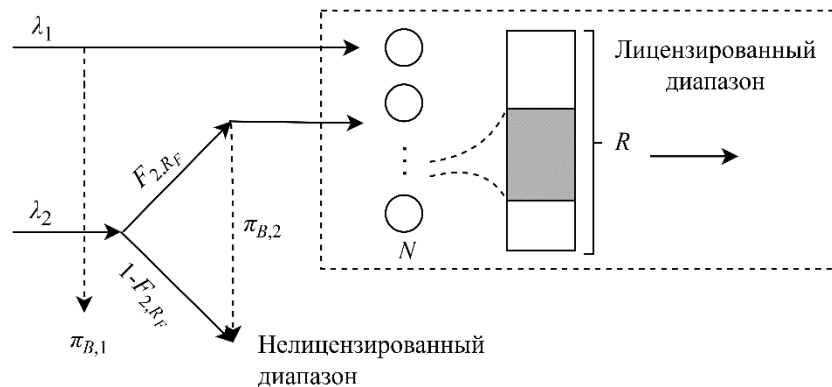


Рис. 5.10. Схема модели РеСМО в случае схемы выгрузки «тяжелых» сессий

Заявки первого типа также могут обслуживаться только в лицензированном диапазоне. Заявки второго типа с вероятностью F_{2,R_F} пытаются попасть на

обслуживание в систему, а с вероятностью $1 - F_{2,R_F}$ – сразу выгружаются в нелицензированный диапазон, где $F_{2,r} = \sum_{j=0}^r f_{2,j}$. Таким образом, фактическое распределение требований заявок второго типа имеет вид

$$\hat{f}_{2,j} = \begin{cases} \frac{f_{2,j}}{F_{2,R_F}}, & 0 \leq j \leq R_F, \\ 0, & R_F < j \leq R, \end{cases} \quad (5.37)$$

предложенная нагрузка агрегированного потока принимает вид

$$\rho = \rho_1 + \rho_2, \quad \rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu}, \quad \rho_2 = \frac{\lambda_2 F_{2,R_F}}{\mu}, \quad (5.38)$$

а его распределение требований к ресурсу –

$$f_j = \begin{cases} \frac{\rho_1}{\rho} f_{1,j} + \frac{\rho_2}{\rho} \frac{f_{2,j}}{F_{2,R_F}}, & 0 \leq j \leq R_F, \\ \frac{\rho_1}{\rho} f_{1,j}, & R_F \leq j \leq R. \end{cases} \quad (5.39)$$

Для РеСМО с такими нагрузочными параметрами вычисляются вероятности $\pi_{B,1}$ и $\pi_{B,2}$ потери заявок первого и второго типа. Отметим, что при расчете вероятности $\pi_{B,2}$ необходимо использовать вместо $f_{2,j}$ распределение $\hat{f}_{2,j}$ по формуле (5.37). Вероятность π_B потери заявок первого типа равна $\pi_{B,1}$. Вероятность выгрузки заявок второго типа принимает вид

$$\pi_O = 1 - F_{2,R_F} + F_{2,R_F} \pi_{B,2}. \quad (5.40)$$

Распределение требований к ресурсу выгружаемых заявок в этой схеме состоит из двух частей. Если требование выгружаемой заявки меньше или равно R_F , значит, она сначала была направлена в лицензированный диапазон, но из-за нехватки там свободного ресурса была выгружена в нелицензированный. Если же требование больше R_F , то она изначально была направлена в нелицензированные частоты:

$$\tilde{f}_j = \begin{cases} \frac{f_{2,j}}{\pi_0} \left(q_0 \frac{\rho^N}{N!} \sum_{r=0}^R f_r^{(N)} + q_0 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=R-j+1}^R f_r^{(n)} \right), & j \leq R_F, \\ \frac{f_{2,j}}{\pi_0}, & R_F < j \leq R. \end{cases} \quad (5.41)$$

Нетрудно видеть, что, проводя рассуждения, аналогичные доказательству утверждения 5.3, выражение (5.41) можно свести к виду, позволяющему применять сверточный алгоритм:

$$\tilde{f}_j = \begin{cases} \frac{f_{2,j} (G(N, R) - G(N-1, R-j))}{\pi_0 G(N, R)}, & j \leq R_F, \\ \frac{f_{2,j}}{\pi_0}, & R_F < j \leq R. \end{cases} \quad (5.42)$$

Описание РеСМО в случае *схемы выгрузки «легких» сессий* похоже. Теперь заявки второго типа сразу переходят в нелицензированный диапазон, если их требования к ресурсу меньше или равны порогу R_S , т.е. с вероятностью F_{2,R_S} , а с вероятностью $1 - F_{2,R_S}$ – пытаются получить обслуживание в лицензированном диапазоне. Таким образом, фактическое распределение требований заявок второго типа имеет вид

$$\hat{f}_{2,j} = \begin{cases} 0, & 0 \leq j \leq R_S, \\ \frac{f_{2,j}}{1 - F_{2,R_S}}, & R_S < j \leq R, \end{cases} \quad (5.43)$$

предложенная нагрузка агрегированного потока принимает вид

$$\rho = \rho_1 + \rho_2, \quad \rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu}, \quad \rho_2 = \frac{\lambda_2(1 - F_{2,R_S})}{\mu}, \quad (5.44)$$

а его распределение требований к ресурсу –

$$f_j = \begin{cases} \frac{\rho_1}{\rho} f_{1,j}, & 0 \leq j \leq R_S, \\ \frac{\rho_1}{\rho} f_{1,j} + \frac{\rho_2}{\rho} \frac{f_{2,j}}{1 - F_{2,R_S}}, & R_S < j \leq R. \end{cases} \quad (5.45)$$

Аналогично предыдущей схеме выгрузки, вычисляются вероятности $\pi_{B,1}$ и $\pi_{B,2}$ потери заявок первого и второго типа, причем при расчете вероятности $\pi_{B,2}$ необходимо использовать распределение $\hat{f}_{2,j}$ по формуле (5.43). Вероятность π_B потери заявок первого типа в схеме выгрузки «легких» сессий равна $\pi_{B,1}$. Вероятность выгрузки заявок второго типа принимает вид

$$\pi_O = F_{2,R_S} + (1 - F_{2,R_S})\pi_{B,2}. \quad (5.46)$$

Распределение требований к ресурсу выгружаемых заявок вычисляется по аналогии:

$$\tilde{f}_j = \begin{cases} \frac{f_{2,j}}{\pi_O}, & j \leq R_S, \\ \frac{f_{2,j}}{\pi_O} \left(q_0 \frac{\rho^N}{N!} \sum_{r=0}^R f_r^{(N)} + q_0 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=R-j+1}^R f_r^{(n)} \right), & R_S < j \leq R. \end{cases} \quad (5.47)$$

Проводя аналогичные рассуждения, можно показать, что выражение (5.47) можно свести к виду

$$\tilde{f}_j = \begin{cases} \frac{f_{2,j} (G(N,R) - G(N-1, R-j))}{\pi_O G(N,R)}, & j \leq R_S, \\ \frac{f_{2,j}}{\pi_O}, & R_S < j \leq R. \end{cases} \quad (5.48)$$

Получив выходные параметры моделей обслуживания в лицензированном диапазоне для каждой схемы выгрузки, перейдем к анализу модели обслуживания в нелицензированных частотах.

5.2.3. Модель обслуживания в нелицензированном диапазоне частот

Таким образом, на нелицензированную часть БС NR-U поступает пуассоновский поток запросов на установление сессий интенсивностью $\lambda_N = \lambda_2 \pi_O$. Однако значение распределения $\{\tilde{f}_j\}$, $0 \leq j \leq R$ требований к ресурсу выгружаемых сессий для модели обслуживания в нелицензированной части БС NR-U отличается из-за различия в принципах предоставления ресурса.

Предполагается, что в нелицензированном диапазоне устройства конкурируют за доступ к каналу по протоколу CoLBT, а при получении доступа используют весь канал шириной B_w (а не только один ресурсный блок) в течение одного кадра. Для вычисления объема информации, который может быть передан устройством за один слот, необходимо знать спектральную эффективность используемой модуляционно-кодовой схемы (MCS). Распределение спектральной эффективности можно получить из распределения $\{\tilde{f}_j\}$, $0 \leq j \leq R$, требований выгружаемых сессий, полученного из модели обслуживания в лицензированном диапазоне.

Согласно принципам вывода распределения требований к ресурсу, описанным в разделе 1.3, вероятность f_j равна вероятности m_k выбора такой MCS, при которой для обеспечения скорости передачи данных C требуется j ресурсных блоков, т.е.

$$j = \left\lceil \frac{C}{B e_k} \right\rceil,$$

где B – ширина одного ресурсного блока, а e_k – спектральная эффективность MCS. Предполагая использование сопоставимых MCS в лицензированной и нелицензированной частях БС NR-U, из распределения $\{\tilde{f}_j\}$, $0 \leq j \leq R$, требований выгружаемых сессий, получаем распределение спектральной эффективности при передаче в нелицензированном диапазоне в виде набора пар (m_k, e_k) .

Перейдем теперь к выводу вероятности успешной передачи $\theta = \theta(n_N, n_W)$, зависящей от числа n_N конкурирующих NR-U устройств и числа n_W конкурирующих WiGig устройств. Вероятность того, что попытка передачи является успешной, можно записать в виде

$$\theta = (1 - p_c)(1 - p_b), \quad (5.49)$$

где $p_c = p_c(n_N, n_W)$ – вероятность коллизии, возникающая, если в одном кадре передают два или более устройства, а p_b – вероятность блокировки пути прямого

распространения, которую можно считать постоянной при заданной плотности расположения UE.

Пусть $\pi_N = \pi_N(n_N, n_W)$ и $\pi_W = \pi_W(n_N, n_W)$ – вероятности того, что NR-U или WiGig UE передает в случайно выбранном кадре, соответственно. Считая эти вероятности независимыми для разных UE, вероятность коллизии p_c при заданном числе конкурирующих UE n_N и n_W имеет вид

$$p_c = 1 - (1 - \pi_W)^{n_W} (1 - \pi_N)^{n_N}. \quad (5.50)$$

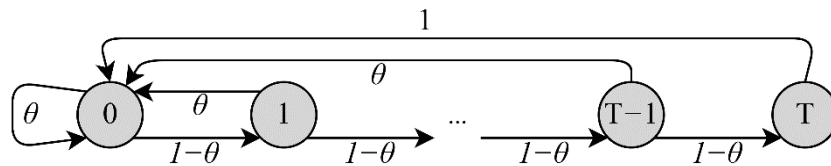


Рис. 5.11. Диаграмма переходных вероятностей ЦМ Y_n

Для вычисления вероятностей π_N и π_W рассмотрим цепь Маркова Y_n , $n \geq 0$, описывающую число повторных передач одного UE в процессе конкуренции за доступ к каналу. Состояние $Y_n = j$, $0 \leq j \leq T$ показывает, что для передачи текущего пакета было совершено j неудачных попыток. Диаграмма переходных вероятностей ЦМ представлена на рисунке 5.11 в предположении, что до окончания обслуживания у UE всегда имеются пакеты для передачи.

ЦМ Y_n является неразложимой с конечным числом состояний, поэтому она имеет единственное стационарное распределение Q_i , $0 \leq i \leq T$, являющееся решением системы уравнений

$$\begin{aligned} Q_0 &= Q_0\theta + \dots + Q_{T-1}\theta + Q_T, \\ Q_i &= Q_{i-1}(1-\theta), \quad i = 1, 2, \dots, T-1, \\ Q_T &= Q_{T-1}(1-\theta). \end{aligned} \quad (5.51)$$

Нетрудно видеть, что единственным вероятностным решением системы (5.51) являются выражения

$$Q_i = \frac{(1-\theta)^i \theta}{1 - (1-\theta)^{T+1}}, \quad i = 0, 1, \dots, T. \quad (5.52)$$

Заметим, что попытка передачи происходит ровно один раз в каждом состоянии ЦМ Y_n . Тогда, определив среднюю длительность b_i (в числе кадров) пребывания в состоянии i , $0 \leq i \leq T$, вероятность π_N передачи в случайном кадре принимает вид

$$\pi_N = \left(\sum_{i=0}^T Q_i b_i \right)^{-1}. \quad (5.53)$$

Утверждение 5.4. Вероятность π_N передачи NR-U устройства в случайном кадре имеет вид

$$\pi_N = \left[\frac{1}{2} + \frac{(1 - 2^{T+1}(1 - \theta)^{T+1})\theta W}{2(2\theta - 1)(1 - (1 - \theta)^{T+1})} \right]^{-1}, \quad (5.54)$$

где W – минимальный размер конкурентного окна.

Доказательство.

Первоначальное значение счетчика отсрочки в состоянии i равномерно распределено на $[0, 2^i W]$. Тогда средняя длительность пребывания в состоянии i с учетом кадра на передачу пакета равна $b_i = \frac{2^i W + 1}{2}$. Подставляя это выражение и формулу стационарного распределения ЦМ Y_n (5.52) в (5.53), получим

$$\begin{aligned} \pi_N &= \left(\sum_{i=0}^T \frac{(1 - \theta)^i \theta}{1 - (1 - \theta)^{T+1}} \frac{2^i W + 1}{2} \right)^{-1} = \\ &= \left[\frac{\theta}{2(1 - (1 - \theta)^{T+1})} \left(\sum_{i=0}^T (1 - \theta)^i 2^i W + \sum_{i=0}^T (1 - \theta)^i \right) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Суммы внутри последнего выражения представляют собой суммы геометрических прогрессий. Сворачивая суммы и упрощая полученные выражения, получаем требуемую формулу. ■

Выражения (5.49), (5.50) и (5.54) образуют нелинейную систему уравнений с тремя неизвестными, численно решая которую с различными параметрами n_N и n_W , можно получить соответствующие вероятности для всех возможных количеств

активных NR-U и WiGig UE. Используя полученные вероятности $\theta = \theta(n_N, n_W)$ и $\pi_N = \pi_N(n_N, n_W)$, выводится вероятность Π_N того, что устройство NR-U успешно передает пакет в случайном кадре:

$$\Pi_N = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\rho_N)^i}{i!} e^{-\rho_N} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\rho_W)^j}{j!} e^{-\rho_W} \pi_N(i, j) \theta(i, j). \quad (5.55)$$

Тогда с вероятностью m_k скорость передачи данных, достигаемая NR-U UE в нелицензированном диапазоне, равна C_k , где

$$C_k = \Pi_N B_W e_k, \quad (5.56)$$

а ее математическое ожидание принимает вид

$$M[C_U] = \sum_k m_k \Pi_N B_W e_k. \quad (5.57)$$

Наконец, вероятность π_C того, что скорость в нелицензированном диапазоне окажется меньше требуемого уровня C принимает вид

$$\pi_C = \sum_{k: C_k < C} m_k. \quad (5.58)$$

5.2.4. Численный анализ скорости передачи данных в нелицензированном диапазоне частот

Перейдем к численному анализу. Вывод параметров РеСМО из параметров моделей распространения и особенностей сценария развертывания проведен согласно разделу 1.3, а вероятность состояния блокировки прямой видимости – согласно разделу 4.1. Остальные исходные параметры собраны в таблице 5.2, включая параметры протокола случайного доступа CoLBT.

Табл. 5.2. Исходные данные

Параметр	Значение
Несущая частота лицензированной части БС 5G NR-U, $f_{L,c}$	28 ГГц
Несущая частота нелицензированной части БС 5G NR-U, $f_{U,c}$	60 ГГц
Ширина полосы пропускания лицензированной части БС 5G NR-U, B_N	400 МГц

Ширина полосы пропускания нелицензированной части БС 5G NR-U, B_w	2160 МГц
Требуемая скорость передачи данных, C	50 Мбит/с
Коэффициент усиления антенны БС NR-U, G_B	17,59 дБи
Коэффициент усиления антенны точки доступа WiGig, G_w	11,57 дБи
Коэффициент усиления антенны UE, G_U	8,57 дБи
Потери в кабеле, C_L	2 дБ
Верхняя граница интерференции, M_I	3 дБ
Термальный шум, N_0	-174 дБм / Гц
Высота БС NR-U и WiGig, h_s	10 м
Высота блокатора, h_B	1,7 м
Высота расположения UE, h_U	1,5 м
Радиус блокатора, r_B	0,2 м
Плотность блокаторов, $\lambda_{B,N} = \lambda_{B,W}$	0,15 м ⁻²
Интенсивность поступления сессий от одного UE, α_U	10 ⁻⁴ с ⁻¹
Средняя длительность сессии, μ^{-1}	10 с
Начальный размер конкурентного окна, W	16
Максимальное число повторных передач, T	7

На рисунке 5.12 показана вероятность Π_N успешной передачи как функция плотности БС NR-U при различных плотностях блокаторов. Анализируя полученные результаты, можно заметить, что увеличение плотности блокаторов приводит к резкому снижению вероятности успешной передачи. Такое поведение сохраняется во всем диапазоне рассматриваемых плотностей развертывания БС NR-U. В частности, при увеличении λ_B от 0,1 до 0,5 наблюдается аналогичное снижение вероятности успешной передачи для плотности БС NR-U $\lambda_A = 2 \cdot 10^{-5}$.

Однако для плотных развертываний с плотностью $\lambda_A = 2 \cdot 10^{-4}$ влияние плотности блокаторов становится меньше.

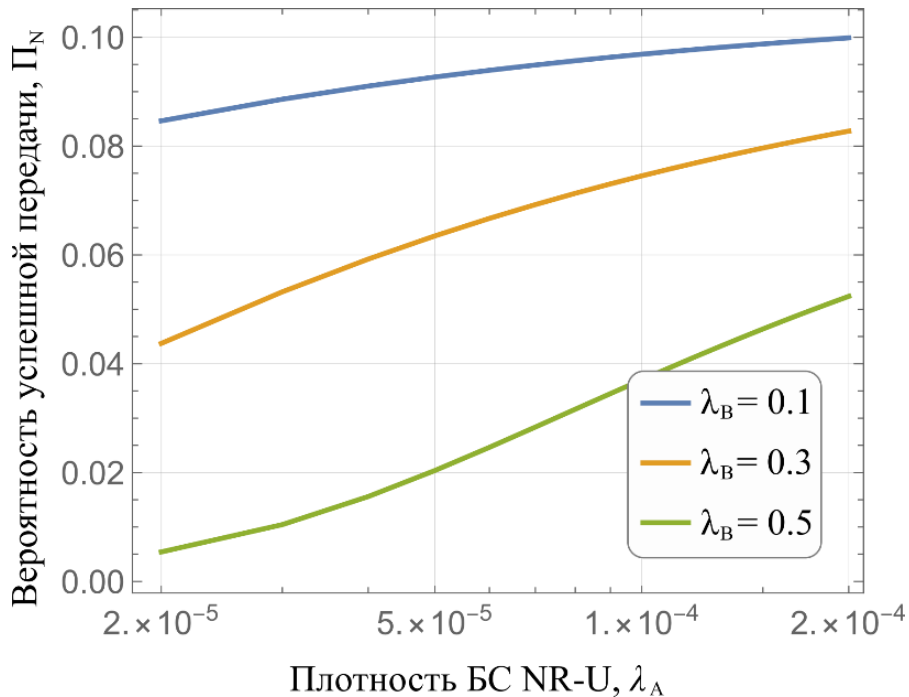


Рис. 5.12. Вероятность успешной передачи в зависимости от плотности БС

Рисунки 5.13 и 5.14 иллюстрируют вероятность π_C снижения скорости передачи ниже требуемого уровня для всех рассмотренных стратегий и двух требуемых скорости, $C = 50$ Мбит/с и $C = 100$ Мбит/с. Анализируя представленные результаты, можно заметить, что базовая стратегия, при которой сессия выгружается в нелицензируемый диапазон при недостатке ресурса в лицензированном, характеризуется минимальными значениями вероятности π_C .

Выгрузка «тяжелых» сессий приводит к очень похожей производительности, в то время как выгрузка «легких» сессий приводит к значительно худшей производительности. Последнее можно объяснить тем фактом, что механизмы случайного доступа при той же предлагаемой нагрузке, как известно, лучше используют доступные ресурсы, когда в системе мало «тяжелых» сессий, а не множество «легких». Можно также заметить, что отклик системы не зависит качественно от требуемых скоростей. Количественно, однако, увеличение требуемой скорости передачи данных приводит к соответствующему увеличению вероятности π_C .

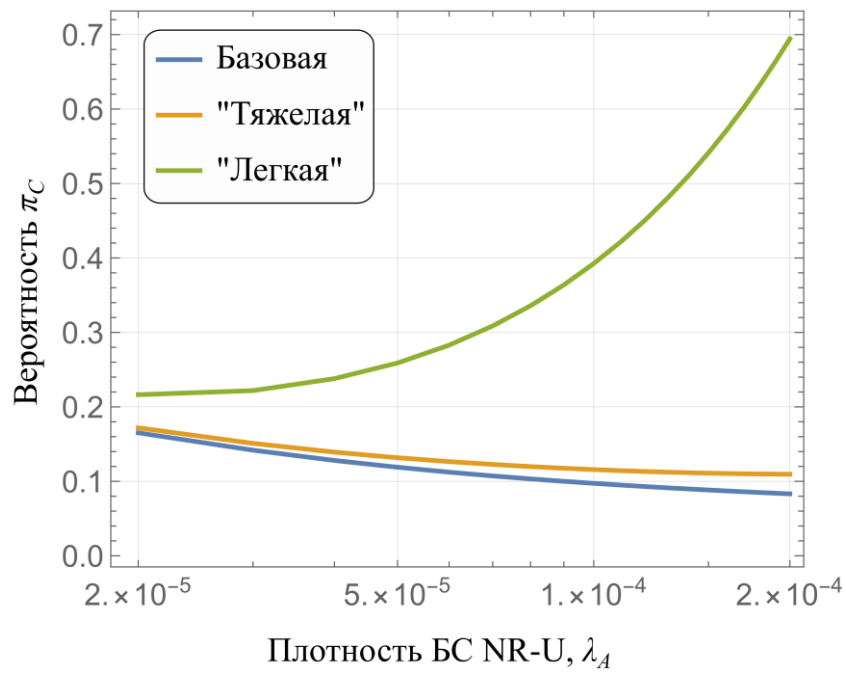


Рис. 5.13. Вероятность π_C снижения скорости передачи ниже требуемого порога при $C = 50$ Мбит/с

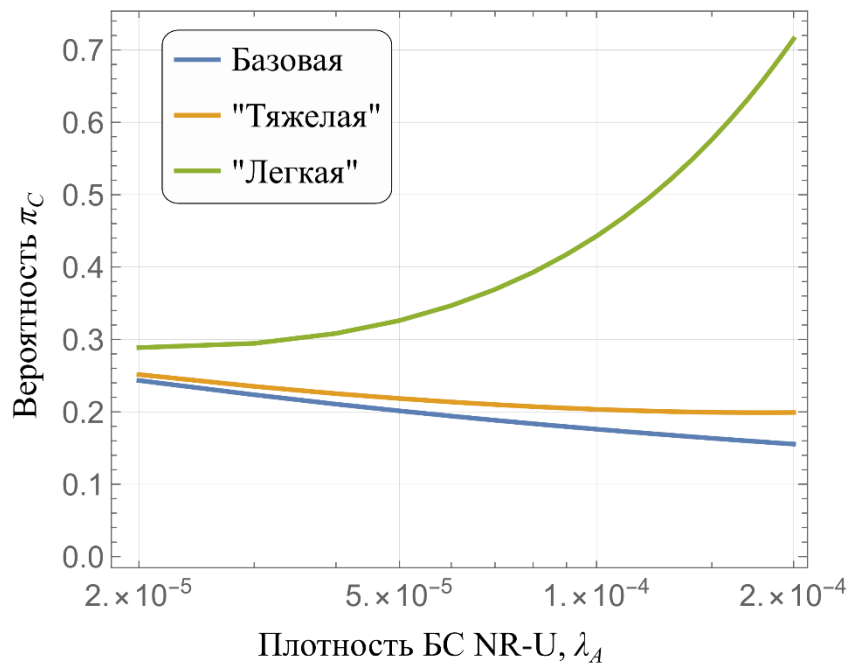


Рис. 5.14. Вероятность π_C снижения скорости передачи ниже требуемого порога при $C = 100$ Мбит/с

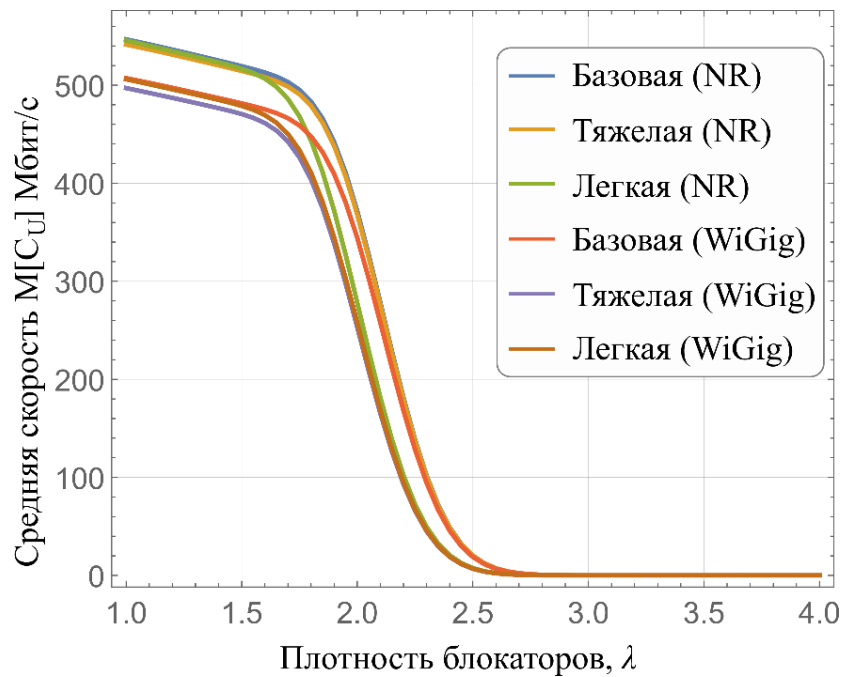


Рис. 5.15. Средняя скорости передачи данных в нелицензированном диапазоне

На рисунке 5.15 показана средняя скорость $M[C_U]$ в нелицензированном диапазоне устройств NR-U и WiGig для различных схем выгрузки. Как можно заметить, средняя скорость в нелицензированном диапазоне NR-U и WiGig UE уменьшаются по мере увеличения интенсивности поступления сессий NR-U $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Сначала падение происходит медленно, поскольку большинство коллизий разрешается, а затем происходит резкое падение для обоих типов UE, что характерно для систем, использующих протоколы случайного доступа.

Отметим, что вероятности успешной передачи для обоих типов устройств равны, однако из-за разницы MCS, используемых NR и WiGig, средняя скорость устройств NR-U несколько выше. Также стоит отметить, что худшие показатели, особенно в условиях высокой нагрузки ($1,7 \leq \lambda \leq 2,5$) показывает схема выгрузки «легких» сессий. Такое поведение связано с особенностями протоколов случайного доступа, показатели эффективности которых быстро падают при увеличении числа конкурирующих за доступ к каналу устройств.

Заключение

Основные научные результаты работы состоят в следующем.

1. Разработан метод построения функции распределения ступенчатого вида, описывающей случайные требования сессий пользователей к объему ресурса сети мобильной связи. Ступенчатый вид функции распределения возникает из-за конечного набора схем модуляции и кодирования технологий радиодоступа. Метод позволяет описывать процесс обслуживания пользовательских сессий на БС сети радиодоступа с помощью моделей РеСМО с дискретными требованиями к ресурсу.
2. Разработан рекуррентный алгоритм сверточного типа для расчета нормирующей константы совместного стационарного распределения числа заявок и объема занимаемого ими ресурса в экспоненциальной РеСМО с дискретным распределением требований к ресурсу. Алгоритм позволяет вычислять вероятность блокировки заявки, средний объем и дисперсию занятого ресурса в процессе вычисления нормирующей константы. Показано, что разработанный алгоритм может быть применен к РеСМО с несколькими входящими потоками.
3. Доказано свойство нечувствительности совместного стационарного распределения числа заявок в системе и занятого ими ресурса к виду функции распределения времени обслуживания в РеСМО с пуассоновским входящим потоком, интенсивностями поступления и обслуживания, зависящими от числа заявок в системе, и произвольным распределением требований заявок к ресурсу.
4. Разработана модель ресурсной СМО с сигналами, при поступлении которых обслуживаемая заявка меняет требования к объему ресурса. Если новые требования превышают объем незанятого ресурса, то обслуживание заявки прерывается. Поток сигналов моделирует процесс изменения состояния радиоканала из-за возникновения блокировок пути прямого распространения сигнала в высокочастотной сети радиодоступа.

5. Разработан приближенный метод расчета стационарного распределения и вероятностных характеристик для РеСМО с дискретным распределением требований к ресурсу и сигналами. Метод заключается в построении имитирующей модели РеСМО без сигналов с дополнительным входящим потоком, интенсивность которого вычисляется итерационно по показателю среднего числа заявок в системе. Доказана теорема о сходимости итерационного алгоритма. Относительная погрешность вычисления вероятности потери заявки и вероятности прерывания обслуживания на близких к реальным наборам исходных данных составляет 5-10%.
6. Разработана модель функционирования БС беспроводной сети пятого поколения 5G NR, функционирующей в миллиметровом диапазоне частот, в виде РеСМО с сигналами. Сигналы позволили учесть ключевую особенность сетей – блокировку узконаправленных лучей миллиметровых радиоволн небольшими подвижными объектами и вызываемые этим кратковременные прерывания связи. Проведен анализ эффективности совместного использования механизма резервирования части радиоресурса для текущих сессий передачи данных, испытывающих кратковременные прерывания связи, а также механизма мультисвязности, предполагающего наличие активного подключения с несколькими БС для снижения вероятности прерывания обслуживания.
7. Разработана модель функционирования БС сети 5G NR с учетом эффекта повторных вызовов в виде РеСМО с сигналами и орбитой. Модель позволяет проводить анализ влияния эффекта повторных вызовов на показатели качества обслуживания пользовательских сессий с учетом нестабильности качества радиоканала высокочастотной сети. Получены формулы для расчета вероятности потери при поступлении, вероятности успешного обслуживания без ожидания, вероятности успешного обслуживания с ожиданием и вероятности прерывания обслуживания.
8. Разработана модель функционирования гетерогенной сети радиодоступа шестого поколения, состоящей из БС, использующих терагерцевый диапазон

частот, и базовых станций 5G NR в миллиметровом диапазоне длин волн, на которые могут выгружаться сессии передачи данных из терагерцевых БС в моменты прерывания соединения. Модель построена в виде сети РеСМО с сигналами. Сигналы позволили моделировать переключение обслуживания сессий между БС. С использованием разработанной модели проведен сравнительный анализ нескольких схем первичной ассоциации пользователей в гетерогенной сети и различных стратегий мультисвязности.

9. Разработана модель системы 5G NR-U с совместным использованием лицензируемых и нелицензируемых диапазонов частот. Модель описывает функционирование системы в лицензируемом диапазоне в виде РеСМО, которая позволяет рассчитать долю трафика, выгружаемую в нелицензируемые частоты, и распределение требований к ресурсу выгружаемых сессий. Конкуренция пользовательских устройств за возможность использования нелицензируемых частот моделируется цепью Маркова, что позволяет вычислять распределение скорости передачи данных в нелицензируемом диапазоне.

Список литературы

1. Башарин Г.П., Бочаров П.П., Коган Я.А. Анализ очередей в вычислительных сетях: Теория и методы расчета. — Москва: Наука, 1989. — 336 с.
2. Башарин Г.П., Толмачев А.Л. Теория сетей массового обслуживания и ее приложения к анализу информационно-вычислительных систем // Итоги науки и техники. Серия «Теория вероятностей. Матем. статистика. Техн. Кибернетика». — 1983. — Т. 21. — С. 3-119.
3. Башарин Г.П., Харкевич Д.А., Шнепс М.А. Массовое обслуживание в телефонии. — Москва: Наука, 1968. — 246 с.
4. Бегишев В.О., Сопин Э.С., Молчанов Д.А., Самуйлов А.К., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е. Оценка эффективности механизма резервирования полосы пропускания для технологии mmWave в сетях связи пятого поколения // Информационно-управляющие системы. — 2019. — № 5. — С. 51-63.
5. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. — Москва: РУДН, 1995. — 529 с.
6. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. — Москва: Наука, 1978. — 399 с.
7. Вихрова О.Г., Самуйлов К.Е., Сопин Э.С., Шоргин С.Я. К анализу показателей качества обслуживания в современных беспроводных сетях // Информатика и ее применения. — 2015. — Т. 9. — № 4. — С. 48-55.
8. Вихрова О.Г., Сопин Э.С. Анализ показателей качества сети LTE с помощью систем массового обслуживания с ограниченным ресурсом и случайными требованиями // Современные информационные технологии и ИТ-образование. — 2015. — Т. 11. — № 2. — С. 185-191.
9. Вишнеvский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. — Москва: Техносфера, 2018. — 564 с.
10. Вишнеvский В.М., Ефросинин Д.В. Теория очередей и машинное обучение. — Москва: ИНФРА-М, 2024. — 370 с.

11. Вишнеvский В.М., Рыков В.В., Козырев Д.В., Иванова Н.М. Моделирование надежности привязных высотных беспилотных телекоммуникационных платформ. — Москва: Техносфера, 2022. — 194 с.
12. Вишнеvский В.М., Семенова О.В., Ефросини Д.В. Математические модели и методы исследования гибридных сетей связи на основе лазерной и радиотехнологий. — Москва: ИПУ РАН, 2020. — 120 с.
13. Вишнеvский В.М., Семенова О.В. Методы машинного обучения для исследования стохастических моделей циклического опроса в широкополосных беспроводных сетях. — Москва: ИПУ РАН, 2023. — 120 с.
14. Вишнеvский В.М., Семенова О.В. Системы поллинга: теория и применение в широкополосных беспроводных сетях. — Москва: Техносфера, 2007. — 312 с.
15. Вишнеvский В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. — Москва: Техносфера, 2003. — 512 с.
16. Вишнеvский В.М., Ляхов А.И., Портной С.Л., Шахнович И.В. Широкополосные беспроводные сети передачи информации. — Москва: Техносфера, 2005. — 591 с.
17. Гайдамака Ю.В., Сопин Э.С., Гудкова И.А., Андреев С.Д., Самуйлов К.Е., Шоргин С.Я. Модели и методы анализа и расчета показателей эффективности беспроводных гетерогенных сетей. — Москва: ФИЦ ИУ РАН, 2018. — 71 с.
18. Гарайшина И.Р., Моисеева С.П., Назаров А.А. Методы исследования коррелированных потоков и специальных систем массового обслуживания. — Томск: НТЛ, 2010. — 202 с.
19. Гильмутдинов Р., Марковская Н.В., Тюрликов А.М. Использование случайных графов для оценки надежности вычислительных сетей. — Санкт-Петербург: ГУАП, 2014. — 45 с.
20. Гольдштейн Б.С., Кучерявый А.Е. Сети связи пост-NGN. — Санкт-Петербург: Питер, 2013. — 160 с.
21. Гольдштейн Б.С., Соколов Н.А., Яновский Г.Г. Сети связи. — Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2010. — 400 с.
22. Горцев А.М., Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Управление и адаптация в системах массового обслуживания. — Томск: ТГУ, 1978. — 208 с.

23. Дараселия А.В., Сопин Э.С., Молчанов Д.А., Самуйлов К.Е. Анализ стратегии разгрузки базовых станций 5G NR с помощью технологии NR-U // Информатика и её применения. — 2021. — Т. 15. — № 3. — С. 98-111.
24. Деарт В.Ю. Мультисервисные сети связи. Транспортные сети и сети доступа. — Москва: Брис-М, 2014. — 189 с.
25. Зейфман А.И., Бенинг В.Е., Соколов И.А. Марковские цепи и модели с непрерывным временем. — Москва: Элекс-КМ, 2008. — 167 с.
26. Зорин А.В., Федоткин М.А. Стохастические модели процессов обслуживания с разделением времени: Учебное пособие для вузов. — Санкт-Петербург: Лань, 2025. — 356 с.
27. Ивницкий В.А. Теория сетей массового обслуживания. — Москва: Физматлит, 2004. — 772 с.
28. Касконе А., Манзо Р., Печинкин А.В., Шоргин С.Я. Система Geom/G/1/n с дисциплиной LIFO без прерывания обслуживания и ограничением на суммарный объем заявок // Автоматика и телемеханика. — 2011. — Т. 72. — № 1. — С. 107-120.
29. Кац Б.А. Об обслуживании сообщений случайной длины // Теория массового обслуживания. Тр. 3-й Всесоюзной школы-совещания по теории массового обслуживания. — 1976. — С. 157-168.
30. Кёниг Д., Рыков В.В., Шмидт Ф. Стационарные системы массового обслуживания с зависимостями // Итоги науки и техники. Серия «Теория вероятностей. Матем. статистика. Техн. Кибернетика». — 1981. — Т. 18. — С. 95-186.
31. Климов Г.П. Теория массового обслуживания. — Москва: МГУ, 2011. — 312 с.
32. Кокс Д.Р., Смит У.Л. Теория очередей / пер. с англ. В.В. Рыкова и Ю.Б. Рождественского; под ред. А.Д. Соловьева. — Москва: Мир, 1966. — 218 с.
33. Корнышев Ю.Н., Пшеничников А.П., Харкевич А.Д. Теория телетрафика. Учебник для вузов. — Москва: Радио и связь, 1996. — 272 с.
34. Кочеткова И.А., Самуйлов К.Е. Мультисервисные системы с приоритетным обслуживанием трафика. — Москва: Техносфера, 2025. — 160 с.

35. Кузнецов Д.Ю., Назаров А.А. Адаптивные сети случайного доступа. — Томск: Дельтаплан, 2002. — 254 с.
36. Кучерявый А.Е., Прокопьев А.В., Кучерявый Е.А. Самоорганизующиеся сети. — Санкт-Петербург: Издательство Любавич, 2011. — 312 с.
37. Кучерявый А.Е., Давуд А.А., Волков А.Н., Мутханна С.А., Парамонов А.И., Елагин В.С., Дунайцев Р.А., Владимиров С.С., Горбачева Л.С., Захаров М.В., Марочкина А.В., Анваржонов Б.Н.У., Паньков Б.О., Свечников Д.С. Сети связи шестого поколения: фрактальные архитектуры, голографические взаимодействия, телеприсутствие, сетевые роботы. — Санкт-Петербург: Питер, 2024. — 320 с.
38. Кучерявый Е.А. Управление трафиком и качество обслуживания в сети Интернет. — Санкт-Петербург: Наука и Техника, 2004. — 336 с.
39. Летников А.И., Пшеничников А.П., Гайдамака Ю.В., Чукарин А.В. Системы сигнализации в сетях с коммутацией каналов и пакетов: Учебное пособие. — Москва: Инсвязьиздат, 2008. — 195 с.
40. Лисовская Е.Ю., Моисеева С.П., Пагано М., Потутаева В. Исследование системы массового обслуживания MMPP/GI/inf с требованиями случайного объема // Информатика и ее применения. — 2017. — Т. 11. — № 4. — С. 111-119.
41. Лисовская Е.Ю., Моисеева С.П. Асимптотический анализ немарковской бесконечнолинейной системы массового обслуживания требований случайного объема с входящим рекуррентным потоком // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. — 2017. — № 39. — С. 30-38.
42. Лукашенко О.В., Морозов Е.В. Введение в гауссовские системы обслуживания. — Петрозаводск: ПГУ, 2013. — 80 с.
43. Меликов А.З., Пономаренко Л.А., Паладюк В.В. Телетрафик: модели, методы, оптимизация. — Киев: Политехника, 2007. — 256 с.
44. Моисеев А.Н., Назаров А.А. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. — Томск: Изд- во НТЛ, 2015. — 240 с.

45. Молчанов Д.А., Бегишев В.О., Самуйлов К.Е., Кучерявый Е.А. Сети 5G/6G: Архитектура, технологии, методы анализа и расчета. — Москва: РУДН, 2022. — 516 с.
46. Морозов Е.В., Некрасова Р.С., Потахина Л.В. Теория восстановления и ее применение в анализе коммуникационных систем. — Издательство ПетрГУ, 2019. — 52 с.
47. Морозов Е.В., Некрасова Р.С. Регенеративный метод и его применение в анализе систем обслуживания. — Петрозаводск: ПГУ, 2013. — 75 с.
48. Назаров А.А. Асимптотический анализ марковизированных систем. — Томск: ТГУ, 1991. — 158 с.
49. Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. — Томск: Изд-во НТЛ, 2006. — 112 с.
50. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория массового обслуживания. — Томск: НТЛ, 2010. — 228 с.
51. Назаров А.А. Управляемые системы массового обслуживания и их оптимизация. — Томск: Изд-во ТГУ, 1984. — 234 с.
52. Назарьин А.И., Сопин Э.С., Шоргин С.Я. Разработка сверточного алгоритма для расчета стационарных характеристик ресурсных систем с временем обслуживания, зависящим от объема требований // Системы и средства информатики. — 2024. — Т. 34. — № 4. — С. 48-58.
53. Наумов В.А., Самуйлов А.К. Модель выделения ресурсов беспроводной сети объемом случайной величины // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2015. — № 2. — С. 56-64.
54. Наумов В.А., Самуйлов К.Е., Гайдамака Ю.В. Мультипликативные решения конечных цепей Маркова. — Москва: Изд-во РУДН, 2015. — 159 с.
55. Наумов В.А., Самуйлов К.Е. О связи ресурсных систем массового обслуживания с сетями Эрланга // Информатика и ее применения. — 2016. — Т. 10. — № 3. — С. 9-14.
56. Наумов В.А., Самуйлов К.Е., Самуйлов А.К. О суммарном объеме ресурсов, занимаемых обслуживаемыми заявками // Автоматика и телемеханика. — 2016. — № 8. — С. 125-135.

57. Наумов В.А., Самуйлов К.Е., Яркина Н.В. Теория телетрафика мультисервисных сетей: Монография. — Москва: Изд- во РУДН, 2007. — 191 с.
58. Некрасова Р.С., Морозов Е.В. Регенеративный метод и его применение в анализе систем обслуживания: монография. — Петрозаводск: Изд- во ПетрГУ, 2013. — 75 с.
59. Нетес В.А. Основы теории надежности. — Москва: Горячая линия - Телеком, 2024. — 102 с.
60. Пагано М., Рыков В.В., Хохлов Ю.С. Модели телетрафика. — Москва: ИНФРА-М, 2019. — 178 с.
61. Парамонов А.И., Маколкина М.А., Киричек Р.В., Выборнова А.И., Богданова Е.Г. Математические модели в сетях связи. — Санкт-Петербург: СПбГУТ, 2018. — 229 с.
62. Печинкин А.В., Разумчик Р.В. Системы массового обслуживания в дискретном времени. — Москва: Физматлит, 2018. — 432 с.
63. Печинкин А.В., Соколов И.А., Шоргин С.Я. Ограничение на суммарный объем заявок в дискретной системе Geo/G/1/∞ // Информатика и её применения. — 2012. — Т. 6. — № 3. — С. 107-113.
64. Пшеничников А.П., Росляков А.В. Будущие сети. — Москва: Горячая линия - Телеком, 2022. — 256 с.
65. Пшеничников А.П. Теория телетрафика. — Москва: Горячая линия - Телеком, 2017. — 212 с.
66. Ромм Э.Л., Скитович В.В. Об одном обобщении задачи Эрланга // Автоматика и телемеханика. — 1971. — № 6. — С. 164-168.
67. Росляков А.В. Сети фиксированной связи пятого поколения. — Москва: Колос-с, 2024. — 232 с.
68. Росляков А.В. Сеть 2030: архитектура, технологии, услуги. — Москва: Колос-с, 2022. — 278 с.
69. Румянцев А.С., Морозов Е.В. Распределения с тяжелыми хвостами и их приложения: монография. — Петрозаводск: Изд- во ПетрГУ, 2013. — 67 с.

70. Рыков В.В. Управляемые системы массового обслуживания // Итоги науки и техники. Серия «Теория вероятностей. Матем. статистика. Техн. Кибернетика». — 1975. — Т. 12. — С. 43-153.
71. Самуйлов К.Е. Методы анализа и расчета сетей ОКС 7. — Москва: Изд-во РУДН, 2002. — 291 с. с.
72. Самуйлов К.Е., Абаев П.О., Гайдамака Ю.В., Гудкова И.А., Королькова А.В., Кулябов Д.С., Щукина О.Н. Мультисервисные сети связи. — Москва: Юрайт, 2013. — 363 с.
73. Самуйлов К.Е., Шалимов И.А., Васин Н.Н., Василевский В.В., Кулябов Д.С., Королькова А.В. Сети и телекоммуникации. — Москва: Юрайт, 2025. — 464 с.
74. Самуйлов К.Е., Сопин Э.С., Шоргин С.Я. Система массового обслуживания с ограниченными ресурсами и сигналами для анализа показателей эффективности беспроводных сетей // Информатика и её применения. — 2017. — Т. 11. — № 3. — С. 99-105.
75. Севастьянов Б.А. Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами // Теория вероятностей и ее применения. — 1957. — Т. 2. — № 1. — С. 106-116.
76. Сегхайер А., Цитович И.И. Об интервальной модели для процесса рождения и гибели с гистерезисом // Информационные процессы. — 2012. — Т. 12. — № 1. — С. 117-126.
77. Смелянский Р.Л. Компьютерные сети: в 2 т. Т. 1. Системы передачи данных. — Москва: Академия, 2011. — 304 с.
78. Смелянский Р.Л. Компьютерные сети: в 2 т. Т. 2. Сети ЭВМ. — Москва: Академия, 2011. — 240 с.
79. Соколов А.Н., Соколов Н.А., Зайцев В.С. Однолинейные системы телетрафика. — Санкт-Петербург: СПбГУТ, 2019. — 118 с.
80. Соколов И.А., Шоргин С.Я. Математические методы исследования сложных информационных и телекоммуникационных систем // История науки и техники. — 2008. — Т. 7. — С. 13-17.
81. Сопин Э.С., Маслов А.Р., Шоргин В.С., Бегишев В.О. Моделирование настойчивого поведения пользователей в сетях 5G NR с адаптацией скорости

- и блокировками // Информатика и её применения. — 2023. — Т. 17. — № 3. — С. 25-32.
82. Сопин Э.С., Наумов В.А., Самуйлов К.Е. Об инвариантности стационарного распределения системы массового обслуживания с ограниченными ресурсами и с интенсивностями поступления и обслуживания, зависящими от состояния системы // Информатика и её применения. — 2018. — Т. 12. — № 3. — С. 42-47.
83. Степанов С.Н. Алгоритмы приближенного расчета систем с повторными вызовами // Автоматика и телемеханика. — 1983. — Т. 44. — № 1. — С. 80-90.
84. Степанов С.Н., Степанов М.С. Построение и анализ обобщенной модели контакт-центра // Автоматика и телемеханика. — 2014. — Т. 11. — С. 55-69.
85. Степанов С.Н. Теория телетрафика: концепции, модели, приложения. — Москва: Горячая линия - Телеком, 2015. — 868 с с.
86. Степанов С.Н. Численные методы расчета систем с повторными вызовами. — Москва: Наука, 1983. — 229 с.
87. Тихоненко О.М., Климович К.Г. Анализ систем обслуживания случайной длины при ограниченном суммарном объеме // Проблемы передачи информации. — 2001. — Т. 37. — № 1. — С. 78-88.
88. Цитович И.И., Чернушевич А.В. Расчет стационарных вероятностей трехпоточковой модели управления доступом к ресурсам БШС с гистерезисами // Информационные процессы. — 2011. — Т. 11. — № 2. — С. 262-276.
89. Яшков С.Ф. Математические вопросы теории систем обслуживания с разделением процессора // Итоги науки и техники. Серия «Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика». — 1990. — Т. 29. — № 2. — С. 3-82.
90. Яшков С.Ф., Яшкова А.С. Разделение процессора: обзор математической теории // Информационные процессы. — 2007. — Т. 7. — № 3. — С. 248-322.

91. Chukhno N., Chukhno O., Moltchanov D., Pizzi S., Gaydamaka A., Samouylov A., Molinaro A., Koucheryavy Y., Iera A., Araniti G. Models, Methods, and Solutions for Multicasting in 5G/6G mmWave and Sub-THz Systems // IEEE Communications Surveys & Tutorials. — 2024. — T. 26. — № 1. — C. 119-159.
92. Chukhno N., Chukhno O., Moltchanov D., Molinaro A., Gaidamaka Y., Samouylov K., Koucheryavy Y., Araniti G. Optimal Multicasting in Millimeter Wave 5G NR With Multi-Beam Directional Antennas // IEEE Transactions on Mobile Computing. — 2023. — T. 22. — № 6. — C. 3572-3588.
93. Kochetkova I., Leonteva K., Ghebrial I., Khakimov A. Dynamic Spectrum Management for 5G NR Network Slicing: Frequency Reallocation Ensuring Slice Isolation and Revenue Maximization // IEEE Access. — 2025. — T. 13. — Dynamic Spectrum Management for 5G NR Network Slicing. — C. 208414-208438.
94. Krieger U., Müller-Clostermann B., Sczitnick M. Modeling and analysis of communication systems based on computational methods for Markov chains. — 2018.
95. Kurose J.F., Ross K.W. Computer networking: a top-down approach. Computer networking. — 6th ed. — Boston: Pearson, 2013. — 862 c.
96. Naumov V., Krieger U., Wagner D. Analysis of a Multiserver Delay-Loss System with a General Markovian Arrival Process // Matrix-Analytic Methods in Stochastic Models. — CRC Press, 1996. — C. 45-69.
97. Ageev K., Garibyan A., Golskaya A., Gaidamaka Y., Sopin E., Samouylov K., Correia L.M. Modelling of Virtual Radio Resources Slicing in 5G Networks // Communications in Computer and Information Science. — 2019. — Vol. 1109. — P. 150-161.
98. Ageev K., Sopin E., Konstantin S. Simulation of the Limited Resources Queuing System with Signals // 2018 10th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). — IEEE, 2018. — P. 1-5.

99. Ageev K., Sopin E., Shorgin S., Chursin A. The Probabilistic Measures Approximation of a Resource Queuing System with Signals // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). — 2021. — Vol. 13144. — P. 80-91.
100. Andrabi U.M., Kanishcheva M.G., Stepanov S.N. Observation system resource planning in presence of access control based on volume of resource occupied by traffic flows // T-Comm. — 2022. — Vol. 16. — No. 8. — P. 54-62.
101. Andreev S., Pyattaev A., Johnsson K., Galinina O., Koucheryavy Y. Cellular traffic offloading onto network-assisted device-to-device connections // IEEE Communications Magazine. — 2014. — Vol. 52. — No. 4. — P. 20-31.
102. Andrews J.G., Singh S., Ye Q., Lin X., Dhillon H.S. An overview of load balancing in hetnets: old myths and open problems // IEEE Wireless Communications. — 2014. — Vol. 21. — No. 2. — P. 18-25.
103. Andrews J.G., Baccelli F., Ganti R.K. A Tractable Approach to Coverage and Rate in Cellular Networks // IEEE Transactions on Communications. — 2011. — Vol. 59. — No. 11. — P. 3122-3134.
104. Andrews J.G., Claussen H., Dohler M., Rangan S., Reed M.C. Femtocells: Past, Present, and Future // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. — 2012. — Vol. 30. — No. 3. — P. 497-508.
105. Andrews J.G., Humphreys T.E., Ji T. 6G Takes Shape // IEEE BITS the Information Theory Magazine. — 2024. — Vol. 4. — No. 1. — P. 2-24.
106. Andrianov G., Poryazov S., Tsitovich I. On a problem of QoS characteristics interpretation in transit networks // Information Science and Computing. — 2009. — Vol. 11. — P. 59-65.
107. Anisimov V.V., Artalejo J.R. Analysis of Markov Multiserver Retrial Queues with Negative Arrivals // Queueing Systems. — 2001. — Vol. 39. — No. 2-3. — P. 157-182.
108. Asmussen S. Applied Probability and Queues : Stochastic Modelling and Applied Probability. Vol. 51. — New York, NY: Springer New York, 2003.

109. Asmussen S., Glynn P.W. Stochastic Simulation: Algorithms and Analysis : Stochastic Modelling and Applied Probability. Vol. 57. Stochastic Simulation. — New York, NY: Springer New York, 2007.
110. Ateya A.A., Abd El-Latif A.A., Muthanna A., Volkov A., Koucheryavy A. Enabling metaverse and telepresence services in 6G networks. — River Publishers, 2024. — 254 p.
111. Barabanova E.A., Vytovtov K.A. Investigation of Non-Stationary Characteristics of Signal Switching Devices of Information-Measuring Systems with Dissimilar Devices // Journal of Communications Technology and Electronics. — 2023. — Vol. 68. — No. S3. — P. 377-387.
112. Basharin G.P., Samouylov K.E., Yarkina N.V., Gudkova I.A. A new stage in mathematical teletraffic theory // Automation and Remote Control. — 2009. — Vol. 70. — No. 12. — P. 1954-1964.
113. Basharin G.P., Gaidamaka Yu.V., Samouylov K.E. Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multiservice communication of next generation networks // Automatic Control and Computer Sciences. — 2013. — Vol. 47. — No. 2. — P. 62-69.
114. Basharin G.P., Naumov V.A. Simple matrix description of peaked and smooth traffic and its applications // Proceedings of the 3rd International Seminar on Teletraffic Theory “Fundamentals of Teletraffic Theory” 3rd International Seminar on Teletraffic Theory “Fundamentals of Teletraffic Theory”. — Moscow: VINITI, 1984. — P. 38-44.
115. Begishev V., Sopin E., Moltchanov D., Kovalchukov R., Samuylov A., Andreev S., Koucheryavy Y., Samouylov K. Joint Use of Guard Capacity and Multiconnectivity for Improved Session Continuity in Millimeter-Wave 5G NR Systems // IEEE Transactions on Vehicular Technology. — 2021. — Vol. 70. — No. 3. — P. 2657-2672.
116. Begishev V., Sopin E., Moltchanov D., Pirmagomedov R., Samuylov A., Andreev S., Koucheryavy Y., Samouylov K. Performance Analysis of Multi-Band Microwave and Millimeter-Wave Operation in 5G NR Systems // IEEE Transactions on Wireless Communications. — 2021. — Vol. 20. — No. 6. — P. 3475-3490.

117. Begishev V., Moltchanov D., Sopin E., Samuylov A., Andreev S., Koucheryavy Y., Samouylov K. Quantifying the Impact of Guard Capacity on Session Continuity in 3GPP New Radio Systems // *IEEE Transactions on Vehicular Technology*. — 2019. — Vol. 68. — No. 12. — P. 12345-12359.
118. Begishev V.O., Sopin E.S., Moltchanov D.A., Samuylov A.K., Gudkova I.A., Samouylov K.E. An Accurate Model of the 3GPP NR Access Point Service Process // *CEUR Workshop Proceedings*. — 2018. — Vol. 2332. — P. 4-12.
119. Bocharov P.P., D'Apice C., Pechinkin A.V. *Queueing Theory : Modern Probability and Statistics*. — De Gruyter, 2011.
120. Bonald T., Roberts J. Multi-Resource Fairness: Objectives, Algorithms and Performance // *Proceedings of the 2015 ACM SIGMETRICS International Conference on Measurement and Modeling of Computer Systems SIGMETRICS '15: ACM SIGMETRICS / International Conference on Measurement and Modeling of Computer Systems*. — Portland Oregon USA: ACM, 2015. — Multi-Resource Fairness. — P. 31-42.
121. Bushkova T., Moiseeva S., Moiseev A., Sztrik J., Lisovskaya E., Pankratova E. Using Infinite-server Resource Queue with Splitting of Requests for Modeling Two-channel Data Transmission // *Methodology and Computing in Applied Probability*. — 2022. — Vol. 24. — No. 3. — P. 1753-1772.
122. Buzen J.P. Computational algorithms for closed queueing networks with exponential servers // *Communications of the ACM*. — 1973. — Vol. 16. — No. 9. — P. 527-531.
123. Chaccour C., Soorki M.N., Saad W., Bennis M., Popovski P., Debbah M. Seven Defining Features of Terahertz (THz) Wireless Systems: A Fellowship of Communication and Sensing // *IEEE Communications Surveys & Tutorials*. — 2022. — Vol. 24. — Seven Defining Features of Terahertz (THz) Wireless Systems. — No. 2. — P. 967-993.
124. Chung S.-P., Ross K.W. Reduced load approximations for multirate loss networks // *IEEE Transactions on Communications*. — 1993. — Vol. 41. — No. 8. — P. 1222-1231.

125. Constantine A.B. Antenna theory: analysis and design. Antenna theory. — Fourth edition. — Hoboken, New Jersey: Wiley, 2016. — 1072 p.
126. Daraseliya A., Korshykov M., Sopin E., Moltchanov D., Andreev S., Samouylov K. Coexistence Analysis of 5G NR Unlicensed and WiGig in Millimeter-Wave Spectrum // IEEE Transactions on Vehicular Technology. — 2021. — Vol. 70. — No. 11. — P. 11721-11735.
127. Daraseliya A., Korshykov M., Sopin E., Moltchanov D., Koucheryavy Y., Samouylov K. Handling overflow traffic in millimeter wave 5G NR deployments using NR-U technology // IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, PIMRC. — 2020.
128. Daraseliya A., Sopin E., Moltchanov D., Koucheryavy Y., Samouylov K. Performance of Offloading Strategies in Collocated Deployments of Millimeter Wave NR-U Technology // IEEE Transactions on Vehicular Technology. — 2023. — Vol. 72. — No. 2. — P. 2535-2549.
129. Daraseliya A.V., Sopin E.S. Resource Requirements Distribution Evaluation for Traffic Offloading Strategies in NR-U Networks // Communications in Computer and Information Science. — 2022. — Vol. 1605. — P. 317-329.
130. Dohler M., Li Y. Wireless Relay Channel // Cooperative Communications: Hardware, Channel and PHY. — 2009. — P. 43-139.
131. Dudin A.N., Klimenok V.I., Vishnevsky V.M. The theory of queuing systems with correlated flows. — Springer, 2020. — 413 p.
132. Efrosinin D., Vishnevsky V., Stepanova N. Optimal Scheduling in General Multi-Queue System by Combining Simulation and Neural Network Techniques // Sensors. — 2023. — Vol. 23. — No. 12. — P. 5479.
133. Galinina O., Turlikov A., Andreev S., Koucheryavy Y. Stabilizing multi-channel slotted aloha for machine-type communications // 2013 IEEE International Symposium on Information Theory 2013 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). — Istanbul, Turkey: IEEE, 2013. — P. 2119-2123.
134. Gapeyenko M., Samuylov A., Gerasimenko M., Moltchanov D., Singh S., Aryafar E., Yeh S., Himayat N., Andreev S., Koucheryavy Y. Analysis of human-body blockage in urban millimeter-wave cellular communications // 2016 IEEE

- International Conference on Communications (ICC) ICC 2016 - 2016 IEEE International Conference on Communications. — Kuala Lumpur, Malaysia: IEEE, 2016. — P. 1-7.
135. Gapeyenko M., Samuylov A., Gerasimenko M., Moltchanov D., Singh S., Akdeniz M.R., Aryafar E., Himayat N., Andreev S., Koucheryavy Y. On the Temporal Effects of Mobile Blockers in Urban Millimeter-Wave Cellular Scenarios // IEEE Transactions on Vehicular Technology. — 2017. — Vol. 66. — No. 11. — P. 10124-10138.
136. Gapeyenko M., Samuylov A., Gerasimenko M., Moltchanov D., Singh S., Akdeniz M.R., Aryafar E., Andreev S., Himayat N., Koucheryavy Y. Spatially-Consistent Human Body Blockage Modeling: A State Generation Procedure // IEEE Transactions on Mobile Computing. — 2020. — Vol. 19. — Spatially-Consistent Human Body Blockage Modeling. — No. 9. — P. 2221-2233.
137. Gelenbe E. Analysis and Synthesis of Computer Systems : Advances in Computer Science and Engineering: Texts. — 2nd ed. — Singapore: Imperial College Press, 2014. — Вып. v. 4. — 1 с.
138. Gelenbe E. G-networks by triggered customer movement // Journal of Applied Probability. — 1993. — Vol. 30. — No. 3. — P. 742-748.
139. Gelenbe E. G-Networks with Signals and Batch Removal // Probability in the Engineering and Informational Sciences. — 1993. — Vol. 7. — No. 3. — P. 335-342.
140. Gelenbe E., Pujolle G. Introduction to queueing networks. — Second Edition. — Chichester New York Weinheim Brisbane Singapore Toronto: John Wiley and Sons, 1998. — 244 p.
141. Gelenbe E., Pujolle G. The behaviour of a single queue in a general queueing network // Acta Informatica. — 1976. — Vol. 7. — No. 2. — P. 123-136.
142. Gelenbe E. Random Neural Networks with Negative and Positive Signals and Product Form Solution // Neural Computation. — 1989. — Vol. 1. — No. 4. — P. 502-510.

143. Ghosh A., Zhang J., Andrews J.G., Muhamed R. Fundamentals of LTE : The Prentice Hall communications engineering and emerging technologies series. — Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2011. — 418 p.
144. Golos E., Daraseliya A., Sopin E., Begishev V., Gaidamaka Y. Optimizing Service Areas in 6G mmWave/THz Systems with Dual Blockage and Micromobility // Mathematics. — 2023. — Vol. 11. — No. 4. — P. 1-13.
145. Granovsky B.L., Zeifman A. Nonstationary Queues: Estimation of the Rate of Convergence // Queueing Systems. — 2004. — Vol. 46. — Nonstationary Queues. — No. 3-4. — P. 363-388.
146. Gudkova I.A., Samouylov K.E. Approximating Performance Measures of a Triple Play Loss Network Model // Smart Spaces and Next Generation Wired/Wireless Networking/ eds. S. Balandin, Y. Koucheryavy, H. Hu. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011. — P. 360-369.
147. Guzha E.A., Ivanov A.S., Kuznetsov E.S., Lyakhov A.I., Khorov E.M. Generalized Mathematical Model of Reliable Multicast Transmission in Modern Wi-Fi Networks // Journal of Communications Technology and Electronics. — 2019. — Vol. 64. — No. 8. — P. 870-879.
148. Haenggi M. Stochastic Geometry for Wireless Networks. — Cambridge: Cambridge University Press, 2012.
149. Iversen V.B., Stepanov S.N. The Optimal Dimensioning Of Multi-Service Links // Modeling and Simulation Tools for Emerging Telecommunication Networks/ eds. A. Nejat Ince, E. Topuz. — Springer US, 2006. — P. 151-178.
150. Iversen V.B. Teletraffic engineering and network planning. — ITU-D, 2011. — P. 567.
151. Kamoun F., Kleinrock L. Analysis of Shared Finite Storage in a Computer Network Node Environment Under General Traffic Conditions // IEEE Transactions on Communications. — 1980. — Vol. 28. — No. 7. — P. 992-1003.
152. Kelly F.P. Loss Networks // Annals of Applied Probability. — 1991. — Vol. 1. — No. 3. — P. 319-378.
153. Kelly F.P. Mathematical models of multiservice networks // Complex Stochastic Systems and Engineering. — 1995. — Vol. 54. — P. 221-234.

154. Kelly F.P. Reversibility and Stochastic Networks. — New York: J. Wiley & Sons, 1979. — 630 p.
155. Khorov E., Krasilov A., Susloparov M., Kong L. Boosting TCP & QUIC Performance in mmWave, Terahertz, and Lightwave Wireless Networks: A Survey // IEEE Communications Surveys & Tutorials. — 2023. — Vol. 25. — Boosting TCP & QUIC Performance in mmWave, Terahertz, and Lightwave Wireless Networks. — No. 4. — P. 2862-2891.
156. Kleinrock L. Queueing systems. 2: Computer applications. — New York: Wiley, 1976. — Queueing systems. 2.
157. Kleinrock L. Queueing systems, vol. I: Theory. — New York: Wiley, 1975. — 448 p.
158. Klimenok V., Dudin A. A BMAP/PH/N Queue with Negative Customers and Partial Protection of Service // Communications in Statistics - Simulation and Computation. — 2012. — Vol. 41. — No. 7. — P. 1062-1082.
159. Kochetkova I., Leonteva K., Ghebrial I., Vlaskina A., Burtseva S., Kushchazli A., Samouylov K. Controllable Queuing System with Elastic Traffic and Signals for Resource Capacity Planning in 5G Network Slicing // Future Internet. — 2023. — Vol. 16. — No. 1. — P. 18.
160. Kochetkova I., Makeeva E., Ageeva A., Gorshenin A. Model for Analyzing Impact of Path Loss on eMBB Bit Rate Degradation Under Priority URLLC Transmission in 5G Network // Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications : Lecture Notes in Computer Science/ eds. V.M. Vishnevskiy, K.E. Samouylov, D.V. Kozyrev. — Cham: Springer Nature Switzerland, 2022. — Vol. 13766. — P. 176-189.
161. Korshykov M.V., Daraseliya A.V., Sopin E.S. Development of Analytical Framework for Evaluation of LTE-LAA Probabilistic Metrics // Lecture Notes in Computer Science. — 2019. — Vol. 11660. — P. 318-328.
162. Kovalchukov R., Moltchanov D., Samouylov A., Ometov A., Andreev S., Koucheryavy Y., Samouylov K. Evaluating SIR in 3D Millimeter-Wave Deployments: Direct Modeling and Feasible Approximations // IEEE Transactions on Wireless Communications. — 2019. — Vol. 18. — Evaluating SIR in 3D Millimeter-Wave Deployments. — No. 2. — P. 879-896.

163. Latouche G., Ramaswamy V. Introduction to matrix analytic methods in stochastic modeling, by G. Latouche and V. Ramaswamy // *International Journal of Stochastic Analysis*. — 1999. — Vol. 12. — No. 4. — P. 435-436.
164. Lisovskaya E., Moiseeva S., Pagano M. Infinite-Server Tandem Queue with Renewal Arrivals and Random Capacity of Customers // *Distributed Computer and Communication Networks : Communications in Computer and Information Science*/ eds. V.M. Vishnevskiy, K.E. Samouylov, D.V. Kozyrev. — Cham: Springer International Publishing, 2017. — Vol. 700. — P. 201-216.
165. Lisovskaya E., Moiseeva S., Pagano M. Multiclass GI/GI/infty Queueing Systems with Random Resource Requirements // *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications*. — Springer International Publishing, 2018. — P. 129-142.
166. Lisovskaya E., Fedorova E., Salimzyanov R., Moiseeva S. Resource Retrieval Queue with Two Orbits and Negative Customers // *Mathematics*. — 2022. — Vol. 10. — No. 3. — P. 321.
167. Lisovskaya E., Fedorova E., Salimzyanov R., Moiseeva S. Resource Retrieval Queue with Two Orbits and Negative Customers // *Mathematics*. — 2022. — Vol. 10. — No. 3. — P. 321.
168. Little J.D.C. Little's Law as Viewed on Its 50th Anniversary // *Operations Research*. — 2011. — Vol. 59. — No. 3. — P. 536-549.
169. Loginov V., Troegubov A., Lyakhov A., Khorov E. Coexistence of NR-U operators in multichannel scenarios: Fair cooperation or endless struggle for channel resources // *Ad Hoc Networks*. — 2025. — Vol. 173. — Coexistence of NR-U operators in multichannel scenarios. — P. 103798.
170. Loginov V.A., Lyakhov A.I., Khorov E.M. Coexistence of Wi-Fi and LTE-LAA Networks: Open Issues // *Journal of Communications Technology and Electronics*. — 2018. — Vol. 63. — Coexistence of Wi-Fi and LTE-LAA Networks. — No. 12. — P. 1530-1537.
171. Lu X., Sopin E., Petrov V., Galinina O., Moltchanov D., Ageev K., Andreev S., Koucheryavy Y., Samouylov K., Dohler M. Integrated Use of Licensed- and

- Unlicensed-Band mmWave Radio Technology in 5G and Beyond // IEEE Access. — 2019. — Vol. 7. — P. 24376-24391.
172. Lucantoni D.M., Meier-Hellstern K.S., Neuts M.F. A single-server queue with server vacations and a class of non-renewal arrival processes // Advances in Applied Probability. — 1990. — Vol. 22. — No. 3. — P. 676-705.
173. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // Communications in Statistics. Stochastic Models. — 1991. — Vol. 7. — No. 1. — P. 1-46.
174. Lucantoni D.M. The BMAP/G/1 queue: A tutorial // Performance Evaluation of Computer and Communication Systems : Lecture Notes in Computer Science/ eds. L. Donatiello, R. Nelson. — Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 1993. — Vol. 729. — The BMAP/G/1 queue. — P. 330-358.
175. Maslov A., Sopin E., Samouylov K. Accurate Approximation for Resource Queuing Systems with Losses and Signals // Mathematics. — 2025. — Vol. 13. — No. 4. — P. 619.
176. Melikov A., Aliyeva S., Sztrik J. Analysis of Instantaneous Feedback Queue with Heterogeneous Servers // Mathematics. — 2020. — Vol. 8. — No. 12. — P. 2186.
177. Melikov A., Ponomarenko L. Multidimensional queuing models in telecommunication networks. — Springer, 2014. — 190 p.
178. Melikov A., Rumyantsev A. State-Dependent Admission Control in Heterogeneous Queueing-Inventory System with Constant Retrial Rate // Distributed Computer and Communication Networks : Lecture Notes in Computer Science/ eds. V.M. Vishnevsky, K.E. Samouylov, D.V. Kozyrev. — Cham: Springer Nature Switzerland, 2025. — Vol. 15460. — P. 156-170.
179. Miyazawa M., Yamazaki G. The basic equations for a supplemented GSMP and its applications to queues // Journal of Applied Probability. — 1988. — Vol. 25. — No. 3. — P. 565-578.
180. Moltchanov D., Sopin E., Begishev V., Samuylov A., Koucheryavy Y., Samouylov K. A Tutorial on Mathematical Modeling of 5G/6G Millimeter Wave and Terahertz

- Cellular Systems // IEEE Communications Surveys and Tutorials. — 2022. — Vol. 24. — No. 2. — P. 1072-1116.
181. Morozov E., Steyaert B. Stability analysis of regenerative queueing models: Mathematical methods and applications. — Springer, 2021. — 185 p.
182. Naumov V., Samouylov K., Yarkina N., Sopin E., Andreev S., Samuylov A. LTE performance analysis using queueing systems with finite resources and random requirements // International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops. — Brno, Czech Republic, 2016. — P. 100-103.
183. Naumov V., Gaidamaka Y., Yarkina N., Samouylov K. Matrix and Analytical Methods for Performance Analysis of Telecommunication Systems. — Cham: Springer International Publishing, 2021.
184. Naumov V., Samouylov K. Analysis of multi-resource loss system with state-dependent arrival and service rates // Probability in the Engineering and Informational Sciences. — 2017. — Vol. 31. — No. 4. — P. 413-419.
185. Naumov V., Samouylov K. Resource System with Losses in a Random Environment // Mathematics. — 2021. — Vol. 9. — No. 21. — P. 2685.
186. Naumov V., Samuilov K., Samuilov A. On the total amount of resources occupied by serviced customers // Automation and Remote Control. — 2016. — Vol. 77. — No. 8. — P. 1419-1427.
187. Naumov V., Samouylov K., Sopin E., Andreev S. Two approaches to analyzing dynamic cellular networks with limited resources // International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops. — Saint Petersburg, 2014. — P. 485-488.
188. Naumov V.A., Gaidamaka Y.V., Samouylov K.E. Computing the Stationary Distribution of Queueing Systems with Random Resource Requirements via Fast Fourier Transform // Mathematics. — 2020. — Vol. 8. — No. 5. — P. 772.
189. Nazarin A., Sopin E. Implementation of a Convolution Algorithm to the Evaluation of Stationary Characteristics of Resource Loss System with Resource-Dependent Service Times // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Related Fields : Communications in Computer and Information Science/

- eds. A. Dudin, A. Nazarov, A. Moiseev. — Cham: Springer Nature Switzerland, 2025. — Vol. 2472. — P. 108-118.
190. Neuts M.F., Lucantoni D.M. A Markovian Queue with N Servers Subject to Breakdowns and Repairs // *Management Science*. — 1979. — Vol. 25. — No. 9. — P. 849-861.
191. Neuts M.F. Versatile Markovian Point Process // *Journal of Applied Probability*. — 1979. — Vol. 16. — No. 4. — P. 764-779.
192. Ni Q., Vinel A., Xiao Y., Turlikov A., Jiang T. Wireless Broadband Access: WIMAX and Beyond - Investigation of Bandwidth Request Mechanisms under Point-to-Multipoint Mode of WiMAX Networks // *IEEE Communications Magazine*. — 2007. — Vol. 45. — WIRELESS BROADBAND ACCESS. — No. 5. — P. 132-138.
193. Nussbaumer H.J. Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms : Springer Series in Information Sciences. Vol. 2. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1982.
194. Ometov A., Sopin E., Gudkova I., Andreev S., Gaidamaka Y.V., Koucheryavy Y. Modeling Unreliable Operation of mmWave-Based Data Sessions in Mission-Critical PPDR Services // *IEEE Access*. — 2017. — Vol. 5. — P. 20536-20544.
195. Orlov Y., Kirina-Lilinskaya E., Samuylov A., Ometov A., Moltchanov D., Gaimamaka Y., Andreev S., Samouylov K. Time-Dependent SIR Analysis in Shopping Malls Using Fractal-Based Mobility Models // *Wired/Wireless Internet Communications : Lecture Notes in Computer Science/* eds. Y. Koucheryavy, L. Mamatras, I. Matta, A. Ometov, P. Papadimitriou. — Cham: Springer International Publishing, 2017. — Vol. 10372. — P. 16-25.
196. Osseiran A., Monserrat J.F., Marsch P., Dohler M., Nakamura T. 5G mobile and wireless communications technology. — New York: Cambridge University Press, 2016. — 406 p.
197. Palattella M.R., Dohler M., Grieco A., Rizzo G., Torsner J., Engel T., Ladid L. Internet of Things in the 5G Era: Enablers, Architecture, and Business Models // *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*. — 2016. — Vol. 34. — Internet of Things in the 5G Era. — No. 3. — P. 510-527.

198. Petrov V., Moltchanov D., Koucheryavy Y., Jornet J.M. Capacity and Outage of Terahertz Communications With User Micro-Mobility and Beam Misalignment // IEEE Transactions on Vehicular Technology. — 2020. — Vol. 69. — No. 6. — P. 6822-6827.
199. Petrov V., Komarov M., Moltchanov D., Jornet J.M., Koucheryavy Y. Interference and SINR in Millimeter Wave and Terahertz Communication Systems With Blocking and Directional Antennas // IEEE Transactions on Wireless Communications. — 2017. — Vol. 16. — No. 3. — P. 1791-1808.
200. Petrov V., Kurner T., Hosako I. IEEE 802.15.3d: First Standardization Efforts for Sub-Terahertz Band Communications toward 6G // IEEE Communications Magazine. — 2020. — Vol. 58. — IEEE 802.15.3d. — No. 11. — P. 28-33.
201. Ponomarenko L., Kim C.S., Melikov A. Performance analysis and optimization of multi-traffic on communication networks. — Springer, 2010. — 194 p.
202. Ramaswami R., Sivarajan K.N., Sasaki G.H. Optical Networks: A Practical Perspective : The Morgan Kaufmann series in networking. — Elsevier/Morgan Kaufmann, 2010.
203. Ramaswami V., Lucantoni D.M. Algorithms for the multi-server queue with phase type service // Communications in Statistics. Stochastic Models. — 1985. — Vol. 1. — No. 3. — P. 393-417.
204. Ramaswami V., Viswanath N.C. Phase Type Distributions with Finite Support // Stochastic Models. — 2014. — Vol. 30. — No. 4. — P. 576-597.
205. Roberts J.W. A service system with heterogeneous user requirements – application to multi-service telecommunications systems // Performance of Data Communications systems and their applications. — 1981. — P. 423-431.
206. Roberts J.W. Traffic theory and the Internet // IEEE Communications Magazine. — 2001. — Vol. 39. — No. 1. — P. 94-99.
207. Ross K.W. Multiservice loss models for broadband telecommunication networks. — Springer-Verlag, 1995. — 343 p.
208. Rummyantsev A., Morozov E. Stability criterion of a multiserver model with simultaneous service // Annals of Operations Research. — 2017. — Vol. 252. — No. 1. — P. 29-39.

209. Samouylov K., Sopin E., Vikhrova O., Shorgin S. Convolution algorithm for normalization constant evaluation in queuing system with random requirements // AIP Conference Proceedings. — 2017. — Vol. 1863.
210. Samouylov K., Naumov V. Stochastic Lists of Multiple Resources // Recent Developments in Stochastic Methods and Applications : Springer Proceedings in Mathematics & Statistics/ eds. A.N. Shiryaev, K.E. Samouylov, D.V. Kozyrev. — Cham: Springer International Publishing, 2021. — Vol. 371. — P. 353-357.
211. Samouylov K., Sopin E., Vikhrova O. Analysis of queueing system with resources and signals // Communications in Computer and Information Science. — 2017. — Vol. 800. — P. 358-369.
212. Samouylov K., Sopin E., Vikhrova O. Analyzing blocking probability in LTE wireless network via queuing system with finite amount of resources // Communications in Computer and Information Science : Communications in Computer and Information Science. — 2015. — Vol. 564. — P. 393-403.
213. Samouylov K.E., Gaidamaka Y.V., Sopin E.S. Simplified analysis of queueing systems with random requirements // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. — 2018. — Vol. 231. — P. 381-390.
214. Simsek M., Aijaz A., Dohler M., Sachs J., Fettweis G. 5G-Enabled Tactile Internet // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. — 2016. — Vol. 34. — No. 3. — P. 460-473.
215. Sopin E., Ageev K., Samouylov K. Approximate analysis of the limited resources queuing system with signals // Proceedings - European Council for Modelling and Simulation, ECMS. — ECMS, 2019. — Vol. 33. — P. 462-465.
216. Sopin E., Ageev K., Shorgin S. Simulation of the limited resources queuing system for performance analysis of wireless networks // Proceedings - European Council for Modelling and Simulation, ECMS2018. — 2018. — P. 505-509.
217. Sopin E., Gudkova I., Markova E., Ageyev K. Approximation of resource requirements distribution for the analysis of M2M traffic characteristics // CEUR Workshop Proceedings. — 2016. — Vol. 1763. — P. 64-70.

218. Sopin E., Begishev V., Samouylov K. Approximate model of the session service process for mmWave/sub-THz 5G/6G cellular systems // *Wireless Networks*. — 2025.
219. Sopin E., Samouylov K., Vikhrova O., Kovalchukov R., Moltchanov D., Samuylov A. Evaluating a case of downlink uplink decoupling using queuing system with random requirements // *Lecture Notes in Computer Science*. — 2016. — Vol. 9870. — P. 440-450.
220. Sopin E., Begishev V., Moltchanov D., Samuylov A. Evaluation of the New and Accepted Customers Blocking Probabilities in a Network of Resource Loss Systems // *Communications in Computer and Information Science*. — 2022. — Vol. 1605. — P. 105-116.
221. Sopin E., Samouylov K. Analysis of the Limited Resources Queuing System with Signals and Multiple Flows of Customers // *ITM Web of Conferences*. — 2019. — Vol. 24.
222. Sopin E., Maslov A., Begishev V., Samuyilov K. The Impact of Rate Adaptation on User Performance in 5G/6G mmWave/Sub-THz Systems // *IEEE Communications Letters*. — 2023. — Vol. 27. — No. 11. — P. 3137-3141.
223. Sopin E., Moltchanov D., Daraseliya A., Koucheryavy Y., Gaidamaka Y. User Association and Multi-Connectivity Strategies in Joint Terahertz and Millimeter Wave 6G Systems // *IEEE Transactions on Vehicular Technology*. — 2022. — Vol. 71. — No. 12. — P. 12765-12781.
224. Sopin E., Moltchanov D., Maslov A., Begishev V., Samuylov A., Samouylov K., Koucheryavy Y. User Persistence in 5G/6G mmWave/Sub-THz Systems With Blockage: Does It Pay Off? // *IEEE Transactions on Wireless Communications*. — 2024. — Vol. 23. — User Persistence in 5G/6G mmWave/Sub-THz Systems With Blockage. — No. 10. — P. 14864-14878.
225. Sopin E., Vikhrova O., Samouylov K. LTE network model with signals and random resource requirements // *International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops*. — 2018. — P. 101-106.
226. Sopin E.S., Ageev K.A., Markova E.V., Vikhrova O.G., Gaidamaka Yu.V. Performance Analysis of M2M Traffic in LTE Network Using Queuing Systems

- with Random Resource Requirements // Automatic Control and Computer Sciences. — 2018. — Vol. 52. — No. 5. — P. 345-353.
227. Sopin E.S., Samouylov K.E. On the analysis of the limited resources queuing system under MAP arrivals // ITM Web of Conferences. — 2017. — Vol. 16.
228. Stepanov N., Moltchanov D., Begishev V., Turlikov A., Koucheryavy Y. Statistical Analysis and Modeling of User Micromobility for THz Cellular Communications // IEEE Transactions on Vehicular Technology. — 2022. — Vol. 71. — No. 1. — P. 725-738.
229. Stepanov S.N. Markov models with retrials: The calculation of stationary performance measures based on the concept of truncation // Mathematical and Computer Modelling. — 1999. — Vol. 30. — Markov models with retrials. — No. 3-4. — P. 207-228.
230. Stepanov S.N., Stepanov M.S. Efficient Algorithm for Evaluating the Required Volume of Resource in Wireless Communication Systems under Joint Servicing of Heterogeneous Traffic for the Internet of Things // Automation and Remote Control. — 2019. — Vol. 80. — No. 11. — P. 2017-2032.
231. Susloparov M., Krasilov A., Khorov E. Boosting XR Capacity With Multi-Band Multi-Connectivity in 5G Systems // IEEE Communications Letters. — 2024. — Vol. 28. — No. 9. — P. 2211-2215.
232. Tataria H., Shafi M., Molisch A.F., Dohler M., Sjöland H., Tufvesson F. 6G Wireless Systems: Vision, Requirements, Challenges, Insights, and Opportunities // Proceedings of the IEEE. — 2021. — Vol. 109. — 6G Wireless Systems. — No. 7. — P. 1166-1199.
233. Tikhonenko O., Ziółkowski M., Kempa W.M. Queueing systems with random volume customers and a sectorized unlimited memory buffer // International Journal of Applied Mathematics and Computer Science. — 2021. — Vol. 31. — No. 3.
234. Tikhonenko O., Ziolkowski M. Unreliable Single-Server Queueing System with Customers of Random Capacity // Computer Networks: 27th International Conference, CN 2020, Gdańsk, Poland, June 23-24, 2020, Proceedings : Communications in Computer and Information Science. — Cham: Springer International Publishing AG, 2020. — Вып. 1231.

235. Tikhonenko O.M. Generalized Erlang Problem for Service Systems with Finite Total Capacity // Problems of Information Transmission. — 2005. — Vol. 41. — No. 3. — P. 243-253.
236. Tikhonenko O.M. Queuing system with processor sharing and limited resources // Automation and Remote Control. — 2010. — Vol. 71. — No. 5. — P. 803-815.
237. Tsitovich I.I., Chernushevich A.V. Numerical analysis of the effect of hysteresis in the access control of wireless broadband network on the functional efficiency // Journal of Communications Technology and Electronics. — 2012. — Vol. 57. — No. 8. — P. 906-919.
238. Vaezi M., Azari A., Khosravirad S.R., Shirvanimoghaddam M., Azari M.M., Chasaki D., Popovski P. Cellular, Wide-Area, and Non-Terrestrial IoT: A Survey on 5G Advances and the Road Toward 6G // IEEE Communications Surveys & Tutorials. — 2022. — Vol. 24. — Cellular, Wide-Area, and Non-Terrestrial IoT. — No. 2. — P. 1117-1174.
239. Vishnevsky V., Vytovtov K., Barabanova E., Semenova O. Analysis of a MAP/M/1/N Queue with Periodic and Non-Periodic Piecewise Constant Input Rate // Mathematics. — 2022. — Vol. 10. — No. 10. — P. 1684.
240. Vishnevsky V., Dudin A., Kozyrev D., Larionov A. Methods of Performance Evaluation of Broadband Wireless Networks Along the Long Transport Routes // Distributed Computer and Communication Networks/ eds. V. Vishnevsky, D. Kozyrev. — Cham: Springer International Publishing, 2016. — P. 72-85.
241. Vishnevsky V.M., Selvamuthu D., Rykov V.V., Kozyrev D.V., Ivanova N., Krishnamoorthy A. Reliability assessment of tethered high-altitude unmanned telecommunication platforms: k-out-of-n reliability models and applications. — Springer, 2024. — 167 p.
242. Vishnevsky V.M., Vytovtov K.A., Barabanova E.A. Transient Behavior of a Two-Phase Queuing System with a Limitation on the Total Queue Size // Automation and Remote Control. — 2024. — Vol. 85. — No. 1. — P. 64-82.
243. Weber S., Andrews J.G. Transmission Capacity of Wireless Networks // Foundations and Trends® in Networking. — 2010. — Vol. 5. — No. 2-3. — P. 109-281.

244. Whitt W. Continuity of Generalized Semi-Markov Processes // *Mathematics of Operations Research*. — 1980. — Vol. 5. — No. 4. — P. 494-501.
245. Yastrebova A., Kirichek R., Koucheryavy Y., Borodin A., Koucheryavy A. Future Networks 2030: Architecture & Requirements // *2018 10th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT) 2018 10th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT)*. — Moscow, Russia: IEEE, 2018. — Future Networks 2030. — P. 1-8.
246. Zorine A.V. On the Existence of the Stationary Distribution in a Cyclic Polling System with Autoregressive Poisson Inputs // *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications : Communications in Computer and Information Science/ eds. A. Dudin, A. Nazarov, A. Moiseev*. — Cham: Springer International Publishing, 2022. — Vol. 1605. — P. 93-104.