

«УТВЕРЖДАЮ»

Первый проректор-
проректор по научной работе РУДН
доктор медицинских наук,
профессор, член-корр. РАН



А.А. Костин

06.03.2025

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Российский университет дружбы народов» (РУДН) на основании решения, принятого на заседании кафедры математического моделирования и искусственного интеллекта факультета физико-математических и естественных наук РУДН.

Диссертация «Обратимые разностные схемы для динамических систем с квадратичной правой частью» выполнена на кафедре математического моделирования и искусственного интеллекта факультета физико-математических и естественных наук РУДН.

Гамбарян Марк Микаелович 1998 года рождения, гражданин РФ, в 2021 году окончил магистратуру РУДН по специальности 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» и в 2021 году поступил в очную аспирантуру федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Российский университет дружбы народов» по профилю 01.01.07 «Вычислительная математика», которую окончил в 2024 г.

С ноября 2024 г. по настоящее время работает ассистентом на кафедре математического моделирования и искусственного интеллекта ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов».

С ноября 2024 г. по настоящее время работает ассистентом на кафедре математического моделирования и искусственного интеллекта ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов».

Документ о сдаче кандидатских экзаменов и диплом об окончании аспирантуры выдан в 2024 году в РУДН.

Научный руководитель – Малых Михаил Дмитриевич, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического моделирования и искусственного интеллекта ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов».

Научный руководитель и название темы диссертационного исследования в окончательной редакции были утверждены на заседании Ученого совета факультета физико-математических и естественных наук РУДН 24.10.2023 протокол № 0201-08/03.

По итогам обсуждения принято следующее заключение.

Оценка выполненной соискателем работы. Диссертационная работа М.М. Гамбаряна посвящена исследованию алгебраических свойств обратимых разностных схем, аппроксимирующих эллиптические осцилляторы, методами компьютерной алгебры Sage. Под обратимыми разностными схемами в диссертации понимаются разностные схемы, шаг по времени в которых описывается преобразованием Кремены.

Дискретные динамические системы, в которых шаг описывается бирациональным преобразованием, рассматривались А.П. Веселовым в 1989 г. Рассмотренный в диссертации способ аппроксимации динамической системы с квадратичной правой частью вошел в употребление в середине прошлого века в работах, связанных с солитонами. После доклада, сделанного Уильямом Каганом в 1993 г., эта разностная схема получила одно из своих имен — метод Кагана. Вскоре она была применена к классическим динамическим системам: системе Вольтерры-Лотки, к квадратичной гамильтоновой системе и уравнениям движения гироскопа для двух

классических случаев — Эйлера-Пуансо и Лагранжа-Эйлера. Впервые то обстоятельство, что разностная схема Кагана задает бирациональное соответствие было отмечено Ю.Б. Сурисом в 2010 г.

Выполненные ранее исследования позволяют предположить, что свойства схемы Кагана для эллиптических осцилляторов столь же богаты, как и свойства эллиптических функций. Их исследование сулит с одной стороны построение дискретной теории эллиптических функций как раздела теории преобразований Кремоны (идея Эрмита), а с другой должно пролить свет на связь между свойствами дискретной и непрерывной моделей и уточнить понятие наследования и подражания. Это и оправдывает цель диссертационного исследования.

Диссертационное исследование выполнено в научной школе ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов» «Математическое моделирование и вычислительная физика» (рег. № 0017-06/7, руководитель — проф. Л.А. Севастьянов). Оно опирается на результаты канд. диссертаций М.Н. Геворкяна (РУДН, 2013 г., научный руководитель — проф. Д.С. Кулябов), Юй Ин (РУДН, 2020 г., научный руководитель — проф. Л.А. Севастьянов) и Баддура Али (РУДН, 2022 г., научный руководитель — доц. М.Д. Малых), выполненных в институте компьютерных наук и телекоммуникаций ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов»

В диссертации Гамбаряна М.М. решена задача сравнения непрерывной математической модели нелинейных осцилляторов и ее дискретного аналога, полученного по схеме Кагана. В ходе исследования были решены следующие задачи:

1. Реализован метод составления обратимой разностной схемы, аппроксимирующей динамическую систему квадратичной правой частью, реализован в виде процедуры в системе `fdm for sage` (<https://github.com/malykhmd/fdm>).

2. Реализован метод вычисления приближенных решений по обратимой схеме, реализован в виде процедуры в системе `fdm for sage` (<https://github.com/malykhmd/fdm>).
3. На основе метода Лагутинского разработан метод исследования линии, вдоль которой выстраиваются точки приближенного решения в фазовом пространстве, метод реализован в системе Sage.
4. Выполнено оригинальное сравнение непрерывной модели эллиптического осциллятора и ее дискретного аналога, записанного в виде обратимой разностной схемы.

Личное участие соискателя в получении результатов. Автор диссертации, работая в коллективе соавторов, доказал ряд теорем о свойствах обратимых разностных схем, самостоятельно разработал и реализовал ряд основных функций пакета `fdm for sage`, провел серию экспериментов в Sage.

Степень достоверности результатов проведенных исследований. Обоснованность результатов диссертации опирается на теоретические исследования, все оригинальные теоремы, используемые в тексте диссертации, и их доказательства были опубликованы в рецензируемых журналах. Везде, где это возможно, проводилось сравнения полученного численного решения с аналитическими решениями, что подтверждает достоверность результатов. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на международных конференциях `РСА'2023` и `РСА'2024`, ПОМИ, Санкт-Петербург, и `ИТТММ'24`, РУДН, Москва, а также на научных семинарах: по вычислительной и прикладной математике ЛИТ ОИЯИ (Дубна, 2022 г.), научном семинаре каф. Прикладной математики МИФИ под рук. проф. Н.А. Кудряшова (Москва, декабрь 2023 г.), секции по математическому моде-

лированию Объединённого научного семинара Института компьютерных наук и телекоммуникаций под рук. проф. Л.А. Севастьянова (Москва, сентябрь 2023 г.) и семинара по нелинейной теории дифференциальных уравнений Математического института РУДН под рук. проф. А.Е. Шишкова (Москва, апрель 2024 г.).

Новизна результатов проведенных исследований.

- Метод конструирования обратимой разностной схемы описан Каганом, его реализация в виде компьютерной программы в системе компьютерной алгебры сделана впервые.
- На основе метода Лагутинского впервые разработан и реализован в системе компьютерной алгебры Sage метод исследования алгебраических траекторий приближенных решений.
- Выполнено оригинальное исследование обратимых схем для осциллятора Якоби и задачи о вращении волчка в случае Эйлера-Пуансо.

Теоретическая и практическая значимость проведенных исследований. Разрабатываемые численно-аналитические методы найдут применение в теоретических исследованиях динамических систем, богатых законами сохранения и особенно при исследовании разного рода осцилляторов. Результаты диссертации могут быть использованы при создании учебных курсов по теме «Дифференциальные уравнения» и «Компьютерная алгебра».

Ценность научных работ соискателя. В рамках диссертационного исследования Гамбаряна М.М. показано, что для эллиптических осцилляторов, в т.ч. волчка, закрепленного в своем центре тяжести, дискретная теория, основанная на обратимых разностных схемах, повторяет непрерывную теорию:

1. точки приближенного решения ложатся на некоторую эллиптическую кривую, которая при $\Delta t \rightarrow 0$ переходит в интегральную кривую,
2. разностная схема допускает представление при помощи квадратуры,
3. приближенное решение можно представить при помощи эллиптической функции дискретного аргумента,
4. шаг Δt можно подобрать так, чтобы приближенное решение представляло собой периодическую последовательность.

Главное отличие сводится к тому, что место бирациональных преобразований на интегральной кривой непрерывной модели занимают преобразования Кремоны пространства, содержащего интегральные кривые.

Специальность, которой соответствует диссертация. Диссертация выполнена в соответствии с паспортом специальности 1.2.2 — «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» и включает оригинальные результаты, направленные на развитие миметических методов в их приложении к задачам теории динамических систем. В соответствии с п. 1 паспорта специальности в диссертации разработаны новые математические методы моделирования объектов и явлений — численно-аналитические методы исследования динамических систем с квадратичной правой частью и нелинейных осцилляторов. В соответствии с п. 3 проведена разработка, обоснование и тестирование эффективных численных методов — новых методов исследования нелинейных осцилляторов, наследующих свойства непрерывных моделей. В соответствии с п. 4 паспорта реализованы эффективные численные методы и алгоритмы решения актуальных задач механики в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения серии численных экспериментов.

Полнота изложения материалов диссертации в работах, опубликованных соискателем. Основные результаты по теме диссертации изложены в 5 статьях, изданных в журналах, индексируемых в

международных базах цитирования Scopus/WoS, а также 3 тезисах докладов на международных конференциях. Программное обеспечение, разработанное в рамках диссертационного исследования, размещено в общем доступе. Основные положения и результаты диссертации отражены в следующих опубликованных работах:

1. О траекториях динамических систем с квадратичной правой частью, вычисленных по обратимым разностным схемам [Текст] / Э. А. Айрян [и др.] // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 2022. — Т. 517. — С. 17—35.
2. Обратимые разностные схемы для эллиптических осцилляторов [Текст] / Э. А. Айрян [и др.] // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 2023. — Т. 528. — С. 54—78.
3. О траекториях динамических систем, лежащих на гиперповерхностях линейных систем [Текст] / Э. А. Айрян [и др.] // Письма в журнал Физика элементарных частиц и атомного ядра. — 2023. — Т. 20, № 2. — С. 200—208.
4. О реализации численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений в системах компьютерной алгебры [Текст] / А. Баддур [и др.] // Программирование. — 2023. — № 5. — С. 47—58.
5. Finite Difference Models of Dynamical Systems with Quadratic Right-Hand Side [Текст] / M. Malykh [и др.] // Mathematics. — 2024. — Т. 12, № 167.

В написанных в соавторстве работах основные результаты, представленные в диссертации, получены Гамбаряном М.М. лично.

Текст диссертации был проверен на использование заимствованного материала без ссылки на авторов и источники заимствования. После исключения всех корректных совпадений иных заимствований не обнаружено.

Диссертационная работа Гамбаряна М.М. рекомендуется к публичной защите на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 — «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Заключение принято на заседании кафедры математического моделирования и искусственного интеллекта факультета физико-математических и естественных наук Российского университета дружбы народов.

Присутствовало на заседании 22 чел.

Результаты голосования: «за» – 22 чел., «против» – 0 чел., «воздержалось» – 0 чел. Протокол № 0200-54/02-02/08 от 06.03.2025 г.

Председательствующий на заседании:

заведующий кафедрой математического моделирования и искусственного интеллекта,
доктор физико-математических наук, доцент

 М.Д. Малых

Подпись М.Д. Малых удостоверяю.

Ученый секретарь Ученого совета
факультета физико-математических
и естественных наук РУДН





И.С. Зарядов