На правах рукописи

Штепа Кристина Александровна

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСФОРМИРУЮЩИХ СРЕД СРЕДСТВАМИ ЛУЧЕВОЙ ОПТИКИ

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2025

Работа выполнена на кафедре прикладной информатики и теории вероятностей ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов»

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей и кибербезопасности ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»
Кулябов Дмитрий Сергеевич

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник отдела 61 Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской Академии Наук
Дружинина Ольга Валентиновна

доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет», профессор кафедры общей математики и математической физики
Цирулев Александр Николаевич

доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского», заведующий кафедрой математического и компьютерного моделирования
Блинков Юрий Анатольевич

Защита состоится «13» февраля 2026 г. в 14 ч. 00 мин на заседании диссертационного совета ПДС 0200.006 при Российском университете дружбы народов имени Патриса Лумумбы по адресу: г. Москва, ул. Орджоникидзе д. 3, ауд. 208.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6.
(Отзывы на автореферат просьба направлять по указанному адресу.)

Автореферат разослан «______» декабря 2025 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
к. ф.-м. н., доцент М. Н. Геворкян

Общая характеристика диссертации

Актуальность темы исследования

Актуальность исследования заключается в отсутствии единого универсального подхода к расчету оптических систем, таких как линзы и дифракционные решетки. В современных условиях каждая специфичная задача требует индивидуального подхода, что затрудняет моделирование и оптимизацию оптических систем. Данный аспект приобретает особую значимость в условиях интенсивного технологического развития, где необходимы высокоточные расчеты для создания новых оптических элементов и улучшения их характеристик.

Дифракционные решетки – ключевые компоненты спектральных приборов, лазерных систем и сенсоров, однако для их проектирования не разработан универсальный подход, объединяющего точность электродинамических моделей и инженерную простоту лучевой оптики.

Быстрый прогресс в области машинного обучения, особенно Physics-Informed Neural Networks (PINN), открывает возможность прямого включения физических законов в процесс оптимизации, что в сочетании с классическими методами геометрической (лучевой) оптики формирует основу для создания гибкого и вычислительно эффективного инструментария для моделирования трансформирующих сред нового поколения.

Существующие решения ограничены областью применимости или требуют значительных вычислительных ресурсов. Исследование новых подходов, таких как нейросетевые методы, в сочетании с традиционными численными методами, позволяет преодолеть указанные ограничения и разработать универсальные и адаптивные инструменты для решения задач оптики и фотоники.

Работа направлена на решение актуальной научной задачи — разработки гибридного мультимодельного подхода к моделированию трансформирующих сред, использующего как классические численные методы, так и методы машинного обучения.

Работа посвящена разработке и комплексному анализу моделей распространения лучей с целью оптимизации расчета характеристик трансформирующих сред на основе методов лучевой оптики и нейронных сетей.

Степень разработанности темы

В настоящее время тема моделирования трансформирующих сред на основе лучевой оптики находится на стадии активного развития. Традиционные аналитические методы детально описаны в работах Борна, Тихонравова и др., но их применение для решеток с большими периодами или в трансформирующих средах остается громоздким. Существующие исследования предлагают разнообразные подходы, включая численные методы и классические решения дифференциальных уравнений, однако универсальный подход, учитывающий все особенности, в настоящее время отсутствует. Недавние исследования активно внедряют нейронные сети, такие как нейронные сети, основанные на физике (Physics-informed neural networks, PINN), что открывает новые горизонты в точности и скорости моделирования. Первые попытки интеграции нейронных сетей в задачу расчета трансформирующих сред появились лишь в 2019–2024 г. Однако, несмотря на значительный прогресс, остаются нерешенными вопросы комплексного учета трансформирующих сред и оптимизации геометрии решеток.

Таким образом, степень разработанности темы можно охарактеризовать как промежуточную: уже есть серьезные наработки, но остается широкое поле для дальнейших исследований и внедрения новых подходов.

Цели и задачи

Целью является разработка гибридного мультимодельного вычислительного подхода к моделированию трансформирующих сред, объединяющего лучевую оптику и методы машинного обучения, и экспериментальное подтверждение его эффективности.

Для достижения этой цели в работе решаются следующие задачи:

— Систематизация существующих численных и аналитических методов расчета трансформирующих сред, выделение ограничения лучевого приближения;

— Моделирование дифракции на основе численных методов решения дифференциальных уравнений FSM (Fast sweeping method);

— Разработка и применение нейронной сети, основанной на физике (Physics-informed neural networks, PINN), с использованием библиотеки NeuralPDE.jl для решения задачи моделирования дифракции;

— Сравнение точности, скорости и сложности реализации обоих подходов;

— Проведение серии численных экспериментов с различными параметрами трансформирующих сред.

Научная новизна

Научная новизна состоит в разработке и реализации мультимодельного подхода к моделированию дифракционных систем в трансформирующих средах на основе уравнения эйконала, сочетающего численный метод быстрого «подметания» (Fast Sweeping Method, FSM) и физически информированные нейронные сети (PINN) в инфраструктуре SciML/NeuralPDE.jl. Получены следующие результаты:

1. Разработаны и программно реализованы две взаимодополняющие вычислительные схемы решения уравнения эйконала для трансформирующих сред (FSM и PINN) с единым контуром визуализации фронтов и лучей на тестовых профилях (линзы Люнеберга, Максвелла).

2. Выполнена адаптация постановки PINN к задачам геометрической оптики с неоднородным показателем преломления, включая практические решения ограничений Symbolics/NeuralPDE для задания кусочно-непрерывных профилей.

3. Проведён сопоставительный анализ свойств FSM и PINN применительно к задачам моделирования трансформирующих сред (требования к зависимостям и инфраструктуре, устойчивость постановки, удобство задания граничных условий и профилей среды, визуализация), выявлены области предпочтимости каждого подхода.

4. Показана воспроизводимость расчётов и визуализаций в открытой среде Julia/SciML с возможностью переноса на типовые задачи оптического проектирования.

Теоретическая и практическая значимость диссертации

Полученные результаты могут быть полезными для производителей оптических компонентов и систем, в том числе для разработчиков радиолокационных систем, так как метод ускоряет проектирование и оптимизацию новых типов линз и трансформирующих сред, существенно сокращая цикл разработки и вывода продукции на рынок.

Кроме того, методика представляет интерес для исследовательских лабораторий и научных коллективов, так как мультимодельный подход позволяет усовершенствовать процессы проектирования оптических элементов за счет сокращения времени расчета, упрощения методов оптимизации и возможности выполнения расчетов на персональных компьютерах, что является существенным фактором для научных лабораторий без доступа к ресурсам высокопроизводительных вычислительных кластеров.

Методы исследования

В научно-квалификационной работе применен мультимодельный подход, объединяющий численные алгоритмы (Fast Sweeping Method, FSM) и обученные на физических уравнениях нейросетевые модели (Physics-Informed Neural Networks на базе NeuralPDE.jl).

Положения, выносимые на защиту

1. Разработан мультимодельный подход к моделированию дифракционных систем в трансформирующих средах, основанный на сочетании численного метода быстрого распространения фронта (Fast Sweeping Method, FSM) и физически информированных нейронных сетей (Physics-Informed Neural Networks, PINN) в инфраструктуре библиотеки NeuralPDE.jl.

2. Сформулирована математическая постановка задачи моделирования распространения лучей в трансформирующих средах на основе уравнения эйконала, адаптированная для использования в среде PINN с учётом физических ограничений и профиля показателя преломления.

3. Выполнена программная реализация и методика визуализации результатов моделирования в виде полей распространения и волновых фронтов для типовых оптических систем (линзы Люнеберга, Максвелла, Итона).

4. Выполнен сравнительный анализ классических численных и нейросетевых подходов (FSM и PINN), демонстрирующие их применимость к различным классам задач моделирования дифракционных систем, включая оценку вычислительных затрат, устойчивости и визуальной интерпретируемости решений.

5. Выработаны практические рекомендации по выбору и комбинированию численных и нейросетевых методов для решения задач

лучевой оптики в трансформирующих средах, основанные на обобщении проведённых экспериментов.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность полученных результатов обеспечивается обоснованностью выбранных методов и их перекрестной верификацией, а также численными экспериментами с применением численного анализа.

Основные результаты диссертации докладывались на всероссийских и международных конференциях:

— Международная научная конференция «The XXVII Saratov fall meeting 2023 (SFM'23) XXVII International School for Junior Scientists and Students on Optics, Laser Physics & Biophotonics» (г. Саратов, Саратовский государственный университет, 2023 г.);

— Всероссийская конференция с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» (г. Москва, РУДН, 2023–2024 г.).

Основные результаты опубликованы в ведущих научных журналах: Programming and Computer Software, Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science, Программирование, а также в трудах всероссийской конференции с международным участием.

Также основные результаты докладывались на научном семинаре «Математическое моделирование» кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН.

Личный вклад

Основные результаты, представленные в диссертационной работе, получены автором самостоятельно. В публикациях, выполненных в соавторстве, личный вклад соискателя выражается в исследовании математических моделей и методов их анализа, доказательстве положений, разработке алгоритмов и создании программных инструментов для проведения вычислительных экспериментов. Программное обеспечение, применяемое при численном и графическом анализе, создано при непосредственном участии автора.

Публикации

Основные результаты диссертационной работы изложены в 8 публикациях, включая 3 статьи в рецензируемых научных изданиях, входящих в базу данных Scopus/Web of Science, 3 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ, а также две публикации в материалах всероссийских научных конференций с международным участием.

Содержание диссертации

Диссертация посвящена исследованию методов математического моделирования дифракционных систем на основе уравнения Эйконала и численных схем геометрической оптики, а также разработке и анализу вычислительных и нейросетевых подходов к решению задач распространения излучения в трансформирующих средах.

Во **введении** обоснована актуальность исследования, раскрыта связь темы с современным состоянием науки и техники, определена цель и поставлены задачи, сформулированы научная новизна, теоретическая и практическая значимость результатов. Актуальность обусловлена отсутствием универсального и вычислительно эффективного подхода к моделированию оптических систем, содержащих дифракционные решётки и трансформирующие среды, а также необходимостью согласования точности электродинамических моделей с инженерной простотой геометрической оптики. Показано, что интеграция методов лучевой оптики и нейросетевых технологий — в частности, Physics-Informed Neural Networks (PINN) — открывает возможность создания гибридных моделей, включающих физические законы в процесс оптимизации. Целью исследования является разработка мультимодельного подхода, объединяющего численные и нейросетевые методы моделирования дифракционных систем, и демонстрация его эффективности на примере типовых трансформирующих сред.

Первая глава посвящена теоретическим основам и методологическим подходам к моделированию дифракционных систем, функционирующих в трансформирующих средах. Рассмотрены физические предпосылки, уравнения, описывающие распространение электромагнитных волн, и принципы их упрощения в рамках геометрической оптики, что позволяет перейти к задаче вычисления траекторий лучей и фронтов волны.

В качестве исходной основы рассматриваются уравнения Максвелла в изотропной среде без источников:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{n^2}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — векторы электрического и магнитного полей, $n(\mathbf{r})$ — показатель преломления, зависящий от координат, c — скорость света в вакууме. Переходя к гармоническому представлению поля

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r})e^{i(k_0 S(\mathbf{r}) - \omega t)},$$

и подставляя его в волновое уравнение Гельмгольца

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_0^2 n^2(\mathbf{r})\mathbf{E} = 0,$$

получаем систему, в которой фазовая функция $S(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Эйконала:

$$|\nabla S(\mathbf{r})|^2 = n^2(\mathbf{r}).$$

Это уравнение играет ключевую роль в геометрической оптике и задаёт связь между пространственным распределением показателя преломления и направлением распространения лучей. Вектор ∇S совпадает с направлением фазового градиента, что определяет локальную нормаль к волновому фронту. Таким образом, задача трассировки лучей сводится к решению уравнения Эйконала для заданного распределения $n(\mathbf{r})$.

Показано, что траектории лучей в такой среде можно рассматривать как геодезические линии в оптическом пространстве, где показатель преломления играет роль метрики, а поверхность волнового фронта соответствует эквивалентной поверхности равной оптической длины.

Для одномерного случая с радиальной симметрией $n = n(r)$ уравнение Эйконала упрощается:

$$\left(\frac{dS}{dr}\right)^2 = n^2(r),$$

а решение имеет вид

$$S(r) = \int_0^r n(r')\,dr',$$

что определяет оптический путь между центром и точкой с радиусом r. Это выражение показывает, что распределение фазовой функции $S(r)$ полностью определяется профилем показателя преломления.

В работе рассмотрены классические типы профилей, используемых для моделирования трансформирующих сред. Для линзы Люнеберга показатель преломления изменяется по закону

$$n(r) = \sqrt{2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}, \quad 0 \le r \le R,$$

что обеспечивает коллимацию расходящихся пучков в параллельный пучок. Для линзы Максвелла профиль задаётся выражением

$$n(r) = \frac{1}{1 + (r/R)^2},$$

что приводит к фокусировке света в противоположной точке сферы, а линза Итона с законом

$$n(r) = \sqrt{\frac{2R - r}{r}}$$

реализует разворот направления луча на 180°, обеспечивая эффект ретрофокусировки. Эти профили образуют базисные модели для численного тестирования и визуальной валидации методов моделирования дифракционных систем.

Аналитическое описание таких профилей имеет важное значение при проверке корректности численных алгоритмов, поскольку позволяет сравнивать рассчитанные карты фронтов с точными решениями. В частности, при решении уравнения Эйконала в этих средах траектории лучей формируют концентрические или замкнутые кривые, что подтверждает связь между распределением $n(\mathbf{r})$ и геометрией волнового фронта.

Далее проведён анализ существующих подходов к решению уравнения Эйконала и вычислению траекторий лучей. Классические методы включают разностные схемы, метод характеристик и метод быстрого распространения фронта (Fast Sweeping Method, FSM). Отмечено, что точность разностных схем ограничена аппроксимацией производных и требует малых шагов сетки, а метод характеристик чувствителен к граничным условиям. FSM, в свою очередь, обеспечивает устойчивость и высокую скорость сходимости при моделировании гладких профилей, что делает его эффективным инструментом для вычисления карт волновых фронтов и времён прихода в неоднородных средах.

В заключении главы сформулированы основные принципы построения математических моделей дифракционных систем. Подчёркнуто, что моделирование распространения света в трансформирующих средах сводится к решению уравнения Эйконала с заданным распределением показателя преломления $n(\mathbf{r})$, а выбор численного метода зависит от требуемой точности и геометрии системы. Проведённый анализ показывает, что перспективным направлением является сочетание классических численных подходов с методами машинного обучения, обеспечивающими адаптивное приближение решения при сохранении физической интерпретации процесса.

Во **второй главе** изложены математические и численные методы решения уравнения Эйконала, лежащего в основе моделирования распространения излучения в трансформирующих средах. Рассмотрена постановка задачи, принцип работы метода быстрого распространения фронта (Fast Sweeping Method, FSM) и особенности его реализации в вычислительной среде Julia. Приведены результаты численного моделирования для типовых профилей показателя преломления и анализ точности метода.

Математическая модель основана на уравнении Эйконала

$$|\nabla u(\mathbf{x})| = n(\mathbf{x}),$$

где $u(\mathbf{x})$ — функция оптической длины (или времени прихода волны), а $n(\mathbf{x})$ — пространственно зависящий показатель преломления. Для решения уравнения на конечной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ задаются фиксированные значения функции $u(\mathbf{x})$ на источнике излучения:

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0,$$

где Γ_0 обозначает границу начального фронта.

Решение задачи позволяет определить распределение оптической длины в каждой точке области, построить линии уровня функции $u(\mathbf{x})$, соответствующие волновым фронтам, и траектории лучей, ортогональные к ним. Это даёт возможность описывать процесс распространения света в неоднородных средах, включая системы с пространственно изменяющимся показателем преломления.

В отличие от аналитических подходов, численные методы требуют аппроксимации производных и итерационных схем для расчёта $u(\mathbf{x})$ на сетке. Среди них метод быстрого распространения фронта (FSM) представляет собой эффективную схему, обеспечивающую высокую скорость сходимости при сохранении точности. Метод основан на последовательных проходах по сетке в различных направлениях, что позволяет учитывать влияние всех соседних узлов и ускоряет вычисление значений функции на всей области.

В двумерном случае схема FSM имеет вид:

$$\max\left(\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h}, \frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{h}, 0\right)^2 + \\ + \max\left(\frac{u_{i,j}-u_{i+1,j}}{h}, \frac{u_{i,j}-u_{i,j+1}}{h}, 0\right)^2 = n_{i,j}^2,$$

где h — шаг сетки, а $n_{i,j}$ — значение показателя преломления в узле (i, j).

Решение строится итерационно: при каждом проходе вычисляются значения функции $u_{i,j}$ с учётом ближайших обновлённых узлов. После полного цикла обновлений по четырём направлениям — «север–юг–восток–запад» — значения сходятся к устойчивому распределению, удовлетворяющему уравнению Эйконала с заданной точностью.

Метод обеспечивает устойчивость при положительных значениях $n(\mathbf{x})$ и может применяться к произвольным профилям трансформирующих сред. При этом вычислительная сложность пропорциональна числу узлов сетки, что делает его удобным для решения двумерных и трёхмерных задач на персональных компьютерах.

Для численной реализации метода использовалась среда программирования Julia, обладающая высокой скоростью выполнения кода и развитым экосистемным стеком для научных вычислений. В работе применён пакет `Eikonal.jl`, реализующий классические схемы Fast Sweeping и Fast Marching. В Julia реализованы функции задания расчётной области, граничных условий и визуализации результатов. Разработаны вспомогательные модули для построения линий уровня $u(x, y)$ и восстановления траекторий лучей, ортогональных к ним. Визуализация реализована средствами стандартных библиотек языка, что позволяет получать карты распределения оптической длины и геометрию фронтов для заданных профилей $n(x, y)$.

На тестовых примерах линз Люнеберга и Максвелла показано, что FSM корректно воспроизводит ожидаемые формы волновых фронтов и направления лучей. Полученные распределения соответствуют физическому смыслу задачи: фронты представляют изохроны — линии равного времени прихода волны, а лучи направлены ортогонально к ним.

Проведён анализ сходимости и устойчивости метода при изменении шага сетки и числа итераций. Показано, что уменьшение шага h приводит к снижению погрешности решения, а схема сохраняет устойчивость при условии $h < 1/\max n(\mathbf{x})$. Результаты подтверждают аппроксимационную точность порядка $O(h^2)$ для гладких профилей показателя преломления.

Особое внимание уделено вопросам интерпретации результатов и корректности визуализации. Показано, что при использовании FSM для построения лучей необходимо учитывать ограниченность представления фронтов: в некоторых областях, особенно для профиля Итона, могут возникать зоны, не охватываемые фронтом, что обусловлено особенностями распространения волн в средах с неоднозначной фазовой скоростью. Для таких случаев предложен дополнительный анализ — сравнение карт уровней оптической длины с полем направлений лучей, что позволяет выделить области корректного моделирования.

В заключении главы приведена оценка производительности метода и его масштабируемости. Проведено сравнение времени вычислений при различных размерах сетки и профилях $n(x, y)$. Показано, что время расчёта растёт линейно с увеличением числа узлов, а реализация на Julia демонстрирует высокую вычислительную эффективность. Таким образом, метод быстрого распространения фронта является оптимальным инструментом для задач моделирования дифракционных систем, позволяющим получать устойчивые решения уравнения Эйконала при умеренных вычислительных затратах.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Будем рассматривать монохроматическую гармоническую волну, векторы напряженности которой выражаются в следующем виде:*

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t},$$
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t},$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ — радиус вектор точки пространства в декартовой системе координат, ω — циклическая частота, $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda_0$, где λ_0 — длина волны в вакууме, а также предположим, что волна высокочастотная, то есть циклическая частота ω велика и, следовательно, велика и величина k_0. Тогда, уравнение Гельмгольца сводится к уравнению эйконала*, которое имеет следующий вид:*

$$\|\nabla u\|^2 = n^2(\mathbf{r}),$$

Теорема 2. *Для монохроматической волны уравнение эйконала в ковариантной форме принимает следующий вид:*

$$g^{ij}\partial_i u \partial_j u = \varepsilon^{ij}\mu_{ij},$$

где ε^{ij} — тензор диэлектрической проницаемости среды, μ_{ij} — тензор магнитной проницаемости среды, g^{ij} — компоненты метрического тензора евклидова пространства с поднятыми верхними индексами.

В **третьей главе** рассмотрен нейросетевой подход к решению задач геометрической и волновой оптики, основанный на применении Physics-Informed Neural Networks (PINN). Основное внимание уделено применению пакета NeuralPDE.jl из экосистемы SciML языка Julia для решения уравнения Эйконала. Приведены структура модели, постановка задачи обучения, функция потерь, а также сравнительный анализ с классическим методом быстрого распространения фронта (FSM).

Нейросетевые методы позволяют аппроксимировать решения дифференциальных уравнений без построения сетки, используя обучаемые функции. В отличие от традиционных численных методов, PINN интегрирует физические законы непосредственно в процесс обучения нейронной сети. Это достигается за счёт включения в функцию потерь невязки исходного уравнения и граничных условий.

В общем виде задача решается для функции $u(x, y)$, описывающей оптическую длину или время прихода волны, которая удовлетворяет уравнению Эйконала

$$|\nabla u(x, y)|^2 = n^2(x, y).$$

Нейронная сеть $u_\theta(x, y)$ аппроксимирует решение с параметрами θ. Функция потерь формулируется как комбинация невязок уравнения и граничных условий:

$$\mathcal{L} = \||\nabla u_\theta(x, y)|^2 - n^2(x, y)\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda \|u_\theta(x, y) - u_\Gamma(x, y)\|^2_{L^2(\Gamma)},$$

где Ω — расчётная область, Γ — граница с известными значениями функции, λ — коэффициент весовой регуляризации. Минимизация функционала $\mathcal{L}$ обеспечивает приближение аппроксимации $u_\theta(x, y)$ к точному решению уравнения Эйконала.

Обучение сети осуществляется методом градиентного спуска с постоянным шагом обучения. Для вычисления производных по пространственным координатам используется автоматическое дифференцирование, что является одним из ключевых преимуществ PINN. Данный подход позволяет обходиться без явного построения сетки и эффективно учитывать сложные распределения показателя преломления $n(x, y)$.

Реализация экспериментов выполнена в вычислительной среде Julia с использованием пакета `NeuralPDE.jl`, входящего в коллекцию SciML. В модели заданы входные переменные (x, y), нейросеть с несколькими скрытыми слоями и нелинейной функцией активации `tanh`, а также функции для вычисления невязки уравнения Эйконала и граничных условий. Обучение выполнялось до стабилизации значения функции потерь, после чего результаты визуализировались в виде карт распределения оптической длины и линий фронтов.

В процессе численных экспериментов выявлены особенности работы пакета NeuralPDE.jl, связанные с символьным построением выражений при автоматической генерации дифференциальных операторов. Показано, что большое количество символьных зависимостей увеличивает время компиляции и снижает производительность при обучении. Для ускорения расчётов использовалось ограничение числа символьных выражений при генерации данных обучения.

Для тестирования точности и устойчивости PINN использованы те же профили, что и в предыдущей главе: линзы Люнеберга и Максвелла. Полученные результаты показали, что нейросетевой подход корректно воспроизводит форму волновых фронтов и качественно совпадает с результатами, полученными методом FSM. При этом нейросеть продемонстрировала большую гибкость при описании сложных распределений показателя преломления и возможность аппроксимации решений при наличии шумов в данных.

Проведён сравнительный анализ методов FSM и PINN. Установлено, что FSM обеспечивает более высокую скорость вычислений и детерминированную сходимость, тогда как PINN предоставляет возможность расширения на задачи, где требуется интеграция дополнительных физических условий или ограничений. Отмечено, что время обучения нейронной сети существенно превышает время работы FSM, однако полученная аппроксимация может использоваться повторно для различных входных параметров, что выгодно при параметрических расчётах.

Особое внимание уделено анализу структуры функции потерь. При увеличении весового коэффициента λ повышается точность выполнения граничных условий, но возрастает невязка уравнения. Подбор оптимального значения параметра позволяет достичь компромисса между точностью и стабильностью обучения. Результаты обучения продемонстрировали стабилизацию функции потерь на уровне 10^{-4}, что свидетельствует о корректной аппроксимации решения уравнения Эйконала.

Сравнение графиков распределений, полученных FSM и PINN, показало качественное совпадение волновых фронтов и направления лучей. Различия наблюдаются в областях с резким изменением показателя преломления, где FSM точнее воспроизводит границы, а PINN обеспечивает более сглаженное решение. Такое поведение согласуется с ожидаемыми свойствами методов: сеточный FSM более чувствителен к резким градиентам, в то время как PINN обладает свойством сглаживания решений.

В заключении главы сформулированы основные выводы по применению нейросетевых методов к задачам оптики. Показано, что использование Physics-Informed Neural Networks является перспективным направлением для моделирования дифракционных систем, позволяющим решать уравнения в непрерывной форме без построения сетки и обеспечивающим согласованность с физическими законами. Отмечено, что сочетание FSM и PINN в рамках гибридного подхода открывает возможности для ускоренного моделирования и последующей оптимизации оптических структур.

В **заключении** сформулированы основные результаты: разработан мультимодельный подход, объединивший FSM и PINN; показана сопоставимость их точности; проведён анализ устойчивости и вычислительной эффективности. Предложенные методы могут использоваться для проектирования оптических систем с трансформирующими свойствами.

Основные публикации по теме диссертации

По теме диссертации опубликованы следующие работы:

1. Fedorov A. V., **Shtepa K. A.**, Korol’kova A. V., Gevorkyan M. N., Kulyabov D. S. *Methodological derivation of the eikonal equation // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*. — 2023. — Vol. 31, No. 4. — P. 399–418. (Scopus)

2. **Shtepa K. A.**, Fedorov A. V., Gevorkyan M. N., Korol’kova A. V., Kulyabov D. S. *Solving the eikonal equation by the FSM method in Julia language // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*. — 2024. — Vol. 32, No. 1. — P. 48–60. (Scopus)

3. Korol’kova A. V., Gevorkyan M. N., Fedorov A. V., **Shtepa K. A.**, Kulyabov D. S. *Symbolic studies of Maxwell’s equations in space-time algebra formalism // Programming and Computer Software*. — 2024. — Vol. 50, No. 2. — P. 166–171. (Scopus)

4. Korol’kova A. V., **Shtepa K. A.** *Расчёт и визуализация лучей трёхмерных линз Максвелла, Люнеберга и Итона методом характеристик.* Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024664990. Опубл. 26.06.2024. Бюл. № 7.

5. Korol’kova A. V., Kulyabov D. S., **Shtepa K. A.**, Fedorov A. V. *Расчёт и визуализация трёхмерной линзы Максвелла, Люнеберга и Итона.* Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023683618. Опубл. 09.11.2023. Бюл. № 11.

6. Korol’kova A. V., **Shtepa K. A.**, Fedorov A. V., Demidova E. A., Belicheva D. M. *Применение NeuralPDE.jl для решения дифференциальных уравнений.* Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024686840. Опубл. 12.11.2024. Бюл. № 11.

7. **Shtepa K. A.** *Структура исследования дифракционных оптических элементов // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем*: материалы Всероссийской конференции с международным участием. — Москва : РУДН, 2023. — С. 201–205.

8. **Shtepa K. A.**, Demidova E. A., Belicheva D. M. *NeuralPDE.jl для решения дифференциальных уравнений // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем (ИТТММ 2024)*: материалы Всероссийской конференции с международным участием. — Москва : РУДН, 2024. — С. 372–376.

Штепа Кристина Александровна

Моделирование трансформирующих сред средствами лучевой оптики

Проведено исследование математических и вычислительных методов моделирования распространения излучения в трансформирующих средах на основе уравнения Эйконала. Сформулирована постановка задачи в приближении геометрической оптики, проведён анализ радиально-симметричных профилей показателя преломления, включая линзы Люнеберга, Максвелла и Итона. Реализован численный алгоритм решения уравнения Эйконала методом быстрого распространения фронта (Fast Sweeping Method, FSM), проведено исследование сходимости и устойчивости схемы. Разработано программное обеспечение на языке Julia для построения линий уровня фазовой функции и восстановления траекторий лучей. Выполнено моделирование волновых фронтов и верификация результатов на аналитических профилях. Реализован нейросетевой подход к решению уравнения Эйконала на основе Physics-Informed Neural Networks (PINN) с использованием библиотеки SciML языка Julia. Проведено сравнение численных и нейросетевых решений и обоснована перспектива их совместного применения для моделирования дифракционных систем.

Shtepa Kristina Aleksandrovna

Modeling of transformation media using ray optics

The research is devoted to the study of mathematical and computational methods for modeling the propagation of radiation in transforming media based on the eikonal equation. A formulation of the problem is given within the framework of geometrical optics, and an analysis of radially symmetric refractive index profiles, including the Luneburg, Maxwell, and Eaton lenses, is carried out. A numerical algorithm for solving the eikonal equation using the Fast Sweeping Method (FSM) has been implemented, and the convergence and stability of the scheme have been investigated. Software in the Julia programming language has been developed to compute level lines of the phase function and reconstruct ray trajectories. Wavefront modeling and verification on analytical profiles have been performed. A neural-network-based approach to solving the eikonal equation using Physics-Informed Neural Networks (PINN) within the SciML library of the Julia language has been implemented. A comparative analysis of numerical and neural approaches has been conducted, and the feasibility of their combined application for modeling diffraction systems has been substantiated.

Подписано в печать ______.______.2025. Формат 60×84/16.
Тираж 100 экз. Усл. печ. л. 1. Заказ № ______.

Типография Издательства РУДН
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3