

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Российский университет дружбы народов» (РУДН)

На правах рукописи

Гебре Тесфалдет Хадгембес

**МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ ТОНКОСТЕННЫХ СТАЛЬНЫХ  
ПРОФИЛЕЙ В СОСТАВЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РАМ С УЧЕТОМ  
СТЕСНЕННОГО КРУЧЕНИЯ**

2.1.9. Строительная механика

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель  
доктор технических наук, доцент  
Галишникова Вера Владимировна

Москва – 2022

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. ГИПОТЕЗА И ОБЗОР ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ КРУЧЕНИЕМ.....	10
1.1. Обзор развития теории тонкостенных конструкций с ограниченным кручением рамных конструкции.....	10
1.2. Идентификация материальных точек и состояний.....	16
1.3. Разрешающие уравнения для равномерного и неравномерного кручения .....	18
1.4. Гипотеза равномерного кручения.....	19
1.4.1. Смещение при равномерном кручении.....	20
1.4.2. Деформации и напряжения.....	21
1.4.3. Секториальная площадь сечения.....	21
1.4.4. Крутящий момент.....	23
1.5. Определение секториальной координаты.....	24
1.5.1. Функция напряжения .....	25
1.5.2. Аналогия с мембраной.....	26
1.6. Константа кручения и напряжения сдвига.....	27
1.7. Кручение сечения открытого профиля .....	28
1.8. Свойства сечения при кручении .....	30
1.8.1. Круговые сечения.....	31
1.8.2. Полые круговые сечения .....	32
1.8.2. Эллиптические сечения .....	32
1.8.3. Полые эллиптические сечения.....	34
1.8.4. Равносторонние треугольные сечения .....	35
1.8.5. Прямоугольные сечения .....	37
1.8.6. Квадратное сечение.....	39
1.8.7. Узкое прямоугольное сечение.....	40
1.9. Кручение тонкостенных стержней с открытым сечением.....	40
1.9.1. Локальная система координат стенки .....	41
1.9.2. Функция напряжения .....	42
1.10. Секториальная площадь открытых и замкнутых тонкостенных сечений.....	44
1.11. Кручение тонкостенных стержней с замкнутым сечением .....	52
1.11.1. Функция напряжения .....	53
1.11.2. Константа кручения.....	56

1.11.3. Напряжение сдвига и поток сдвига .....	56
1.12. Секториальная площадь замкнутых тонкостенных секций.....	57
1.13. Квадратная труба:.....	62
<b>ГЛАВА 2. ОТКРЫТЫЕ И ЗАМКНУТЫЕ ТОНКОСТЕННЫЕ СТАЛЬНЫЕ СЕЧЕНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ КРУЧЕНИЕМ.....</b>	<b>66</b>
2.1. Общее введение .....	66
2.2. Гипотеза о пространственном тонкостенном элементе балки рамных конструкций .....	68
2.2.1. Продольное напряжение.....	69
2.2.2. Напряжение сдвига и поток сдвига .....	69
2.2.3. Равновесие сдвиговых потоков.....	71
2.2.4. Вычисление сдвиговых потоков .....	71
2.2.5. Открытые сечения .....	72
2.2.6. Замкнутые сечения .....	74
2.3. Первичные и вторичные крутящие моменты.....	76
2.4. Разрешающее уравнение для неравномерного кручения.....	79
<b>ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ БАЛОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ОГРАНИЧЕННЫМ КРУЧЕНИЕМ.....</b>	<b>102</b>
3.1. Общая информация.....	102
3.2. Расчет методом конечных элементов пространственной тонкостенной балки с ограниченным кручением.....	104
3.3. Анализ точных и приближенных методов для различных значений $\theta$ .....	107
3.4. Численные примеры моделирования тонкостенных балок с ограниченным кручением.....	110
<b>ГЛАВА 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТОНКОСТЕННОЙ БАЛКИ ПРИ СОВМЕЩЕННОМ ИЗГИБЕ И КРУЧЕНИИ .....</b>	<b>119</b>
4.1. Расчет пространственного тонкостенного профиля с ограничением деформации в узлах.....	119
4.2. Комбинированный изгиб балки с ограниченным кручением.....	129
4.3. Геометрия и теория пространственных тонкостенных каркасных секций... ..	132
4.4. Формирование метода конечных элементов для трехмерных тонкостенных каркасов .....	137
4.5. Численная и экспериментальная проверка достоверности метода конечных элементов тонкостенных секций с ограниченным кручением .....	141
4.6. Расположение точек измерения и процедура испытания .....	143

4.7. Экспериментальная установка для испытаний и контрольно-измерительные приборы .....	144
4.8. Результаты испытаний и обсуждение .....	146
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	155
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	157
Приложение А.....	174

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы исследования** обусловлена недостаточной изученностью вопроса работы тонкостенных элементов при стесненном кручении с учетом характеристик их сечений, особенностей работы открытых и замкнутых сечений, необходимостью развития конечно-элементной теории, учитывающей дополнительную степень свободы в узле, которая характеризует эффект депланации поперечного сечения. В диссертации проводится сравнение данных, полученных экспериментальным путем, с результата расчета стержней пространственных рам методом конечных элементов при помощи уточненной теории, предложенной автором и реализованной в прикладных программах, с результатами, полученными с применением сертифицированных программных комплексов.

В настоящее время в большинстве работ, посвященных проблеме стесненного кручения тонкостенных элементов, принимаются допущения о том, что деформации сечения в плоскости сечения пренебрежимо малы и относительной деформацией сдвига срединной поверхности допустимо пренебрегать. Однако при соответствующих нагрузке и граничных условиях может возникать деформация сдвига, которая оказывает существенное влияние на напряженное состояние тонкостенного элемента при кручении.

Достаточно подробно разработаны хорошо зарекомендовавшие себя теории кручения, позволяющие при стесненном кручении определять как осевые и сдвиговые деформации, так и углы закручивания. При этом большое количество работ посвящено исследованию кручения балок открытого профиля, но гораздо меньше внимания уделялось вопросу кручения элементов замкнутого профиля. В виду этого в представленной работе уделяется внимание проблеме кручения балок следующих типов сечений: двутавр, швеллер, замкнутое коробчатое сечение.

Для расчета тонкостенных балок разработан конечный элемент, учитывающий неоднородность кручения с использованием гиперболических интерполирующих функций, а также получен конечный элемент постоянной жесткости, учитывающий эффект депланации поперечного сечения. Введение этих предпосылок позволило устранить ограничения существующей теории кручения и получить уточненные конечные элементы для внедрения на практике.

**Степень разработанности темы исследования.** Экспериментальные и теоретические исследования ограниченного кручения балок проводились Тимошенко С. П., Власовым В.З., Бычковым Д.В., Белым Г.И., Тусниным А.Р.,

Воронцовым Г.В., Соловьевым А.Б., Ватиным Н.И., Лалиным В.В., Рыбаковым В.А. и др. исследователями. Моделированию работы тонкостенной конструкции с учетом стесненного кручения посвящены работы следующих ученых: Белый Г.И., Власов В.З., Тимошенко С.П., Бондарь, В.С., Даншин, В.В., Benscoter, S. U., Bank, L. C., Lee, J., Туснин А. Р., Ivanov, S.S., Azarov, A.A., Прокич, М, Wang, Z.-Q., Zhao, J.-C, Vukasović, M., Pavazza, R., Vlak, F, Massa, J.C., Barbero, E.J., Kuttke, P., El Fatmi, Qi, H., Sapountzakis, E.J., Duan, L., Murin, J., Emre Erkmen, Wang, Z.Q., El Fatmi, Back, S. Y, Chen, B. Z, Shakourzadeh, H.

В диссертации рассмотрены и критически оценены основные результаты как отечественных, так и зарубежных исследований. Опыт, накопленный при исследовании работы тонкостенных сечений с ограниченным кручением, применим для расчета и проектирования элементов каркаса тонкостенных стальных конструкций.

**Целью диссертационной работы** является получение новых сведений о работе элементов тонкостенных сечений в условиях стесненного кручения, разработка теории расчета тонкостенных элементов с различными типами сечений с учетом стесненного кручения, уточнение пространственного стержневого конечного элемента путем введения дополнительной степени свободы в узле, учитывающей эффект депланации поперечного сечения.

**Задачи исследования.** Для достижения поставленной цели в диссертационном исследовании были поставлены и решены следующие задачи:

1. Получены разрешающие уравнения, учитывающие работу тонкостенной балки в условиях стесненного кручения.
2. Выполнены теоретические и численные исследования работы тонкостенных балок в условиях стесненного кручения с учетом различных типов сечений.
3. Разработана теория, учитывающая депланацию как открытых, так и замкнутых тонкостенных сечений в условиях стесненного кручения.
4. Изучено влияние изгибно-крутильной характеристики, используемой для построения конечно-элементной теории расчета тонкостенной балки под действием стесненного кручения.
5. Проведены конечно-элементные расчеты пространственной тонкостенной балки, подверженной кручению, с использованием уточненной матрицы жесткости, учитывающей дополнительные характеристики сечения.
6. Проведены конечно-элементные расчеты пространственной тонкостенной балки, подверженной кручению с изгибом, с использованием уточненной матрицы жесткости, учитывающей дополнительные характеристики сечения.

7. Выполнены численные расчеты тонкостенных балок, подверженных как кручению, так и кручению с изгибом, проведено сравнение полученных результатов расчета с экспериментальными данными.
8. Проведены экспериментальные исследования тонкостенного профиля в условиях кручения с изгибом.

**Научно-техническая гипотеза** заключается в предположении существенного влияния эффекта депланации на работу тонкостенных поперечных сечений в условиях стесненного кручения.

**Объектом исследования** являются тонкостенные стальные элементы в составе пространственных рам, подверженных стесненному кручению.

**Методология и методы исследования.** Исследование выполнено на основе комплексного использования теоретического, эмпирического и аналитического методов. Методологической основой работы послужили нормативная и научно-техническая отечественная и зарубежная литература, экспериментальные и теоретические данные, полученные отечественными и зарубежными учеными в области расчета тонкостенных профилей стальных конструкций с учетом стесненного кручения, а также исследования, основанные на теории математического моделирования и методе конечных элементов.

**Научная новизна работы** заключается в получении новых принципов и методов расчета тонкостенных профилей при стесненном кручении с учетом характеристик сечения:

1. Изучена работа элемента при действии свободного и стесненного кручения. Установлено, что форма тонкостенного сечения влияет на жесткость стержня при кручении, что обуславливает эффекты депланации.
2. Кольцевые и квадратные сечения, а также тонкостенные сечение с одной внутренней вершиной (уголок, треугольник или крест), не подвержены депланации. Для других типов сечений функции деформации относительно центра сдвига являются геометрическими величинами и необходимы для определения нормальных и касательных напряжений, вызванных ограничением деформации.
3. Для поперечных сечений с различными характеристиками предложены теоретические зависимости для моделирования работы тонкостенных сечений под действием стесненного кручения.
4. Для исследования работы элементов рамы под действием ограниченного кручения была введена специальная величина - изгибно-крутильной характеристики, учитывающее различные параметры тонкостенных сечений.

5. Разработан стержневой конечный элемент, позволяющий выполнять расчеты на кручение тонкостенных балок открытого и замкнутого профиля в зависимости от геометрических характеристик сечения.
6. Проведены экспериментальные исследования тонкостенного профиля, подвергнутого комбинированному нагружению: кручению и изгибу с кручением, выполнено сравнение полученных данных с результатами конечно-элементных расчетов.

**Теоретическая значимость работы** заключается в разработке аналитических моделей и теории расчета тонкостенных балок открытого и замкнутого профиля на стесненное кручение с учетом геометрических характеристик сечения.

**Практическая значимость работы** заключается в разработке конечно-элементной методики расчета тонкостенных профилей в условиях стесненного кручения с учетом геометрических характеристик сечений в качестве основных параметров. Полученная методика может успешно применяться для практических расчетов конструкций, подверженных изгибу с кручением.

**Положения, выносимые на защиту.** На защиту выносятся:

1. Разрешающие уравнения теории кручения стержней, учитывающие особенности работы тонкостенных элементов в условиях стесненного кручения.
2. Результаты теоретических и численных исследований работы тонкостенных балок в условиях стесненного кручения с учетом различных типов сечений.
3. Теория, учитывающая депланацию как открытых, так и замкнутых тонкостенных сечений в условиях стесненного кручения.
4. Конечные элементы пространственной тонкостенной балки с использованием уточненной матрицы жесткости, учитывающие дополнительные характеристики сечения при стесненном кручении и депланации.
5. Результаты экспериментальных исследований тонкостенного стального профиля, подверженного кручению с изгибом.

**Степень достоверности результатов.** Достоверность результатов обеспечена использованием теоретического, эмпирического и аналитического методов исследования, а также численной и экспериментальной верификации разработанных математических моделей и выдвинутых гипотез.

**Апробация результатов исследования.** Основные результаты диссертации были доложены на 8 конференциях:

1. 04–05 Апреля. 2019, Инженерные системы - 2019, Научно-практическая конференция с международным участием, Инженерная академия, Университет



- РУДН (докладчик).
2. 28–30 Апреля 2020 года, Международная конференция по инженерным системам 2020 (ICES 2020), научно-практическая конференция с международным участием, Инженерная академия, Университет РУДН (докладчик).
  3. 08–10 Декабря 2020, Международная академия астронавтики (IAA) SciTech Forum, Инженерная академия Российского университета дружбы народов (RUDN University) (докладчик).
  4. 28–30 Апреля 2021 года, Международная конференция по инженерным системам 2021 (ICES 2021), научно-практическая конференция с международным участием, Инженерная академия, Университет РУДН (докладчик).
  5. 11–13 Ноября 2021 года, II научная конференция "Моделирование и методы структурного анализа", Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация (докладчик).
  6. 20–22 Октября 2021 года, международная конференция по инженерным изысканиям, Инженерная академия Российского университета дружбы народов (RUDN University) (докладчик).
  7. 06–08 Апреля 2022 года, Международная конференция по инженерным системам 2022 (ICES 2022), научно-практическая конференция с международным участием, Инженерная академия, Университет РУДН (докладчик).
  8. 20–22 Апреля 2022 года, Международная научная конференция "Передовые достижения в области гражданского строительства, строительство формирование жилой среды" (FORM-2022), Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация (докладчик).

**Публикации.** Основные положения диссертации опубликованы в 10 печатных работах, из них 8 публикаций в изданиях, индексируемых в международной базе данных Scopus, 2 публикации – в ведущих рецензируемых научных изданиях, рекомендованных «Перечнем РУДН» / ВАК РФ, 9 зарегистрированных программ для ЭВМ.

**Структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, выводов, списка цитируемой литературы (230 источников) и приложения. Работа изложена на 177 страницах, содержит 96 рисунков, 7 таблиц.

## **ГЛАВА 1. ГИПОТЕЗА И ОБЗОР ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ КРУЧЕНИЕМ**

### **1.1. Обзор развития теории тонкостенных конструкций с ограниченным кручением рамных конструкции**

Многие инженерно-технические отрасли ориентируются на прочные и легкие конструкции, чтобы оптимизировать их стоимость и эффективность. Действительно, возросло использование тонкостенных конструкций, таких как стальные и бетонные балки, стальной лист, конструкции для применения в морских условиях, а также и другие конструктивные элементы. Тонкостенные конструкции определяются как тонкие конструкции, основанные на геометрии поперечного сечения, с различными размерами разного порядка величины [1]. Они имеют много преимуществ, которые выделяют их среди других конструктивных элементов: они дешевле в производстве, транспортировке и монтаже, легкие, но могут выдерживать значительные нагрузки; они гибкие по форме и материалу. Поэтому тонкостенные стальные элементы широко используются в строительстве из-за их высокой прочности, отличной пластичности, быстрого возведения и эффективного разделения пространства. Их производство, транспортировка и установка обходятся дешевле, чем у более компактных балок; они допускают большую гибкость материала и формы, предоставляя конструктору больше возможностей. Классическая теория балок основана на предположении Бернулли, которое гласит, что плоские поперечные сечения должны оставаться плоскими, а ось балки должна оставаться перпендикулярной к поперечному сечению в плоскости. По математической теории упругости, гипотеза о деформации сечения подразумевает отсутствие сдвиговых деформаций и, как следствие, отсутствие сдвиговых напряжений. Власов разработал фундаментальную теорию тонкостенных элементов с открытым поперечным сечением [2]-[3], где игнорируются такие параметры, как деформации сдвига, эффект коэффициента Пуассона и деформации сечения в плоскости. В настоящее время разрабатываются методы, которые учитывают эффект сдвига, исключая при этом сложности математических расчетов

[4]-[8]. Деформации и образование ударов служат источниками для разработки подходов к анализу тонкостенных конструкций [9]. Поведение, деформация и жесткость на кручение тонкостенных конструкций, а также жесткость на кручение тонкостенных стержней, оцененная с помощью различных методов, исследованы в трудах [10]-[12]. Кроме того, в трудах [13]-[14] рассмотрены уравнения упругих линий углов закручивания и би-моментов для различных видов расположения нагрузки.

Поведение тонкостенного стержня при кручении сильно зависит от топологии его сечения. Если сеть сечения не содержит петель, то сечение называется "открытым", если же сеть сечения содержит хотя бы одну петлю, то сечение называется "закрытым". Это геометрическое свойство используется для разработки специальных методов вычисления их констант кручения и депланации. [15]-[24]. Крутильные свойства открытых тонкостенных сечений существенно отличаются от свойств закрытых тонкостенных сечений. Подобное различие влияет на структурную реакцию балки, в первую очередь на поведение при сдвиге и кручении. Важность ограниченного кручения тонкостенных сечений очень велика, так как деформации и напряжения, вызванные кручением, влияют на поведение всей конструкции. [25]-[35]. В настоящем исследовании рассматриваются балочные элементы, подверженные кручению, и используются различные методы конечных элементов. Для расчета перемещений, внутренних сил и моментов конструкции решаются управляющие уравнения. Тонкостенные секции подвержены смятию при воздействии сжимающих напряжений, что, как правило, происходит для элементов при осевом сжатии и при изгибе [36]-[39]. Неустойчивость таких конструкций зависит от геометрии поперечного сечения, и из-за повышенной прочности системы они приводят к сложному структурному поведению, что требует разработки более полных и точных математических подходов [41], [42]. Постоянство характеристик сечения является важным параметром для тонкостенных стальных элементов, поскольку данное исследование посвящено брусу, подвергающемуся кручению, с короблением

широкого диапазона открытых и закрытых сечений с различными значениями характеристического числа для кручения, например стальные и бетонные балки, стальные балки холодной штамповки, стальные листы и другие конструкции [53]-[60]. Тонкостенные балки можно разделить на две категории, а именно: закрытые и открытые тонкостенные секции. Традиционная теория тонкостенных балок была разработана Власовым [2], [20]. Кроме того, тонкостенные структуры, такие как пластины и оболочки, связанные с формулами конечных элементов, являются наиболее распространенными конструктивными элементами в природе и технике [61]-[62].

Имеются разные типы сечений, основанные на их геометрии, и они часто используются при решении уравнений для проектирования, а также для определения свойств, как показано на рисунке 1.1.

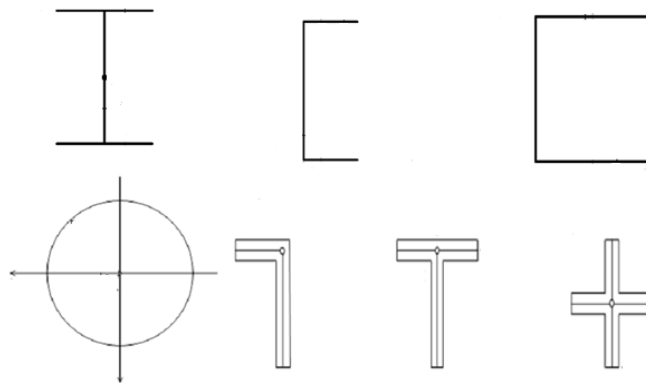


Рис. 1.1– Разнообразие геометрических форм тонкостенных сечений

В классической теории балок (теория Эйлера-Бернулли) предполагается, что плоские сечения остаются плоскими и ось балки остается перпендикулярной к сечению в плоскости [3]-[4].

При анализе тонкостенных конструкций, подверженных кручению, необходимо учитывать эффект коробления, так как осевые напряжения возникают в основном в местах действия сосредоточенных моментов кручения (за исключением свободных концов) и в сечениях с ограничениями на коробление. Обычно тонкостенные сечения ведут себя не по закону плоских сечений Эйлера-Бернулли-Навье, а по общей теории тонкостенных сечений, разработанной

Власовым [2]. Если коробление не сдерживается, то приложенный крутящий момент полностью переносится равномерным кручением, в результате чего эффект сдвига в энергию деформации можно считать достаточно малым [63]. При ограничении коробления в конструкции возникают дополнительные напряжения сдвига, а также нормальные напряжения, поскольку напряжениями коробления нельзя пренебрегать [64], [65], [66]. Результирующие напряжения в основном являются напряжениями сдвига (равномерное кручение) или комбинацией сдвиговых и продольных напряжений (неравномерное кручение). Распределение этих напряжений по тонкостенному сечению в значительной степени зависит от геометрии поперечного сечения и, в частности, от того, является ли это сечение открытым или закрытым [66], [67]. Для того чтобы включить напряжения сдвига деформации в глобальное равновесие бруса, то есть учесть вторичный эффект деформации крутящего момента, обычно требуется дополнительная кинематическая составляющая (наряду с углом закручивания), что увеличивает сложность решаемой задачи [61].

С 1945 года в классических теориях кручения тонкостенных балок с учетом депланации был достигнут значительный прогресс, однако оставались сложные вопросы по симметричным поперечным сечениям [68], [69]. Для разработанных подходов к анализу тонкостенных конструкций деформации и накопление повреждений служат источниками [70], [71], [72]. Существует множество исследований по неравномерному кручению с учетом или без учета эффектов коробления в виде теорий, а также в виде анализа с использованием коммерческих МКЭ-кодов [73], [74], [76], [77]. Матрица жесткости элемента и векторы нагрузки определяются с помощью первичной и вторичной функций депланации. Эффекты депланации возникают в основном в точках действия сосредоточенных крутящих моментов (за исключением свободных концов балки) и в сечениях с ограничениями свободного депланации. [78]-[80]. Эффект депланации включается через дополнительную степень свободы в каждой узловой точке в виде первой производной от угла закручивания поперечного сечения балки [81]. Между тем,

анализ кручения тонкостенных сечений, включая сдвиг, был изучен в работах [82], [83], [84]. Анализ равномерного кручения показывает, что секториальной площади балок зависит от формы их сечения. Был разработан новый элемент кручения тонкостенных балок, включающий деформацию сдвига, который учитывает деформацию депланации и деформацию сдвига из-за сдержанного кручения [85], [86]. Призматические балки сплошного и полого сечения или тонкостенные сечения с одной внутренней вершиной (например, угол, тройник или крест) не деформируются, но все остальные сечения будут испытывать секториальной площади поперечного сечения, в зависимости от геометрии сечения. Пренебрежение этими деформирующими напряжениями может привести к значительным ошибкам, особенно при кручении открытого профиля или сдвиговом изгибе коротких балок, и ситуация может быть еще более критической для композитных балок [87], [88]. Однако напряжения и деформации, связанные с короблением в закрытых сечениях, можно считать незначительными, и поэтому ими пренебрегают. Вполне обоснованно, что сильное коробление будет иметь больший эффект в открытых, а не в закрытых сечениях, и его значение будет ограничено открытыми сечениями. Ограничение деформации коробления приводит к тому, что скорость кручения становится нулевой в точке ограничения, и это вызывает местное эффективное усиление жесткости при кручении, которое влияет на глобальную реакцию балки на кручение [89]. Разница между перемещениями и напряжениями, вызванными равномерным и неравномерным кручением, наиболее ярко выражена для тонкостенных сечений. Секториальной площади тонкостенной конструкции вследствие кручения представляет собой все продольные перемещения, вызванные кручением поперечного сечения элемента вокруг центра сдвига.

В некоторых случаях сложность структурного поведения при неустойчивости смятия этих конструкций создает более сложные структурные характеристики, которые требуют детальных расчетов из-за большого количества степеней свободы [7]. Неустойчивость таких структур зависит от геометрии и совершенства

поперечного сечения. Для часто используемых тонкостенных элементов конструкций их поведение было подробно изучено различными авторами, и наиболее простым способом рассмотрения этих элементов при анализе рамных конструкций является использование элементов продольных балок [75], [90]-[95]. Это возможно в тех случаях, когда исследуется реакция тонких элементов, например, при анализе стальных конструкций, зданий, мостов или других сложных сооружений. Текущий подход к проектированию в соответствии со спецификациями AISC включает три метода расчета, и наиболее распространенным и современным подходом для проектирования стальных конструкций является расчет по нагрузке и коэффициенту сопротивления [96]-[112]. С другой стороны, довольно часто используется подход пластического расчета и спецификация расчета допустимых напряжений. Целью проектировщика стальных конструкций является анализ структурных элементов каркаса путем оценки перемещений, внутренних сил и моментов, и проверки безопасности элементов [21, 169, 196, 181]. В целом рамные конструкции широко используются в конструктивном проектировании в качестве плоских и пространственных рам, которые изготавливаются из различных материалов: стали, армированного и предварительно напряженного бетона или деревянных конструкций [113]. Для анализа и проектирования стальных рамных конструкций существуют различные методы, а также коммерческие программные пакеты, в которых реализуются различные подходы к решению проблемы [114], [100], [108], [115], [116]. На поведение стальной рамной конструкции влияют геометрические и материальные нелинейности, которые включают эффекты второго порядка (г и д в рисунке 1.2) и постепенную текучесть, соответственно. Метод анализа стальной рамы развивается от упругого анализа первого порядка (а и е в рисунке 1.2) к неупругому анализу второго порядка, который является продвинутым анализом. [104],[117]-[127], [127]-[130]. Упругий структурный анализ разработан для расчета внутренних усилий на каждый член конструкции, в то время как неупругий структурный анализ используется для прогнозирования предельной прочности каждого изолированного

члена [131][132]. Сравнение кривых "нагрузка - деформация" нескольких структурных анализов показано на рисунке 1.2.

Данное исследование применяется к стержням замкнутого и/или открытого сечения из тонкостенной стали, подвергающимся различным крутящим нагрузкам и наиболее общим граничным условиям кручения. Рассматривается поведение тонкостенных участков бруса с ограниченным кручением с использованием управляющего уравнения для неравномерного кручения. Рассмотрены стержни закрытого и открытого сечений тонкостенного стального сечения, подверженные сосредоточенной крутящей нагрузке и наиболее общим граничным условиям кручения. Изучено и оценено влияние свойств сечения, которые являются характеристическим числом для кручения на различные типы сечений.

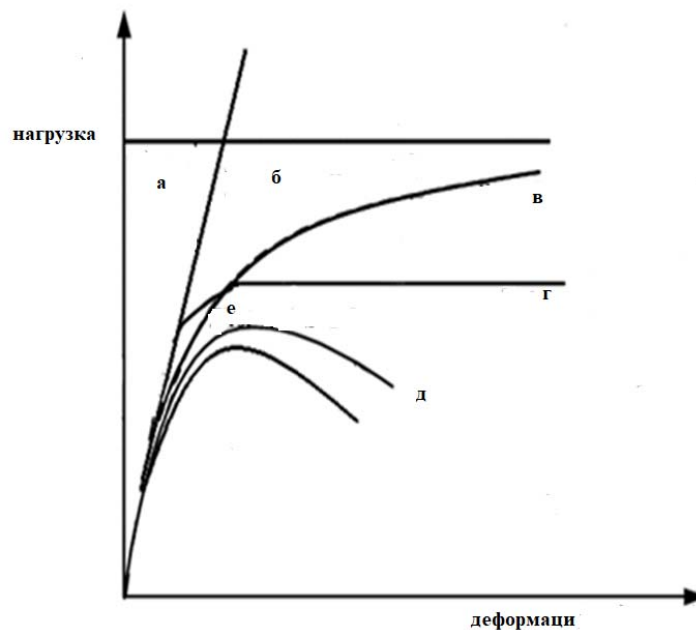


Рисунок 1.2—Кривая нагрузка-перемещение для различных методов анализа

### 1.2. Идентификация материальных точек и состояний

Бесконечно малый элемент массы каркаса называется материальной точкой. Материальная точка  $P$  эталонного состояния каркаса идентифицируется по ее геометрическому расположению в эталонной конфигурации, как показано на рисунке 1.3. Геометрическое местоположение задается идентификатором элемента, расстоянием секции от начального узла и координатами точки  $P$  в секции. После смещения рамы под воздействием внешних факторов точка  $P$



остается идентифицированной по ее местоположению в опорной конфигурации. Новое местоположение точки задается ее смещением, которое добавляется к местоположению в опорной конфигурации. Смещение общей материальной точки  $P$  — это сумма ее смещений, вызванных движением жесткого тела, растяжением, изгибом и кручением элемента, в котором она находится.

Движение элемента жесткого тела определяется его взаимодействием с другими элементами рамы. Растяжение и изгиб вызывают дополнительное движение участка жесткого тела, содержащего материальную точку  $P$ . Это движение добавляется к движению элемента жесткого тела. Результирующее движение описывается вектором движения секции. Различные авторы исследовали деформацию тонкостенных стержней разного сечения с ограниченным кручением и их поведение [33-37]. Вектор перемещения содержит координаты смещения Центра тяжести сечения, а вектор вращения - координаты вращения сечения относительно его Центра тяжести, как показано на Рисунок 1.4. Координаты этих векторов могут быть заданы как в глобальной, так и в членной системе координат.

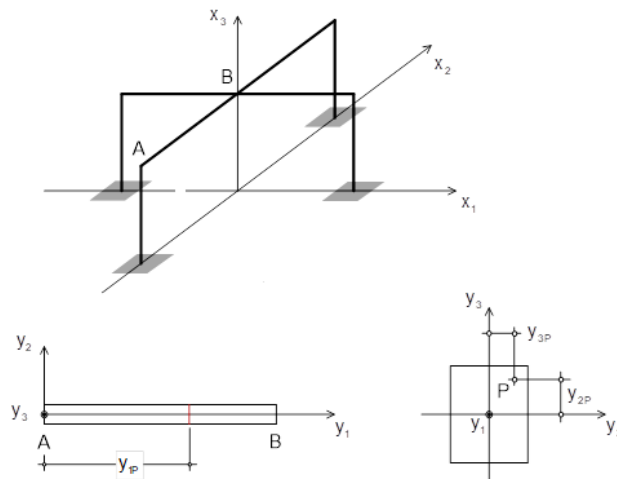


Рисунок 1.3—положение материальной точки в каркасной структуре

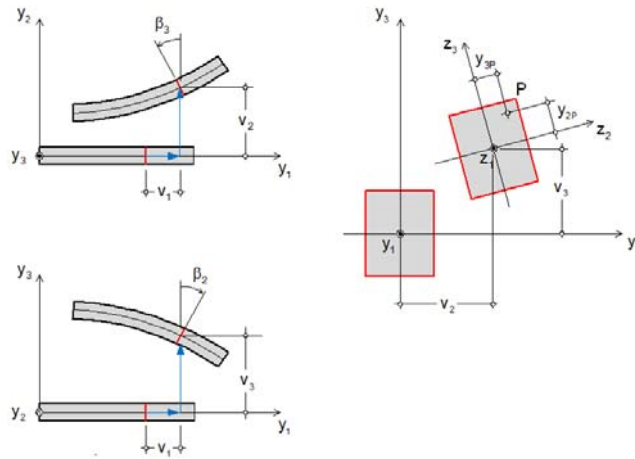


Рисунок 1.4 – Движение твердого тела сечения элемента

Кручение элемента вызывает поворот сечения, содержащего точку  $P$ , вокруг продольной оси элемента и смещение, нормальное к плоскости сечения. Нормальное смещение вследствие кручения называется депланацией сечения. При вращении форма сечения не изменяется, но деформированное сечение уже не является плоскостью. Если продольные смещения, вызванные кручением, сдерживаются, например, опорой, то кручение называется сдержанным. Крутильное смещение точки  $P$  добавляется к смещениям, вызванным движением жесткого тела, растяжением и изгибом, чтобы получить полное смещение точки  $P$ .

### 1.3. Разрешающие уравнения для равномерного и неравномерного кручения

Для упругого бруса с прямой осью форма сечения, нормального к оси, постоянна по всей длине бруса, как показано на Рисунок 1.5. Строится локальная декартова система координат бруса  $y_1$ ,  $y_2$ , and  $y_3$  с осями. Ось проходит через центры тяжести сечений, которые считаются центрами вращения. Ось пересекает две торцевые поверхности бруса в точках  $A$  и  $B$ , которые называются начальным и конечным узлами бруса. Брус направлен от узла  $A$  к узлу  $B$ .

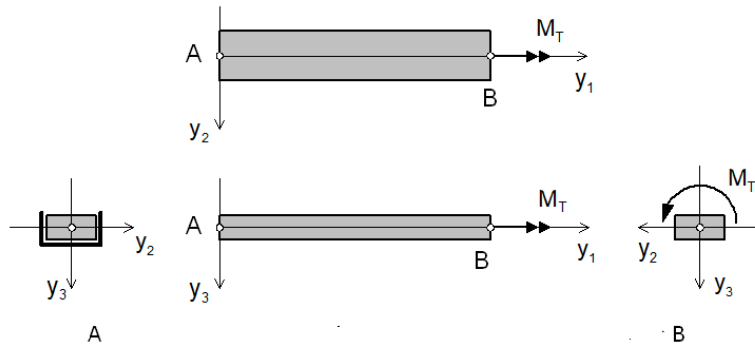


Рисунок 1.5–Кручение призматического бруса

Брус поддерживается вилкой на торцевой поверхности, содержащей узел  $A$ . Каждая точка этой грани может свободно смещаться в направлении оси  $y_1$ , но не может смещаться в плоскости, охватываемой осями  $y_2$  и  $y_3$ . Нормальное напряжение, действующее на торцевую поверхность  $A$ , равно нулю. Брус подвергается скручивающему моменту  $M_T$ , действующему вокруг оси  $y_1$  в узле  $B$ . Нормальное напряжение, действующее на торец  $B$ , равно нулю. Между узлами  $A$  и  $B$  на брус не действуют никакие нагрузки или опоры. Необходимо определить деформацию бруса и напряжения в брус под действием крутящего момента. Кручение бруса под действием крутящего момента называется равномерным, если перемещения и напряжения в брус имеют следующие характеристики:

- (а) Точки на оси вращения не перемещаются под действием крутящего момента.
- (б) Угол закручивания относительно оси вращения изменяется линейно от узла  $A$  до узла  $B$ .
- (в) Напряжение, нормальное к сечению бруса, равно нулю.

Равномерное кручение также называют кручением Сен-Венана, чистым кручением или необузданным кручением. Оно было впервые сформулировано французским физиком де Сен-Венаном (1797–1886). Если смещения и напряжения бруса не имеют одного или нескольких из трех указанных признаков, кручение называется неравномерным.

#### 1.4. Гипотеза равномерного кручения

Предполагается, что поведение бруса при равномерном кручении удовлетворяет следующим гипотезам:

(а) Форма сечения не меняется при вращении.

(б) Напряжения не зависят от координат

Гипотеза (а) подразумевает, что деформации  $\varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$  и  $\varepsilon_{23}$  равны нулю.

Гипотеза (б) подразумевает, что продольное напряжение  $\sigma_{11}$  равно нулю во всех точках бруса, поскольку предполагается, что оно равно нулю на торцах из-за условий опоры.

#### 1.4.1. Смещение при равномерном кручении

Гипотезы для равномерного кручения не определяют никаких свойств координаты  $v_1$ , перемещения, поэтому оно представляет собой общую функцию  $y_1, y_2$  и  $y_3$ . Координаты  $v_2$  и  $v_3$  перемещения точки  $P := (y_1, y_2, y_3)$  сечения зависят от вращения сечения вокруг центра вращения  $\beta_1(y_1)$ , который здесь принимается за центр масс  $G$  на оси  $y_1$ , как показано на рис. 1.6. Точка  $P$  описывает дугу радиусом  $r$ . Пусть угол от оси к прямой  $GP$  равен  $\alpha$ . Для малых вращений дуга  $P\hat{P}$  аппроксимируется прямой, ортогональной к прямой  $GP$ . Компоненты смещения точки  $P$  равны:

$$v_1 = v_1(y_1, y_2, y_3) \quad (1.1)$$

$$v_2 = -r \beta_1 \sin \alpha = -y_3 \beta_1 \quad (1.2)$$

$$v_3 = r \beta_1 \cos \alpha = y_2 \beta_1 \quad (1.3)$$

Где:  $\beta_1(y_1)$ : Угол поворота сечения относительно оси  $y_1$

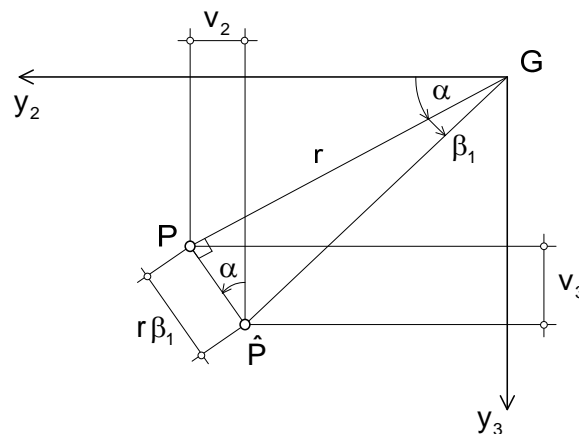


Рисунок 1.6—Вращение точки  $P$  относительно Центра тяжести  $G$  сечения

### 1.4.2. Деформации и напряжения

Напряженное состояние в точке  $P$  определяется из общих уравнений линейной теории упругости:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial y_1}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial v_3}{\partial y_3} = 0, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial y_2} = 0 \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{\partial v_2}{\partial y_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_2} = 0, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial v_1}{\partial y_2} + \frac{\partial v_2}{\partial y_1} = \frac{\partial v_1}{\partial y_2} - y_3 \frac{d\beta_1}{dy_1} \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{\partial v_1}{\partial y_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_1} = \frac{\partial v_1}{\partial y_3} + y_2 \frac{d\beta_1}{dy_1}$$

Выражения (1.4)-(1.5) показывают, что перемещения (1.1) - (1.3) удовлетворяют условиям  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{23} = 0$ . Остается определить функции  $v_1(y_1, y_2, y_3)$  и  $\beta_1(y_1)$ . Напряжения, обусловленные деформациями (1.4), определяются с помощью конститутивных уравнений:

$$\sigma_{11} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{11} \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{11} \quad (1.6)$$

$$\sigma_{12} = G \varepsilon_{12} \quad \sigma_{13} = G \varepsilon_{13} \quad \sigma_{23} = 0 \quad (1.7)$$

### 1.4.3. Секториальная площадь сечения

Смещение  $v_1$  поперечного сечения в результате кручения называется деформацией сечения. Из гипотезы (б) для равномерного кручения следует, что напряжение  $\sigma_{11}$  и, следовательно, деформация  $\varepsilon_{11}$  равны нулю. Смещение  $v_1$  зависит только от координат  $y_2$  и  $y_3$ : и является свойством формы сечения бруса.

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial y_1} = 0 \quad (1.8)$$

$$v_1 = c \omega(y_2, y_3) \quad (1.9)$$

Эта функция  $\omega(y_2, y_3)$  называется функцией депланации. Постоянный коэффициент  $c$  вводится для того, чтобы можно было масштабировать функцию депланации в дальнейшем выводе. Выражение (1.9)  $v_1$  подставляется в выражение (1.5) для определения деформации сдвига:

$$\varepsilon_{12} = c \frac{\partial \omega}{\partial y_2} - y_3 \frac{d\beta_1}{dy_1} \quad (1.10)$$

$$\varepsilon_{13} = c \frac{\partial \omega}{\partial y_3} + y_2 \frac{d\beta_1}{dy_1} \quad (1.11)$$

Результаты (1.10) - (1.11) подставляются в уравнение равновесия теории упругости для направления  $y_1$ :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial y_3} = 0 \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y_3^2} = 0 \quad (1.13)$$

$\omega(y_2, y_3)$  секториальной координаты (секториальной площади)

Выражение (1.13) является управляющим уравнением для определения секториальной координата сечения. Для определения угла закручивания выражения (1.5) для деформаций  $\varepsilon_{12}$  и  $\varepsilon_{13}$  дифференцируются относительно  $y_1$ . Согласно гипотезе (b) для равномерного кручения, напряжения  $\sigma_{12}$  и  $\sigma_{13}$  не зависят от  $y_1$ , так что производные соответствующих деформаций равны нулю:

$$\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y_1} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial y_1 \partial y_2} - y_3 \frac{d^2 \beta_1}{dy_1^2} = -y_3 \frac{d^2 \beta_1}{dy_1^2} = 0 \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial y_1} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial y_1 \partial y_3} + y_2 \frac{d^2 \beta_1}{dy_1^2} = y_2 \frac{d^2 \beta_1}{dy_1^2} = 0 \quad (1.15)$$

Поскольку вторая производная по  $\beta_1$  к  $y_1$  равна нулю, то первая производная постоянна. Вращение на сечении  $y_1 = 0$  задано равным нулю, чтобы предотвратить движение твердого тела в направлении оси  $y_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_1}{dy_1} &= \text{постоянный} \\ \beta_1 &= \text{постоянный } y_1 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Константу  $c$  в выражении (1.9) можно выбирать произвольно, но так, чтобы полученные выражения были удобными для расчета. Поскольку производная  $\beta_1$  по отношению к  $c$  является постоянной, константу  $c$  можно сделать

пропорциональной этой производной. Отрицательный префикс необходим для того, чтобы сохранить традиционное определение знака секториальная координата:

$$v_1 = -\frac{d\beta_1}{dy_1} \omega(y_2, y_3) \quad (1.17)$$

$$\varepsilon_{12} = -\frac{d\beta_1}{dy_1} \left( \frac{\partial \omega}{\partial y_2} + y_3 \right) \quad (1.18)$$

$$\varepsilon_{13} = -\frac{d\beta_1}{dy_1} \left( \frac{\partial \omega}{\partial y_3} - y_2 \right) \quad (1.19)$$

#### 1.4.4. Крутящий момент

Напряжения сдвига  $\sigma_{12}$  и  $\sigma_{13}$ , действующие на элемент с площадью  $dA = dy_2 \cdot dy_3$  поперечного сечения, показаны на рисунке 1.7:

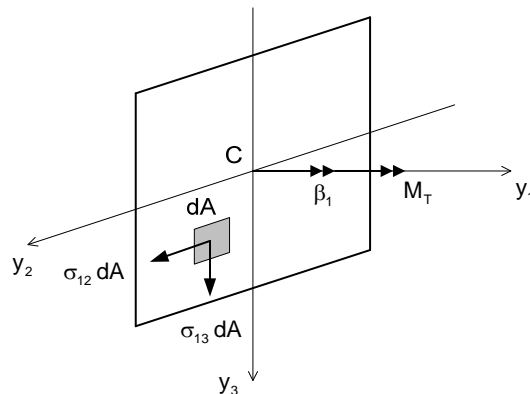


Рисунок 1.7—Сдвиговые напряжения, действующие на участок бруса

Крутящий момент  $M_T$ , обусловленный действующими на сечение напряжениями сдвига, составляет:

$$M_T = \int_A (\sigma_{13} y_2 - \sigma_{12} y_3) dA \quad (1.20)$$

Напряжения сдвига подставляются из (1.5), (1.15) и (1.16):

$$M_T = GJ \frac{d\beta_1}{dy_1} \quad (1.21)$$

$$J = \int_A \left( y_2^2 + y_3^2 - y_2 \frac{\partial \omega}{\partial y_3} + y_3 \frac{\partial \omega}{\partial y_2} \right) dy_2 dy_3 \quad (1.22)$$

$J$  константа кручения сечения

Константа кручения  $J$  является свойством геометрической формы сечения и поэтому не зависит от приложенного момента кручения. Для заданного крутящего момента  $M_T$  и константы кручения  $J$ , угол поворота (угол закручивания)  $\beta_1$  определяется выражением (1.16):

$$\beta_1 = \frac{M_T}{G J} y_1 \quad (1.23)$$

### 1.5. Определение секториальной координаты

Функция деформации  $\omega(y_2, y_3)$  поперечного сечения должна удовлетворять уравнению (1.12). Граничное условие для этого дифференциально-частного уравнения вытекает из того, что напряжение на боковой поверхности бруса равно нулю. Вектор напряжения  $\mathbf{s}$  в точке на боковой поверхности определяется из напряженного состояния  $\mathbf{S}$  и единичного вектора внешней нормали  $\mathbf{n}$  с помощью выражений (1.4) и (1.6):

$$\mathbf{s} = \mathbf{S} \mathbf{n}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline s_1 \\ \hline s_2 \\ \hline s_3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & 0 \\ \hline \sigma_{21} & 0 & 0 & n_2 \\ \hline \sigma_{31} & 0 & 0 & n_3 \\ \hline \end{array} \quad (1.24)$$

Второе и третье уравнения в (1.24) выполняются одинаково. Поэтому вектор напряжений  $\mathbf{s}$  равен нулю, если первое уравнение в (1.41) также удовлетворяется. Выражения для напряжений сдвига подставляют из (1.6), (1.18) и (1.19):

$$\left( \frac{\partial \omega}{\partial y_2} + y_3 \right) n_2 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial y_3} - y_2 \right) n_3 = 0 \quad (1.25)$$

Координаты  $(y_2, y_3)$  точек на границе и координаты  $n_2, n_3$  единичной внешней нормали в этих точках являются известными свойствами геометрии сечения. Уравнение (1.22) является граничным условием для дифференциального уравнения (1.10). Секторальная координата может быть определена в пределах произвольного постоянного члена, который представляет собой движение твердого тела бруса в направлении  $y_1$ .



### 1.5.1. Функция напряжения

Решение уравнения (1.12) с граничным условием (1.24) упрощается, если выразить функцию  $\omega(y_2, y_3)$  деформации в терминах функции напряжения Прандтля  $\varphi(y_2, y_3)$  с помощью следующего преобразования:

$$\frac{\partial \omega}{\partial y_2} + y_3 = -\frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y_3} - y_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \quad (1.27)$$

Производные  $\omega$  от подставляются в выражения (1.18) и (1.169) для деформаций сдвига, действующих на поперечное сечение:

$$\varepsilon_{12} = \frac{d\beta_1}{dy_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \quad (1.28)$$

$$\varepsilon_{13} = -\frac{d\beta_1}{dy_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \quad (1.29)$$

Управляющее уравнение (1.12) для  $\omega$  удовлетворяется подстановкой (1.26) и (1.28). Управляющее уравнение для  $\varphi$  получается из (1.18), (1.19), (1.28) и (1.29) путем вычитания  $\varepsilon_{13,2}$  из  $\varepsilon_{12,3}$ . Граничное условие для  $\varphi$  получается путем подстановки (1.25) и (1.26) в (1.24):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_3^2} = -2 \quad (1.30)$$

$$n_3 \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} - n_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} = 0 \quad (1.31)$$

Выражения для компонент единичного нормального вектора  $\mathbf{n}$  выводятся из граничной кривой  $y_2(s), y_3(s)$  сечения. Параметр  $s$  — это расстояние вдоль контура от произвольно выбранной фиксированной точки  $A$  на контуре, как показано на рисунке 1.8. Координаты внешней единицы нормали к поверхности таковы:

$$n_1 = 0, \quad n_2 = \frac{dy_3}{ds}, \quad n_3 = -\frac{dy_2}{ds} \quad (1.32)$$

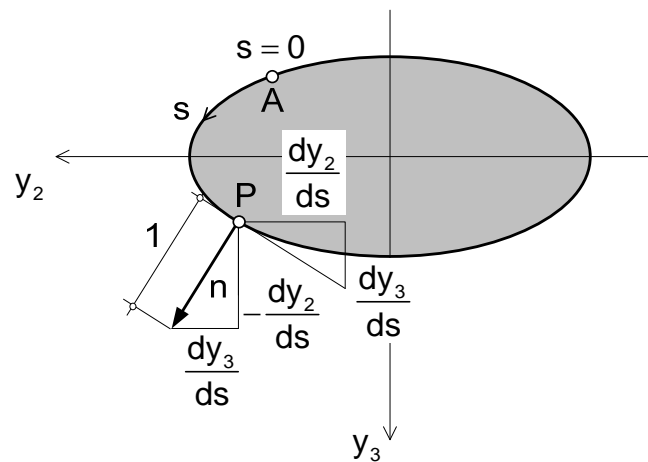


Рисунок 1.8–Внешняя единичная нормаль  $n$  поперечного сечения

Изменение функции напряжения с расстоянием  $s$  по контуру получается из (1.21) и (1.22):

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial y_2} \frac{dy_2}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_3} \frac{dy_3}{ds} = -n_3 \frac{\partial\varphi}{\partial y_2} + n_2 \frac{\partial\varphi}{\partial y_3} = 0$$

$$\varphi(s) = \text{констант} := \varphi_0 \quad (1.33)$$

Функция напряжений постоянна на границе сечения. Если сечение не содержит внутренних элементов, то  $\varphi_0$  может быть произвольно задана равной нулю, поскольку напряжения и сопротивление кручению не зависят от  $\varphi$ . Функция напряжений для бруса без отверстий определяется путем решения уравнения (1.34) с граничным условием (1.35):

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_3^2} + 2 = 0, \quad (y_2, y_3) \in A \quad (1.34)$$

$$\varphi = 0, \quad (y_2, y_3) \in \partial A \quad (1.35)$$

### 1.5.2. Аналогия с мембраной

Уравнения (1.34) и (1.35) для функции напряжения  $\varphi$  похожи на уравнения для равномерно натянутой мембраны, подверженной равномерной нормальной нагрузке  $p$ . Пусть мембрана натянута на отверстие  $A$  с изотропной силой предварительного напряжения  $N$  на единицу ширины и предполагается, что периметр отверстия  $A$  не смещается при приложении нагрузки. Уравнение

равновесия для мембраны следует из рисунка 1.9. Смещение по периметру проема равно нулю:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y_3^2} + \frac{p}{N} = 0, \quad (y_2, y_3) \in A \quad (1.36)$$

$$v_1 = 0, \quad (y_2, y_3) \in \partial A \quad (1.37)$$

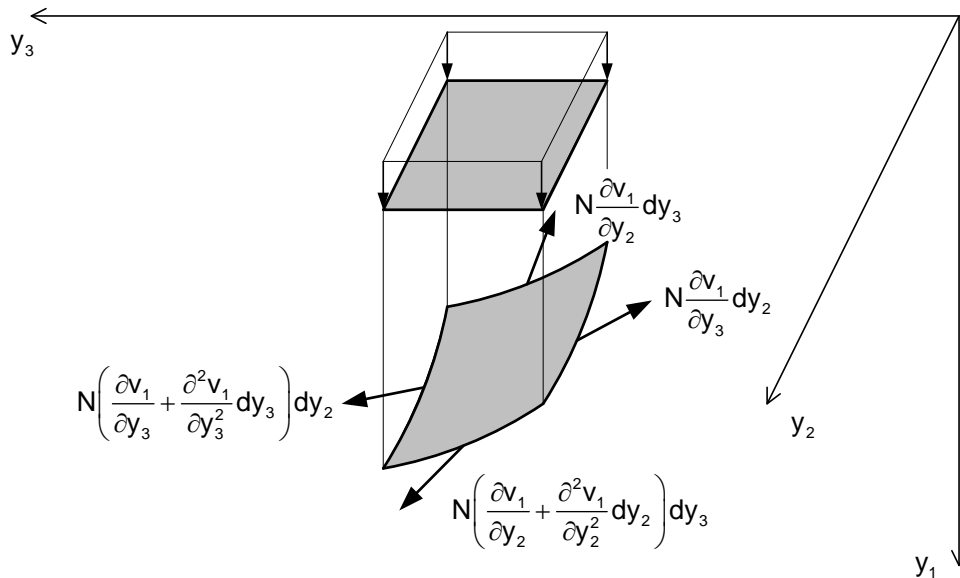


Рисунок 1.9—Силы, действующие на элемент мембраны

Уравнения (1.36) и (1.37) аналогичны уравнениям (1.34) и (1.35), если нагрузка  $p$  в (1.36) задана равной  $2N$ . Тогда нормальное смещение мембраны равно функции напряжения  $\varphi$ . Мембрана используется интуитивно для визуализации формы функции напряжения. Изолинии смещения  $v_1$  являются изолиниями  $\varphi$ . Максимальный наклон мембраны соответствует максимальному напряжению сдвига в стержне.

### 1.6. Константа кручения и напряжения сдвига

Управляющее уравнение (1.34) для функции напряжения  $\varphi(y_2, y_3)$  решается с граничным условием (1.35). Константа кручения  $J$  определяется путем подстановки (1.26) и (1.27) в (1.22):

$$J = - \int_A \left( y_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} + y_3 \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \right) dA \quad (1.38)$$

Уравнение (1.38) интегрируется по частям, учитывая, что функция напряжения  $\varphi$  равна нулю на границе:

$$\int_A y_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} dA = \int_{y_{31}}^{y_{32}} \int_{y_{21}}^{y_{22}} y_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} dy_2 dy_3 = \int_{y_{31}}^{y_{32}} \left( - \int_{y_{21}}^{y_{22}} \varphi dy_2 + \varphi y_2 \Big|_{y_{21}}^{y_{22}} \right) dy_3 = - \int_A \varphi dA \quad (1.39)$$

$$\int_A y_3 \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} dA = \int_{y_{21}}^{y_{22}} \int_{y_{31}}^{y_{32}} y_3 \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} dy_2 dy_3 = \int_{y_{21}}^{y_{22}} \left( - \int_{y_{31}}^{y_{32}} \varphi dy_3 + \varphi y_3 \Big|_{y_{31}}^{y_{32}} \right) dy_2 = - \int_A \varphi dA$$

$y_{21}, y_{22}$     пределы интегрирования для полосы, параллельной оси  $y_2$     (1.40)  
 $y_{31}, y_{32}$     пределы интегрирования для полосы, параллельной оси  $y_3$

Подстановка (1.39) и (1.40) в (1.38) переводит выражение для определения константы кручения  $J$  сечения без внутренних ячеек:

$$J = 2 \int_A \varphi dA \quad (1.41)$$

Распределение напряжений сдвига по сечению образуется из подстановки функции напряжений  $\varphi$  в выражения (1.21), (1.28) и (1.29):

$$\sigma_{12} = \frac{M_T}{J} \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \quad (1.42)$$

$$\sigma_{13} = - \frac{M_T}{J} \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \quad (1.43)$$

Максимальное касательное напряжение (напряжения сдвига)  $\tau$  в точке сечения с компонентами напряжения сдвига  $\sigma_{12}$  и  $\sigma_{13}$  является их результирующим значением:

$$\tau = \sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2} \quad (1.44)$$

Максимальные напряжения сдвига возникают в тех точках сечения, где градиент функции напряжения максимален. Эти точки можно оценить с помощью мембранной аналогии.

### 1.7. Кручение сечения открытого профиля

Рассмотрим сечение с  $n$  внутренними ячейками, как показано на рисунке 1.10. Пусть площадь ячейки  $i$  равна  $A_i$  и ее граница  $B_i$ . Расстояние  $s$  на границе

ячейки измеряется против часовой стрелки. Управляющее уравнение (1.30) справедливо для данного сечения, поскольку оно не зависит от формы поперечного сечения. Уравнение (1.33) показывает, что функция напряжения  $\varphi$  постоянна на внешней границе  $B_0$  и на каждой внутренней границе  $B_i$ . её значения  $\varphi_i$  для разных границ различны.

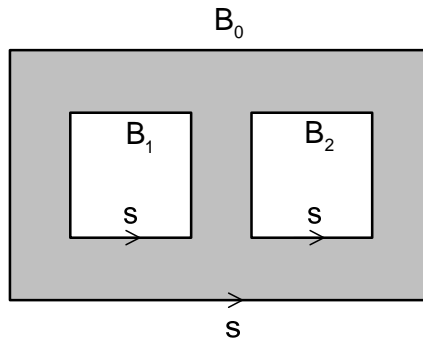


Рисунок 1.10–Границы поперечного сечения с внутренними ячейками

Таким образом, управляющие уравнения для функции напряжения имеют вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_3^2} = -2 \quad (1.45)$$

$$(y_2, y_3) \in B_0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi(y_2, y_3)}{\partial s} = 0 \quad (1.46)$$

$$(y_2, y_3) \in B_k \Rightarrow \frac{\partial \varphi(y_2, y_3)}{\partial s} = \varphi_k, \quad k \in \{1, \dots, n\} \quad (1.47)$$

Замкнутый интеграл от производной депланации  $v_1$  по длине пути  $s$  равен нулю, так как функция  $v_1$  является однозначной. Смещение  $v_1$  в точке  $s = 0$  имеет единичное значение:

$$\oint_{B_k} \frac{\partial v_1}{\partial s} ds = 0 \quad (1.48)$$

Перемещение подставляется из (4.14):

$$\oint_{B_k} \frac{\partial v_1}{\partial s} ds = -\frac{d\beta_1}{dy_1} \oint_{B_k} \left( \frac{\partial \omega}{\partial y_2} \frac{dy_2}{ds} + \frac{\partial \omega}{\partial y_3} \frac{dy_3}{ds} \right) ds = 0 \quad (1.49)$$

Производные секториальная координата  $\omega$  заменяются производными функции напряжения  $\varphi$  с помощью (1.26) и (1.27):

$$\oint_{B_k} \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} + y_3 \right) \frac{dy_2}{ds} - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} + y_2 \right) \frac{dy_3}{ds} \right) ds = 0 \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} \oint_{B_k} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \frac{dy_2}{ds} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \frac{dy_3}{ds} \right) ds &= \oint_{B_k} (-y_3 dy_2 + y_2 dy_3) \\ - \oint_{B_k} y_3 dy_2 + \int_{B_k} y_2 dy_3 & \end{aligned} \quad (1.51)$$

Правая часть уравнения (1.50) преобразуется с помощью теоремы Стокса, которая имеет следующий общий вид для гладких функций  $u_2(y_2, y_3)$  и  $u_3(y_2, y_3)$ :

$$\int_A \left( \frac{\partial u_3}{\partial y_2} - \frac{\partial u_2}{\partial y_3} \right) dy_2 dy_3 = \oint_B (u_2 dy_2 + u_3 dy_3)$$

Подставим  $u_2 = -y_3$  и  $u_3 = y_2$ :

$$\begin{aligned} \oint_{B_k} (-y_3 dy_2 + y_2 dy_3) &= \int_{A_k} 2 dy_2 dy_3 = 2 A_k \\ A_k & \text{ площадь клетки, ограниченной } B_k \end{aligned} \quad (1.52)$$

Результаты (1.29) и (1.49) подставляются в (1.148):

$$\oint_{B_k} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \frac{dy_2}{ds} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \frac{dy_3}{ds} \right) ds = 2 A_k \quad (1.53)$$

В полученном уравнении содержится неизвестное значение функции напряжения на внутренней границе. Оно и определяет значения функции напряжения.

### 1.8. Свойства сечения при кручении

В следующих примерах рассматривается равномерное кручение призматических стержней с однородным и изотропным линейным упругим материалом. Сечения брусьев различны. Определяются их функции напряжения, константы кручения, максимальные напряжения сдвига и деформации. Форма функции напряжения выбирается путем проверки её соответствия граничному условию. Затем функция подставляется в управляющее уравнение (1.46), чтобы определить свободные параметры. Если уравнение (1.46) выполнено, то функция напряжения интегрируется по площади сечения для определения константы

кручения. Производные от функции напряжения используются для определения напряжений сдвига и секториальная координата.

### 1.8.1. Круговые сечения

На рисунке 1.21 показано круговое сечение радиусом  $a$ . Функция напряжения равна нулю на периметре круга и поэтому выбирается следующим образом со свободным параметром  $c$ :

$$\varphi = c(y_2^2 + y_3^2 - a^2) \quad (1.54)$$

Функция (1.54) подставляется в уравнение (1.42) и определяется значение параметра  $c$ , удовлетворяющее уравнению:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2} = 2c \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_3^2} = 2c \quad c = -\frac{1}{2} \quad (1.55)$$

$$\varphi = -\frac{1}{2}(y_2^2 + y_3^2 - a^2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = -y_2 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} = -y_3$$

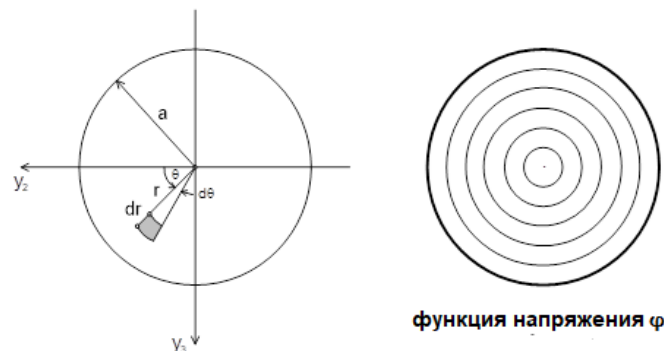


Рисунок 1.11–Кручение бруса круглого сечения

Функция напряжения подставляется в (1.41) для определения константы кручения:

$$J = \int_0^{2\pi} \int_0^a (a^2 - r^2) r dr d\theta = 2\pi \int_0^a (a^2 - r^2) r dr = \frac{\pi a^4}{2} \quad (1.56)$$

Напряжения сдвига следуют из (1.39) - (1.41):

$$\sigma_{12} = -\frac{M_T}{J} y_3 \quad \sigma_{13} = \frac{M_T}{J} y_2 \quad \tau = \frac{M_T}{J} \sqrt{y_2^2 + y_3^2} = \frac{M_T}{J} r \quad (1.57)$$

Максимальное напряжение сдвига возникает на границе участка:

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{J} a = \frac{2M_T}{\pi a^3} \quad (1.58)$$

Секториальная координата определяется с помощью (1.29) и (1.30):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial y_2} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y_3} - y_3 = 0 & \qquad \frac{\partial \omega}{\partial y_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} + y_2 = 0 \\ \omega = \text{const} := 0 & \end{aligned} \quad (1.59)$$

Значение константы секторальной координаты  $\omega$  выбирается таким образом, чтобы балка, как твердое тело, не подвергалась перемещению в направлении оси  $y_1$ . Круглое сечение не искривляется.

### 1.8.2. Полые круговые сечения

Функция напряжения (1.59) для полого кругового сечения постоянна на каждой круговой изолинии на рисунке 1.21:

$$r = ka \rightarrow \varphi = \frac{a^2}{2}(1 - k^2) \quad 0 \leq k \leq 1 \quad (1.60)$$

Если в сечении вырезать отверстие так, чтобы его граница совпадала с одной из изолиний, то функция напряжения будет постоянной на границе и граничное условие (1.30) будет выполнено. Таким образом, выражение (1.60) дает значение функции напряжения на внутренней границе полого кругового сечения. Выражение для константы кручения изменяется вследствие удаления материала в ячейке с радиусом  $ka$ :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{2\pi} \int_{ka}^a (a^2 - r^2) r dr d\theta = \int_{ka}^a (a^2 - r^2) r dr \quad 0 \leq k \leq 1 \\ J &= \frac{\pi a^4}{2} (1 - 2k^2 + k^4) \end{aligned} \quad (1.61)$$

Выражения (1.57) - (1.59) остаются в силе, если константа кручения определяется с помощью выражения (1.61) вместо выражения (1.56).

### 1.8.2. Эллиптические сечения

На рисунке 1.22 показано эллиптическое сечение с осями  $a$  и  $b$ . Функция напряжения равна нулю на периметре эллипса и поэтому выбирается со свободным параметром  $c$ :



$$\varphi = c \left( \left( \frac{y_2}{a} \right)^2 + \left( \frac{y_3}{b} \right)^2 - 1 \right) \quad (1.62)$$

Функция (1.62) подставляется в уравнение (1.47) и определяется значение параметра  $c$ , удовлетворяющее уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2} &= \frac{2c}{a^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_3^2} &= \frac{2c}{b^2} & c &= -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \\ \varphi &= -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left( \left( \frac{y_2}{a} \right)^2 + \left( \frac{y_3}{b} \right)^2 - 1 \right) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} &= -\frac{2 b^2 y_2}{a^2 + b^2} & \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} &= -\frac{2 a^2 y_3}{a^2 + b^2} \end{aligned} \quad (1.63)$$

Функция напряжения подставляется в (1.38) для определения константы кручения. Интегрирование выполняется с помощью следующего преобразования:

$$\begin{aligned} y_2 &= z a \cos \theta & 0 \leq z \leq 1, & \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y_3 &= z b \sin \theta \\ dy_2 dy_3 &= \det \begin{vmatrix} a \cos \theta & b \sin \theta \\ -z a \sin \theta & z b \cos \theta \end{vmatrix} dz d\theta = z a b dz d\theta \\ \varphi &= \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} (1 - z^2) \end{aligned} \quad (1.64)$$

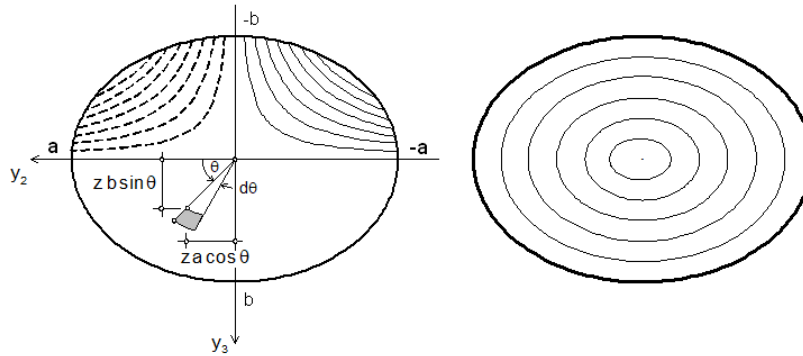


Рисунок 1.12–Кручение бруса с эллиптическим сечением

Функция напряжения подставляется в (1.38) для определения константы кручения:

$$J = \frac{2 a^3 b^3}{a^2 + b^2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - z^2) z dz d\theta = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \quad (1.65)$$

Напряжения сдвига следуют из (1.39) - (1.41):

$$\sigma_{12} = \frac{M_T}{J} \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} = -2y_3 M_T \frac{a^2}{a^2+b^2} \frac{a^2+b^2}{\pi a^3 b^3} = -\frac{2y_3 M_T}{\pi a b^3} \quad (1.66)$$

$$\sigma_{13} = -\frac{M_T}{J} \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = 2y_2 M_T \frac{b^2}{a^2+b^2} \frac{a^2+b^2}{\pi a^3 b^3} = \frac{2y_2 M_T}{\pi a^3 b} \quad (1.67)$$

$$\tau = \sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2} = \frac{2M_T}{\pi a b} \sqrt{\left(\frac{y_2}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_3}{b^2}\right)^2} \quad (1.68)$$

Максимальное напряжение сдвига возникает на короткой оси на границе раздела:

$$a > b \rightarrow \tau_{\max} = \tau(0, \pm b) = \frac{2M_T}{\pi a b^2} \quad (1.69)$$

Секториальная координата определяется с помощью (1.23) и (1.24):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial y_2} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y_3} - y_3 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} y_3 & \quad \frac{\partial \omega}{\partial y_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} + y_2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} y_2 \\ \omega = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} y_2 y_3 & \end{aligned} \quad (1.70)$$

### 1.8.3. Полые эллиптические сечения

Функция напряжения (1.63) для полого эллиптического сечения постоянна на каждой эллиптической изолинии на рисунке 1.12:

$$y_2 = k a \cos \theta, \quad y_3 = k b \sin \theta \rightarrow \varphi = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} (1 - k^2) \quad 0 \leq k \leq 1 \quad (1.71)$$

Если в сечении вырезать отверстие так, чтобы его граница совпадала с одной из изолиний, то функция напряжения будет постоянной на границе и граничное условие (1.30) будет выполнено. Таким образом, в формуле (1.71) приведено значение функции напряжения на границе внутренней ячейки полого эллиптического сечения. Выражение для константы кручения изменяется из-за удаления материала в ячейке:

$$\begin{aligned} J &= \frac{2a^3 b^3}{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} \int_k^1 k(1 - k^2) dk d\theta = \frac{4\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \int_k^1 k(1 - k^2) dk, \quad 0 \leq k \leq 1 \\ J &= \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} (1 - 2k^2 + k^4) \end{aligned} \quad (1.72)$$

Выражения (1.66) - (1.70) остаются в силе, если константа кручения определяется с помощью выражения (1.72), а не (1.65).

#### 1.8.4. Равносторонние треугольные сечения

На рисунке 1.13 показано равностороннее треугольное сечение. Функция напряжения равна нулю на краях треугольника и поэтому описывается нормализованными треугольными координатами  $z_1, z_2$  и  $z_3$ .

$$1 = z_1 + z_2 + z_3, \quad 0 \leq z_1, z_2, z_3 \leq 1 \quad (1.73)$$

$$y_2 = a z_1 + a z_2 - 2a z_3 = 3a z_1 + 3a z_2 - 2a \quad (1.74)$$

$$y_3 = -\sqrt{3} a z_1 + \sqrt{3} a z_2 \quad (1.75)$$

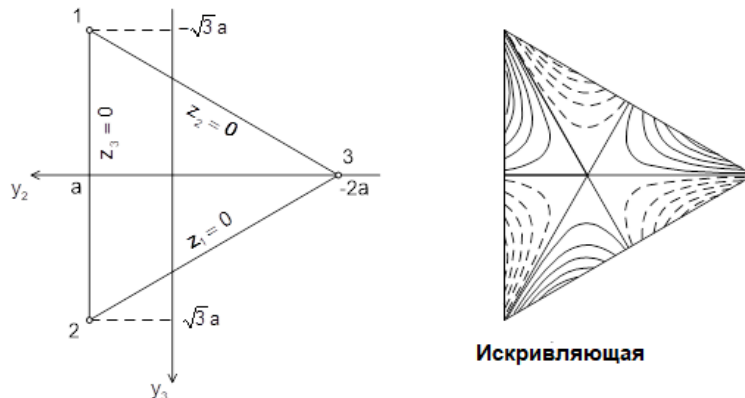


Рисунок 1.13—Кручение бруса с равносторонним треугольным сечением

Уравнения (1.73) - (1.75) решаются для нормированных координат:

$$z_1 = \frac{1}{6a}(y_2 - \sqrt{3} y_3 + 2a) \quad (1.76)$$

$$z_2 = \frac{1}{6a}(y_2 + \sqrt{3} y_3 + 2a) \quad (1.77)$$

$$z_3 = \frac{1}{6a}(2a - 2y_2) \quad (1.78)$$

Поскольку каждая из нормированных координат равна нулю на одной из граней треугольника, функция напряжения выбирается пропорциональной их произведению:

$$\varphi = c z_1 z_2 z_3 = \frac{c}{(6a)^3} \left( (y_2 + 2a)^2 - 3y_3^2 \right) (2a - 2y_2) \quad (1.79)$$

Первыми производными функции напряжения являются:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} &= \frac{c}{36a^3}(-y_2^2 - 2ay_2 + y_3^2) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} &= \frac{c}{18a^3}y_3(y_2 - a)\end{aligned}\quad (1.80)$$

Вторые производные функции напряжения подставляются в управляющее уравнение (1.42) для определения свободного параметра  $c$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2} &= -\frac{c}{18a^3}(a + y_2) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_3^2} &= -\frac{c}{18a^3}(a - y_2) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_3^2} &= -2 \rightarrow c = 18a^3\end{aligned}\quad (1.81)$$

Функция напряжения подставляется в (1.38) для определения константы кручения. Интегрирование удобно выполнять по нормированным координатам:

$$\begin{aligned}dy_2 dy_3 &= \det \begin{vmatrix} \frac{\partial y_2}{\partial z_1} & \frac{\partial y_2}{\partial z_2} \\ \frac{\partial y_3}{\partial z_1} & \frac{\partial y_3}{\partial z_2} \end{vmatrix} dz_1 dz_2 = \det \begin{vmatrix} 3a & 3a \\ -\sqrt{3}a & \sqrt{3}a \end{vmatrix} = 6\sqrt{3}a^2 dz_1 dz_2 \\ J &= \int_A 2\varphi dA = 12\sqrt{3}a^2 c \int_0^1 \left( \int_0^{1-z_1} z_1 z_2 (1-z_1-z_2) dz_2 \right) dz_1 = 2\sqrt{3}a^2 c \int_0^1 z_1 (1-z_1)^3 dz_1 \\ J &= \frac{9\sqrt{3}}{5}a^4 = \frac{\sqrt{3}}{80}b^4\end{aligned}\quad (1.82)$$

$b$  – длина стороны треугольника

Напряжения сдвига следуют из (1.25) и (1.26):

$$\sigma_{12} = G \varepsilon_{12} = G \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \frac{d\beta_1}{dy_1} = \frac{1}{a} y_3 (y_2 - a) G \frac{d\beta_1}{dy_1} \quad (1.83)$$

$$\sigma_{13} = G \varepsilon_{13} = -G \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \frac{d\beta_1}{dy_1} = \frac{1}{2a} (y_2^2 + 2ay_2 - y_3^2) G \frac{d\beta_1}{dy_1} \quad (1.84)$$

В выражении (4.18) напряжения сдвига выражаются как функции крутящего момента  $T$ :

$$\sigma_{12} = \frac{1}{a} y_3 (y_2 - a) \frac{M_T}{J} \quad (1.85)$$

$$\sigma_{13} = \frac{1}{2a} (y_2^2 + 2a y_2 - y_3^2) \frac{M_T}{J} \quad (1.86)$$

Напряжение сдвига  $\tau$  на гранях  $y_2 = a$  треугольника максимально в точке  $y_3 = 0$ :

$$\begin{aligned} \tau &= \sigma_{13}(y_2 = a) = \frac{1}{2a} (3a^2 - y_3^2) \frac{M_T}{J} \\ \tau_{\max} &= \frac{3 M_T a}{2J} \end{aligned} \quad (1.87)$$

Секториальная координата определяется с помощью (1.23) и (1.24):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial y_2} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y_3} - y_3 = -\frac{1}{a} y_2 y_3 & \frac{\partial \omega}{\partial y_3} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} + y_2 = \frac{1}{2a} (-y_2^2 + y_3^2) \\ \omega &= \frac{1}{6a} y_3 (-3y_2^2 + y_3^2) \end{aligned} \quad (1.88)$$

### 1.8.5. Прямоугольные сечения

На рисунке 1.14 показано прямоугольное сечение длиной  $d$  и шириной  $t$ . Функция  $\bar{\varphi}$  в (1.89) удовлетворяет управляющему уравнению (1.42) для функции напряжения  $\varphi$  и граничного условия  $\varphi=0$  на краях  $y_2 = \pm 0.5t$ , но не граничного условия  $\varphi=0$  на краях  $y_3 = \pm 0.5d$ .

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4} t^2 - y_2^2 \quad (1.89)$$

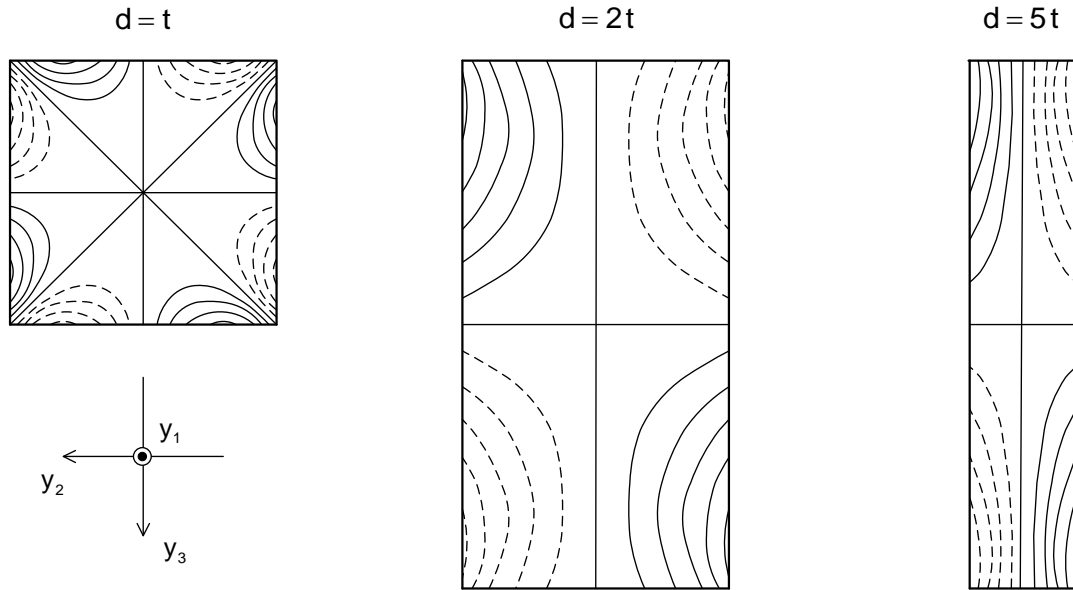


Рисунок 1.14–Секториальной площади прямоугольных сечений

По этой причине функция  $\bar{\varphi}$  дополняется бесконечным рядом, который принимает значение  $-\bar{\varphi}$  на краях  $y_3 = \pm 0.5d$ . Члены ряда имеют вид:

$$g_n(y_2, y_3) = \cos \frac{n\pi}{t} y_2 \cosh \frac{n\pi}{t} y_3 \quad (1.90)$$

Сумма вторых производных  $g_n$  равна нулю, так что на управляющее уравнение (1.42) это не влияет. Функция  $g_n$  удовлетворяет граничному условию на краях  $y_2 = \pm 0.5t$ . Она масштабируется так, что принимает значение 1 на границах  $y_3 = \pm 0.5d$ :

$$g_n(y_2, y_3) = \frac{\cos \frac{n\pi}{t} y_2 \cosh \frac{n\pi}{t} y_3}{\cosh \frac{n\pi d}{2t}} \quad (1.91)$$

Бесконечный косинусный ряд строится таким образом, что он принимает значение  $y_2^2 - 0.25t^2$ :

$$f(y_2) = \frac{8t^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cos \frac{n\pi y_2}{t} = y_2^2 - \frac{1}{4}t^2 \quad (1.92)$$

Полная функция напряжений  $\varphi$  для прямоугольного сечения имеет вид:

$$\varphi|_{\sigma} = \frac{1}{4}t^2 - y_2^2 + \frac{8t^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\cos \frac{n\pi}{t} y_2 \cosh \frac{n\pi}{t} y_3}{\cosh \frac{n\pi d}{2t}} \quad (1.93)$$

Функция напряжения подставляется в (1.38) для определения константы кручения:

$$J = \frac{1}{3}dt^3 \left( 1 - \frac{192t}{\pi^5 d} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi d}{2t} \right) \quad (1.94)$$

Напряжения сдвига следуют из (1.25) и (1.26):

$$\sigma_{12} = G \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \frac{d\beta_1}{dy_1} = \left( \frac{8t}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\cos \frac{n\pi}{t} y_2 \sinh \frac{n\pi}{t} y_3}{\cosh \frac{n\pi d}{2t}} \right) G \frac{d\beta_1}{dy_1} \quad (1.95)$$

$$\sigma_{13} = -G \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \frac{d\beta_1}{dy_1} = \left( 2y_2 + \frac{8t}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\sin \frac{n\pi}{t} y_2 \cosh \frac{n\pi}{t} y_3}{\cosh \frac{n\pi d}{2t}} \right) G \frac{d\beta_1}{dy_1} \quad (1.95)$$

Секториальная координата определяется с помощью (1.23) и (1.24):

$$\omega(y, \beta) = -y_2 y_3 - \frac{8t^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\sin \frac{n\pi}{t} y_2 \sinh \frac{n\pi}{t} y_3}{\cosh \frac{n\pi d}{2t}} \quad (1.95)$$

Изолинии секториальная координата показаны на рисунке 1.10. Соотношение сторон  $d/t$  сечения существенно влияет на форму изолиний.

### 1.8.6. Квадратное сечение

Выражение (1.94) дает следующее значение для константы кручения квадратного сечения:

$$J = 0.1406 a^4 \quad (1.98)$$

Максимальное напряжение сдвига возникает в средней точке каждой стороны. Оно определяется с помощью выражений (1.95) и (1.96):

$$\tau_{\max} = \frac{T}{0.208 a^3} \quad (1.99)$$

### 1.8.7. Узкое прямоугольное сечение

Функция напряжения для узкого прямоугольного сечения  $d > 10t$ , длинные стороны которого параллельны оси  $y_3$ , аппроксимируется путем пренебрежения бесконечной суммой в (1.93). Последующие выражения для константы кручения, напряжений сдвига и функции деформации аппроксимируются соответствующим образом:

$$\varphi = \frac{t^2}{4} - y_2^2 \quad (1.100)$$

$$J = \frac{1}{3} d t^3 \quad (1.101)$$

$$\sigma_{12} = 0 \quad (1.102)$$

$$\sigma_{13} = 2 y_2 G \frac{d\beta_1}{dy_1} \quad (1.103)$$

$$\omega = -y_2 y_3 \quad (1.104)$$

Результаты (1.100) - (1.104) могут быть получены с помощью мембранной аналогии, если предположить, что:

- изменение функции напряжения по направлению  $z_3$  квадратично,
- значение функции напряжения на границе равно нулю,
- функция напряжения постоянна в направлении  $z_2$ .

### 1.9. Кручение тонкостенных стержней с открытым сечением

На рисунке 1.15 изображен тонкостенный брус с двутавровой балкой в качестве открытого сечения. Балка закреплена вилкой на одном конце и подвергается скручивающему моменту  $M_T$  на другом конце.

Необходимо определить функцию напряжений, константу кручения, напряжения сдвига и деформацию вследствие кручения бруса по методу Сен-Венана. Результаты этого раздела также будут использоваться для комбинированного растяжения, изгиба и кручения стержней. Поэтому не следует считать, что центр вращения  $R$  совпадает с центром сечения.



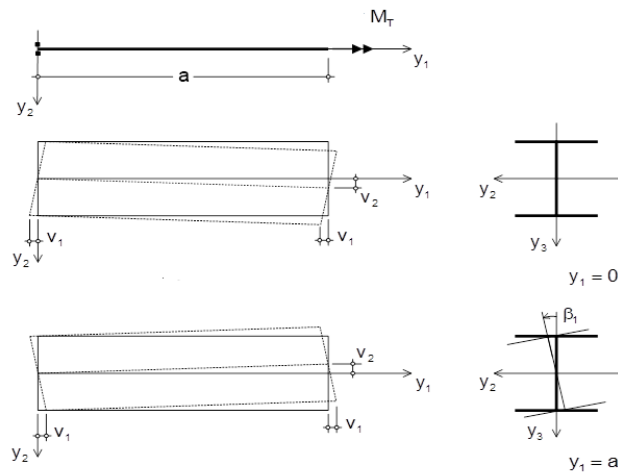


Рисунок 1.15–Деформирующее смещение  $v_1$  и вращательное смещение  $v_2$  двутавровой балки

### 1.9.1. Локальная система координат стенки

Для каждой стены балки задается локальная декартова система координат, как показано на рисунке 1.16. Начало координат располагается в средней точке  $A$  прямоугольника в начальной вершине. Ось  $z_1$  ориентирована в направлении оси  $y_1$  бруса. Ось  $z_2$  направлена от начальной вершины к конечной вершине стены.

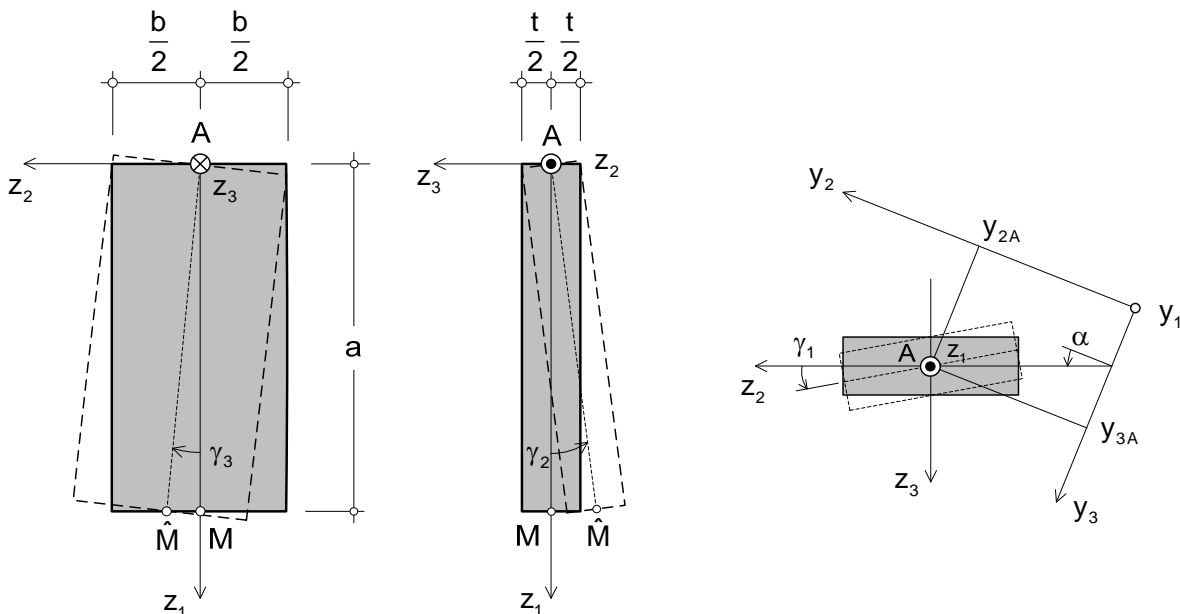


Рисунок 1.16–Местная система координат стены

Угол от оси  $y_2$  к оси  $z_2$  называется  $\alpha$ . Направление осей  $z_3$  выбрано так, что оси  $z_1, z_2, z_3$  образуют правостороннюю систему. Координаты смещения точки

$(z_1, z_2, z_3)$  стены называются  $w_1, w_2, w_3$ . Координаты поворота оси  $z_1$  называются  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ . Предполагается, что смещения и повороты стены малы.

### 1.9.2. Функция напряжения

Вклад стенки на рисунке 1.17 в функцию напряжения сечения определяется из общей теории кручения. Управляющее уравнение (1.28) для функции напряжения  $\varphi$ , сформулированное в терминах глобальных координат  $y_2$  и  $y_3$ , преобразуется в локальную систему координат с осями  $z_2$  и  $z_3$ . Координаты точек стенки преобразуются следующим образом:

$$\begin{array}{|c|} \hline y_2 \\ \hline y_3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline y_{2A} \\ \hline y_{3A} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \hline \sin \alpha & \cos \alpha \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline z_2 \\ \hline z_3 \\ \hline \end{array} \quad (1.105)$$

Вторые производные функции напряжения по отношению к  $z_2$  и  $z_3$  определяются с помощью правила цепочки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial z_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \frac{\partial y_3}{\partial z_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \sin \alpha \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_2^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2 \partial y_3} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_3^2} \sin^2 \alpha \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial z_3} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \frac{\partial y_3}{\partial z_3} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \sin \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \cos \alpha \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_3^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2} \sin^2 \alpha - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2 \partial y_3} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_3^2} \cos^2 \alpha \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_3^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_3^2} \end{aligned} \quad (1.106)$$

Поскольку управляющие уравнения для двух систем координат имеют одинаковую форму, результаты (1.100) - (1.104) для узких прямоугольных сечений могут быть использованы для стенки. Вклад стенки в константу кручения сечения называется  $\Delta J$ . Ось  $z_2$  на рисунке 1.16 соответствует оси  $y_3$  на рисунке 1.25.

$$\varphi = \frac{t^2}{4} - z_3^2, \quad -\frac{t}{2} \leq z_3 \leq \frac{t}{2} \quad (1.107)$$

$$\Delta J = \frac{1}{3} b t^3 \quad (1.108)$$

$$\sigma_{12} = 2z_3 G \frac{d\beta_1}{dy_1} \quad (1.109)$$

Функция напряжения для стены равна нулю вне стены. Функция напряжения сечения является суммой функций напряжения стенок. Поэтому константа кручения  $J$  сечения равна сумме вкладов стенок:

$$J = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n b_i t_i^3 \quad (1.101)$$

$b_i$     ширина  $i$ -ой стены  
 $t_i$     толщина  $i$ -ой стены  
 $n$       количество стен в сечении

Производная угла закручивания подставляется из выражения (1.18) в выражение (1.109) для напряжения сдвига в стенке  $i$ . Напряжение сдвига изменяется линейно по сечению стенки и имеет максимальное значение  $\tau_{\max(i)}$  на гранях стенки. Максимальное напряжение сдвига в стенках тонкостенного сечения пропорционально их толщине.

$$\sigma_{12(i)} = 2z_3 \frac{M_T}{J}, \quad -\frac{t}{2} \leq z_3 \leq \frac{t}{2} \quad (1.111)$$

$$\tau_{\max(i)} = \pm \frac{M_T t_i}{J}$$

Главные напряжения в торце стены, как показано на рисунке 1.17, определяются путем решения обобщенной проблемы собственных значений:

$$\mathbf{S} \mathbf{n} = p \mathbf{n} \quad (1.112)$$

$\mathbf{S}$     уровень напряженности  
 $\mathbf{n}$     единичный вектор в направлении основного нагружения  
 $p$     основное напряжение

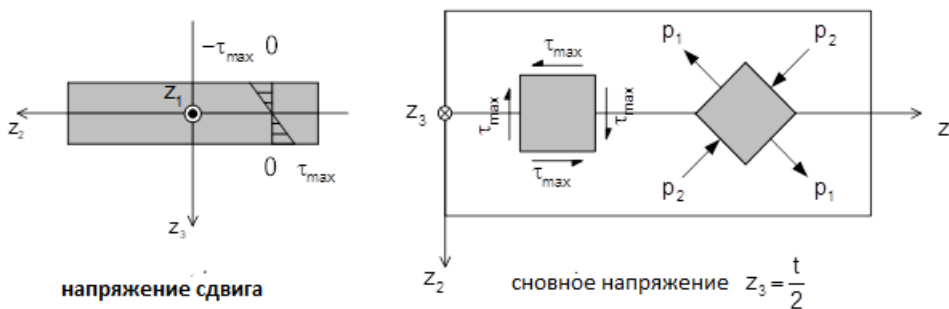


Рисунок 1.17–Распределение напряжений сдвига и главных напряжений в торце  
стены

Главные напряжения, вызванные сдвиговым напряжением  $\tau_{\max}$  в торце стены, являются решением задачи (1.113). Растягивающее главное напряжение  $p_1 = \tau_{\max}$  составляет угол 45 градусов с осью  $z_1$ . Сжимающее главное напряжение составляет угол 135 градусов с осью  $z_1$ .

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & \tau_{\max} & n_1 \\ \hline \tau_{\max} & 0 & n_s \\ \hline \end{array} = p \begin{array}{|c|} \hline n_1 \\ \hline n_s \\ \hline \end{array} \quad (1.113)$$

$$p_1 = \tau_{\max} \quad \mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad p_2 = -\tau_{\max} \quad \mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array}$$

### 1.10. Секториальная площадь открытых и замкнутых тонкостенных сечений

Рассмотрим тонкостенная балка длины  $a$ , подвешенная на вилке в сечении и подверженная крутящему моменту  $M_T$  в сечении  $y_1 = a$ , как показано на рисунке 1.18. - 1.10. Секториальной площади определить деформацию стенок балки. Рассмотрим стенку на рисунке 1.27, ось  $z_2$  которой составляет угол  $\alpha$  с осью  $y_2$  сечения. Если сечение  $y_1 = a$  балки закручено вокруг центра вращения  $R$ , то ось стенки поворачивается так, что составляет угол  $\gamma_1, \gamma_2$  и  $\gamma_3$  с осями  $z_1, z_2$  и  $z_3$ . Пусть угол поворота сечения  $y_1 = a$  относительно центра вращения  $R$  будет  $\beta_M$ , как показано на рисунке 1.18.

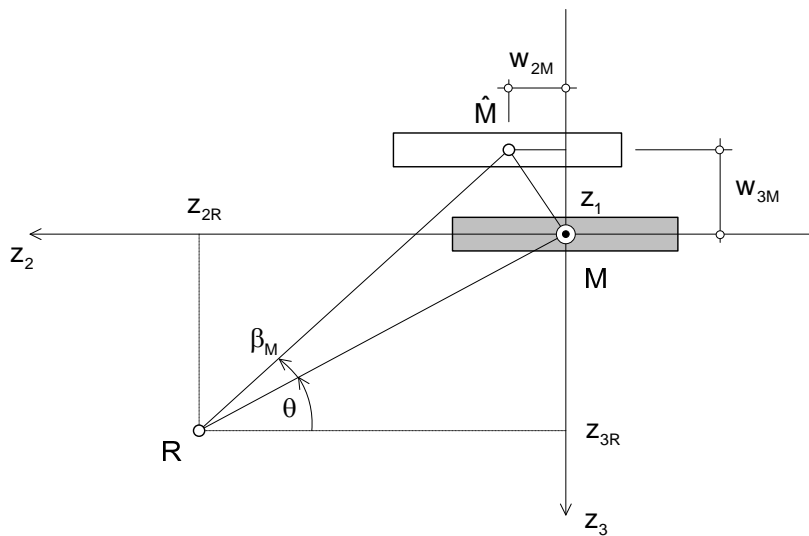


Рисунок 1.18–Перемещение жесткого тела профиля стены в разрезе  $y_1 = a$

Координаты смещения средней точки  $M$  профиля в сечении  $y_1 = a$ , отнесенные к местной системе координат стены:

$$w_{1M} = 0 \quad (1.114)$$

$$w_{2M} = r \beta_M \sin \theta = z_{3R} \beta_M \quad (1.115)$$

$$w_{3M} = -y_{2M} \beta_M \cos \theta = -z_{2R} \beta_M \quad (1.116)$$

На рисунке 1.27 показано, что смещение точки  $M$  образует следующие углы между опорной осью  $AM$  и мгновенной осью  $A\hat{M}$  стены:

$$\gamma_2 = -\frac{w_{3M}}{a} = z_{2R} \frac{d\beta_1}{dy_1} \quad (1.117)$$

$$\gamma_3 = \frac{w_{2M}}{a} = z_{3R} \frac{d\beta_1}{dy_1} \quad (1.118)$$

Полное смещение стены в результате скручивания бруса вокруг центра вращения  $R$  разбивается на перемещение жесткого тела и деформацию скручивания. Перемещение жесткого тела поворачивает ось стены от  $AM$  до  $A\hat{M}$ , но не поворачивает прямоугольник вокруг оси  $z_1$ . Перемещение жесткого тела в точке  $P := (z_1, z_2, z_3)$  сечения  $z_1$  равно перемещению жесткого тела в средней точке прямоугольника в сечении:

$$w_{R1} = -\gamma_3 z_2 + \gamma_2 z_3 = (-z_2 z_{3R} + z_3 z_{2R}) \frac{d\beta_1}{dy_1} := \omega_R(z_2, z_3) \frac{d\beta_1}{dy_1} \quad (1.119)$$

$$w_{R2} = z_{3R} \beta_1 \quad (1.120)$$

$$w_{R3} = -z_{2R} \beta_1 \quad (1.121)$$

Где;  $w_{Ri}$  Перемещение вследствие движения твердого тела прямоугольника

$\beta_1$  Вращение участка  $y_1$  бруса

$\omega_R$  секториальный крутящий момент жесткого тела прямоугольника

Смещение точки  $P$  в результате скручивания стены вокруг оси  $AM$  задается теорией равномерного кручения:

$$w_{V1} = -\omega_V(z_2, z_3) \frac{d\beta_1}{dy_1} \quad (1.122)$$

$$w_{V2} = z_3 \beta_1 \quad (1.123)$$

$$w_{V3} = -z_2 \beta_1$$

$$\begin{aligned} w_{Vi} & \text{ Перемещение вследствие равномерного кручения стены} \\ \omega_V & \text{ секториальной площади (секториальная координата)} \end{aligned} \quad (1.124)$$

Секториальная координата  $\omega_V(z_2, z_3)$  для равномерного кручения стенки задается (1.104):

$$\omega_V(z_2, z_3) = -z_2 z_3 \quad (1.125)$$

Далее будет показано, что деформации стенки вследствие скручивания вокруг оси  $z_1$  можно пренебречь по сравнению с деформации вследствие движения жесткого тела. Рассмотрим фланец двутавровой балки с высотой  $h$ , шириной фланца  $b$  и толщиной фланца  $t$ . Максимальное секториальной площади вследствие поворота вокруг средней точки фланца определяется из (1.122) и (1.125):

$$w_{V1} = -\frac{bt}{4} \frac{d\beta_1}{dy_1}$$

Секториальной площади, вызванное движением жесткого тела, определяется из (1.119):

$$w_{R1} = (-z_2 z_{3R} + z_3 z_{2R}) \frac{d\beta_1}{dy_1} = -\frac{b}{2} \left( \frac{h-t}{2} \right) \frac{d\beta_1}{dy_1}$$

Таким образом, отношение деформации вследствие скручивания к общей деформации фланца составляет:

$$r_F = \frac{w_{V1}}{w_{V1} + w_{R1}} = \frac{t}{h} \quad (1.126)$$

Для типичных структурных секций это соотношение  $r_F$  лежит в диапазоне от 0,02 до 0,05. Поэтому депланации  $w_{V1}$  можно пренебречь. Предполагается, что полное секториальной площади стены вызвано движением жесткого тела стены. Перемещение при короблении определяется из условия, что движение жесткого тела не вызывает деформации сдвига:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} &= \frac{\partial w_1}{\partial z_2} + \frac{\partial w_2}{\partial z_1} = 0 \\ \frac{\partial w_1}{\partial z_2} &= -\frac{\partial w_2}{\partial z_1} \end{aligned} \quad (1.127)$$

Перемещение  $w_2$  в сечении  $y_1$  определяется из (1.115):

$$w_2 = z_{3R} \beta_1 \quad (1.128)$$

Это выражение подставляется в (1.127). Секториальная координата сечения для скручивания бруса вокруг оси  $y_1$ , проходящей через центр вращения  $R$ , называется  $\omega_R$  и определяется с помощью выражения (1.14):

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial z_2} &= -\frac{d\beta_1}{dy_1} z_{3R} \\ \frac{\partial \omega_R}{\partial z_2} &= z_{3R} \end{aligned} \quad (1.129)$$

Выражение (1.129) используется для определения функции  $\omega_R$  депланации следующим образом:

(а) Секториальная координата  $\omega_R$  устанавливается равной нулю в произвольной вершине, например, в вершине 0 сечения, как определено на рисунке 1.19.

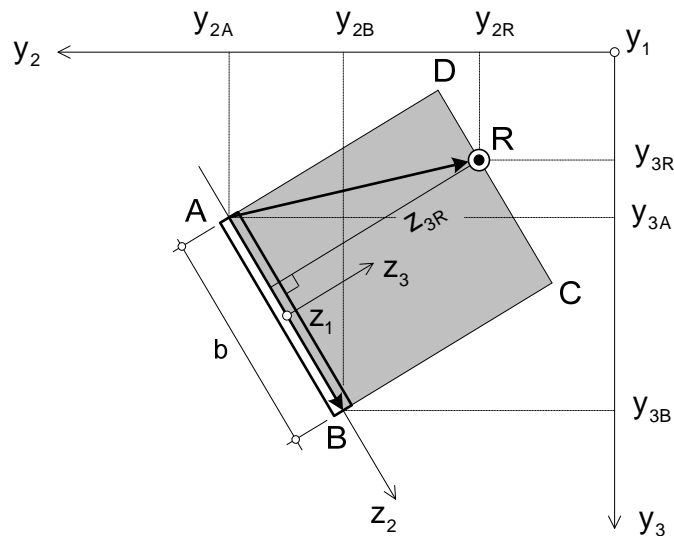


Рисунок 1.19–Вклад стены  $AB$  в функцию депланации  $\omega_R$

(2) Выражение (1.129) интегрируется для каждой стенки бруса:

$$\Delta\omega_{R(i)} = \int_{-0.5b_i}^{0.5b_i} z_{3R(i)} dz_2$$

$\Delta\omega_{R(i)}$  вклад стенки  $i$  в секториальный крутящий момент (1.130)

$z_{3R(i)}$  координата  $z_3$  центра вращения  $R$  в системе координат стенки  $i$

Интеграл в выражении (1.130) равен площади прямоугольника  $ABCD$  на рисунке 1.19. Его значение определяется с помощью произведения векторов  $AB$  и  $AR$ :

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} y_{2B} - y_{2A} \\ y_{3B} - y_{3A} \end{bmatrix} \quad \mathbf{AR} = \begin{bmatrix} y_{2R} - y_{2A} \\ y_{3R} - y_{3A} \end{bmatrix} \quad (1.131)$$

$$\Delta\omega_{Ri} = \mathbf{AB} \times \mathbf{AR} = (y_{2B} - y_{2A})(y_{3R} - y_{3A}) - (y_{2R} - y_{2A})(y_{3B} - y_{3A})$$

(3) Сечение проходит в направлении стен, начиная с вершины 0. Когда достигается вершина  $k$ , значение  $\omega_{R(k)}$  секториальная координата в вершине  $k$  уже известно. Значение секториальная координата в конечной вершине каждой стенки  $i$ , выходящей из вершины  $k$ , определяется путем прибавления  $\Delta\omega_{R(i)}$  к  $\omega_{R(k)}$ . После того, как значения функции  $\omega_R$  депланации в вершинах сечения становятся известными, искривляющее смещение вершин можно вычислить с помощью (1.14):



$$w_{1(k)} = -\omega_{R(k)} \frac{d\beta_1}{dy_1} \quad (1.132)$$

$w_{1(k)}$       секториальный крутящий момент узла k  
 $\omega_{R(k)}$       секториальный крутящий момент в узле k

Из (1.129) следует, что секториальной площади линейно изменяется между вершинами сечения. При равномерном кручении скорость скручивания  $d\beta_1/dy_1$  постоянна по всей длине бруса. Поэтому смещение депланации в (1.132) постоянно по длине бруса, подверженного равномерному кручению.

**Пример 1:** Равномерное кручение двутавровой балки относительно ее Центра тяжести показано на рисунке 1.20

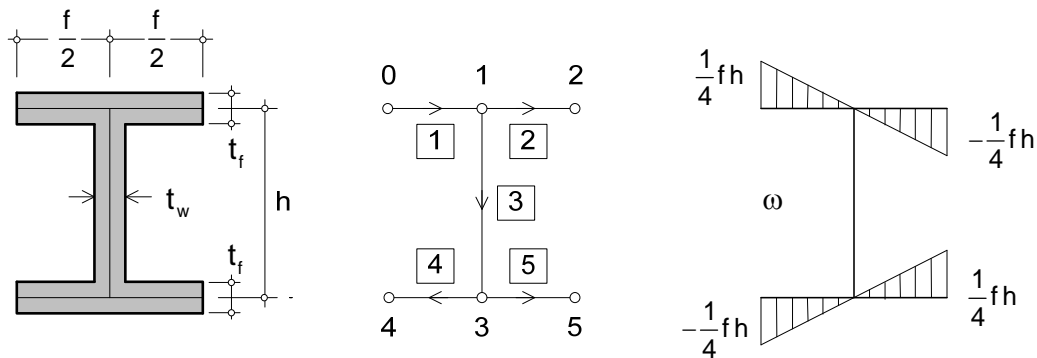


Рисунок 1.20—Кручение и секториальный крутящий момент е двутавровой балки

Необходимо определить константу кручения и функцию деформации двутавровой балки на данном рисунке. На рисунке пронумерованы стенки и вершины сечения. Константа кручения задается выражением (1.110):

$$J = \frac{1}{3} \left( \frac{f}{2} t_f^3 + h t_w^3 + \frac{f}{2} t_f^3 \right) = \frac{1}{3} (2 f t_f^3 + h t_w^3) \quad (1.133)$$

Вклад стенок в секториальный крутящий момент представляет собой выражения (4.131):

$$\text{Стена 1: } \Delta\omega_{R1} = -\frac{f}{2} \frac{h}{2} + \frac{f}{2} \cdot 0 = -\frac{1}{4} f h$$

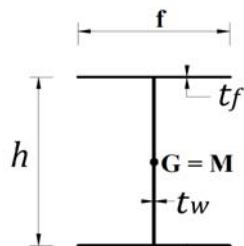
$$\text{Стена 2: } \Delta\omega_{R2} = -\frac{f}{2} \frac{h}{2} - \frac{f}{2} \cdot 0 = -\frac{1}{4} f h$$

$$\text{Стена 3: } \Delta\omega_{R3} = -0 \cdot \frac{f}{2} + 0 \cdot f = 0$$

$$\text{Стена 4: } \Delta\omega_{R4} = -\frac{f}{2} \frac{h}{2} - 0 \cdot 0 = -\frac{1}{4} f h$$

$$\text{Стена 5: } \Delta\omega_{R5} = \frac{f}{2} \frac{h}{2} + \frac{f}{2} \cdot 0 = \frac{1}{4} f h$$

Для приведенных выше выражений распределение секториальная координата в сечении показано на рис. 1.21 и 1.22, и оно проверено с помощью программы для всех параметров, а именно секториальная координата, статических моментов и омега депланации, как показано на рисунке ниже. секториальная координата относительно центра сдвига  $M$  являются геометрическими величинами и необходимы для определения продольных напряжений и напряжений сдвига, вызванных ограничением депланации, а статический момент депланации определяется из нормированных функций депланации. Общеизвестно, что статические моменты (первые моменты площади) регистрируются относительно глобальных осей или главных осей сечения. Статический момент определяется как произведение  $dA$  и расстояния от его Центра тяжести до опорной оси, лежащей в плоскости сечения. Для случая кручения двутавровой балки константа кручения и функция депланации приведены на рис. 1.21-22.



$h(mm)$	400
$f(mm)$	180
$t_f(mm)$	11
$t_w(mm)$	8

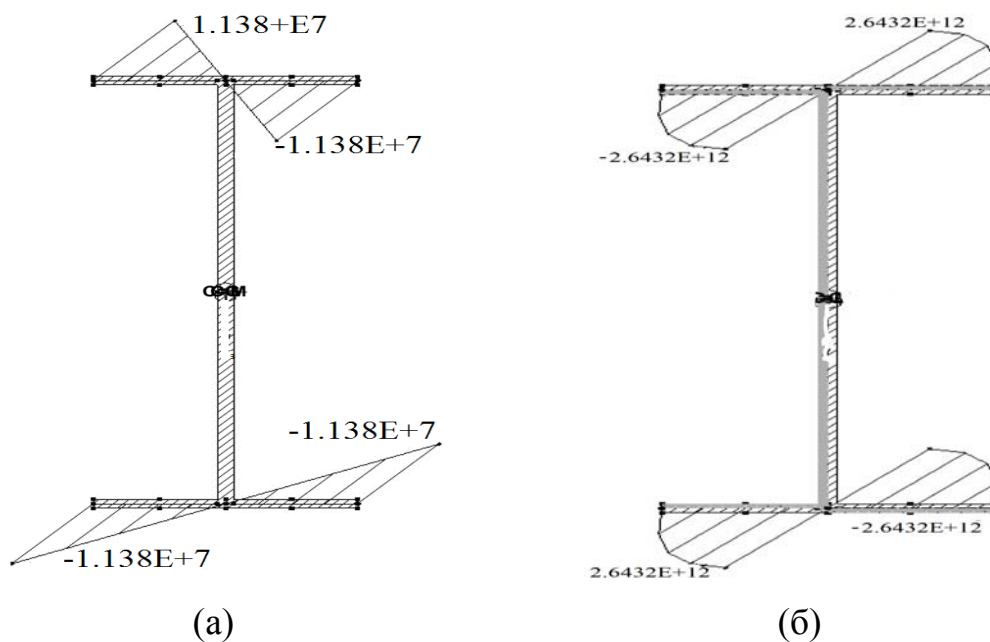


Рисунок 1.21–Секториальная площадь (а), секториальный статический момент (б) относительно осей  $y_2$  и  $y_3$

В вершине 1 секториальная координата равна нулю. Поскольку направление от вершины 1 к вершине 0 противоположно направлению стены 1, значение секториальная координата в вершине 0  $-(-0.25fh) = 0.25fh$ . Значение в вершине 2  $0 + (-0.25fh) = -0.25fh$ . Значение в вершине 3  $0 + 0 = 0$ . Значение в вершине 4  $0 + (-0.25fh) = -0.25fh$ . Значение в вершине 5  $0 + 0.25fh = 0.25fh$ . секториальная координата показана на рисунке 1.23.

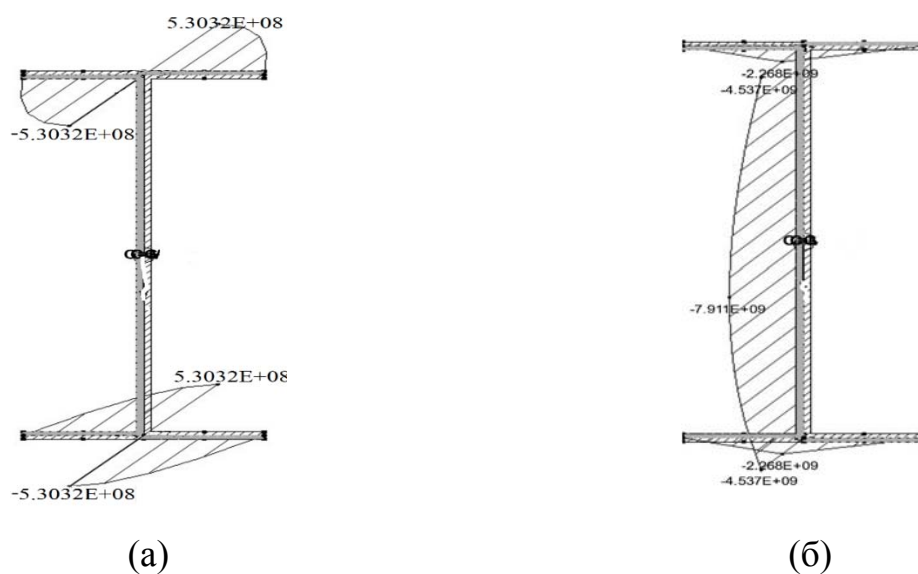


Рисунок 1.22– статический момент относительно осей  $y_2$  (а) и статический момент) относительно осей  $y_3$  (б)

**Пример 2:** Равномерное кручение отрезков, имеющих ровно одну внутреннюю вершину. На рисунке 1.23 изображены тонкостенные сечения с различным количеством стенок, которые имеют только одну внутреннюю вершину, где стенки пересекаются, а внутренняя вершина является центром сдвига сечения.

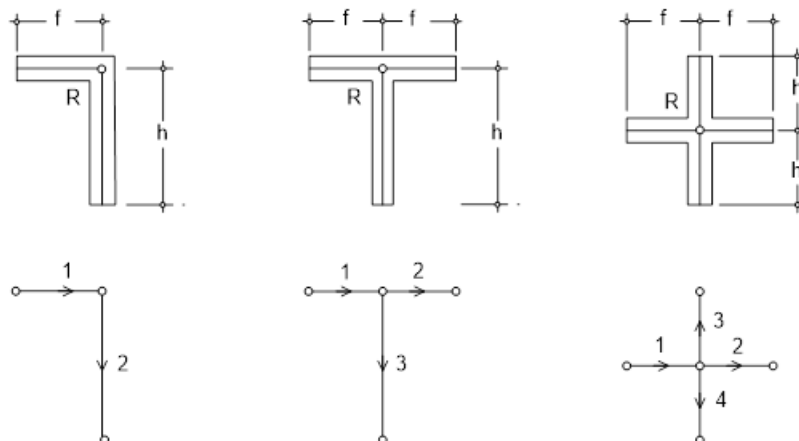


Рисунок 1.23—Сечения с одной внутренней вершиной

На рисунке 1.23 показаны тонкостенные сечения с различным количеством стенок, которые имеют одну внутреннюю вершину в месте пересечения стенок. Внутренняя вершина является центром сдвига сечения. Центр сдвига также является центром вращения  $R$ . Вклад стенок в секториальный крутящий момент сечений представляет собой выражения (1.131):

$$\text{угол: Стена 1 } \Delta\omega_{R1} = -f * 0 + f * 0 = 0, \quad \text{тройник: Стена 1 } \Delta\omega_{R1} = -f * 0 + f * 0 = 0$$

$$\text{Стена 2 } \Delta\omega_{R2} = 0 * 0 - 0 * h = 0$$

$$\text{Стена 2 } \Delta\omega_{R2} = -f * 0 - 0 * 0 = 0$$

$$\text{Стена 3 } \Delta\omega_{R3} = 0 * 0 - 0 * h = 0$$

$$\text{крест: Стена 1 } \Delta\omega_{R1} = -f * 0 + f * 0 = 0$$

$$\text{Стена 2 } \Delta\omega_{R2} = -f * 0 - 0 * 0 = 0$$

$$\text{Стена 3 } \Delta\omega_{R3} = -0 * 0 - 0 * h = 0$$

$$\text{Стена 4 } \Delta\omega_{R4} = 0 * 0 + 0 * h = 0$$

### 1.11. Кручение тонкостенных стержней с замкнутым сечением

Тонкостенное сечение называется замкнутым, если его направленный граф содержит хотя бы одну петлю. Стенки контура образуют ячейку, а замкнутые тонкостенные сечения являются частным случаем полых сечений. На рисунке 1.24

показано замкнутое тонкостенное прямоугольное сечение, состоящее из одной ячейки. Стенки сечения и их локальные системы координат  $z_1, z_2, z_3$  определены для открытых тонкостенных сечений.

График сечения на рисунке 1.33 представляет собой один цикл. В закрытых одно- или многоячеистых замкнутых сечениях для получения характерного распределения смещения деформации необходимо ввести циркуляционные потоки сдвигающей силы вокруг ячеек. В закрытых сечениях продольные деформации зависят как от нормальных, сдвиговых напряжений, так и от секториальной координата. На рисунке. 1.24 показаны размеры сечения тонкостенной прямоугольной трубы. Необходимо определить значение функции напряжений  $\varphi_{C1}$  на границе ячейки, напряжения сдвига, константу кручения и секториальной площади сечения. Локальные системы координат стенок показаны на рисунке. 1.24:

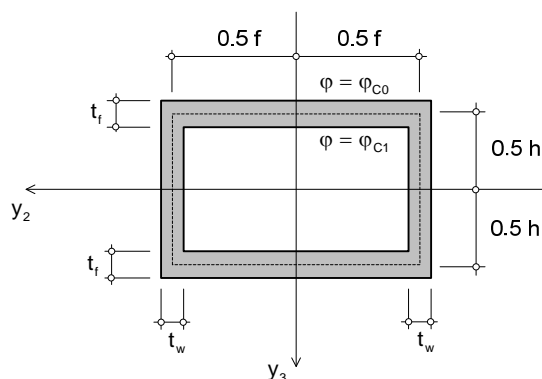


Рисунок 1.24—Тонкостенное закрытое прямоугольное сечение

### 1.11.1. Функция напряжений:

Функции напряжений для замкнутых тонкостенных сечений представляют собой частный случай функций напряжений для общих полых сечений. Как и в общей теории, на внешней поверхности бруса функция напряжения равна нулю. На границе ячейки функция напряжения постоянна. Производные функции напряжения должны удовлетворять выражению (1.50) на границе каждой ячейки. Интегрирование по границе ячейки заменяется интегрированием по средним линиям ее стенок:

$$\oint_s \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \frac{dy_2}{ds} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \frac{dy_3}{ds} \right) ds = 2A_k$$

$s$  Расстояние от центральной линии стенки ячейки (1.134)

$A_k$  Площадь, заключенная в центральной линии стенок клетки  $k$

Локальная система координат  $z_1, z_2, z_3$  стенки, как показано на рисунке 1.25, в общем случае не совпадает с системой координат  $y_1, y_2, y_3$  бруса. Замкнутый интеграл в (1.134) заменяется суммой вкладов стенок клетки:

$$\sum_{i=1}^{n_k} \int_0^{b_i} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \frac{dy_2}{ds} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \frac{dy_3}{ds} \right) ds = 2A_k$$

$b_i$  ширина  $i$

(1.135)

$n_k$  количество стенок в ячейке  $k$

Вклад каждой стены преобразуется в ее местную систему координат. На рисунке 1.25 показано, что начало  $A$  системы координат помещается в средней точке стенки. Ось  $z_2$  указывает направление оси (против часовой стрелки на границе ячейки), а ось  $z_3$  направлена внутрь ячейки. Линия  $PQ$  - граница клетки.

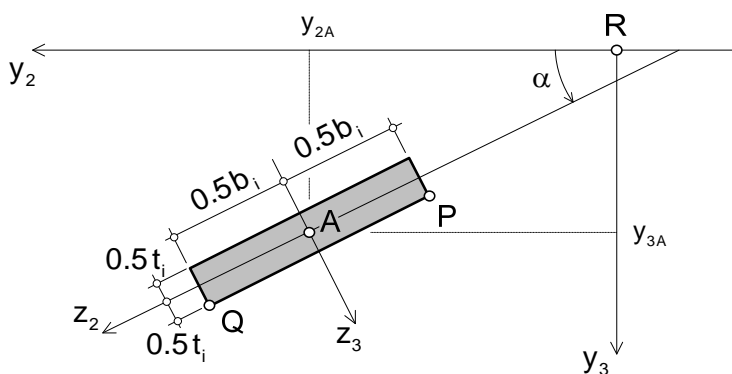


Рисунок 1.25—Стенка с поверхностью  $PQ$  клетки

Интегрирование от  $P$  до  $Q$  заменяется интегрированием по оси  $z_2$ .

Преобразование координат:

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{2A} \\ y_{3A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad (1.136)$$

$y_{2A}, y_{3A}$  координаты средней точки А стены в системе координат бруса

Производные в выражении (1.135) получаются из (1.136):

$$\frac{dy_2}{ds} = \frac{dz_2}{dz_2} = \cos \alpha \quad (1.137)$$

$$\frac{dy_3}{ds} = \frac{dz_3}{dz_2} = \sin \alpha \quad (1.138)$$

Производные функции напряжения определяются с помощью цепного правила:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} \frac{\partial z_2}{\partial y_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} \frac{\partial z_3}{\partial y_2} = \cos \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} - \sin \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} \quad (1.139)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} \frac{\partial z_2}{\partial y_3} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} \frac{\partial z_3}{\partial y_3} = \sin \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} + \cos \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} \quad (1.140)$$

Формулы (1.137) - (1.140) подставляются в (1.135):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \frac{dy_2}{ds} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \frac{dy_3}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} \quad (1.141)$$

Функция напряжения должна удовлетворять управляющему уравнению (1.106) в области каждой стенки. Поскольку стенки тонкие ( $b \gg t$ ), то предполагается, что функция напряжения не зависит от  $z_2$  и изменяется линейно с  $z_3$ . Таким образом, производная функции напряжения в (1.141):

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial z_3} = \frac{\varphi_i^+ - \varphi_i^-}{t_i} \quad (1.142)$$

$\varphi_i^+$       значение  $\varphi$  на стороне  $z_3 = 0.5t$  стена  $i$   
 $\varphi_i^-$       значение  $\varphi$  на стороне  $z_3 = -0.5t$  стена  $i$

Поскольку производная в (1.142) постоянна, интегрирование (1.134) дает:

$$\sum_{i=1}^{n_k} \frac{b_i}{t_i} (\varphi_i^+ - \varphi_i^-) = 2A_k \quad (1.143)$$

Пусть в сечении имеются ячейки  $n_C$ , которые последовательно пронумерованы. Значение функции напряжения на границе ячейки  $i$  называется  $\varphi_{Ci}$ . Уравнениями  $n_C$  (1.143) применяется для определения  $n_C$  неизвестных значений функции напряжения  $\varphi_{Ci}$ . Эти значения полностью описывают функцию напряжения для замкнутого тонкостенного сечения.

### 1.11.2. Константа кручения

Константа кручения  $J$  замкнутого тонкостенного сечения определяется путем конкретизации общего выражения (1.35). Интеграл по площади сечения заменяется суммой интегралов по прямоугольникам стенок:

$$J = - \int_A \left( y_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} + y_3 \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \right) dA = - \sum_{i=1}^{n_k} \int_{A_i} \left( y_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} + y_3 \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \right) dA \quad (1.144)$$

Координаты и производные в (1.143) преобразуются в местные системы координат стен с (1.136), (1.139) и (1.140), используя  $\partial \varphi / \partial z_2 = 0$ :

$$\begin{aligned} \int_{A_i} \left( y_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} + y_3 \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \right) dA &= \int_{A_i} \left( (y_{2A} + z_2 \cos \alpha - z_3 \sin \alpha) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} \cos \alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} \sin \alpha \right) + \right. \\ &\left. \left( (y_{3A} + z_2 \sin \alpha + z_3 \cos \alpha) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} \sin \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} \cos \alpha \right) \right) dA \right. \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} \int_{A_i} (z_3 - y_{2A} \sin \alpha + y_{3A} \cos \alpha) dA \end{aligned} \quad (1.145)$$

Интеграл  $z_3$  от площади прямоугольника равен нулю. Остальные члены интеграла постоянны. Производная функции напряжения подставляется из (1.142). Полученное выражение подставляется в уравнение (1.144):

$$J = \sum_{i=1}^{n_k} b_i (\varphi_i^+ - \varphi_i^-) (y_{2A_i} \sin \alpha_i - y_{3A_i} \cos \alpha_i) \quad (1.146)$$

Если имеется более одной ячейки, общие стены могут быть включены только в одну из ячеек, в которую попадает стена. Этого можно избежать, если в  $\varphi_i^-$  установить значение 0 для всех стен и включить в суммирование все стенки для всех ячеек:

$$J = \sum_{k=1}^{n_c} \sum_{i=1}^{n_k} b_i \varphi_i^+ (y_{2A_i} \sin \alpha_i - y_{3A_i} \cos \alpha_i) \quad (1.147)$$

### 1.11.3. Напряжение сдвига и поток сдвига

Напряжения сдвига в стенке  $i$  определяются с помощью выражений (1.39) и (1.40). Предполагается, что функция напряжения не зависит от  $z_2$ . Координаты напряжения относятся к локальной системе координат стенки  $i$ :



$$\sigma_{12} = \frac{M_T}{J} \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} = \frac{M_T}{J t_i} (\varphi_i^+ - \varphi_i^-), \quad \sigma_{13} = \frac{M_T}{J} \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} = 0 \quad (1.148)$$

$M_T$  — момент закручивания относительно центра вращения  $R$  стержня

Напряжение сдвига постоянно по ширине каждой стенки. Произведение напряжения  $\sigma_{12}$  сдвига на толщину стенки называется сдвиговым потоком в стенке  $i$  и обозначается  $F_i$ . Из выражения (1.147) следует, что сдвиговый поток не зависит от толщины стенки:

$$F_i = \sigma_{12} t_i = \frac{M_T}{J} (\varphi_i^+ - \varphi_i^-) \quad (1.149)$$

Выражения (1.111) и (1.147) показывают, что наибольшее напряжение сдвига в открытом тонкостенном сечении имеется в самой толстой стенке, тогда как в однокамерном закрытом сечении оно принимает наибольшие значения в самой тонкой стенке.

### 1.12. Секториальная площадь замкнутых тонкостенных секций

Угол закручивания замкнутого сечения определяется выражением (1.20):

$$\beta_1 = \frac{M_T}{G J} z_1 \quad (1.150)$$

Деформационное смещение  $v_1$  стенки  $i$  определяется по напряжению сдвига  $\sigma_{12}$  в выражении (1.148). Деформация сдвига имеет вид:

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial w_1}{\partial z_2} + \frac{\partial w_2}{\partial z_1} = \frac{\sigma_{12}}{G} = \frac{M_T}{G J t_i} (\varphi_i^+ - \varphi_i^-) \quad (1.151)$$

Перемещение  $w_2$ , вызванное смещением жесткого тела стенки  $i$ , подставляется из (1.120). Перемещением  $w_{V2}$  в (1.123) из-за скручивания стенки  $i$  пренебрегаем.

$$\frac{\partial w_1}{\partial z_2} = \frac{M_T}{G J t_i} (\varphi_i^+ - \varphi_i^-) - z_{3R(i)} \frac{d\beta_1}{dy_1} = -\frac{d\beta_1}{dy_1} \left( z_{3R(i)} - \frac{\varphi_i^+ - \varphi_i^-}{t_i} \right)$$

Из (1.14) следует, что производная секториальная координата имеет вид:

$$\frac{\partial \omega_R}{\partial z_2} = z_{3R(i)} - \frac{\varphi_i^+ - \varphi_i^-}{t_i} \quad (1.152)$$

Изменение Секторальная координата от начального узла до конечного узла стены  $i$  определяется интегрированием (1.152):

$$\Delta\omega_{R(i)} = \int_0^{b_i} \left( z_{3R(i)} - \frac{\varphi_i^+ - \varphi_i^-}{t_i} \right) dz_2 = b_i \left( z_{3R(i)} - \frac{\varphi_i^+ - \varphi_i^-}{t_i} \right) \quad (1.153)$$

В выражении (1.153) Секториальная координата сечения определяется следующим образом. секториальная координата в вершине  $0$  устанавливается равной нулю. Сечение пересекается в направлении стен, начиная с вершины  $0$ . Когда оно достигает стены  $k$ , значение секториальная координата  $\omega_{R(k)}$  в ее начальной вершине известно. Значение секториальная координата в конечной вершине стены определяется путем прибавления  $\Delta\omega_{R(i)}$  к  $\omega_{R(k)}$ . После того, как значения секториальная координата  $\omega_R$  в вершинах сечения становятся известными, искривляющее смещение вершин можно вычислить с помощью (1.14):

$$w_{1(k)} = -\omega_{R(k)} \frac{d\beta_1}{dy_1} \quad (1.154)$$

$w_{1(k)}$       Искривляющее перемещение узла  $k$   
 $\omega_{R(k)}$       секториальный крутящий в узле  $k$

Из формулы (1.152) следует, что секториальной площади изменяется линейно между вершинами сечения. При равномерном кручении скорость скручивания  $d\beta_1 / dy_1$  постоянна по всей длине балки. Поэтому смещение деформации в (1.154) постоянно по длине балки, подверженной равномерному кручению.

**Пример 1:** Одноклеточное тонкостенное прямоугольное сечение:

На Рисунке 1.26 показаны размеры сечения тонкостенной прямоугольной балки. Требуется  $\varphi_{C1}$  определить значение функции напряжения на границе ячейки, напряжения сдвига, константу кручения и деформацию сечения. Локальные системы координат стенок показаны на рисунке 1.26:

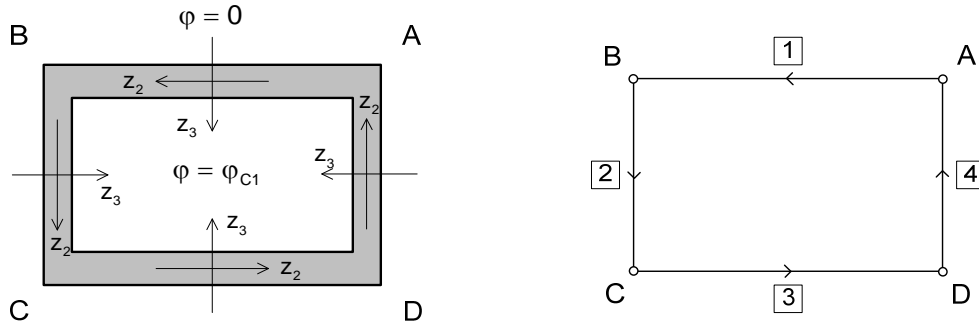


Рисунок 1.26–Системы координат локальных стенок для клетки

Стенки ячейки пронумерованы в последовательности  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$ .

Интеграл (1.143) оценивается следующим образом.

$$\frac{\varphi_{C1}}{t_f} f + \frac{\varphi_{C1}}{t_w} h + \frac{\varphi_{C1}}{t_f} f + \frac{\varphi_{C1}}{t_w} h = 2 f h \quad (1.155)$$

$$\varphi_{C1} = \left( \frac{1}{ht_f} + \frac{1}{ft_w} \right)^{-1}$$

Значения вкладов четырех стенок сечения в выражение (1.146) для константы кручения составляет:

Стена 1 :	$b_1 = f$	$y_{2A_1} = 0$	$y_{3A_1} = -\frac{h}{2}$	$\alpha = 0$	$\Delta J = f \varphi_{C1} \frac{h}{2}$
Стена 2 :	$b_2 = h$	$y_{2A_1} = \frac{f}{2}$	$y_{3A_1} = 0$	$\alpha = 90$	$\Delta J = h \varphi_{C1} \frac{f}{2}$
Стена 3 :	$b_3 = f$	$y_{2A_1} = 0$	$y_{3A_1} = \frac{h}{2}$	$\alpha = 180$	$\Delta J = f \varphi_{C1} \frac{h}{2}$
Стена 4 :	$b_4 = h$	$y_{2A_1} = -\frac{f}{2}$	$y_{3A_1} = 0$	$\alpha = 270$	$\Delta J = h \varphi_{C1} \frac{f}{2}$

При подстановке формул для этих вкладов и (1.155) в (1.146) получаем:

$$J = 2 f h \left( \frac{1}{ht_f} + \frac{1}{ft_w} \right)^{-1} = \frac{2 f^2 h^2 t_f t_w}{f t_w + h t_f} \quad (1.156)$$

Напряжение сдвига в стенах определяется по (1.148) с использованием (1.155):

$$\text{стены 1 и 3: } \sigma_{12} = \frac{M_T}{J t_f} \varphi_{C1} = \frac{M_T}{2 f h t_f} \quad (1.157)$$

$$\text{стены 2 и 4: } \sigma_{12} = \frac{M_T}{J t_w} \varphi_{C1} = \frac{M_T}{2 f h t_w} \quad (1.158)$$

Вклады стенок в функцию депланации определяется с помощью (1.153):

$$\begin{aligned}
\text{Стена 1: } b_i = f \quad t_i = t_f \quad z_{3R} = \frac{h}{2} \quad \Delta\omega_{R(1)} &= f \left( \frac{h}{2} - \frac{\varphi_{C1}}{t_f} \right) = 2\omega_0 \\
\text{Стена 2: } b_i = h \quad t_i = t_w \quad z_{3R} = \frac{f}{2} \quad \Delta\omega_{R(2)} &= h \left( \frac{f}{2} - \frac{\varphi_{C1}}{t_w} \right) = -2\omega_0 \\
\text{Стена 3: } b_i = f \quad t_i = t_f \quad z_{3R} = \frac{h}{2} \quad \Delta\omega_{R(3)} &= f \left( \frac{h}{2} - \frac{\varphi_{C1}}{t_f} \right) = 2\omega_0 \\
\text{Стена 4: } b_i = h \quad t_i = t_w \quad z_{3R} = \frac{f}{2} \quad \Delta\omega_{R(4)} &= h \left( \frac{f}{2} - \frac{\varphi_{C1}}{t_w} \right) = -2\omega_0
\end{aligned} \tag{1.159}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{4} f h \frac{\mu-1}{\mu+1} \quad \text{with} \quad \mu := \frac{h}{t_w} \frac{t_f}{f}$$

Секториальная координата задается  $-\omega_0$  в вершине  $A$  на рисунке 1.31. Секториальная координата в других вершинах вычисляется с помощью приращений в (1.159):

$$\begin{aligned}
\omega_A &= -\omega_0 \\
\omega_B &= \omega_A + \Delta\omega_{R(1)} = \omega_0 \\
\omega_C &= \omega_B + \Delta\omega_{R(2)} = -\omega_0 \\
\omega_D &= \omega_C + \Delta\omega_{R(3)} = \omega_0 \\
\omega_A &= \omega_D + \Delta\omega_{R(4)} = -\omega_0
\end{aligned} \tag{1.160}$$

Результаты показывают, что замкнутый линейный интеграл секториальная координата по границе ячейки равен нулю, так что секториальной площади имеет одно значение. Изменение секториальная координата по сечению показано на рисунке 1.27.

Аналогично для закрытых сечений (прямоугольное полое сечение) распределение секториальная координата в пределах сечения показано на рис. 1.26, и оно проверено с помощью программы для всех параметров, а именно: Секториальная координата, и статических моментов, как показано на рисунках 1.28 и 1.29.

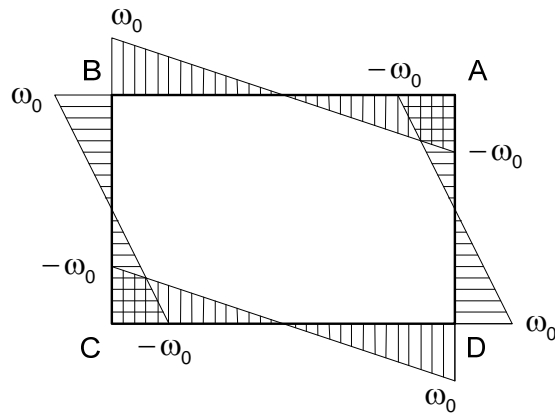


Рисунок 1.27–Секториальная координата для участка

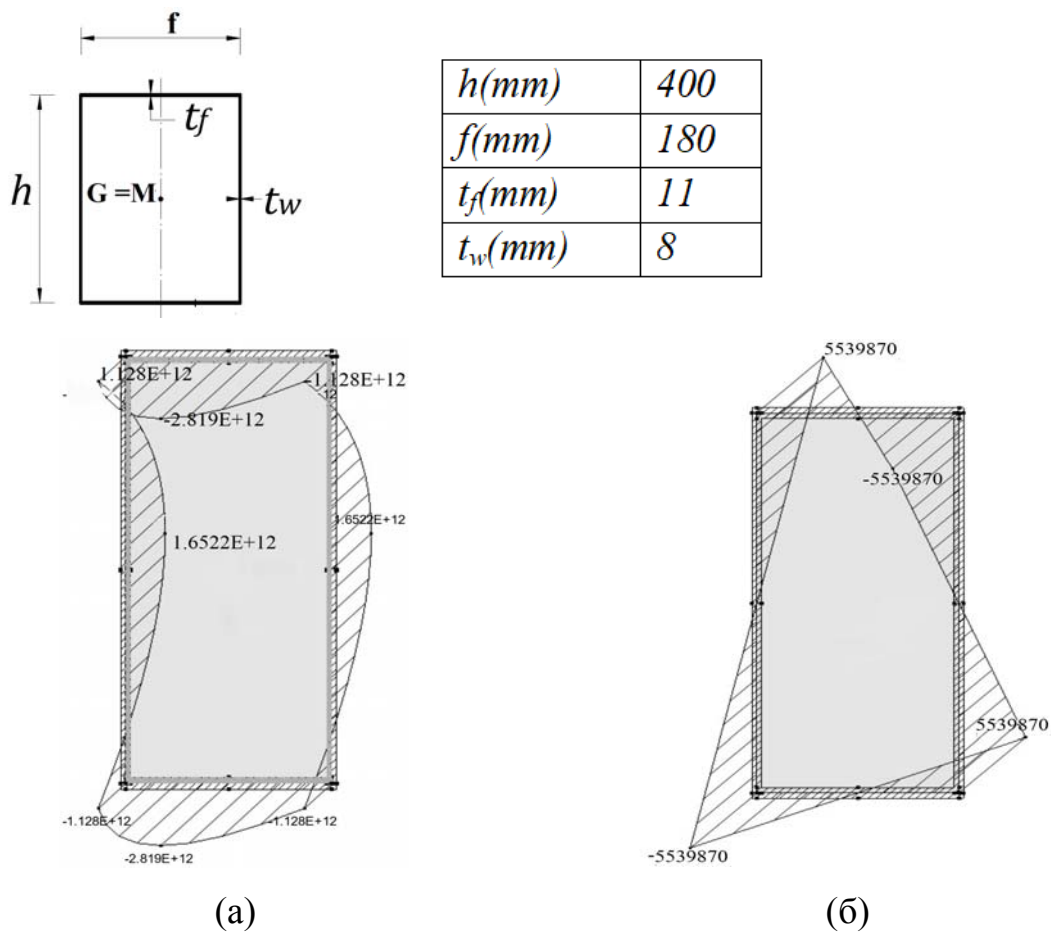


Рисунок 1.28– Секториальная площадь (а), секториальный статический момент (б) относительно осей  $y_2$  и  $y_3$

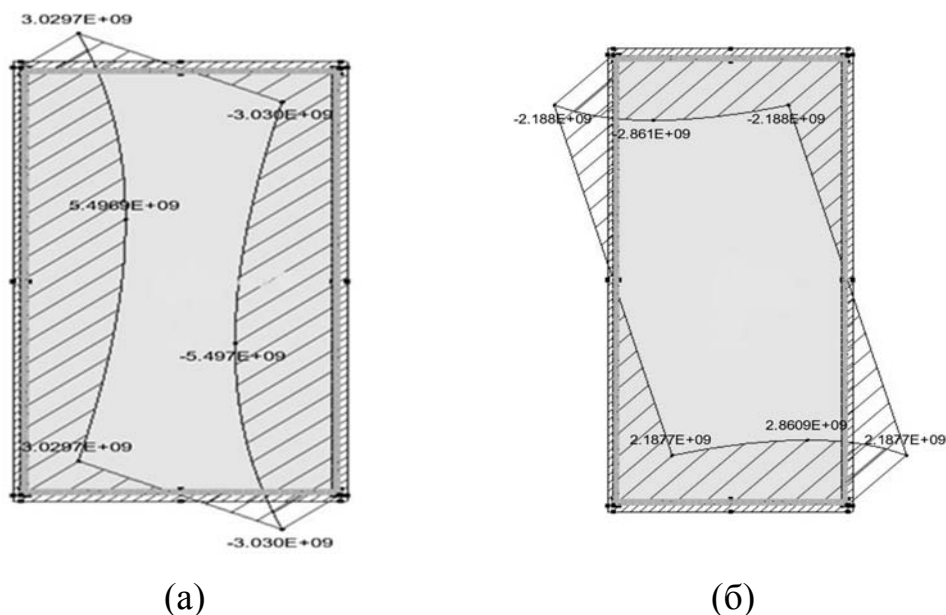


Рисунок 1.29– статический момент относительно осей  $y_2$  (а) и статический момент) относительно осей  $y_3$  (б)

Секториальная координата относительно центра сдвига  $M$  являются геометрическими величинами, и они необходимы для определения продольного напряжения и напряжений сдвига, вызванных ограничением деформации, а статический момент деформации определяется из нормализованных функций деформации.

Общеизвестно, что статические моменты (первые моменты площади) регистрируются относительно глобальных осей или главных осей сечения. Статический момент определяется как произведение  $dA$  и расстояния от его Центра тяжести до опорной оси, лежащей в плоскости сечения. Ниже показаны статические моменты вдоль  $y_2$  и  $y_3$ .

### 1.13. Квадратная труба:

Свойства кручения квадратной балки получены из результатов (1.155) - (1.160) путем задания  $h=f$  и  $t_f = t_w = t$ . Квадратная балка не деформируется.

$$\text{функция напряжения: } \varphi_{C1} = \frac{1}{2} f t \quad (1.161)$$

$$\text{функция напряжения: } \varphi_{C1} = \frac{1}{2} f t \quad (1.162)$$

$$\text{напряжения сдвига: } \sigma_{12} = \frac{M_T}{2 f^2 t} \quad (1.163)$$

$$\text{Функция искривления: } \omega_A = \omega_B = \omega_C = \omega_D = 0 \quad (1.164)$$

**Пример 2:** Тонкостенное прямоугольное сечение с тремя ячейками:

На рисунке 1.30 показаны размеры сечения тонкостенного прямоугольного бруса с тремя ячейками. Требуется  $\varphi_{C1}$ ,  $\varphi_{C2}$  and  $\varphi_{C3}$  определить значения функции напряжения на границах ячеек и константу кручения. Локальные системы координат для стенок каждой из трех ячеек показаны на рисунке 1.30.

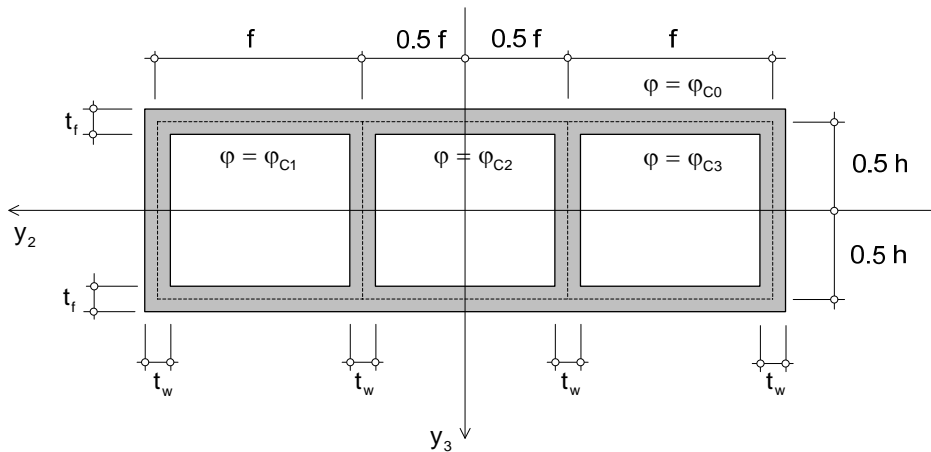


Рисунок 1.30–Тонкостенная закрытая секция с три ячейками

Выражение (1.143) оценивается для каждой из трех клеток. Система трех линейных уравнений для неизвестных функций напряжения ячеек записывается в матричной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{C1}}{t_f} f + \frac{\varphi_{C1}}{t_w} h + \frac{\varphi_{C1}}{t_f} f + \frac{\varphi_{C1} - \varphi_{C2}}{t_w} h &= 2 f h \\ \frac{\varphi_{C2}}{t_f} f + \frac{\varphi_{C2} - \varphi_{C1}}{t_w} h + \frac{\varphi_{C2}}{t_f} f + \frac{\varphi_{C2} - \varphi_{C3}}{t_w} h &= 2 f h \\ \frac{\varphi_{C3}}{t_f} f + \frac{\varphi_{C3} - \varphi_{C2}}{t_w} h + \frac{\varphi_{C3}}{t_f} f + \frac{\varphi_{C3}}{t_w} h &= 2 f h \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_2 \\ 0 & c_2 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{C1} \\ \varphi_{C2} \\ \varphi_{C3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.165)$$

$$c_1 = \frac{1}{h t_f} + \frac{1}{f t_w} \quad c_2 = -\frac{1}{2 f t_w}$$

В общем случае эти уравнения решаются численно. Рассмотрим частный случай сечения с размерами  $h=f$  и  $t_f=t_w=t$ . Тогда решение уравнения (1.165) имеет вид:

$$\varphi_1 = \varphi_3 = 5tf/7 \text{ и } \varphi_2 = 6tf/7.$$

Константа кручения  $J$  определяется с помощью выражения (1.147). Стенки ячеек вносят следующие вклады в это выражение:

$$\begin{aligned} \text{ячейка 1: } \varphi_{C1} \left( f \frac{h}{2} + h \frac{3f}{2} + f \frac{h}{2} - h \frac{f}{2} \right) &= 2fh\varphi_{C1} \\ \text{ячейка 2: } \varphi_{C2} \left( f \frac{h}{2} + h \frac{f}{2} + f \frac{h}{2} + h \frac{f}{2} \right) &= 2fh\varphi_{C2} \\ \text{ячейка 3: } \varphi_{C3} \left( f \frac{h}{2} - h \frac{f}{2} + f \frac{h}{2} + h \frac{3f}{2} \right) &= 2fh\varphi_{C3} \end{aligned}$$

Вклады ячеек складываются для получения константы кручения сечения:

$$J = 2fh(\varphi_{C1} + \varphi_{C2} + \varphi_{C3}) \quad (1.166)$$

Для частного случая сечения с размерами  $h=f$  и  $t_f=t_w=t$ , подставляются значения функции напряжения:

$$J = 2fh \left( \frac{5tf}{7} + \frac{6tf}{7} + \frac{5tf}{7} \right) = \frac{32}{7} t f^3$$

Значения функции напряжения на границах ячеек и константы кручения можно сравнить с соответствующими значениями  $\bar{\varphi}_{C1}$  и  $\bar{J}$  для прямоугольной трубы с размерами  $3f \times f$  и толщиной стенки  $t$ , но без внутренних стенок (одно ячеистая балка). Функция напряжения и константа кручения вычисляются с помощью выражений (1.155) и (1.156):

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{C1} &= \left( \frac{1}{3ft} + \frac{1}{ft} \right)^{-1} = \frac{3}{4} ft \\ \bar{J} &= \frac{2(3f)^2 f^2 t^2}{3ft + ft} = \frac{9}{2} f^3 t \end{aligned}$$

Отношение констант кручения для сечений с внутренними стенками и без них равно  $64/63 = 1.0159$ . Влияние внутренних стенок на жесткость балки при кручении



пренебрежимо мало. Напряжение сдвига в наружной стенке средней ячейки на рис. 1.36 определяется по (1.149):

$$\sigma_{12} = \frac{M_T}{J t_i} (\varphi_i^+ - \varphi_i^-) = \frac{M_T}{t} \frac{7}{32 f^3 t} \frac{6}{7} t f = \frac{3}{16} \frac{M_T}{f^2 t}$$

Соответствующее значение для балки без стен составляет:

$$\bar{\sigma}_{12} = \frac{M_T}{J t_i} (\varphi_i^+ - \varphi_i^-) = \frac{M_T}{t} \frac{2}{9 f^3 t} \frac{3}{4} t f = \frac{1}{6} \frac{M_T}{f^2 t}$$

Отношение максимальных напряжений сдвига в сечениях с внутренними стенками и без них равно  $18/16 = 1.125$ . Секция с внутренними стенками имеет более высокие напряжения сдвига в наружных стенках средней ячейки, чем секция без внутренних стенок.

### Вывод первой главы

1. Приведен краткий обзор работ, посвященных истории развития теории тонкостенных конструкций с ограниченным кручением рамных конструкций.
2. Представлены основные уравнения равномерного кручения, а также их теоретическое обоснование; рассмотрены свойства сечений, поведение кручения и коробление открытых и закрытых тонкостенных сечений.
3. С помощью уравнения, определяющего кручение, для различных типов сечений исследуется поведение при искривлении тонкостенных участков балки с равномерным и неравномерным кручением, включая влияние крутящих и сдвигающих сил.
4. Продемонстрировано численное поведение деформирующего кручения, и показано, что его поведение зависит от свойств сечения открытых и закрытых тонкостенных участков.
5. Секториальная координата относительно центра сдвига  $M$  и статический момент депланации являются геометрическими величинами, которые необходимы для определения продольных напряжений и напряжений сдвига, вызванных депланации.

## ГЛАВА 2. ОТКРЫТЫЕ И ЗАМКНУТЫЕ ТОНКОСТЕННЫЕ СТАЛЬНЫЕ СЕЧЕНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ КРУЧЕНИЕМ

### 2.1. Общее введение

Кручение классифицируется на два типа: однородное кручение и неоднородное кручение. Состояние опоры и ситуация с нагрузкой уточняют, что следует учитывать в отношении этих двух явлений кручения. В различных исследованиях трехмерных балочных элементов учитывается только один вклад в кручение, который дает Сен-Венан [61].

Скорость изменения вращения вокруг оси  $u_1$  предполагалась постоянной, что означает, что секториальной площади во всех сечениях становится одинаковым; это было основное предположение Сен-Венана, как показано на рисунке 2.1. Однородная балка нагружена равными и противоположными крутящими моментами на каждом конце, и поскольку концы могут свободно искривляться вне своих плоскостей, крутящему моменту в каждом поперечном сечении противостоит картина напряжения сдвига, показанная на рисунке 2.1. В результате осевая деформация от кручения исчезает, а распределение деформации сдвига становится одинаковым во всех сечениях. Это привело к появлению другого названия - однородное кручение, в дополнение к кручению Сен-Венана.

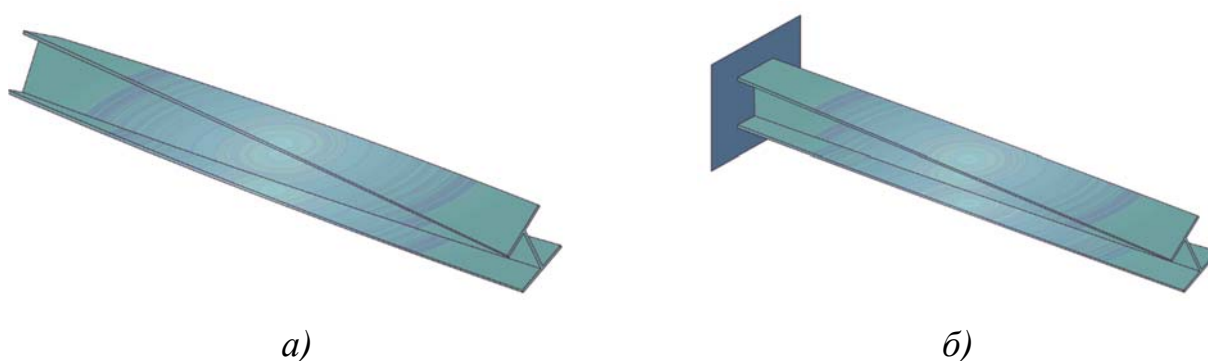


Рисунок 2.1–Сент-Венант. Однородное (а) и неоднородное (б)  
распределение кручения

Когда секториальной площади или кручение поперечного сечения сдерживается на одном или нескольких концах поперечных сечений, как показано на рисунке, скорость кручения уже нельзя считать постоянной функцией от  $u_1$ .

Теперь развиваются осевые деформации, в результате чего возникают осевые напряжения относительно определяющего условия, а сдвиговые деформации и сдвиговые напряжения изменяются вдоль балки. Власов систематически исследовал эти явления для тонкостенных балок в 1961 году, поэтому кручение Власова также известно как неоднородное кручение [11]-[13].

Анализ равномерного кручения показывает, что секториальной площади стержней определяется формой их сечения. Призматические стержни с полным кругом, круглой трубой, квадратной трубой или тонкостенным сечением с одной внутренней вершиной (такой как угол, тройник или крест) не деформируются. На равномерное кручение прутков с такими сечениями не влияет ограничение их смещения в осевом направлении. Кручение стержней общего сечения, особенно тонкостенных открытых сечений, связано с короблением [133]-[135].

В качестве примера на рисунке 2.3 показаны перемещения двутавровой балки, которая закреплена вилкой и нагружена крутящим моментом. Ось фланцев смещается в боковом направлении из-за поворота секций вокруг оси балки. Кроме того, в продольном направлении происходит секториальной площади, линейно изменяющееся по ширине фланцев [65]-[68]. Коробление постоянно по длине балки. Верхний и нижний фланцы смещаются в противоположных направлениях.

Перекося балки может быть сдержан несколькими способами. Типичные примеры показаны для двутавровой балки на рисунке 2.3.

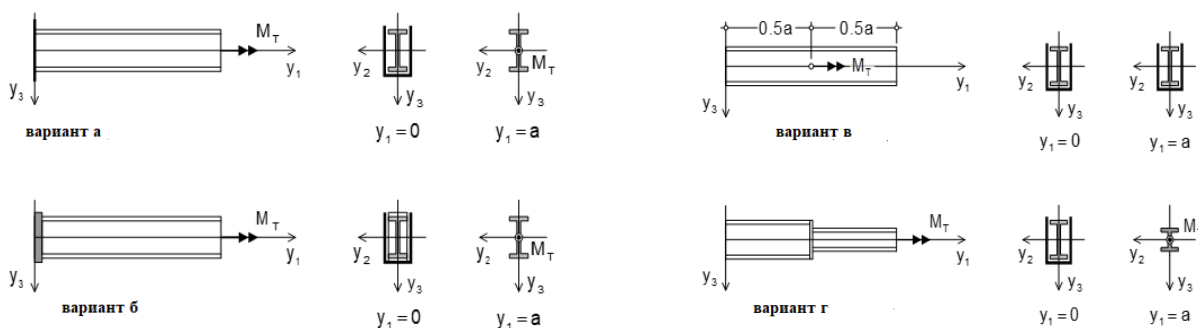


Рисунок 2.3—Примеры неравномерного кручения

- В соответствии с рисунком 2.3, варианте (а) вилочная опора заменена неподвижной опорой. Точки в опорном сечении не могут смещаться в продольном направлении. Этот эффект сдерживает секториальной площади.

- В случае (б) на опоре имеется жесткая торцевая пластина. За счет этой пластины производная  $d\beta_1/dy_1$  угла закручивания в опоре равна нулю, тогда как для равномерного кручения ее значение равно  $M_T / GJ$ . Таким пластина сдерживает коробление.

- В варианте (в) на обоих концах балки имеются вилчатые опоры, а скручивающий момент приложен в середине пролета. Если разрезать балку посередине пролета и приложить половину скручивающего момента к каждой половине, то половинки бруса будут испытывать равномерное кручение с депланации в противоположных направлениях. Поскольку деформации двух половинок балки несовместимы, кручение сдерживается, чтобы сделать их совместимыми.

- В варианте (г) брус не является призматическим. Поскольку сечение изменяется в середине пролета, секториальной площади левой и правой половин балки разное. Коробление сдерживается, чтобы сделать смещение левой и правой половин одинаковым в середине пролета.

Когда секториальной площади балки контролируется, продольное смещение больше не зависит от осевой координаты  $y_1$ . В результате продольные напряжения  $\varepsilon_{11} = dv_1 / dy_1$  в балке не равны нулю. Напряжения  $\sigma_{11}$  влияют как на смещения балки, так и на ее общее напряженное состояние. Кручение теперь называется неравномерным. Теория неравномерного кручения будет представлена в следующем разделе.

## **2.2. Гипотеза о пространственном тонкостенном элементе балки рамных конструкций**

**Управляющее уравнение:** разница между перемещениями и напряжениями, возникающими при равномерном и неравномерном кручении, наиболее ярко

выражена для тонкостенных сечений. Поэтому управляющее уравнение для неравномерного кручения выведено для стержней с тонкостенными сечениями, описание которых рассмотрено в первом разделе. В этом разделе также используются местные системы координат  $z_1, z_2, z_3$ , которые были введены для стенок в первом разделе. Координаты перемещений  $w_1, w_2, w_3$  и все координаты напряжений относятся к местной системе координат.

### 2.2.1. Продольное напряжение

В этом случае принимается, что распределение деформирующих перемещений  $w_1$  при неравномерном кручении по сечению такое же, как и при равномерном кручении в выражении (1.14):

$$w_1(z_1, z_2, z_3) = -\omega(z_2, z_3) \frac{d\beta_1(z_1)}{dz_1} \quad (2.1)$$

$\omega(z_2, z_3)$  функция сжатия для однофазного кручения уравнение (1.130) и (1.153)

Продольное напряжение  $\sigma_{11(\omega)}$ , вызванное смещением (2.1), вытекает из деформации:

$$\sigma_{11(\omega)} = E \varepsilon_{11(\omega)} = E \frac{\partial w_1}{\partial z_1} = -E \omega \frac{d^2 \beta_1}{dz_1^2} \quad (2.2)$$

$\sigma_{11(\omega)}$  продольное напряжение вследствие неравномерного кручения

### 2.2.2. Напряжение сдвига и поток сдвига

Как и для равномерного кручения, предполагается, что напряжение сдвига  $\sigma_{13}$  пренебрежимо мало по сравнению с напряжением сдвига  $\sigma_{12}$ . Напряжение сдвига, связанное с продольным напряжением  $\sigma_{11(\omega)}$ , определяется с помощью уравнения равновесия для направления  $z_1$ :

$$\frac{\partial \sigma_{11(\omega)}}{\partial z_1} + \frac{\partial \sigma_{12(\omega)}}{\partial z_2} = 0 \quad (2.3)$$

Подстановка (2.2) в (2.3) дает производную сдвигового потока:

$$\frac{\partial \sigma_{12(\omega)}}{\partial z_2} = E \omega \frac{d^3 \beta_1}{dz_1^3} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial F_{\omega(i)}}{\partial z_2} = E t_i \omega \frac{d^3 \beta_1}{dz_1^3} \quad (2.5)$$

Приращение  $\Delta F_{\omega(z_2)}$  сдвигового потока от начальной вершины стены  $i$  до точки  $z_2$  на оси стены  $i$  определяется интегрированием (2.5):

$$\Delta F_{\omega(z_2)} = E \frac{d^3 \beta_1}{dz_1^3} \Delta S_{\omega(z_2)} \quad (2.6)$$

$$\Delta S_{\omega(z_2)} = \int_{-0.5b_i}^{z_{2i}} t_i \omega dz_2 \quad (2.7)$$

Из выражения (1.152) следует, что секториальная координата  $\omega$  является линейной функцией от  $z_2$ :

$$\omega = \frac{z_2}{b_i} (\omega_{(i,e)} - \omega_{(i,s)}) + \frac{1}{2} (\omega_{(i,e)} + \omega_{(i,s)}) \quad (2.8)$$

Это выражение подставляется в (2.7). Интегрирование дает

$$\Delta S_{\omega(z_2)} = \frac{1}{2} b_i t_i \left( \left( \left( \frac{z_2}{b_i} \right)^2 - \frac{1}{4} \right) (\omega_{(i,e)} - \omega_{(i,s)}) + \left( \frac{z_2}{b_i} + \frac{1}{2} \right) (\omega_{(i,e)} + \omega_{(i,s)}) \right) \quad (2.9)$$

Приращение статического момента секториальная координата получено для  $z_2 = 0.5b_i$ :

$$\Delta S_{\omega(i)} = \frac{1}{2} b_i t_i (\omega_{(i,e)} + \omega_{(i,s)}) \quad (2.10)$$

$\Delta S_{\omega(i)}$  приращение статического момента функции искривления в стене  $i$

Приращения (2.10) вычисляются для всех стенок сечения. Потoki сдвига в стенах определяются таким образом, чтобы потоки сдвига в каждой вершине находились в равновесии. Поскольку коэффициент, связывающий поток сдвига со статическим моментом в (2.6), одинаков для всех стен сечения, вычисления зависят только от свойств сечения, а не от нагрузки или опор балки.

### 2.2.3. Равновесие сдвиговых потоков

На рисунке 2.4 показана входящая стенка  $c$  и выходящие стенки  $g_1$  и  $g_2$  в вершине  $v_k$ . Пусть сдвиговые потоки в стенке  $i$  в ее начальной и конечной вершинах обозначены через  $F_{\omega(s,i)}$  и  $F_{\omega(e,i)}$ . На рисунке 2.4 показано, что положительный сдвиговый поток в стенке, входящей в вершину, действует на вершину в направлении, противоположном положительному сдвиговому потоку в стенке, выходящей из вершины. Вершина находится в равновесии, если сумма сдвиговых потоков, действующих на вершину, равна нулю:

$$\sum_c F_{\omega(e,c)} = \sum_g F_{\omega(s,g)} \quad (2.11)$$

$c$       *индексы входящих стенок в вершине*  
 $g$       *индексы исходящих стенок в вершине*

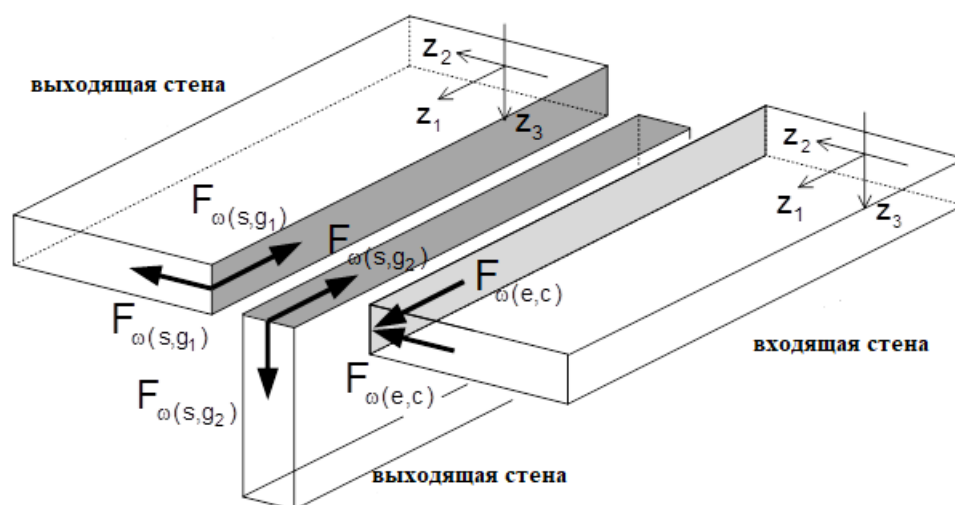


Рисунок 2.4—Направление сдвиговых потоков в вершине

### 2.2.4. Вычисление сдвиговых потоков

Пусть известны  $\omega_j$  значения секториальная координата в узлах сечения и приращения статического  $\Delta S_{\omega(i)}$  момента секториальная координата в стенках сечения. Необходимо определить потоки сдвига и в начальной и конечной вершинах всех стенок сечения. Поток сдвига связан со статическим моментом секториальная координата по (2.6):

$$F_{\omega} = E \frac{d^3 \beta_1}{dy_1^2} S_{\omega}$$

$$\begin{aligned} F_{\omega} & \text{ сдвиговой поток в точке } z_2 \text{ стены} \\ S_{\omega} & \text{ секториальный статический момент инерции в точке } z_2 \text{ стены} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Поскольку коэффициент  $S_{\omega}$  в выражении (2.12) одинаков для всех точек сечения, уравнение равновесия (2.11) для сдвигового потока в вершине можно заменить следующим выражением для статических моментов секториальная координата:

$$\begin{aligned} \sum_c S_{\omega(e,c)} &= \sum_g S_{\omega(s,g)} \\ S_{\omega(e,c)} & \text{ статический момент функции искривления на конце стенки } c \\ S_{\omega(s,g)} & \text{ статический момент функции искривления в конце стенки } g \end{aligned} \quad (2.13)$$

Связь между статическими моментами секториальная координата в начале и конце стены следует из (2.6):

$$\begin{aligned} S_{\omega(e,i)} &= S_{\omega(s,i)} + \Delta S_{\omega(i)} \\ \Delta S_{\omega(i)} & \text{ приращение статического момента функции искривления в стене } i \end{aligned} \quad (2.14)$$

Статические моменты секториальная координата в начальной и конечной вершинах стенок вычисляются как свойства тонкостенного сечения [140]. Потoki сдвига в начальной и конечной вершинах стенок затем вычисляются с помощью выражения (2.11). Для определения статических моментов Секториальная координата для открытых и закрытых сечений требуются различные алгоритмы, описанные ниже.

### 2.2.5. Открытые сечения

Статические моменты  $S_{\omega}$  секториальная координата в вершинах стен определяются пошагово. На каждом шаге алгоритма из сечения удаляется внешняя вершина и стена, инцидентная этой вершине.



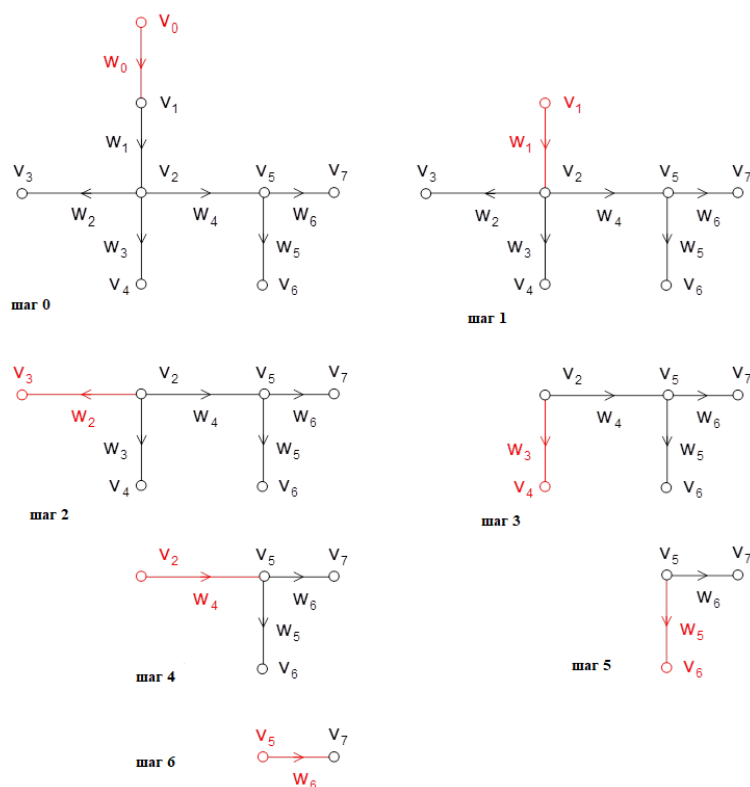


Рисунок 2.5—Этапы вычисления статического момента секториальная координата открытого участка

На шаге 0 участок открыт и, следовательно, имеет по крайней мере одну внешнюю вершину. Выбирается произвольная внешняя вершина. В этой вершине поток сдвига в падающей стенке равен нулю. Из (2.12) следует, что статический момент Секторальная координата в стенке во внешней вершине равен нулю.

Статический момент секториальная координата на другом конце стенки вычисляется с помощью (2.14). В конце шага 0 внешняя вершина и стенка, которые обрабатывались на шаге 0, удаляются из сечения. Это уменьшает количество вершин и количество стенок в сечении на 1. Количество вершин по-прежнему равно количеству стен плюс одна, поэтому уменьшенное сечение остается открытым.

В начале шага 1 выбирается новая внешняя вершина. В результате того, что вершина является внешней, сдвиговый поток ровно в одной стенке  $w_i$  неизвестен в вершине. Вершина может быть как внутренней, так и внешней вершиной исходного сечения. Уравнение (2.13) применяется к исходному сечению для

определения неизвестного статического момента в стенке  $w_i$  в вершине. Статический момент секториальная координата на другом конце стены  $w_i$  вычисляется с помощью (выражение 2.14). Внешний узел и стенка  $w_i$  удаляются из сечения, которое остается открытым. Алгоритм продолжается с шага 2, который аналогичен шагу 1. Алгоритм завершается, когда уменьшенное сечение состоит из одной вершины.

### 2.2.6. Замкнутые сечения

Статические моменты  $S_\omega$  секториальная координата определяются пошагово. Алгоритм показан на рисунке 2.6 для закрытого участка. Операции на шагах 0 - 3 такие же, как и для открытого участка, поскольку удаляемые стены не являются компонентами ячеек.

В начале шага 4 у уменьшенного сечения нет внешних вершин. Процедура, описанная для открытых сечений, больше не может быть продолжена. В начале стены  $w_2$  вводится неизвестный статический момент секториальная координата  $S_0$ , который называется моментом петли. Статический момент в конце стенки  $w_2$  вычисляется с помощью (2.14). В начале шага 5 статический момент  $S_{\omega(s,3)}$  в стене  $w_3$  в вершине  $v_3$  вычисляется по (2.13).

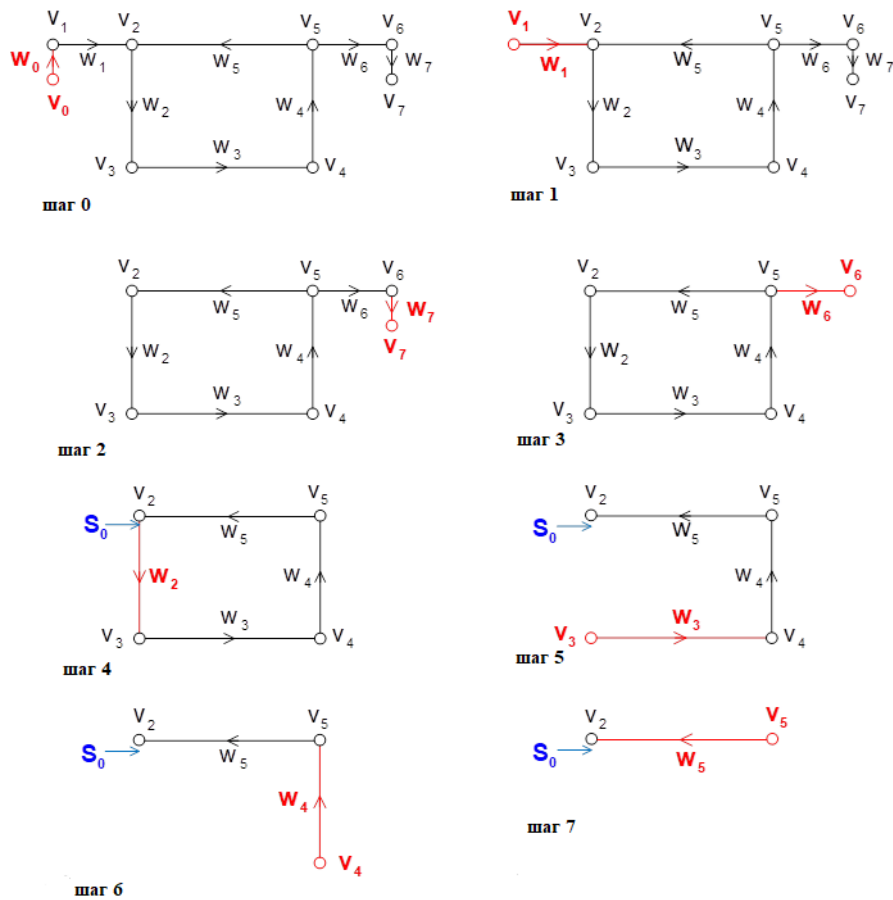


Рисунок 2.6—Этапы вычисления статического момента секториальная координата замкнутого сечения

Процедура аналогична процедуре для открытых сечений, за исключением того, что полученное выражение имеет следующий вид:

$$S_{\omega(s,i)} = S_0 + dS_{(s,i)}$$

$$S_{\omega(s,i)} \text{ статический момент в начале стены } i \quad (2.15a)$$

$$S_0 \text{ неизвестный статический момент петли}$$

$$dS_{(s,i)} \text{ расчетный статический момент в начале стены } i$$

Расчетный статический момент в начале стены  $i$ , аналогичен моменту для открытых секций. Статический момент на конце стены  $w_3$  вычисляется по (2.15a).

Выражение для статического момента имеет следующий вид:

$$S_{\omega(e,i)} = S_0 + dS_{(e,i)}$$

$$S_{\omega(e,i)} \text{ статический момент на конце стенки } i \quad (2.15б)$$

$$dS_{(e,i)} \text{ производная статического момента на конце стенки } i$$

Шаги 6 и 7 выполняются аналогичным образом. В конце шага 7 статические моменты в конечных точках стенок в ячейке известны, как функции  $S_0$ . Неизвестный статический момент  $S_0$  определяется таким образом, чтобы смещение, вызванное напряжением сдвига  $\sigma_{12}$ , имело единичное значение. Это условие выполняется, если замкнутый интеграл напряжения сдвига на границе ячейки равен нулю:

$$\oint \gamma_{12} dz_2 = \oint \frac{\sigma_{12}}{G} dz_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \oint \sigma_{12} dz_2 = 0 \quad (2.16)$$

Напряжение сдвига  $\sigma_{12}$  в точке  $z_2$  стенки ячейки равно потоку сдвига в (2.6), деленному на толщину  $t$  стенки в этой точке:

$$\sigma_{12} = \frac{E}{t} \frac{d^3 \beta_1}{dy_1^3} (S_0 + dS) \quad (2.17)$$

$S_0$       момент нераскрытой петли  
 $dS$       известная часть сдвигового потока в точке

Напряжение сдвига подставляется из (2.17) в (2.16):

$$S_0 \oint \frac{1}{t} dz_2 + \oint \frac{1}{t} dS dz_2 = 0 \quad (2.18)$$

Интегралы в (2.18) являются свойствами сечения. Уравнение решается для момента контура  $S_0$ . Окончательные статические моменты секториальная координата получаются подстановкой  $S_0$  в (2.14) и (2.15).

### 2.3. Первичные и вторичные крутящие моменты

Поток сдвига  $F_\omega$ , вызванный неравномерным кручением, вызывает вторичный момент кручения  $M_{Ts}$  относительно центра вращения  $R$ . Этот момент добавляется к первичному моменту кручения, вызванному равномерным кручением. Вклад сдвигового  $\Delta M_{Ts(i)}$  потока в стенке  $i$  во вторичный крутящий момент определяется следующим образом:

$$\Delta M_{Ts(i)} = \int_{-0.5b_i}^{0.5b_i} F_w(z_2) z_{3R(i)} dz_2 \quad (2.19)$$

Плечо момента  $z_{3R}$  подставляется из (1.129):

$$\Delta M_{Ts(i)} = \int_{-0.5b_i}^{0.5b_i} F_w(z_2) \frac{d\omega}{dz_2} dz_2 \quad (2.20)$$

Выражение (2.20) преобразуется с помощью интегрирования по частям:

$$\Delta M_{Ts(i)} = \int_{-0.5b_i}^{0.5b_i} F_w(z_2) \frac{d\omega}{dz_2} dz_2 = F_{\omega(e,i)} \omega_{(e,i)} - F_{\omega(s,i)} \omega_{(s,i)} - \int_{-0.5b_i}^{0.5b_i} \frac{dF_w}{dz_2} \omega dz_2$$

$F_{\omega(e,i)}$  сдвиговой поток в вершине  $e$  в стенке  $i$   
 $F_{\omega(s,i)}$  сдвиговой поток в начальной вершине  $s$  в стенке  $i$   
 $\omega_{(e,i)}$  секториальная координата в конечной вершине  $e$  в стенке  $i$   
 $\omega_{(s,i)}$  секториальная координата в начальной вершине  $s$  в стенке  $i$

(2.21)

Пусть значения вкладов всех стенок  $i$  в крутящий момент суммируются. Для каждой вершины сечения сумма содержит произведение секториальная координата в вершине на сумму потоков сдвига в вершине. Сумма потоков сдвига в вершине равна нулю, поскольку каждая вершина находится в равновесии. Поэтому первыми двумя членами в правой части уравнения (2.21) можно пренебречь. Подстановка производной сдвигового потока из (2.5) в последний член уравнения (2.21) позволяет получить:

$$\Delta M_{Ts(i)} = -E \frac{d^3 \beta_1}{dz_1^3} \int_{-0.5b_i}^{0.5b_i} t_i \omega^2 dz_2 \quad (2.22)$$

Выражение (2.8) показывает, что секториальная координата ( $\omega$ ) является линейной функцией от  $z_2$ . Это свойство используется для вычисления интеграла в выражении (2.22) следующим образом:

$$\Delta C_{\omega(i)} = \int_{-0.5b_i}^{0.5b_i} t_i \omega^2 dz_2 = \frac{1}{3} b_i t_i (\omega_{(i,s)}^2 + \omega_{(i,s)} \omega_{(i,e)} + \omega_{(i,e)}^2) \quad (2.23)$$

Вклады  $\Delta C_{\omega(i)}$  стенок в сечении складываются для получения вторичного крутящего момента  $M_{Ts}$  обусловленного ограничением кручения:

$$M_{Ts} = -E C_{\omega} \frac{d^3 \beta_1}{dz_1^3}$$

$$C_{\omega} = \sum_i \Delta C_{\omega(i)} \quad (2.24)$$

$C_{\omega}$       постоянная искривления сечения

В общем крутящем моменте, если балка подвергается неравномерному кручению, то суммарному приложенному крутящему моменту  $M_T$  противостоит внутренний крутящий момент, состоящий из двух компонентов. Первичный внутренний момент—это крутящий момент, возникающий  $M_{Tp}$  при равномерном кручении. Вторичный внутренний момент—это момент скручивания  $M_{Ts}$ , вызванный деформирующим усилием:

$$M_T = M_{Tp} + M_{Ts} \quad (2.26)$$

$M_T$       крутящий момент

$M_{Tp}$       первичный скручивающий момент вследствие равномерного кручения

$M_{Ts}$       первичный скручивающий момент вследствие искривления

Крутящие моменты выражаются в терминах угла поворота  $\beta_1$  и свойств формы сечения с помощью выражений (1.18) и (2.24):

$$\sigma_{12T} = \sigma_{12p} + \sigma_{12s}$$

$$\sigma_{12p} = 2z_3 \frac{M_{Tp}}{J} \quad \text{открытые сечения}$$

$$\sigma_{12p} = \frac{M_{Tp}}{J t_i} (\varphi_i^+ - \varphi_i^-) \quad \text{закрытые сечения} \quad (2.27)$$

$$\sigma_{12s} = \frac{E}{t} \frac{d^3 \beta_1}{dy_1^3} S_{\omega}(z_2) \quad \text{ограничитель искривления}$$

### 2.3.1. Суммарные напряжения сдвига:

Общее напряжение сдвига  $\sigma_{12T}$ , вызванное кручением, представляет собой сумму первичного напряжения сдвига  $\sigma_{12p}$ , вызванного первичным крутящим моментом  $M_{Tp}$ , и вторичного напряжения сдвига  $\sigma_{12s}$ , вызванного вторичным крутящим моментом  $M_{Ts}$ . Первичное напряжение сдвига вычисляется по

выражениям (1.111) для открытых сечений и (1.148) для закрытых сечений. Вторичное напряжение сдвига вычисляется по выражению (2.12):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{12T} &= \sigma_{12p} + \sigma_{12s} \\
 \sigma_{12p} &= 2z_3 \frac{M_{Tp}}{J} && \text{открытые сечения} \\
 \sigma_{12p} &= \frac{M_{Tp}}{J t_i} (\varphi_i^+ - \varphi_i^-) && \text{закрытые сечения} \\
 \sigma_{12s} &= \frac{E}{t} \frac{d^3 \beta_1}{dy_1^3} S_\omega(z_2) && \text{ограничитель искривления}
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

#### 2.4. Разрешающее уравнение для неравномерного кручения

Эффект коробления (депланации) необходимо учитывать при анализе тонкостенных конструкций, подвергающихся кручению, поскольку осевые напряжения возникают в основном в местах действия сосредоточенных моментов кручения (за исключением свободных концов) и в сечениях с ограничениями на коробление. Обычно тонкостенные сечения не подчиняются закону плоских сечений Эйлера-Бернулли-Навье, но общая теория тонкостенных сечений, разработанная Власовым, подчиняется [11], [86]. Если секториальной площади не сдерживается, то приложенный крутящий момент полностью переносится равномерным кручением, в результате чего вклад сдвига в энергию деформации можно считать достаточно малым.

При ограничении деформации в конструкции возникают дополнительные напряжения сдвига, а также нормальные напряжения, поскольку напряжения деформации не следует игнорировать [90]. Результирующие напряжения в основном являются напряжениями сдвига (равномерное кручение) или комбинацией сдвиговых и продольных напряжений (неравномерное кручение). Распределение этих напряжений по тонкостенному сечению в значительной степени зависит от геометрии поперечного сечения, в частности, от того, открытое это сечение или закрытое [95]. Для включения напряжений сдвига деформации в глобальное равновесие бруса, то есть для учета вторичного эффекта деформации крутящего момента, обычно требуется дополнительная кинематическая

составляющая (наряду с углом закручивания), что увеличивает сложность решаемой задачи.

Существует множество исследований по неравномерному кручению с учетом или без учета эффекта депланации в виде теорий и анализа с использованием коммерческих МКЭ-кодов [68]-[73]. Матрица жесткости элемента и векторы нагрузки определяются с помощью первичной и вторичной функций депланации [74]-[75]. Эффект депланации возникает в основном в местах действия сосредоточенных крутящих моментов (за исключением свободных концов балки) и в сечениях с ограничениями на свободный изгиб. Эффект депланации был включен через дополнительную степень свободы в каждой узловой точке в виде первой производной от угла закручивания поперечного сечения балки [149]. Между тем, анализ кручения тонкостенных сечений, включая сдвиг, изучался различными авторами.

Разработан новый элемент кручения тонкостенных балок, включающий деформацию сдвига, который учитывает деформацию депланации и деформацию сдвига из-за сдержанного кручения [76]-[81]. Призматические балки сплошного и полого сечения или тонкостенные сечения с одной внутренней вершиной (например, угол, тройник или крест) не деформируются, но все остальные сечения будут испытывать секториальной площади поперечного сечения, в зависимости от геометрии сечения. Пренебрежение этими деформирующими напряжениями может привести к значительным ошибкам, особенно при кручении открытого профиля или сдвиговом изгибе коротких балок, и ситуация может быть еще более критической для композитных балок [156-159].

Однако предполагается, что напряжения и деформации от депланации в закрытых сечениях незначительны, и поэтому ими пренебрегают. Ожидается, что разумно сильное коробление будет иметь эффект в открытых сечениях, чем в закрытых, и его значение, как предполагается, будет ограничено открытыми сечениями. Ограничение деформации коробления приводит к тому, что скорость кручения становится равной нулю в точке ограничения, что вызывает местное



эффективное усиление жесткости при кручении, которое влияет на глобальную реакцию балки на кручение.

Разница между перемещениями и напряжениями, вызванными равномерным и неравномерным кручением, наиболее ярко выражена для тонкостенных сечений. Деформация тонкостенных конструкций вследствие кручения представляет собой все продольные перемещения, вызванные кручением поперечного сечения элемента вокруг его центра сдвига.

Рассматривается поведение тонкостенных секций бруса с ограниченным кручением с использованием управляющего уравнения для неоднородного кручения. Данное исследование широко применяется к стержням замкнутого и открытого сечения из тонкостенной стали, подверженным сосредоточенной крутящей нагрузке, и к наиболее общим граничным условиям кручения. В настоящее время большинство конструктивных элементов транспортных сооружений проектируется с использованием тонкостенных элементов благодаря их преимуществам, таким как высокая прочность, малый вес, устойчивость к несимметричным нагрузкам и конструктивная эффективность.

Независимо от их применения, методы анализа включают влияние типа поперечного сечения, неравномерное кручение и ограничения тонкостенных элементов должны быть рассмотрены для правильного проектирования и определения их поведения [160]. Важность ограниченного кручения тонкостенных сечений значительно возросла, поскольку деформации и напряжения, вызванные кручением, влияют на поведение конструкций как с открытым, так и с закрытым сечением. Как правило, тонкостенные сечения не ведут себя в соответствии с законом плоских сечений Эйлера-Бернулли-Навье, однако общая теория тонкостенных сечений была разработана Власовым. Кроме того, тонкостенные структуры, такие как пластины и оболочки, связанные с формулами конечных элементов, являются наиболее распространенными конструктивными элементами в природе и технике.

Когда балка подвергается неоднородному кручению и угол закручивания на единицу длины не является постоянным вдоль ее оси. Несколько исследователей занимались вопросами ограниченного кручения тонкостенных балок различного типа поперечного сечения [86], [87]. В качестве основы были широко изучены модели с приводом Сен-Венана, а также разработан новый элемент кручения тонкостенных балок, включающий деформацию сдвига, который учитывает деформацию депланации и деформацию сдвига вследствие сдержанного кручения [163-167].

Управляющее уравнение для неравномерного кручения выведено для балок тонкостенного сечения с локальной системой координат, определяемой осями  $y_1, y_2, y_3$ , как показано на рисунке 2.7.

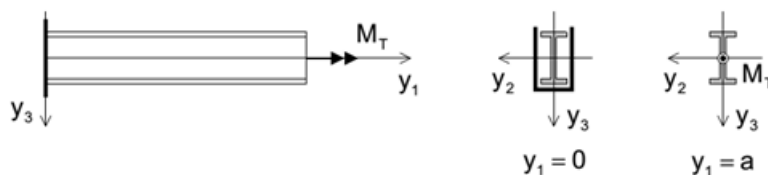


Figure 2.7–Кручение призматической балки

Скорость изменения суммарного крутящего момента (2.26) в балке находится в равновесии с приложенной нагрузкой:

$$\frac{dM_T}{dy_1} + m_T = 0 \quad (2.28)$$

$$E C_\omega \frac{d^4 \beta_1}{dy_1^4} - G J \frac{d^2 \beta_1}{dy_1^2} = m_T$$

$\beta_1$	угол закручивания,	$J$	постоянная кручения
$E, G$	постоянные упругости,	$m_T$	скручивающая нагрузка
$C_\omega$	постоянные депланации,	$a$	длины
$\theta$	изгибно – крутильная характеристика стержня(число)		

(2.29)

Выражение (2.29) — это управляющее уравнение для неравномерного кручения. Оно решается для угла закручивания с учетом граничных условий на двух концах балки. Типичными являются следующие граничные условия:

неподвижная опорная  $M_T = 0, \beta_1 = 0$     неподвижная опорная  $\beta_1 = 0, \frac{d\beta_1}{dy_1} = 0$   
свободная опорная  $M_T = 0, M_{Ts} = 0$     торцевая пластина  $M_T = 0, \frac{d\beta_1}{dy_1} = 0$

Если скручивающий момент  $M_T$  приложен в вершине, где секториальной площади не сдерживается, граничные условия следуют из (2.24) и (2.26):

$$M_{Ts} = 0 \rightarrow -EC_\omega \frac{d^3\beta_1}{dy_1^3} = 0 \rightarrow \frac{d^3\beta_1}{dy_1^3} = 0 \quad (2.30)$$

$$M_{Tp} + M_{Ts} = M_T \rightarrow \frac{d\beta_1}{dy_1} = \frac{M_T}{GJ} \quad (2.31)$$

Если балка подвергается неравномерному кручению, то полному приложенному моменту кручения  $M_T$  противостоит внутренний момент кручения, который состоит из двух компонентов - момента чистого кручения ( $M_{Tp}$ ) и секториального крутящего момента ( $M_{Ts}$ ).  $M_{Tp}$  - это момент кручения при равномерном кручении (кручение Сен-Венана), а  $M_{Ts}$  - момент кручения при деформирующем ограничении.

Изменение внутренних моментов кручения выражается как функция характерного числа неравномерного кручения. Рассмотрим однородную форму управляющего уравнения 2.29 и пусть характеристическое число для кручения балки определяется выражением 2.32. Управляющее уравнение для неравномерного кручения приведено в уравнении 2.32, поскольку скорость изменения общего момента кручения в балке находится в равновесии с приложенной нагрузкой, как показано ниже.

$$EC_\omega \frac{d^4\beta_1}{dy_1^4} - GJ \frac{d^2\beta_1}{dy_1^2} = 0, \quad \frac{d^4\beta_1}{dy_1^4} - \left(\frac{\theta}{a}\right)^2 \frac{d^2\beta_1}{dy_1^2} = 0 \quad (2.32)$$

$$\theta := a \sqrt{\frac{GJ}{EC_\omega}}$$

Значение  $\theta$  зависит от геометрических свойств (площадь, второй момент площади, константа деформации, константа кручения), что показало, что поведение профиля при кручении также может быть описано аналогичным образом

геометрическими свойствами. Ограничение деформации создает продольные напряжения, напряжения сдвига, однако продольные напряжения деформации наибольшие на концах фланцев. Для проверки комбинированного изгиба и кручения удобнее использовать значение момента перекоса во фланце, а не продольное напряжение перекоса. Для элемента с постоянной  $M_T$  кручение при изгибе создает обобщенную силу, называемую би-моментом (секторальный крутящий момент) ( $M_\omega$ ), которая задается следующим образом:

$$M_\omega = - E C_\omega \frac{d^2 \beta_1}{dy_1^2} \quad (2.33)$$

Общее решение однородного уравнения (2.32) удовлетворяется следующей предполагаемой функцией угла закручивания  $\beta_1(y_1)$  и позволяет получить точные решения угла закручивания, его производных, моментов закручивания и бимоментов узла. Они даются следующим образом:

$$\beta_1 = c_1 \sinh \frac{\theta y_1}{a} + c_2 \cosh \frac{\theta y_1}{a} + c_3 \frac{y_1}{a} + c_4 \quad (2.34)$$

Свободные коэффициенты  $c_1 - c_4$  определяются так, чтобы граничные условия на концах бруса были удовлетворены. Если вершина  $y_1 = 0$  закреплена, а в вершине  $y_1 = a$ , которая свободно деформируется, приложен скручивающий момент  $M_T$ . Решение уравнения (2.33) с граничными условиями и свободными коэффициентами приведено ниже: на основе производных уравнения (2.34) получаются следующие уравнения:

$$\frac{d\beta_1}{dy_1} = c_1 \left( \frac{\theta}{a} \right) \cosh \frac{\theta y_1}{a} + c_2 \left( \frac{\theta}{a} \right) \sinh \frac{\theta y_1}{a} + c_3 \frac{1}{a} \quad (2.35)$$

$$\frac{d^2 \beta_1}{dy_1^2} = c_1 \left( \frac{\theta}{a} \right)^2 \sinh \frac{\theta y_1}{a} + c_2 \left( \frac{\theta}{a} \right)^2 \cosh \frac{\theta y_1}{a} \quad (2.36)$$

$$\frac{d^3 \beta_1}{dy_1^3} = c_1 \left( \frac{\theta}{a} \right)^3 \cosh \frac{\theta y_1}{a} + c_2 \left( \frac{\theta}{a} \right)^3 \sinh \frac{\theta y_1}{a} \quad (2.37)$$

$$\frac{d^4 \beta_1}{dy_1^4} = c_1 \left( \frac{\theta}{a} \right)^4 \sinh \frac{\theta y_1}{a} + c_2 \left( \frac{\theta}{a} \right)^4 \cosh \frac{\theta y_1}{a} \quad (2.38)$$

$$c_3 = \frac{M_T a}{GJ} \quad c_1 = -\frac{c_3}{\theta} \quad c_2 = \frac{c_3}{\theta} \tanh \theta \quad \& \quad c_4 = -\frac{c_3}{\theta} \tanh \theta$$

Эти коэффициенты подставляются в выражение (2.34), и угол закручивания приводится ниже:

$$\beta_1 = \frac{M_T a}{GJ\theta} \left( \tanh \theta \left( \cosh \frac{\theta y_1}{a} - 1 \right) - \left( \sinh \frac{\theta y_1}{a} - \frac{y_1}{a} \right) \right) \quad (2.39)$$

На основе уравнений (2.39) получаются следующие  $M_{TP}$ ,  $M_{TS}$  и  $M_\omega$  для узла, как указано ниже в уравнениях (2.40) - (2.41) соответственно.

$$M_{TP} = M_T + M_T \left( \tanh \theta \sinh \frac{\theta y_1}{a} - \cosh \frac{\theta y_1}{a} \right) \quad (2.40)$$

$$M_{TS} = -M_T \left( \tanh \theta \sinh \frac{\theta y_1}{a} - \cosh \frac{\theta y_1}{a} \right) \quad (2.41)$$

$$M_\omega = \frac{-M_T^* a}{\theta} \left( \tanh \theta \cosh \frac{\theta y_1}{a} - \sinh \frac{\theta y_1}{a} \right) \quad (2.42)$$

Изменение  $M_{TP}$ ,  $M_{TS}$  и  $M_\omega$  для различных значений изгибно-крутильная характеристика стержня ( $\theta$ ) представлены графически. Сходства и различия  $M_{TP}$  и  $M_{TS}$  для различных значений представлены графически на рисунках 2.8 и 2.9 со ссылками на результаты в приложениях.

Рассматривая точку, расположенную почти на опоре при  $y_1 = 0$  на рисунке 2.8, общий крутящий момент в основном передается первичным крутящим моментом, в то время как вторичный крутящий момент мал. В других точках пролета общий крутящий момент передается частично как крутящий момент Сен-Венана (т.е. напряжениями сдвига Сен-Венана) и частично как крутящий момент деформации (т.е. напряжениями сдвига, вызванными ограничением деформации). Значение для закрытого и открытого сечений существенно различаются, соответственно, для закрытого сечения напряжение сдвига постоянно, а для открытого сечения изменяет свое направление и величину по толщине.

Свойства сечения для открытого и закрытого сечений отличаются в отношении констант кручения и деформации, поэтому значение величины отличается. Для малых значений обоих механизмов кручения вклад в  $M_T$  по всей

балке в обоих случаях, но с увеличением значения влияние крутящего момента изменяется, как показано на рисунке 2.8.

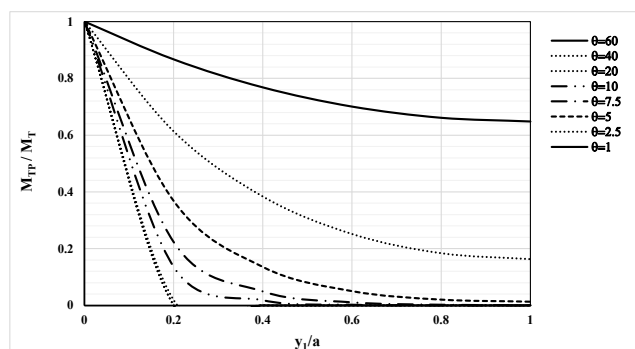


Рисунок 2.8—Изменение  $M_{TP}$  и  $M_{TS}$  для различных значений  $\theta$

На рисунке 2.8 видно, что с увеличением значения,  $M_{TP}$  быстро уменьшается, а момент Сен-Венана в большей части балки доминирует над крутящим моментом. Аналогично, с увеличением значения, момент Сен-Венана растет, а крутящий момент  $M_T$  доминирует над моментом Сен-Венана в большей части балки в обоих случаях. При значении более 20 общий крутящий момент ограничивается небольшой длиной (приблизительно  $0,2a$ ) вблизи опоры, как показано на рис. 2.9, и его величина быстро меняется в обоих случаях.

Аналогично, поведение и изменение  $M_\omega$  для различных значений  $\theta$  представлены графически на рисунке 2.10. Число характеристик для кручения является показателем того, как быстро рассеивается эффект от сдерживания деформации, а момент деформации изменяется в зависимости от условий сдерживания балки.

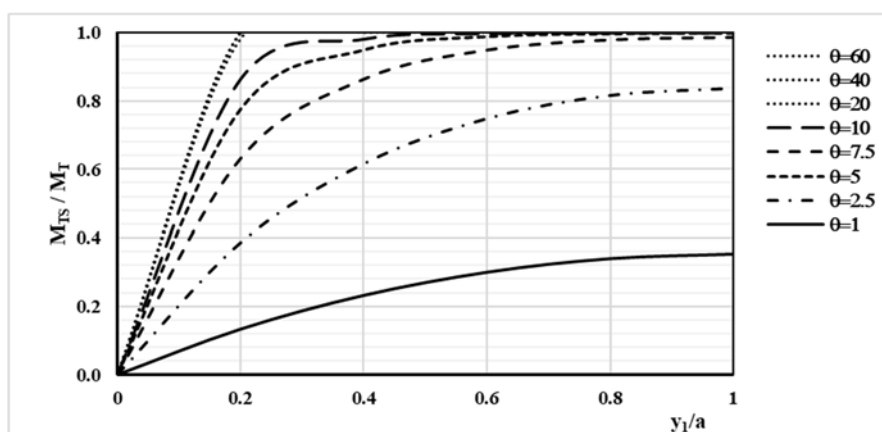


Рисунок 2.9—Изменение  $M_{TP}$  и  $M_{TS}$  для различных значений  $\theta$

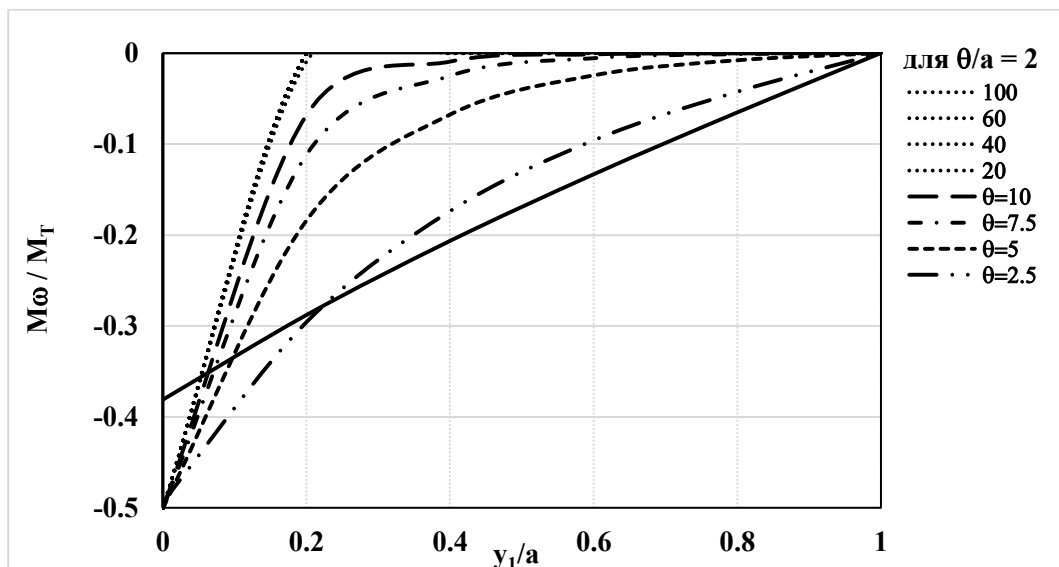


Рисунок 2.10—Изменение  $M\omega$  для различных значений  $\theta$  и для  $\theta/a = 2$

Изменение  $M\omega$  показывает большие значения на неподвижной опоре, так как секториальная площадь предотвращается, и это вызывает наибольшие нормальные напряжения, как показано на рисунках 2.10 и 2.11. На свободном конце балка может свободно деформироваться, поэтому нормальные напряжения и  $M\omega$  равны нулю. Графики, показанные ниже, построены для различных значений отношения  $\theta$  к  $a$  ( $\theta/a = 2$  и  $4$ ), так как это общий случай. Распределение  $M\omega$  меняется в обоих случаях по-разному при изменении значений  $\theta$  и, соответственно, нормальные напряжения деформации различаются вдоль балки в зависимости от положения ограниченного кручения и типа сечения.

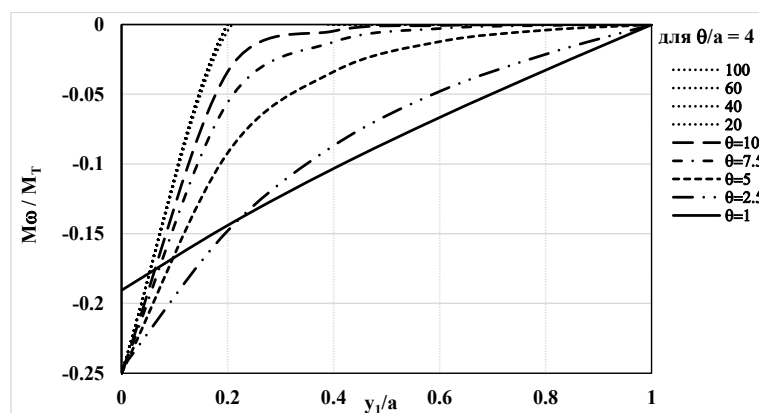


Рисунок 2.11—Изменение  $M\omega$  для различных значений  $\theta$  и для  $\theta/a = 4$

Комбинированный график для  $M_{TP}$ ,  $M_{TS}$  и  $M_{\omega}$  для значений  $\theta = 1$  и  $\theta = 10$  показан на рисунках 2.12 и 2.13. Значения  $M_{TP}$ ,  $M_{TS}$  и  $M_{\omega}$  отличаются для  $\theta = 1$  и для  $\theta = 10$ . Для  $\theta = 1$ , как показано на рисунках 2.12 и 2.13, суммарные составляющие крутящего момента распределены по всему пролету балки, а их величина постепенно изменяется по мере уменьшения значения параметра.

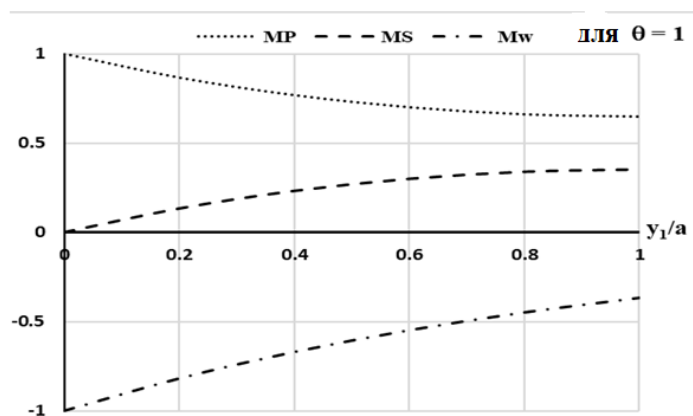
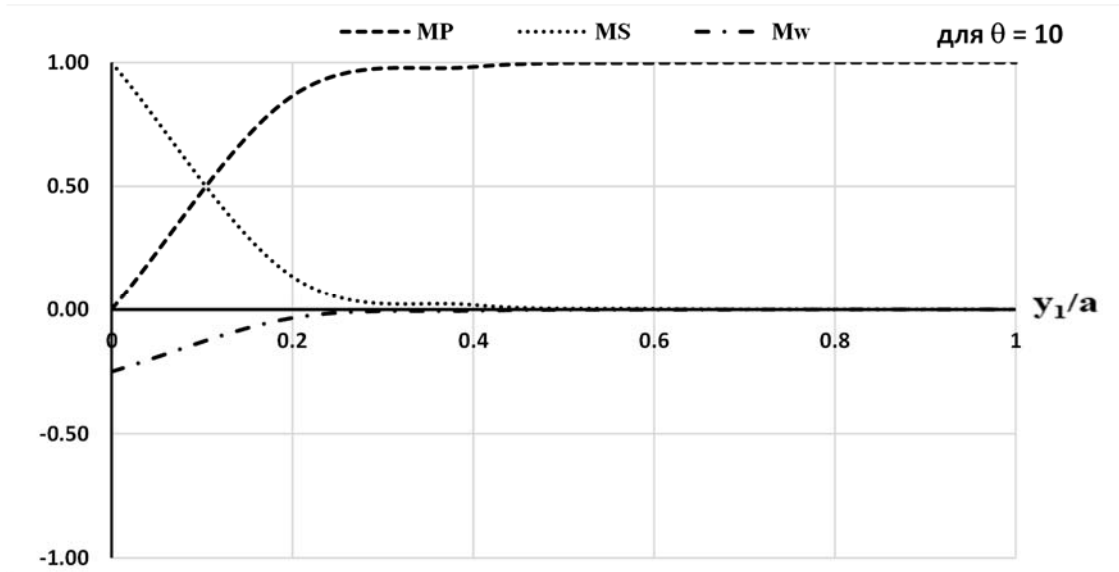


Рисунок 2.12—Комбинированные  $M_{TP}$ ,  $M_{TS}$  и  $M_{\omega}$  для значения  $\theta = 1$

Если значение  $\theta$  параметра мало, то это наиболее характерно для открытых сечений. При  $\theta = 10$  полный крутящий момент ограничивается небольшой длиной вблизи опоры, и его величина изменяется быстро [168]. Если значение  $\theta$  параметра велико, то это наиболее характерно для закрытых сечений. На рисунке 2.12 приведен комбинированный график для  $M_{TP}$ ,  $M_{TS}$  и  $M_{\omega}$  для  $\theta = 1$ , компоненты суммарного крутящего момента растянуты по всему пролету и стабильно изменяются при малом значении  $\theta$  параметра.

Для значения  $\theta = 10$  общий крутящий момент ограничен небольшим интервалом вблизи опоры и быстро меняет свою величину, как показано на рисунке 2.13.





Рисунок

### 2.13—Комбинированные $M_{TP}$ , $M_{TS}$ и $M_{\omega}$ для значения $\theta = 10$

Изменение деформации и жесткости поперечного сечения вдоль балки приводит к изменению характеристического числа. В данном исследовании мы использовали гиперболическую функцию формы, а не полиномиальные функции формы, так как они дают точные результаты в соответствии с аналитическим решением. Расхождение в характеристическом числе может описывать неоднородное поведение кручения.

С увеличением значения  $\theta$ ,  $M_{TP}$  быстро уменьшается, и момент Сен-Венана в обоих случаях доминирует над основной частью крутящего момента балки. При значении  $\theta$  более 20 общий крутящий момент ограничивается небольшой длиной (примерно  $0,2a$ ) вблизи опоры, и его величина быстро меняется в обоих случаях. Распределение  $M_{\omega}$  в обоих случаях меняется по-разному при изменении значений  $\theta$  и, соответственно, нормальное напряжение деформации различается вдоль балки в зависимости от положения сдерживаемого кручения и типа сечения. На рисунке 2.14 показан комбинированный график для  $M_{TP}$ ,  $M_{TS}$  и  $M_{\omega}$  для  $\theta = 1$  и  $\theta = 10$ . Компоненты общего крутящего момента растянуты по всему пролету и стабильно изменяются по мере уменьшения значения  $\theta$ . При  $\theta = 10$  суммарный крутящий момент ограничивается небольшим интервалом вблизи опоры и быстро изменяется по величине.

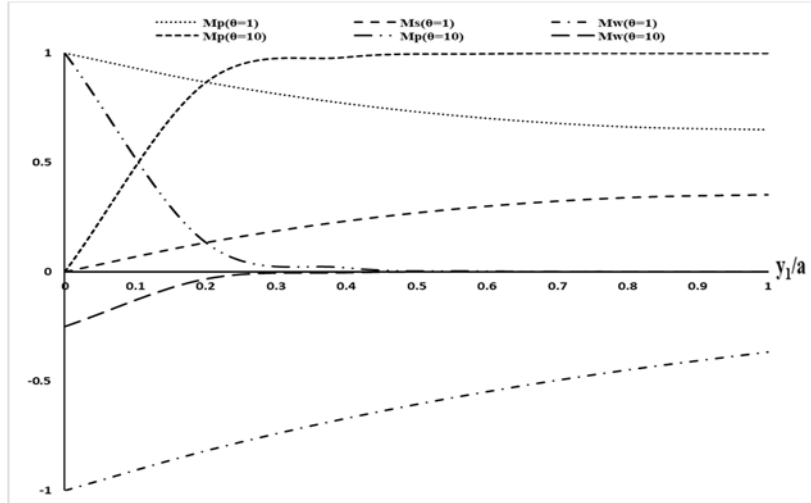


Рисунок 2.14–Комбинированные  $M_{TP}$ ,  $M_{TS}$  и  $M\omega$  для значений  $\theta = 1$  и  $\theta = 10$

Из уравнения (2.39), с функцией решения для  $\beta_1(y_1)$  и заменой констант интегрирования на деформации, получается следующее соотношение набивки [16,26,169]. Учитывая неоднородное кручение, эффект деформации содержится внутри через дополнительную степень свободы в каждой узловой точке балки.

$$\mathbf{K}_T = \frac{EC_\omega}{a^3} \begin{bmatrix} k_{T1} & k_{T2} & k_{T3} & k_{T4} \\ k_{T2} & k_{T6} & k_{T7} & k_{T8} \\ k_{T3} & k_{T7} & k_{T11} & k_{T12} \\ k_{T4} & k_{T8} & k_{T12} & k_{T16} \end{bmatrix}$$

$$K_{T1} = K_{T11} = S * \theta \sinh \theta, \quad K_{T6} = K_{T16} = S * \left( \cosh \theta - \frac{\sinh \theta}{\theta} \right) * a^2$$

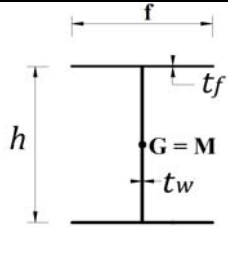
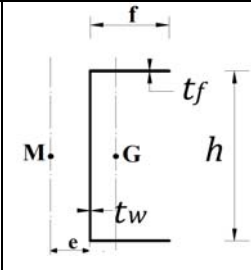
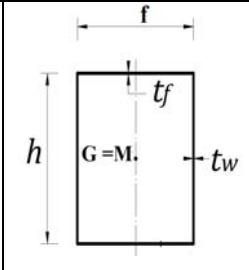
$$K_{T2} = K_{T4} = S * (\cosh \theta - 1) * a, \quad K_{T8} = S * \left( \frac{\sinh \theta}{\theta} - 1 \right) * a^2$$

$$S = \left( \frac{\theta^2}{Q} \right), \quad Q = 2(1 - \cosh \theta) + \theta \sinh \theta, \quad K_{T3} = -K_{T1}, \quad K_{T7} = K_{T12} = -K_{T2}$$

В конце концов, сравнение всех компонентов крутящего момента для трех различных тонкостенных сечений проиллюстрировано путем представления и обсуждения результатов. Типы различных типов сечений приведены в таблице 2.1 (двутавровое сечение, прямоугольное полое сечение и швеллер). Рассматривая призматическую балку на рисунке 2.7, которая закреплена в вершине  $y_1 = 0$  и подвергается крутящему моменту  $M_T$  без ограничения деформации в вершине  $y_1 = a$ . Свойства сечения, перемещения, вращения, напряжения должны быть

сопоставлены для всех случаев и сравнено их распределение в пролете на основе требуемого значения  $\theta$ .

Таблица 2.1–Различные типы тонкостенных профилей

Сечения			
h(mm)	400	400	400
f(mm)	180	180	180
tf(mm)	11	11	11
tw(mm)	8	8	8
$E = 200 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2 \quad M_T = 1.0 \text{ kNm} \quad G = 77 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$			

Характеристики сечения, перемещения, повороты, напряжения необходимо сравнить для всех случаев и сопоставить их распределение по пролету на основе требуемого значения  $\theta$ .

**Пример I:** По таблице 2.1 для двутаврового сечения, значения  $C_\omega$ ,  $J$ ,  $\theta$  и  $\beta_1(a)$  вычислены ниже:

$$C_\omega = \frac{1}{24} t_f b^3 h^2 = 0.4277 \cdot 10^{-6} \text{ m}^6, \quad J = \frac{1}{3} (2 f t_f^3 + h t_w^3) = 0.2280 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$\theta_{I_{\text{sec.}}} = 1.812$$

$$\beta_1 = -0.1257 \sinh 1.812 + 0.119208 \cosh 1.812 + 0.2278 - 0.119208$$

$$\beta_1 = 0.109 \text{ радианы} = 6.25 \text{ градус}$$

Угол закручивания для равномерного кручения балки двутавровой балки сечения составляет:

$$\beta_{1,\text{uniform}} = \frac{a M_T}{G J} = \frac{4.0}{77 \cdot 10^6 \cdot 0.228 \cdot 10^{-6}} = 0.228 \text{ радианы} = 13.06 \text{ градус}$$

Изменение угла равномерного и неравномерного кручения,  $M_{TP}$ ,  $M_{TS}$  и  $M_T$  на оси балки показано на рисунке 2.15. Поворот в вершине  $y_1 = a$  из-за неравномерного кручения составляет около 50 процентов от поворота при

равномерном кручении двутаврового сечения. Ссылаясь на рисунок 2.15, как  $M_{TP}$ , так и  $M_{TS}$  вносят вклад в  $M_T$  через пролет балки, а напряжения кручения обусловлены сдвиговыми напряжениями Сен-Венана и ограничением деформации, как показано на рисунке 2.16.

Приложенный крутящий момент полностью противостоит вторичному крутящему моменту в опоре ( $y_l = 0$ ) и полностью первичному крутящему моменту при  $y_l = a$ . Распределение полного момента между равномерным и неравномерным кручением в промежуточных точках показано на рис. 2.15.

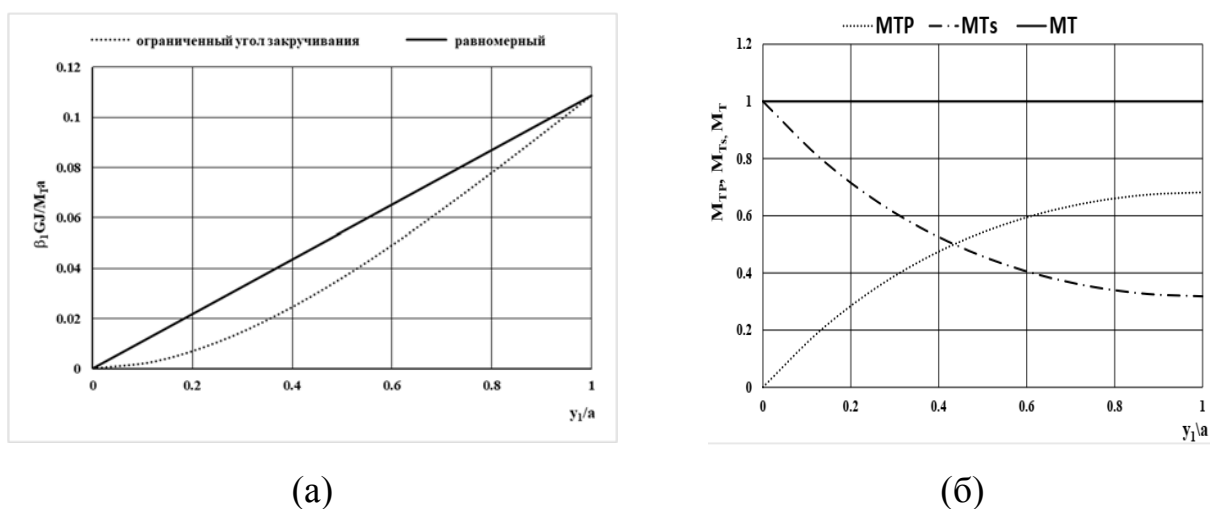


Рисунок 2.15–Нормированные графики  $\beta_l$  с  $M_T$  (а) и  $M_{TP}$ ,  $M_{TS}$  с  $M_T$  (б) напряженной двутавровой балки.

Кроме того, значения  $\beta_l$  из уравнения 2.5 и его производные показаны на рисунке 2.17, чтобы показать их сравнение и поведение по длине элемента. Поведение фланцев можно наблюдать на графике для  $\beta_l$  и его первых производных ( $\beta_l'$ ). Они показывают изменение кручения, при котором сдвиговые деформации и напряжения Сен-Венана пропорциональны первичным моментам кручения. Кривизна фланцев также связана с графиком  $\beta_l''$ , и она пропорциональна моменту депланации в одном фланце. Комбинированный график для  $\beta_l''$  и  $\beta_l'''$  показан на рисунке 2.17 (а), так что  $\beta_l''$  представляет первичный крутящий момент, а  $\beta_l'''$  относится к вторичным крутящим моментам. График  $\beta_l'''$  относится к характеристикам скорости изменения кривизны и пропорционален сдвигающему

усилию в фланце в дополнение к крутящему моменту. На основании рисунка 2.17(б) на долю  $\beta_1'$  приходится 68 %, а на долю  $\beta_1'''$  — 32 % от общего крутящего момента.

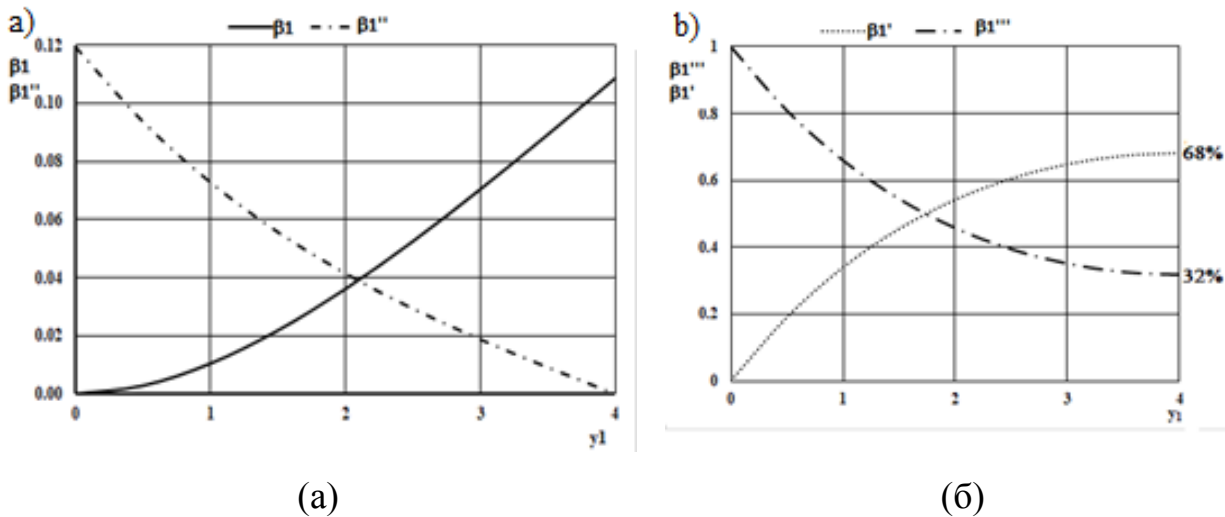


Рисунок 2.17–Разложение полного крутящего момента для двутавровой балки для  $\beta_1$  и  $\beta_1''$  (а), для  $\beta_1'$  и  $\beta_1'''$  (б)

Для двутаврового сечения продольное напряжение  $\sigma_{11}$  при  $y_1 = 0$  из-за неравномерного кручения и функция деформации вычисляются следующим образом:

$$\omega = \pm \frac{1}{4} f h = \pm 18.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2, \quad \sigma_{11} = -\omega \frac{M_T}{C_\omega} \tanh \theta \left( \frac{a}{\theta} \right) = \pm 0.0980 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$$

Первичное напряжение сдвига на свободном конце ( $y_1 = a$ ) вычисляется, как указано ниже, и линейно изменяется по толщине стенок сечения.

$$\text{фланцевая секция: } \tau_{\max} = \pm \frac{M_T t_f}{J} = \pm 48.2 \text{ N/mm}^2,$$

$$\text{полотно: } \tau_{\max} = \pm \frac{M_T t_w}{J} = \pm 35.1 \text{ N/mm}^2$$

Вторичное напряжение сдвига в узле  $y_1 = 0$  вычисляется путем определения статических моментов секториальная координата и является постоянным по толщине стенок сечения. Вклад стенок в статический момент секториальная координата вычисляется на основе потока сдвига во внешних вершинах. Напряжение сдвига, вызванное ограничением деформации, равно:

$$\sigma_{12s} = \frac{F\omega}{t_f} = -\frac{20.83}{0.011} = -1893.6 \text{ kN/m}^2 = -1.9 \text{ N/mm}^2$$

Распределения напряжений  $\sigma_{11}$ , функции перекоса ( $\omega$ ) и вторичных сдвиговых напряжений  $\sigma_{12}$  по сечению вследствие неравномерного кручения показаны на рисунке 2.18.

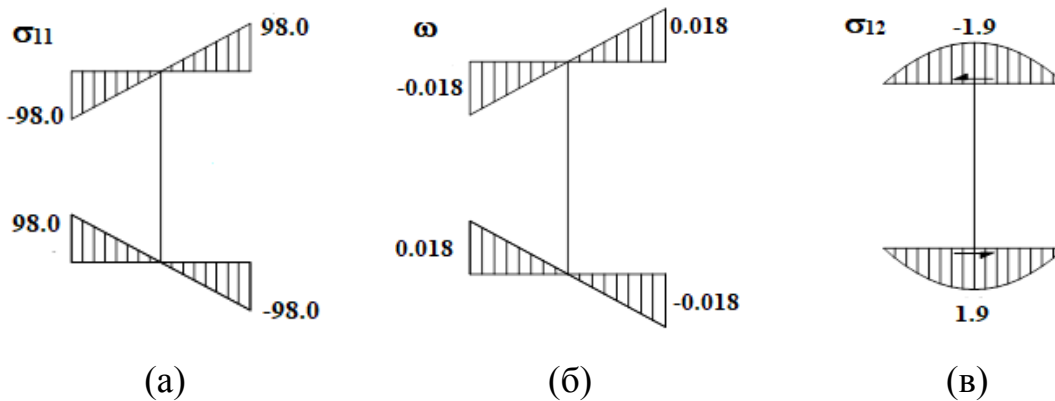


Рисунок 2.18–Напряжение ( $\sigma_{11}$ ) (а), статические моменты ( $S_\omega$ ) (б), вторичное напряжение сдвига ( $\sigma_{12s}$ ) (в) (МПа)

**Пример II.** Аналогично, для прямоугольного полого сечения, которое приведено в таблице 2.1, для сечения I, значения  $C_\omega$ ,  $J$ ,  $\theta$  и  $\beta_1$  (а) вычислены ниже

$$C_\omega = \frac{2}{3} \omega_0^2 (f t_f + h t_w) = 0.2875 \cdot 10^{12} \text{ mm}^6,$$

$$J = \frac{2 f^2 h^2 t_w t_f}{f t_w + h t_f} = 0.1562 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

$$\theta = 57.85$$

$$\beta_1 = 5.749 \cdot 10^{-6} * (-\sinh 57.85 + \cosh 57.85 - 1.0) + 0.3326 \cdot 10^{-3}$$

$$\beta_1 = 0.327 \cdot 10^{-3} \text{ радианы} = 0.0187 \text{ градус}$$

Угол закручивания для равномерного кручения прямоугольного сечения бруса составляет:

$$\beta_{1,uniform} = \frac{a M_T}{GJ} = \frac{4.0}{77 \cdot 10^6 \cdot 0.1562 \cdot 10^{-3}} = 0.333 \cdot 10^{-3} \text{ радианы}$$

Изменение равномерного и неравномерного угла закручивания (сдержанного кручения) на оси прямоугольного полого сечения балки показано на рисунке 2.19.

Для прямоугольного полого сечения значение  $\theta$  параметра велико, а угол закручивания очень мал по своей величине. Угол закручивания в точках,

расположенных ближе к опоре, имеет значительную величину, как показано на рисунке 2.19, и внезапно уменьшается до малого значения на свободном конце. Поворот в вершине  $y_1=a$  вследствие равномерного и неравномерного кручения почти одинаков, и его величина ничтожно мала по сравнению с открытым сечением.

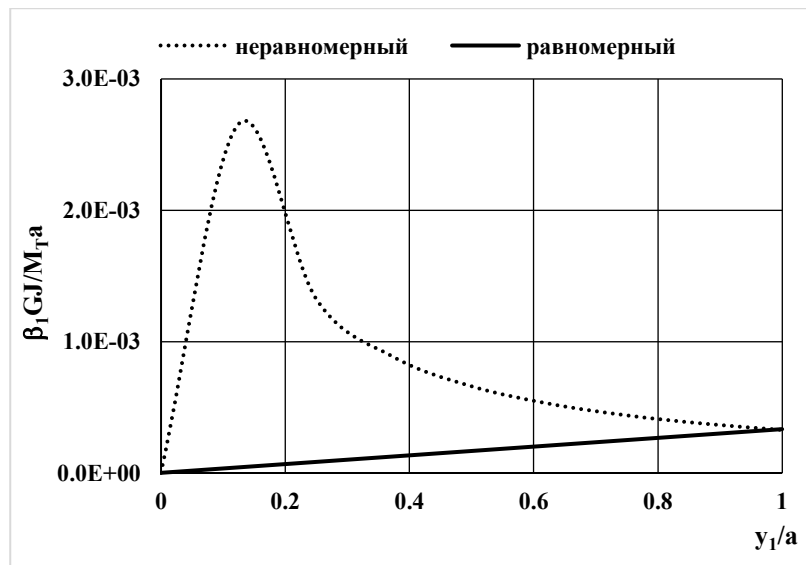


Рисунок 2.19–Нормированные графики  $\beta_1$  напряженного участка тоннеля

Продольное напряжение  $\sigma_{11}$  при  $y_1 = 0$  вследствие неравномерного кручения прямоугольного полого сечения приведено ниже, а распределение этого напряжения по сечению показано на рисунке 2.20:

$$\omega_0 = \frac{1}{4} f h \frac{\mu-1}{\mu+1} \quad \text{with } \mu := \frac{h t_f}{t_w f} \quad \omega = \pm \omega_0 = \pm 9.124 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\sigma_{11} = -\omega \frac{M_T}{C_\omega} \tanh \theta \left( \frac{a}{\theta} \right) = \mp 2.2 \text{ N/mm}^2$$

Первичное напряжение сдвига равно нулю при  $y_1=a$  и вычисляется по выражениям, приведенным ниже. Оно постоянно по толщине стенок сечения.

$$\text{фланцевая секция: } \sigma_{12p} = \frac{M_T}{2 f h t_f} = \pm 0.63 \text{ N/mm}^2,$$

$$\text{полотно: } \sigma_{12p} = \frac{M_T}{2 f h t_w} = \pm 0.86 \text{ N/mm}^2$$

Вторичные напряжения сдвига ( $\sigma_{12}$ ) на опоре ( $y_1 = 0$ ) зависят от статических моментов ( $S_\omega$ ) секториальная координата. Приращения статического момента для стен задаются выражением ниже:

$$\eta = \frac{180}{11} + \frac{400}{8} = 66.36$$

$$S_0 = -\frac{9.124 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 66.36} \cdot (0.18^2 - 0.40^2) = -2.92 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$\text{стена } AB: S_{(1)} = S_0 - \frac{1}{4} \omega_0 f t_f = -2.92 \cdot 10^{-6} - 4.516 \cdot 10^{-6} = -7.44 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$\text{стена } BC: S_{(2)} = S_0 + \frac{1}{4} \omega_0 f t_w = -2.92 \cdot 10^{-6} + 7.299 \cdot 10^{-6} = 4.38 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

На основании приведенных выше решений и статического момента сечения, изменения вторичного напряжения сдвига по сечению показаны на рисунке 2.20(в):

$$\sigma_{12s} = -\frac{M_T S_\omega}{t C_\omega} = -\frac{1.0}{0.2875 \cdot 10^{-6}} \frac{S_\omega}{t} = -3.4783 \cdot 10^6 \frac{S_\omega}{t} \text{ kN/m}^2$$

Распределения напряжений  $\sigma_{11}$ , секториальная координата ( $\omega$ ) и вторичных сдвиговых напряжений  $\sigma_{12}$  по сечению вследствие неравномерного кручения показаны на рисунке 2.20.

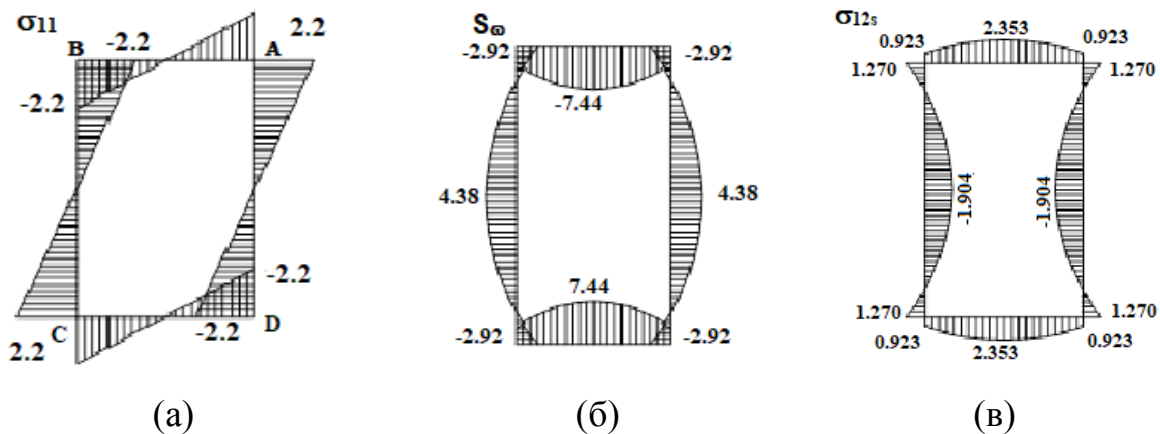


Рисунок 2.20–Напряжение ( $\sigma_{11}$ ) (а), статические моменты ( $S_\omega$ )(б), вторичное напряжение сдвига ( $\sigma_{12s}$ ) (в)(МПа)

**Пример III.** Аналогично, рассмотрим участок канала в таблице 2.1. Значения для сечения I, значения  $C_\omega$ ,  $J$ ,  $\theta$  и  $\beta_1$ (а) вычислены ниже:



$$C_{\omega} = \frac{\left(f - \frac{t_w}{2}\right)^3 * h^2 * t_f}{12} \left[ \frac{2ht_w + 3\left(f - \frac{t_w}{2}\right)t_f}{ht_w + 6\left(f - \frac{t_w}{2}\right)t_f} \right] = 0.580 * 10^{-6} m^6,$$

$$J = \frac{1}{3}(2ft_f^3 + ht_w^3) = 0.218 * 10^{-6} m^4$$

$$\theta = 1.52$$

$$\beta_1 = -0.157 \sinh 1.52 + 0.142 \cosh 1.52 + 0.238 - 0.142$$

$$\beta_1 = 0.083 \text{ радианы} = 4.75 \text{ градус}$$

Угол закручивания для равномерного кручения балки прямоугольного сечения составляет:

$$\beta_{1, \text{равномерная}} = \frac{a M_T}{GJ} = \frac{4.0}{77 * 10^6 \times 0.218 * 10^{-3}} = 0.24 \text{ радианы} = 13.75 \text{ градус}$$

Изменение равномерного и неравномерного угла закручивания (сдержанное кручение) на оси канального сечения прутка показано на рисунке 2.21. Поворот в вершине  $y_1 = a$  вследствие неравномерного кручения составляет 40 процентов от поворота при равномерном кручении сечения канала.

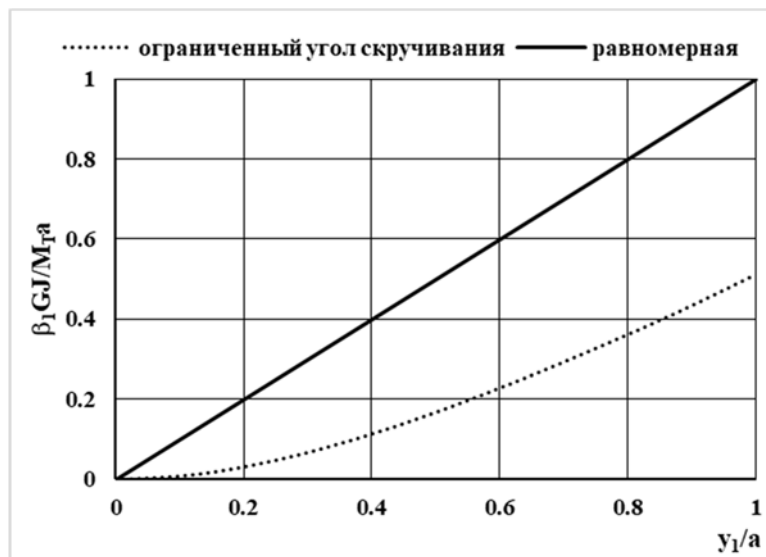


Рисунок 2.21 - Нормированные графики  $\beta_1$  напряженного участка тоннеля

Для секции канала продольное напряжение ( $\sigma_{11}$ ) при  $y_1 = 0$  из-за неравномерного кручения и секториальная координата вычисляются следующим образом:

$$\omega_A = \frac{h}{2} * (f - t_w - e) = 21.4 * 10^{-3} m^2 \quad \omega_B = -e * \frac{h - t_f}{2} = -13.8 * 10^{-3} m^2$$

$$\sigma_{11A} = \omega_A \frac{M_T}{C_\omega} \tanh \theta \left( \frac{a}{\theta} \right) = 124.6 N/mm^2 \quad \sigma_{11B} = -\omega_B \frac{M_T}{C_\omega} \tanh \theta \left( \frac{a}{\theta} \right) = -80.3 N/mm^2$$

Значения и распределение функции перегиба в наружных вершинах и продольного напряжения приведены на рисунке 2.24. Соответственно, первичное напряжение сдвига во фланцевых и полотняных пластинах у опоры равно нулю, а в узле  $y_1 = a$  вычисляется следующим образом. Оно линейно изменяется по толщине стенок сечения.

$$\text{фланцевая секция: } \tau_{\max} = \pm \frac{M_T t_f}{J} = \pm \frac{0.011}{0.218 * 10^{-6}} kN/m^2 \hat{=} \pm 50.0 N/mm^2$$

$$\text{полотно: } \tau_{\max} = \pm \frac{M_T t_w}{J} = \pm \frac{0.008}{0.218 * 10^{-6}} kN/m^2 \hat{=} \pm 36.4 N/mm^2$$

Вторичное напряжение сдвига равно нулю на участке и в узле  $y_1 = 0$ . Оно вычисляется путем определения статических моментов секториальная координата.

$$S_0 = 0.5 t_f (f - 0.5 t_w) h * (0.5 f - 0.25 t_w - e) = 7.36 * 10^{-6} m^4$$

$$\text{стена } AB: S_{(2)} = \frac{1}{4} h t_f [(f - 0.5 t_w) - e]^2 = 12.6 * 10^{-6} m^4$$

$$\text{стена } BC: S_{(1)} = S_0 - \frac{1}{8} t_w e h^2 = -3.68 * 10^{-6} m^4$$

$$\sigma_{12s0} = -\frac{M_T}{t_f} \frac{S_\omega}{C_\omega} = -1.01 N/m^2$$

$$\sigma_{12s1} = -\frac{M_T}{t_w} \frac{S_\omega}{C_\omega} = 0.07 N/m^2$$

$$\sigma_{12s2} = -\frac{M_T}{t_f} \frac{S_\omega}{C_\omega} = -1.15 N/m^2$$

Распределения напряжений 11, статических моментов ( $S_\omega$ ) и вторичных сдвиговых напряжений  $\sigma_{11}$  по сечению вследствие неравномерного кручения показаны на рисунке 2.22.

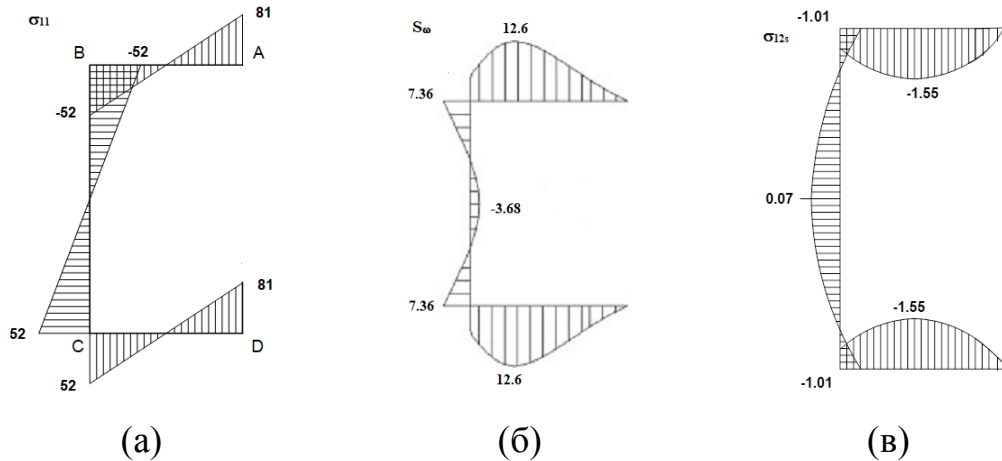


Рисунок 2.22–Напряжение ( $\sigma_{11}$ ) (а), статические моменты ( $S_{\omega}$ )(б), вторичное напряжение сдвига ( $\sigma_{12s}$ ) (в)(МПа)

Комбинированный график угла закручивания для закрытых и открытых сечений показан на рисунке 2.23 для равномерного и сдержанного кручения. Вращение в вершине  $y_1 = a$  из-за неравномерного кручения составляет 50 процентов от вращения при равномерном кручении Двутавровая балка и 40 процентов от вращения при равномерном кручении секции канала. результаты для секций канала сравниваются с компьютерной программой Prosection1[170]. Для закрытых сечений, таких как прямоугольное полое сечение, повороты при равномерном и неравномерном кручении считаются незначительными, так как их величины очень малы по сравнению с открытыми сечениями, как показано на рисунке 2.23.

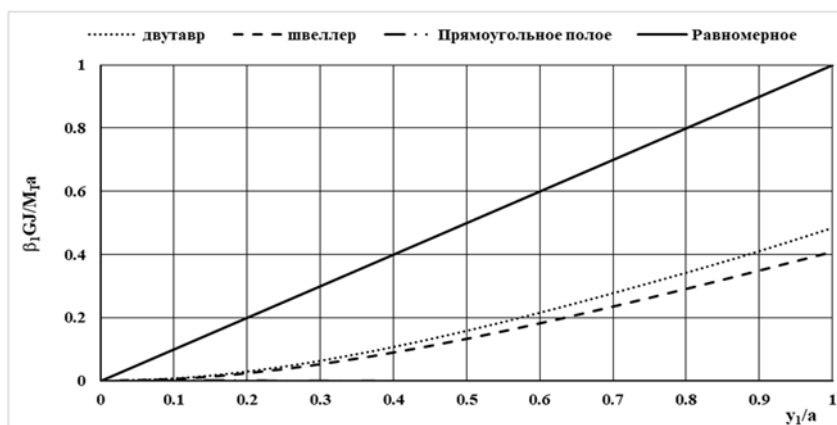


Рисунок 2.23–Комбинированные нормированные графики  $\beta_1$  для всех типов ограниченных участков

## Выводы второй главы

1. С учетом характеристик сечения и с помощью аналитических решений изучено поведение открытых и закрытых тонкостенных сечений с ограниченным кручением. В качестве критерия для исследования поведения балки с ограниченным кручением было принято характеристическое число для кручения.

В данном исследовании для изучения поведения балки с ограниченным кручением было принято характеристическое число для кручения ( $\theta$ ). Были проанализированы и сравнены полученные ответы во всех случаях с использованием различных значений характеристического числа для кручения. В соответствии с предыдущими результатами сделан вывод, что:

$M_{TP}$  быстро уменьшается с увеличением, и в большей части балки доминирует крутящий момент Сен-Венана, но для  $\theta = 1$  оба механизма кручения вносят вклад в  $M_T$ . Распределение  $M$  изменяется при различных значениях  $\theta$  и  $\theta^*a$ , и в результате нормальное напряжение деформирования изменяется вдоль балки в зависимости от положения сдерживаемого кручения и типа сечения.

Угол закручивания при неравномерном кручении отличается от равномерного кручения на 50, 1,8 и 41% для двутаврового сечения, прямоугольной трубы и швеллера соответственно.

Нормальные напряжения доминируют над напряжениями внутри прутка, поскольку поперечное сечение ограничено, а напряжения сдвига по Власову очень малы и исчезают, когда нормальное напряжение достигает максимума. В противоположность этому, на свободном конце напряжение сдвига преобладает над напряжением сдвига Сен-Венана, и его максимальное значение находится в середине фланца.

Закрытые каналы, такие как прямоугольные полые сечения, имеют очень малый поворот и коробление и считаются незначительными; однако сравнение различных исследований показывает, что эффект коробления

необходимо учитывать в случае неравномерного кручения балок закрытого сечения.

## ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ БАЛОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ОГРАНИЧЕННЫМ КРУЧЕНИЕМ

### 3.1. Общая информация

Хорошо известно, что при структурном анализе неравномерного кручения необходимо учитывать влияние сечений тонкостенных балок. Раньше не было принято проверять влияние кручения на несущие элементы конструкций, но сейчас напряжения и деформации, вызванные кручением, довольно часто определяют устойчивость конструкций. Важность ограниченного кручения тонкостенных сечений значительно возросла, так как деформации и напряжения, вызванные кручением, будут влиять на поведение конструкций как с открытым, так и с закрытым сечением [95]. Известно, что эффект неравномерного кручения необходимо учитывать при структурном анализе тонкостенных балок с открытым сечением.

В этих исследованиях представлены правила, значения, типичные рекомендации по тонкостенным элементам, справочные модели и методы проектирования [171,172], [15], [173], [174]. Проверка влияния кручения на несущие элементы конструкций была необычной, но сегодня довольно часто напряжения и деформации, вызванные кручением, определяют стойки конструкций. Тонкостенные сечения не ведут себя по закону плоских сечений Эйлера-Бернулли-Навье, однако общая теория тонкостенных сечений разработана Власовым и кроме того, тонкостенные конструкции типа пластин и оболочек, связанные формулами конечных элементов, являются наиболее распространенными конструктивными элементами в природе и технике [2], [90], [77]. Когда тонкостенная балка одновременно испытывает изгиб и кручение, поперечные и крутильные сдвиговые деформации будут связаны [157].

Если при проектировании конструкций используется только эффект сопротивления кручению Сен-Венана, то при анализе может не учитываться кручение в элементах конструкции и конструкция может быть недооценена. Чтобы преодолеть эту неточность, некоторые исследователи пытались разработать

матрицу жесткости с четырьмя степенями свободы в каждом узле элемента для элемента, подверженного кручению [75]. Подобная дополнительная матрица жесткости учитывает степень свободы деформации на концах элемента с тонкостенным сечением. В данном исследовании рассматривается метод конечных элементов для членов, подверженных кручению, и это делается путем рассмотрения балочного элемента и уравнения, которые необходимы для вычисления деформаций, будут выведены таким образом для вычисления перемещений и внутренних сил и моментов для конструкций.

Ряд исследователей занимались вопросами ограниченного кручения тонкостенных балок с открытым и закрытым типом поперечного сечения [92]-[97]. Были разработаны различные гипотезы кручения тонкостенных балок для учета деформации сдвига при сдержанном кручении открытого тонкостенного сечения с допущением, что производная напряжения сдвига в средней поверхности постоянна по длине элемента, что широко используется в инженерных конструкциях [134], [35-37, 176-179]. Краткая история возникновения метода конечных элементов была представлена разными авторами. [131, 180-183]. Модель конечных элементов изучается на основе смешанной вариационной формулировки с целью улучшения сходимости и обеспечения явного способа расчета внутренних сил и напряжений в тонкостенной балке [184]. Ряд авторов модифицировали конечно-элементный анализ для кручения и изгиба тонкостенных стальных конструкций [79, 185-189]. Поведение холоднодеформированных стальных стержней при изгибе и кручении было изучено экспериментально на основе прочности неподкрепленных холоднодеформированных стальных швеллерных балок, нагруженных эксцентрично [190]. Было разработано много методов проектирования для работы с ограниченным кручением или без него.

Существуют различные коммерческие программы, которые обычно рассматривают две степени свободы в каждом узле элемента рамной конструкции без учета эффекта ограничения кручения на концах элементов [144], [191]. Деформирующая часть первой производной угла закручивания рассматривается как

дополнительная степень свободы в каждом узле на концах элементов, которая может рассматриваться как часть кривизны угла закручивания, вызванная деформирующим моментом [192], [193]. В многочисленных исследованиях разработана матрица жесткости элементов  $4 \times 4$ , включающая секториальной площади как дополнительную степень свободы и обычно с открытым тонкостенным сечением [87], [60], [194].

### 3.2. Расчет методом конечных элементов пространственной тонкостенной балки с ограниченным кручением

Управляющее уравнение для неравномерного кручения используется для исследования поведения бруса с ограниченным кручением и выведено для бруса с тонкостенным сечением с локальными системами координат  $y_1$ ,  $y_2$  и  $y_3$ , как показано на рисунке 3.1.

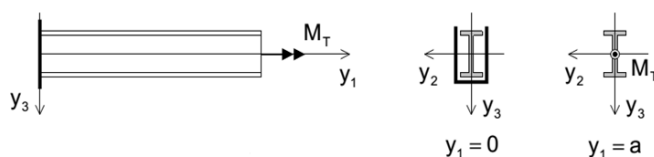


Рисунок 3.1–Кручение призматической балки

Общее решение для однородного уравнения (2.32) удовлетворяется предполагаемой функцией угла закручивания из выражения (2.34) и приводит к точным решениям угла закручивания узла. Управляющие уравнения для элемента и рамы получены путем применения принципа виртуальной работы к балке. Дифференциальные управляющие уравнения для обобщенных перемещений членов удовлетворяются для произвольных виртуальных перемещений и выражаются следующим образом:

$$EJ_{\omega}\beta_{1,1111} - GJ_T\beta_{1,11} - m_1 - m_{\omega,1} = 0 \quad (3.1)$$

Сумма по членам виртуальной работы  $\delta W_m$  потенциальная энергия деформаций (работа внутренних сил) из выражения (3.1) равна сумме по членам виртуальной работы (работа внешних сил)  $\delta W_{md}$  нагрузок от членов.



$$\sum_{m=1}^M \delta W_m = \sum_{m=1}^M \delta W_{md} + \delta W_n \quad (3.2)$$

$$\int_0^a (E I_\omega \delta \psi_{,1} \psi_{,1} + G I_T \delta \beta_{1,1} \beta_{1,1}) dy_1$$

Векторы узловых перемещений и соответствующих узловых моментов могут быть выражены следующим образом:

$$\mathbf{v}_m^T = \begin{bmatrix} \beta_{1A} & \psi_A & \beta_{1B} & \psi_B \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{q}_m^T = \begin{bmatrix} M_{1A} & M_{\omega A} & M_{1B} & M_{\omega B} \end{bmatrix}$$

Где  $M_1$  и  $M_\omega$  - моменты кручения и секториальный крутящий момент (момент стесненного кручения) в узловых точках. Положительные направления моментов концов элементов и поворотов узлов показаны на рисунке 2.

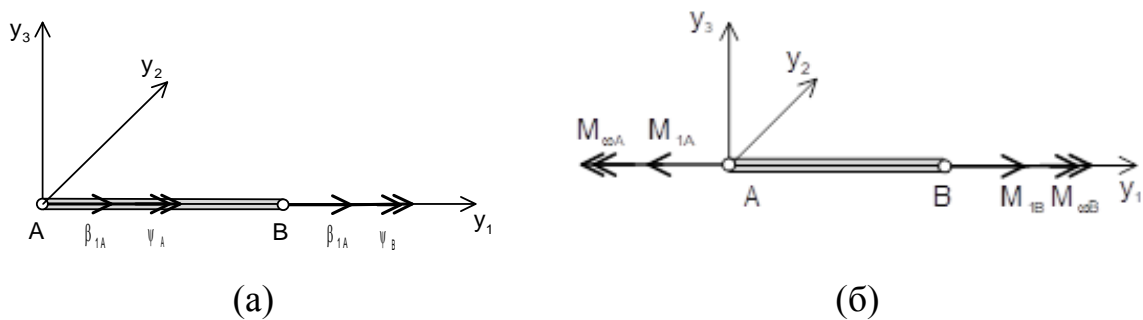


Рисунок 3.2– Положительное перемещение (а) и моменты (б) в узле балки

Как известно, связь между обобщенным вектором силы  $q_m$  и вектором перемещения  $v_m$  устанавливается матрицей жесткости  $K_m$  элемента:

$$\mathbf{q}_m = \mathbf{K}_m \mathbf{v}_m \quad (3.4)$$

Где,  $K_m$  - матрица жесткости текущего элемента кручения, а для неоднородного кручения в качестве начального параметра используется тригонометрическая интерполяция и приближенное решение вращения  $\beta_1$ , которые в итоге сравниваются на основе характера типа сечения, а также различных исследований [195-197].

Для неоднородного кручения в качестве начального параметра используется тригонометрическая интерполяция вращения  $\beta_1$ , и в итоге сравнивается с приближенным решением. Для учета депланации ограниченного элемента в узлах вводятся дополнительные степени свободы, которые добавляются к вектору перемещения элемента. Интерполяционная функция, содержащая

гиперболические функции  $y_1$ , которая удовлетворяет дифференциальному уравнению для кручения, рассматривается как показано ниже:

$$\beta_1(y_1) = \mathbf{g}(y_1)^T \mathbf{b}$$

$$\mathbf{g}^T = \begin{bmatrix} g_1(y_1) & g_2(y_1) & g_3(y_1) & g_4(y_1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} \beta_{1A} & \beta_{1,1A} & \beta_{1B} & \beta_{1,1B} \end{bmatrix}$$

$$\beta_1 = \mathbf{h}_\omega^T \mathbf{C}$$

$$\mathbf{h}_\omega^T = \begin{bmatrix} \sinh \frac{\theta y_1}{a} \\ \cosh \frac{\theta y_1}{a} \\ \frac{y_1}{a} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{bmatrix}$$

Интерполяционные функции подставляются в левую часть (3.2). Интегрирование по длине элемента выполняется для осевых и изгибающих нагрузок, но кручение рассматривается отдельно, так как оно развивается на основе двух различных методов. Вклад кручения во внутреннюю виртуальную работу, определяемую дифференциальным уравнением (2.32), представлен в виде следующих выражений:

$$\int_0^a (E C_\omega \delta \beta_{1,11} \beta_{1,11} + G J_T \delta \beta_{1,1} \beta_{1,1}) dA = \delta \mathbf{b}^T (\mathbf{K}_{\omega 1} + \mathbf{K}_{\omega 2}) \mathbf{b} \quad (3.5)$$

$\mathbf{K}_{\omega 1}$  матрица жесткости перекоса  
 $\mathbf{K}_{\omega 2}$  матрица жесткости для кручения без ограничения искривления

Матрицы элементов жесткости  $\mathbf{K}_{\omega 1}$  и  $\mathbf{K}_{\omega 2}$  добавляются к матрице элементов жесткости  $\mathbf{K}_m$  обычным образом.

$$\mathbf{K}_T = \frac{EC_\omega}{a^3} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline k_{T1} & k_{T2} & k_{T3} & k_{T4} \\ \hline k_{T2} & k_{T6} & k_{T7} & k_{T8} \\ \hline k_{T3} & k_{T7} & k_{T11} & k_{T12} \\ \hline k_{T4} & k_{T8} & k_{T12} & k_{T16} \\ \hline \end{array}$$

$$K_{T1} = K_{T11} = S * \theta \sinh \theta, \quad K_{T6} = K_{T16} = S * \left( \cosh \theta - \frac{\sinh \theta}{\theta} \right) * a^2 \quad (3.6)$$

$$K_{T2} = K_{T4} = S * (\cosh \theta - 1) * a, \quad K_{T8} = S * \left( \frac{\sinh \theta}{\theta} - 1 \right) * a^2$$

$$S = \left( \frac{\theta^2}{Q} \right), \quad Q = 2(1 - \cosh \theta) + \theta \sinh \theta, \quad K_{T3} = -K_{T1}, \quad K_{T7} = K_{T12} = -K_{T2}$$

Альтернативой вышеуказанным производным матрицы жесткости может служить применение приближенной функции формы, что дает преимущество для переменных поперечных сечений и нелинейных задач. Матрица жесткости элемента для кручения с деформацией покоя может быть использована путем разделения на две матрицы. Параметры  $K_{T1}$ ,  $K_{T2}$ ,  $K_{T6}$  и  $K_{T8}$  могут быть заменены аппроксимацией, как показано ниже:

$$K_{T1} = 12 + \frac{6}{5} * \theta^2 \quad K_{T2} = 6 + \frac{1}{10} * \theta^2$$

$$K_{T6} = 4 + \frac{2}{15} * \theta^2 \quad K_{T8} = 2 - \frac{1}{30} * \theta^2 \quad (3.7)$$

Учитывая приведенные выше выражения для серий, альтернативные матрицы можно представить следующим образом:

$$\mathbf{K}_T = \frac{EC_\omega}{a^3} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 12 & -6a & -12 & 6a \\ \hline 6a & 4a^2 & 6a & 2a^2 \\ \hline -12 & -6a & 12 & 6a \\ \hline 6a & 2a^2 & 6a & 4a^2 \\ \hline \end{array} + \frac{GJ}{30a} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 36 & -3a & -36 & -3a \\ \hline -3a & 4a^2 & 3a & -a^2 \\ \hline -3a & 3a & 36 & 3a \\ \hline -3a & -a^2 & 3a & 4a^2 \\ \hline \end{array} \quad (3.8)$$

### 3.3. Анализ точных и приближенных методов для различных значений $\theta$

Поскольку компоненты матриц создаются двумя методами и сравниваются оба метода, можно сделать вывод, что оба метода одинаковы для малых значений  $\theta$ , как показано на рисунках 3.3 и 3.4, и это обычно рассматривается для открытого тонкостенного сечения, так как их значение  $\theta$  невелико.

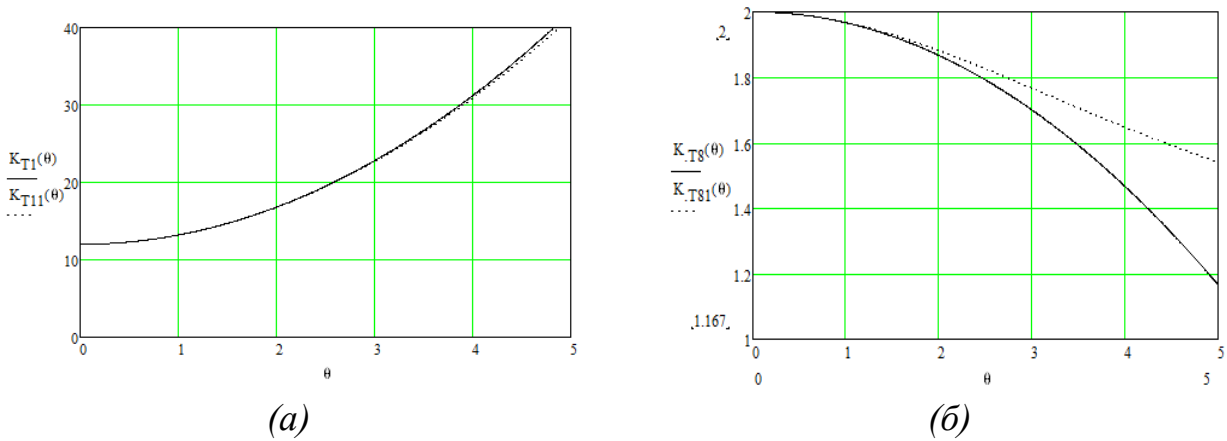


Рисунок 3.3—Точный и приближенный методы для различных значений  $\theta$  для  $K_{T1}$ ,  $K_{T11}$  (а) и  $K_{T8}$ ,  $K_{T81}$  (б).

Процентная погрешность между двумя методами матрицы жесткости элемента для кручения с ограничением коробления представлена графически, как показано на рисунках 3.3 и на комбинированном графике рисунка 3.5. Поскольку вариация полных компонентов кручения зависит от значения  $\theta$ , мы можем рассматривать различные типы сечений. Для  $\theta = 1$  и  $2$  погрешности колеблются от 6,7 % до 9,7 %, что считается разумным, и оба метода приемлемы для открытых тонкостенных профилей, как показано на рисунке 3.5.

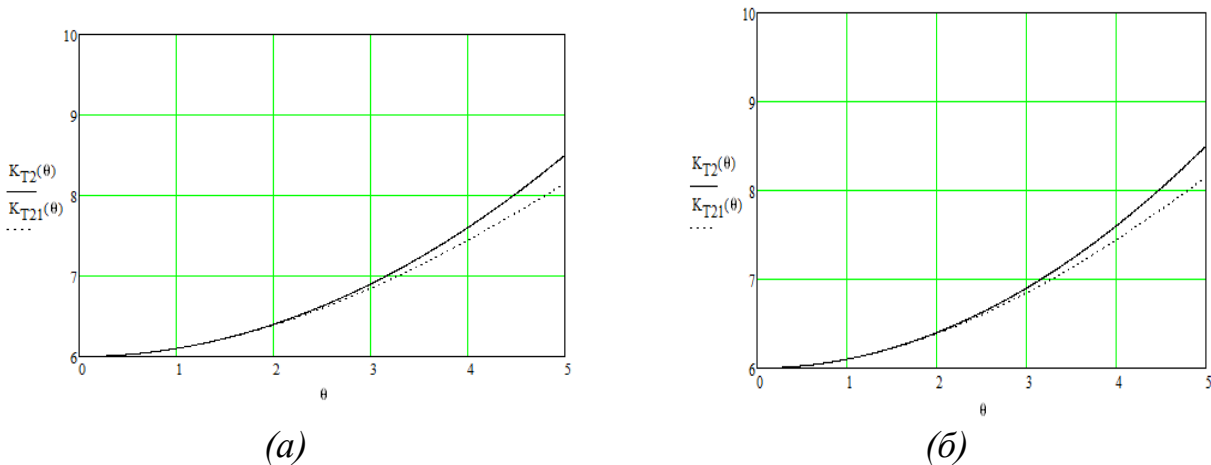


Рисунок 3.4—Точный и приближенный методы для различных значений  $\theta$  для  $K_{T2}$ ,  $K_{T21}$  (а) и  $K_{T2}$ ,  $K_{T21}$  (б).

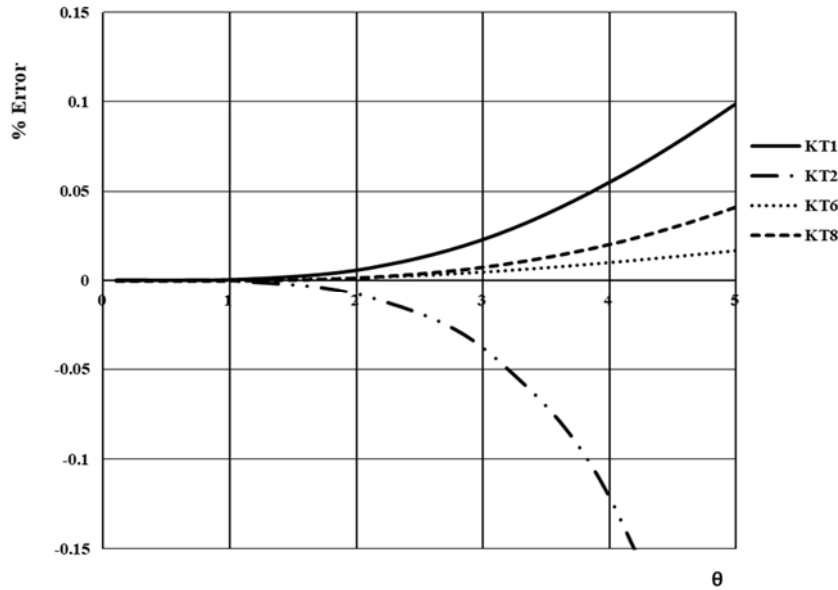


Рисунок 3.5—Ошибка аппроксимации для значений  $K_{T1}$   $K_{T2}$   $K_{T6}$  и  $K_{T8}$

Таким образом, длина элемента может быть ограничена в зависимости от типа сечения и должна выбираться для небольшого значения  $\theta=2$ , как указано ниже.

$$a \leq 0.1925 * \sqrt{\frac{J}{C_w}},$$

Если элемент свободно деформируется, то  $C_w = 0$  и крутящий момент передается кручением Сен-Венана, которое считается равномерным кручением. Учитывая выражение (8), можно использовать только вторую часть матрицы или матрицу жесткости при равномерном кручении, как показано ниже.

$$\mathbf{K}_T = \frac{GJ_T}{a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \mathbf{K}_T = \frac{GJ}{30a} \begin{bmatrix} 36 & -3a & -36 & -3a \\ -3a & 4a^2 & 3a & -a^2 \\ -3a & 3a & 36 & 3a \\ -3a & -a^2 & 3a & 4a^2 \end{bmatrix}$$

Матрица жесткости локального элемента после формирования должна быть преобразована в глобальную систему координат. Преобразование выполняется с помощью расширенной матрицы преобразования и формально может быть выражено следующим образом:

$$\mathbf{K}_{mx} = \mathbf{R}_m \mathbf{K}_{my} \mathbf{R}_m^T$$

$\mathbf{R}_m$  матрица преобразования

Вектор нагрузки на элемент преобразуется по аналогии с вектором перемещения элемента:

$$\mathbf{q}_{mx} = \mathbf{R}_m \mathbf{q}_{my}$$

$\mathbf{q}_{mx}, \mathbf{q}_{my}$  векторы нагрузки на член, отнесенные к глобальной системе координат и системе координат члена

Для рамы определяются вектор перемещения  $\mathbf{u}_s$  системы и вектор нагрузки  $\mathbf{q}_s$  системы, которые содержат координаты узловых перемещений и нагрузки в порядке, благоприятном для решения алгебраических уравнений системы. Векторы перемещений и нагрузок членов связаны с соответствующими векторами системы топологическими матрицами  $\mathbf{T}_m$ :

$$\mathbf{u}_m = \mathbf{T}_m \mathbf{u}_s \quad \text{и} \quad \mathbf{q}_m = \mathbf{T}_m \mathbf{q}_s$$

### 3.4. Численные примеры моделирования тонкостенных балок с ограниченным кручением

На основе исследований матрицы жесткости для процедуры конечных элементов рассматриваются два метода анализа поведения стальной балки при равномерном и неравномерном кручении. Теория ограниченного кручения применяется к консольной балке длиной  $a$ , подверженной внешнему распределенному моменту.

В предыдущих разделах сравнивались два подхода к матрицам жесткости для методов конечных элементов. Для демонстрации применимости методов представлены несколько задач о тонкостенных балках с внешним моментом, приложенным к центру сдвига [125]-[128]. Три различных сечения тонкостенных балок, нагруженных внешним моментом, приложенным к центру сдвига, рассматриваются и сравниваются с использованием различных методов, как показано в таблице 2.1.

Точность представленной модели проиллюстрирована на трех примерах с использованием наиболее распространенного программного обеспечения, применяемого для расчетов по методу конечных элементов. Рассчитаны эффекты

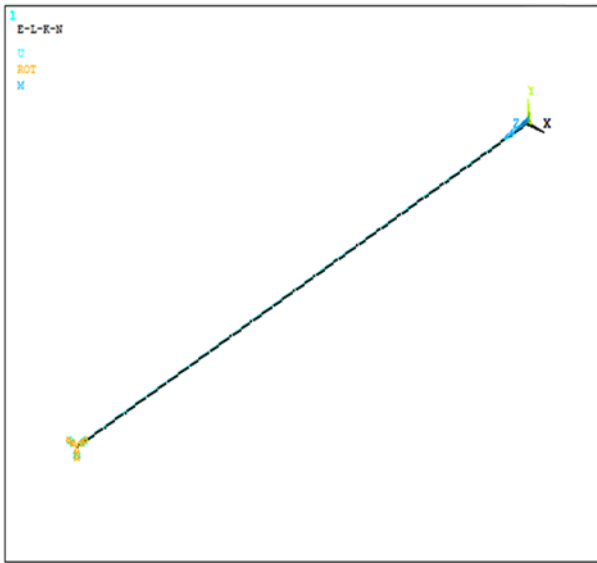
кручения и напряжения, угол кручения представлен графически, кроме того, мы рассмотрели изменение осевого напряжения  $\sigma_z$  в отдельных типах сечений.

Для численных примеров, приведенных выше, были рассмотрены различные методы сравнения и проверки методов для ограниченного и свободного кручения, которые представляют собой неравномерное и неформовое кручение, соответственно.

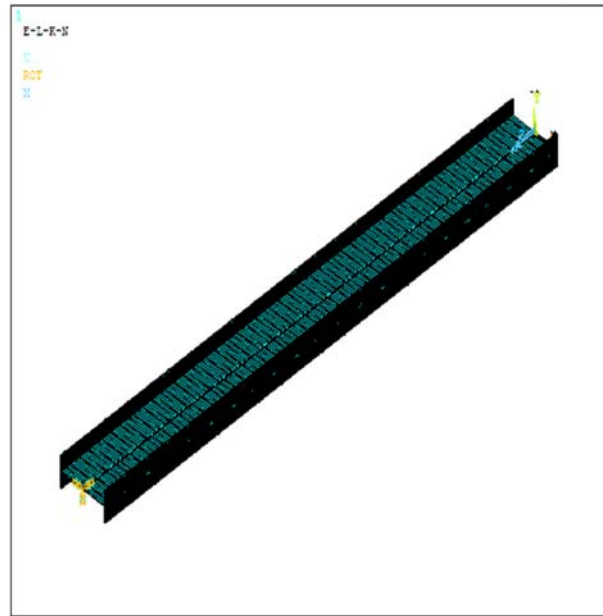
Верификация модели проводилась с помощью, proMathcad1 [201], программного обеспечения метода конечных элементов Ансис, Абакус с предлагаемой теорией. Было создано шесть моделей для трех ограниченных и трех равномерно скрученных балок с двутаврового, канальным и замкнутым прямоугольным сечением по данным таблицы 2.1.

Для программного обеспечения Ансис был использован конечный элемент BEAM 189, поскольку он может учитывать секториальной площади путем ввода специальных ключевых опций. Аналогично, неоднородное кручение оценивается в Abaqus с помощью модели оболочки. Модель оболочки применяется, поскольку исследуется тонкостенная пространственная балка. Она работает с уменьшенным числом конечных элементов таким образом, что требуется решить меньше уравнений.

Следующая модель рассматривается с использованием программного обеспечения Ансис, каждая модель состоит из 100 линейных элементов, сечение делится на 10 точек в каждом направлении, и для каждой из них доступны результаты расчетов. Такое слияние является достаточным для целей данного анализа. Один конец консольной балки закреплен по всем степеням свободы, а момент кручения приложен на другом конце командой "M<sub>T</sub>" в центре сдвига центра балки, как показано на рисунке 3.6.



(а)



(б)

Рисунок 3.6—Схема нагрузки (а) и опоры(б) для двутаврового сечения

Изменения равномерного и неравномерного угла закручивания (сдержанного кручения) на оси трех типов сечений бруса показаны в таблице 3.1. Вращение в вершине  $y_1 = a$  вследствие неравномерного кручения составляет около 49, 39 и 95 процентов от вращения при равномерном кручении двутаврового, швеллерного и прямоугольного полого сечения соответственно. Вращение в вершине  $y_1 = a$  из-за равномерного и неравномерного кручения практически одинаково для прямоугольного полого сечения, и его величина незначительна.

Таблица 3.1- Сравнение равномерного и неравномерного кручения для различных типов сечений

Методы		Балка (сечение)		тоннель		Прямоугольный	
		двутавровое					
Теоретическ и актуально	Неравномерный	1.09E-01	47.7%	9.32E-02	38.9%	3.27E-04	98.2%
	Равномерный	2.28E-01		2.40E-01		3.33E-04	
Ансис	Неравномерный	1.12E-01	49.3%	9.10E-02	38.7%	3.36E-04	91.8%



	Равномерный	2.27E-01		2.35E-01		3.66E-04	
ProMathCad 1	Неравномерный	1.19E-01	52.4%	9.21E-02	38.8%	3.31E-04	94.7%
	Равномерный	2.28E-01		2.38E-01		3.50E-04	
Абакус	Неравномерный	1.10E-01	48.1%	9.21E-02	38.6%	3.33E-04	97.6%
	Равномерный	2.28E-01		2.39E-01		3.41E-04	

Далее приведены примеры, которые демонстрируют эффективность предложенной формулировки метода. Демонстрируется значимость свойств сечения, как критерия. В следующих результатах сравнение различных методов: прямое решение и расчет в ProMathcad1, расчет по текущей теории производится двумя способами. В следующих результатах сравниваются результаты, полученные с помощью различных коммерческих программ для расчета методом конечных элементов (Абакус и Ансис) с текущей теорией.

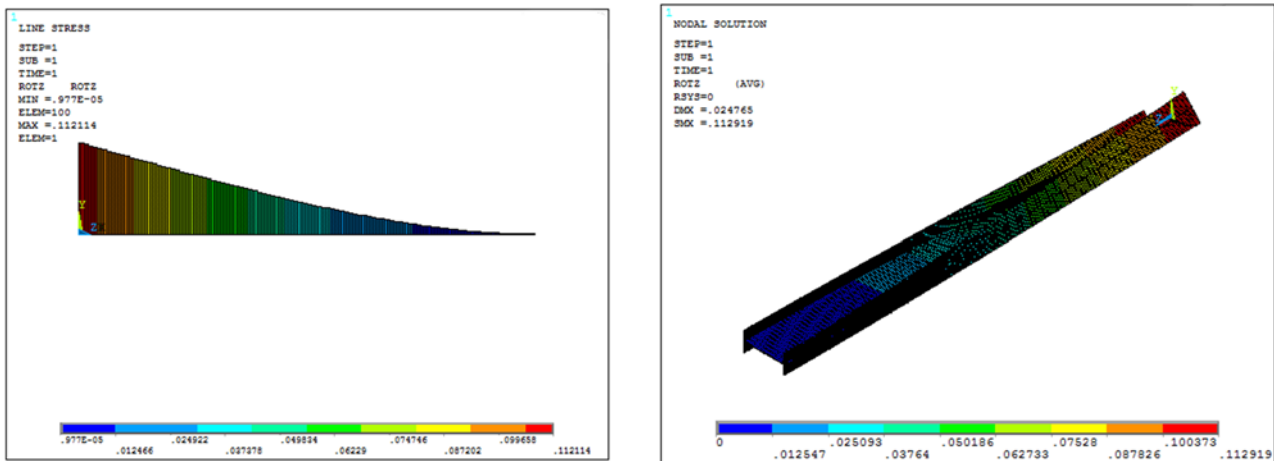


Рисунок 3.7–Изменение угла закручивания для двутаврового по всей длине балки

На рисунке 3.8 показано изменение вращений по длине балки двутаврового сечения. Значения суммарных вращений, заданные эффективным элементом, получаются наиболее близкими ко всем исследованным методам (текущая теория, ProMathcad1, Абакус и Ансис).

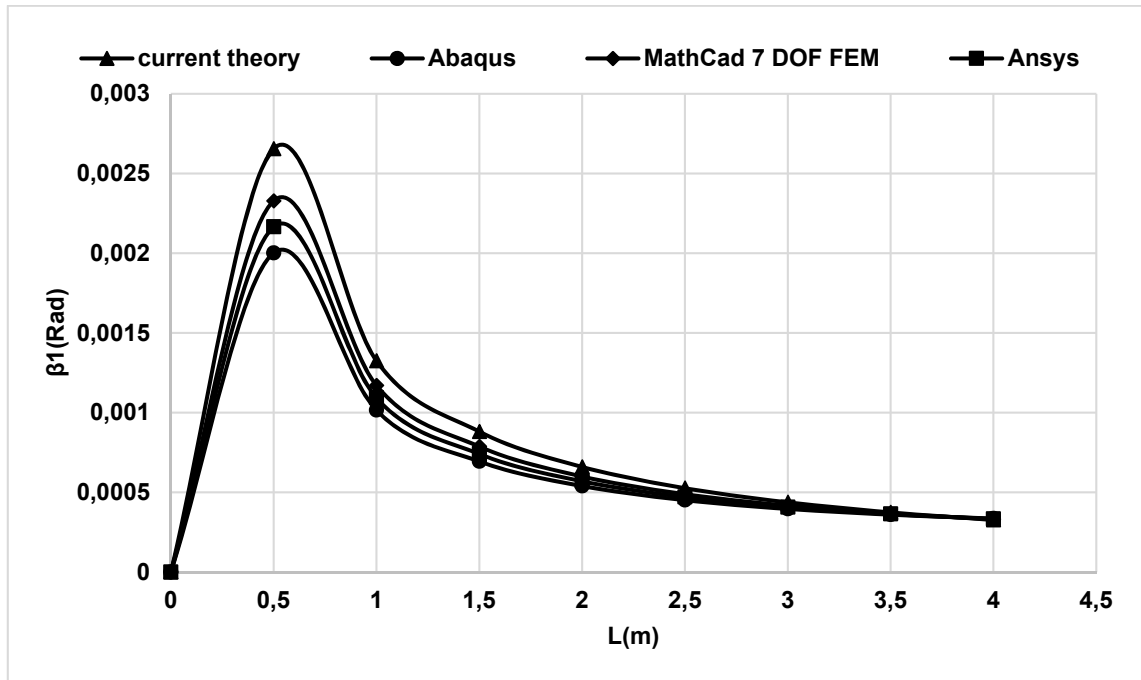


Рисунок 3.8—Вращение в продольном направлении двутаврового сечения тонкостенного профиля

Для прямоугольного полого сечения значение  $\theta$  параметра велико, а угол закручивания очень мал по своей величине. Угол закручивания в точках, расположенных ближе к опоре, имеет значительную величину, как это показано на рисунке 3.10, и внезапно уменьшается до небольшого значения на свободном конце.

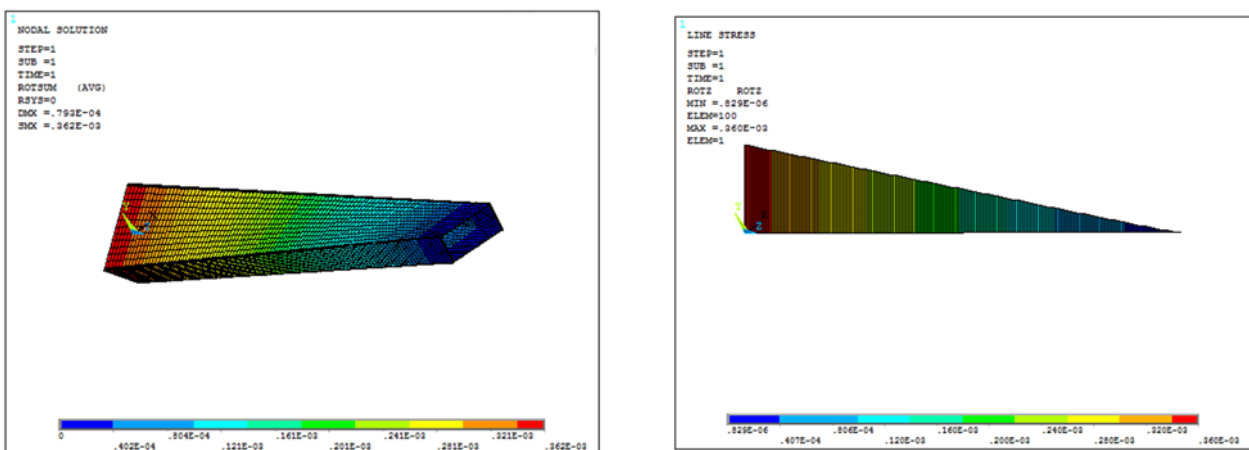


Рисунок 3.9—Изменение угла закручивания для прямоугольного сечения

На рисунке 3.10 показано изменение вращений по длине прямоугольной балки. Значения суммарных вращений, заданные эффективным элементом,

получаются наиболее близкими ко всем исследуемым методам (текущая теория, ProMathcad1, Абакус и Ансис).

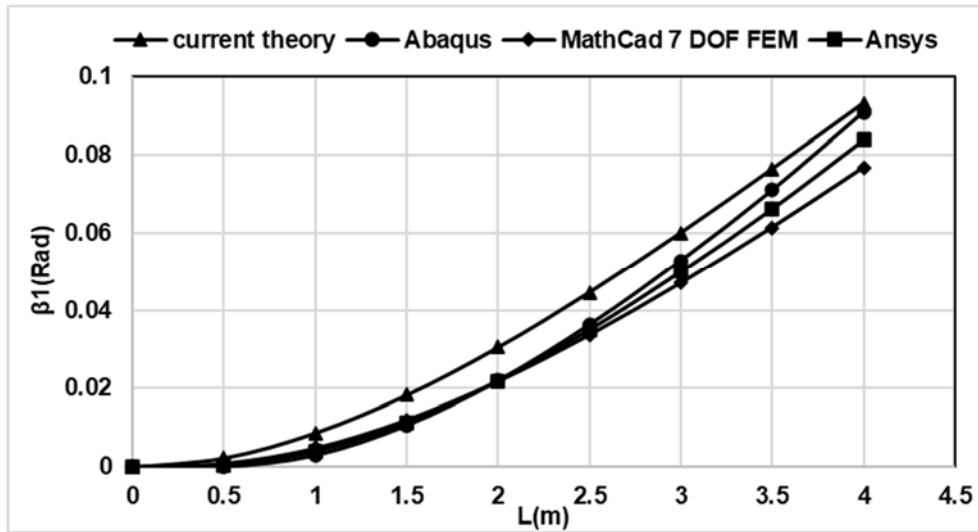


Рисунок 3.10–Вращение в продольном направлении прямоугольного сечения тонкостенной конструкции

Изменение неравномерного угла закручивания (сдержанное кручение) на оси канального сечения прутка показано на рисунке 3.11. Поворот в вершине  $y_1 = a$  вследствие неравномерного кручения составляет около 40 процентов от поворота при равномерном кручении сечения канала.

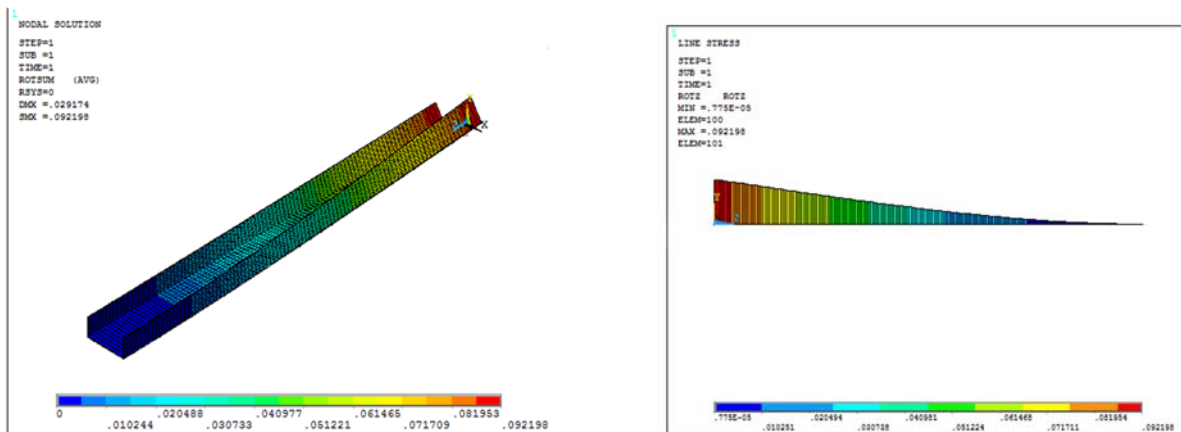


Рисунок 3.11–Изменение угла закручивания для секции канала по всей длине секции

На рисунке 3.12 показано изменение вращений вдоль длины балки канала, и суммарные вращения, даваемые эффективным элементом, ближе ко всем методам (текущая теория, ProMathcad1, Абакус и Ансис).

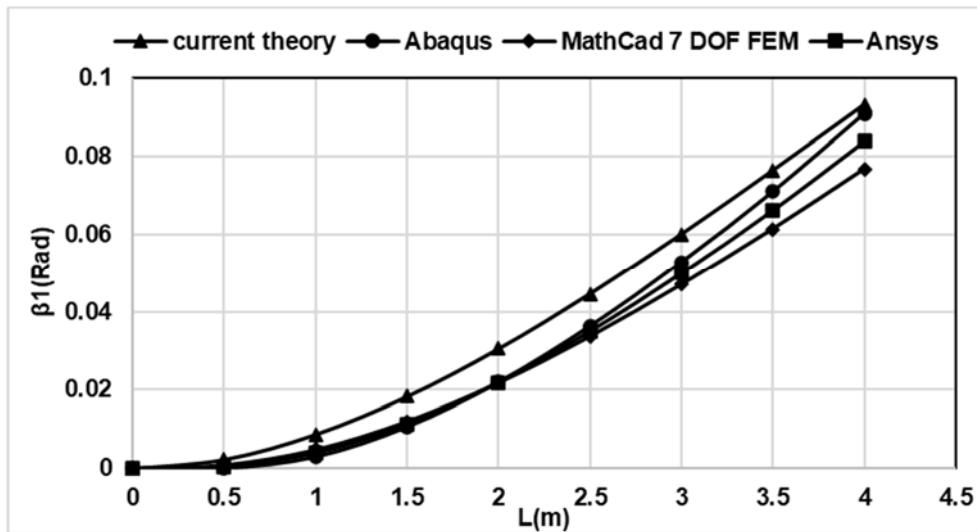


Рисунок 3.12–Вращения вдоль продольного направления сечения канала тонкостенного

Результаты, представленные в предлагаемом исследовании, сравнивались с результатами различных исследовательских работ, в которых рассматривались открытые тонкостенные профили. В данном исследовании свойства сечения предлагаются как основной критерий для сравнения двух различных матриц жесткости, и их сравнение представлено и обосновано графически.

Сравнивая оба метода, можно сделать вывод, что оба метода схожи для малых значений  $\theta$ , а это обычно рассматривается для открытых тонкостенных сечений, так как их значение  $\theta$  обычно мало, и все результаты сравниваются с различными исследованиями [6], [13], [10], [18], [24]. Для закрытых сечений повороты очень малы и считаются пренебрежимо малыми, но сравнение с различными исследованиями показывает, что эффект депланации необходимо учитывать в случае неравномерного кручения балок закрытого сечения [32]- [33]. Распределение напряжений  $\sigma_{11}$  по сечению в результате неравномерного кручения показано на рисунке 3.13–3.15.

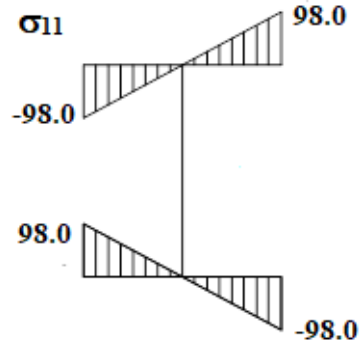
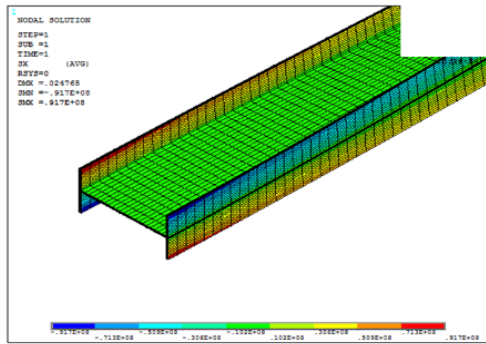


Рисунок 3.13–Распределение продольных напряжений  $\sigma_{11}$  для двутаврового сечения

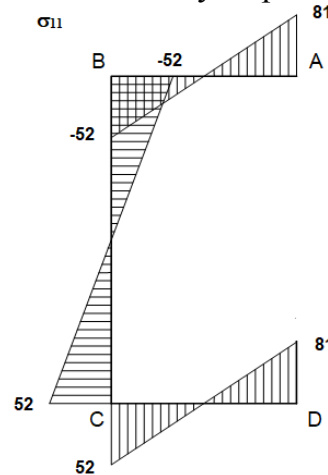
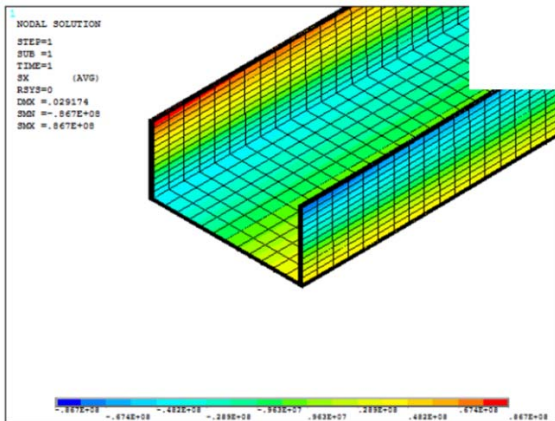


Рисунок 3.14–Распределение продольного напряжения  $\sigma_{11}$  для секции канала

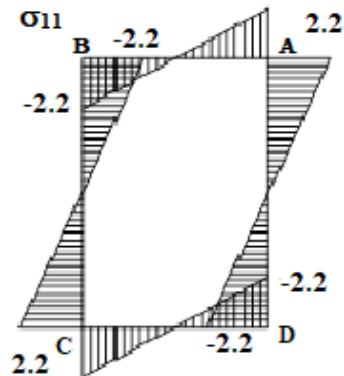
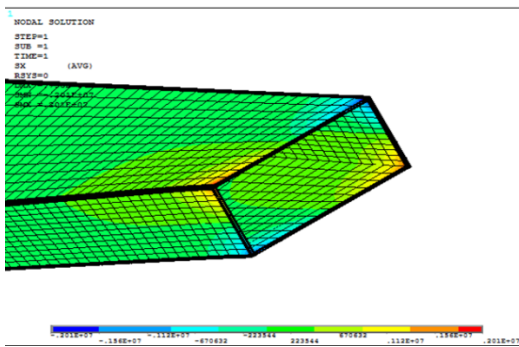


Рисунок 3.15–Распределение продольного напряжения  $\sigma_{11}$  для прямоугольного сечения

### Выводы третьей главы

1. Для учета характеристик сечения, в этой главе применяются два метода построения матрицы жесткости для тонкостенных конструкций с ограниченным кручением, основанные на точном и приближенном методах.

2. Матрицы жесткости для неоднородного кручения разработаны с использованием тригонометрических и приближенных решений угла вращения  $\beta_1$  в качестве начального параметра, а затем сравниваются в зависимости от типа сечения.
3. Сравнивая оба метода, можно сделать вывод, что при малом значении  $\theta$  оба метода работают одинаково. Поэтому, поскольку обычно рассматриваются открытые тонкостенные сечения, где значение  $\theta$  невелико, можно применять оба метода. Процент ошибки между двумя методами матрицы жесткости элементов для кручения с деформацией покоя пренебрежимо мал для значений  $\theta$  меньше 2.
4. Изменение суммарных компонентов кручения зависит от величины  $k_a$ . Тогда следует рассмотреть различные типы сечений. Для  $\theta = 1$  и 2 погрешности составляют от 6,7 % до - 9,7 %, что считается допустимым, и оба метода приемлемы для открытых тонкостенных секций. Таким образом, длины элементов могут быть ограничены в зависимости от типа сечения и должны быть выбраны при небольшом значении  $k_a$ .
5. Выполнено моделирование открытых и закрытых тонкостенных сечений, сравнение углов закручивания выполнено графически. Для сравнения двух матриц жесткости и графического представления данной теории в качестве основного критерия используются свойства сечения. Для расчетов использовались следующие программные продукты: Pro.Mathcad1, Абакус и Ансис. Результаты, полученные для открытых тонкостенных сечений, практически идентичны, при этом повороты в закрытых сечениях очень малы и считаются пренебрежимо малыми.

## ГЛАВА 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТОНКОСТЕННОЙ БАЛКИ ПРИ СОВМЕЩЕННОМ ИЗГИБЕ И КРУЧЕНИИ

### 4.1. Расчет пространственного тонкостенного профиля с ограничением деформации в узлах

Упругий трехмерный тонкостенный каркас представляет собой твердое тело, форма, свойства материала и внешние воздействия которого определяются, как простой трехмерный каркас (представлено на рисунке 4.1).

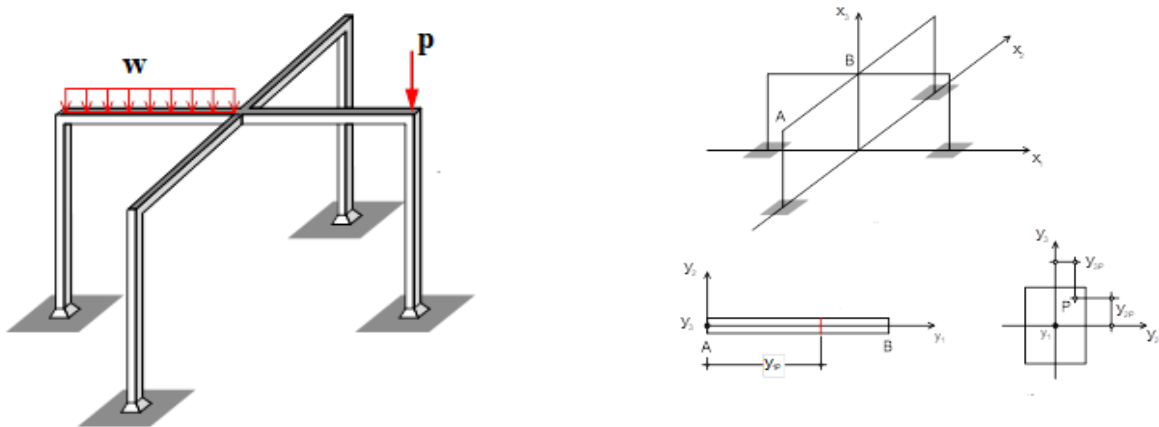


Рисунок 4.1—Объекты и расположение материальной точки в  
пространственной рамке

Система координат определена для каждого стержня рамы, и примеры систем координат показаны на рисунке 4.2. Начало системы координат находится в узле балки. При смещении балки изменяются, как начало системы координат, так и его единичные базовые векторы. Для каждого состояния смещения балки и каждой точки  $P$  на его оси определяется локальная система координат.

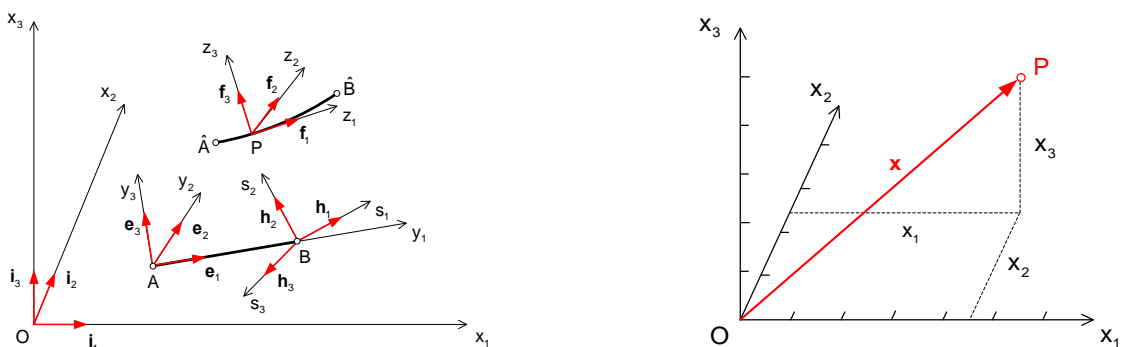


Рисунок 4.2—Системы координат пространственного каркаса

$x_1, x_2, x_3$	глобальные координаты
$y_1, y_2, y_3$	частные координаты для АВ
$z_1, z_2, z_3$	локальные координаты для точки Р в конфигурации постоянного члена $\hat{A}\hat{B}$
$s_1, s_2, s_3$	координаты узлов для узла В

Глобальная система координат определяется началом координат  $O$  и тремя ортогональными единичными векторами, как показано на рис. 4.2. Положение точки  $P$  в глобальной системе координат задается ее координатами положения  $x_1, x_2$  и  $x_3$ :

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{i}_1 + x_2 \mathbf{i}_2 + x_3 \mathbf{i}_3$$

$x_k$       глобальные координаты  
 $\mathbf{i}_k$       глобальные основные векторы

(4.1)

Глобальный базовый вектор  $\mathbf{i}_k$  содержит значение 1 в строке  $k$  и значение 0 в других строках: Координаты точки  $P$  обозначаются  $(x_1, x_2, x_3)$  или вектором  $\mathbf{x}$  с координатой  $x_k$  в строке  $k$ :

$$\mathbf{x} = \begin{array}{|c|} \hline x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline x_3 \\ \hline \end{array}$$
(4.2)

Тензор первого порядка  $\mathbf{u}$  описывается в глобальном пространстве своими глобальными координатами  $u_k$ , а тензор второго порядка  $\mathbf{U}$  своими глобальными координатами  $u_{km}$ :

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^3 u_k \mathbf{i}_k \qquad \mathbf{U} = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 u_{km} \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m^T$$
(4.3)

$$\mathbf{u} = \begin{array}{|c|} \hline u_1 \\ \hline u_2 \\ \hline u_3 \\ \hline \end{array} \qquad \mathbf{U} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ \hline u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ \hline u_{31} & u_{32} & u_{33} \\ \hline \end{array}$$
(4.4)

Рассмотрим узел, в котором смещения заданы в трех ортогональных направлениях, заданных единичными векторами  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$  и  $\mathbf{h}_3$ :



$$\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{21} \\ h_{31} \end{bmatrix} \quad \mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} h_{12} \\ h_{22} \\ h_{32} \end{bmatrix} \quad \mathbf{h}_3 = \begin{bmatrix} h_{13} \\ h_{23} \\ h_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{h}_k^T \mathbf{h}_m = \delta_{km} \quad (4.5)$$

$h_{km}$   $x_k$  координаты вектора  $\mathbf{h}_m$

Пусть местоположение узла равно  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ . Начало системы координат узла находится в точке  $r$ . Координатные оси направлены в направлении единичных векторов  $\mathbf{h}_m$ . Преобразование между координатами  $(s_1, s_2, s_3)$  точки  $P$  и в системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$  узла и координатами той же точки в глобальной системе координат следует из рисунка 4.3.

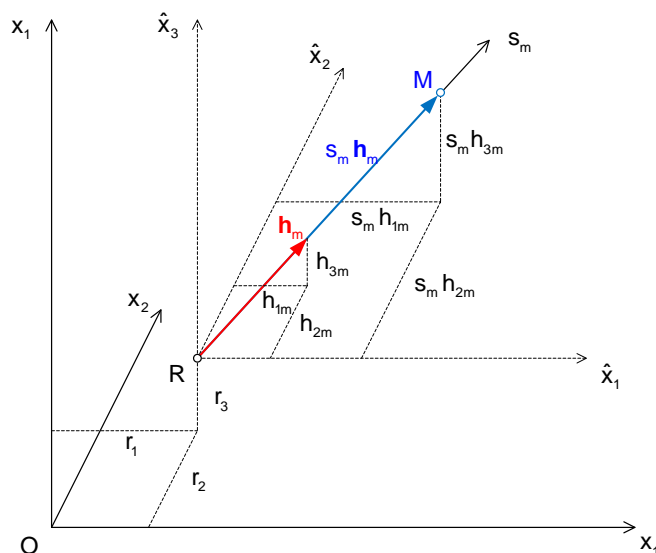


Figure 4.3—Точка  $M$  на оси  $S_m$  системы координат узла

Рассмотрим точку  $M$  с узловыми координатами  $(s_1, 0, 0)$ , лежащую на оси  $s_1$  узловой системы координат. Вектор положения точки  $M$  в системе координат  $s_1 \mathbf{h}_1$  узла равен. Координаты этого вектора в глобальном координатном пространстве равны.

Вектор положения  $x$  точки  $M$  в глобальной системе координат равен сумме векторов  $OR$  и  $RM$ . Таким образом, преобразование для точки  $M$  имеет вид:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & 0 \\ h_{21} & 0 & 0 \\ h_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Единичный вектор  $\mathbf{h}_1$  занимает первый столбец матрицы преобразования в (4.6). Точно так же, если точка  $M$  расположена на оси  $s_2$  или оси  $s_3$ , единичные векторы  $\mathbf{h}_2$  и  $\mathbf{h}_3$  занимают второй и третий столбцы матрицы преобразования. Таким образом, правило преобразования для общей точки  $P$  с координатами  $(s_1, s_2, s_3)$  узла определяется следующим образом:

$$\mathbf{x} = \mathbf{r} + \mathbf{R}_{xs}\mathbf{s}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline x_3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline r_1 \\ \hline r_2 \\ \hline r_3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline h_{11} & h_{12} & h_{13} & s_1 \\ \hline h_{21} & h_{22} & h_{23} & s_2 \\ \hline h_{31} & h_{32} & h_{33} & s_3 \\ \hline \end{array} \quad (4.7)$$

$\mathbf{x}$  локальный вектор точки  $P$  в глобальной системе координат

$\mathbf{r}$  вектор локации узла  $A$  в глобальной системе координат

$\mathbf{R}_{xs}$  матрица вращения для трансформации глобального пространства узлов

$\mathbf{s}$  вектор локации точки  $P$  в системе координат узлов

Поскольку базовые векторы  $\mathbf{h}_k$  ортонормированы, обратная матрица вращения  $\mathbf{R}_{xs}$  равна ее транспонированию:

$$\mathbf{R}_{xs}^{-1} = \mathbf{R}_{xs}^T \quad (4.8)$$

Обратное преобразование глобальных координат  $\mathbf{x}$  точки  $P$  в координаты ее узла  $\mathbf{s}$  следует из (4.6) предварительным умножением на транспонированную матрицу вращения:

$$\mathbf{s} = \mathbf{R}_{xs}^T (\mathbf{x} - \mathbf{r}) \quad (4.9)$$

Рассмотрим тензор первого порядка  $\mathbf{u}$ , координаты  $u_{x1}, u_{x2}, u_{x3}$  которого находятся в глобальном пространстве и  $u_{s1}, u_{s2}, u_{s3}$  находятся в пространстве узлов. Поскольку тензор не зависит от системы координат, в которой он описан, суммы произведений координат на базовые векторы двух систем координат должны быть равны:

$$u_{x1}\mathbf{i}_1 + u_{x2}\mathbf{i}_2 + u_{x3}\mathbf{i}_3 = u_{s1}\mathbf{h}_1 + u_{s2}\mathbf{h}_2 + u_{s3}\mathbf{h}_3 \quad (4.10)$$

Сравнение (4.6) и (4.10) показывает, что тензор первого порядка преобразуется с матрицей вращения:

$$\mathbf{u}_x = \mathbf{R}_{xs} \mathbf{u}_s$$

$u_{x1}$	$h_{11}$	$h_{12}$	$h_{13}$	$u_{s1}$
$u_{x2}$	$h_{21}$	$h_{22}$	$h_{23}$	$u_{s2}$
$u_{x3}$	$h_{31}$	$h_{32}$	$h_{33}$	$u_{s3}$

$$= \quad (4.11)$$

$\mathbf{u}_x$  идентификатор координат тензора первого порядка в глобальной системе координат

$\mathbf{u}_s$  идентификатор тензора первого порядка относительно системы координат узлов

Рассмотрим тензор второго порядка  $\mathbf{U}$ , координаты которого находятся в глобальном пространстве и  $u_{skm}$  в пространстве узлов. Поскольку тензор не зависит от системы координат, в которой он описан, суммы произведений координат на двоичные произведения основных векторов двух систем координат должны быть равны:

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 u_{xkm} \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m^T = \sum_{j=1}^3 \sum_{n=1}^3 u_{xjn} \mathbf{h}_j \mathbf{h}_n^T \quad (4.12)$$

Сравнение (4.6) и (4.12) показывает, что тензор второго порядка преобразуется с матрицей вращения:

$$\mathbf{U}_x = \mathbf{R}_{xs} \mathbf{U}_s \mathbf{R}_{xs}^T$$

$u_{x11}$	$u_{x12}$	$u_{x13}$
$u_{x21}$	$u_{x22}$	$u_{x23}$
$u_{x31}$	$u_{x32}$	$u_{x33}$

$$= \begin{array}{|c|c|c|} \hline h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ \hline h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ \hline h_{31} & h_{32} & h_{33} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline u_{s11} & u_{s12} & u_{s13} \\ \hline u_{s21} & u_{s22} & u_{s23} \\ \hline u_{s31} & u_{s32} & u_{s33} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline h_{11} & h_{21} & h_{31} \\ \hline h_{12} & h_{22} & h_{32} \\ \hline h_{13} & h_{23} & h_{33} \\ \hline \end{array} \quad (4.12)$$

$\mathbf{U}_x$  идентификатор тензора второго порядка в глобальной системе координат

$\mathbf{U}_s$  идентификатор тензора второго порядка в системе координат узлов

Каждый элемент фермы описывается его начальным узлом, его конечным узлом и атрибутами его сечения. Элемент направляется от начального узла к конечному узлу. Декартова система координат стержня определена для каждого стержня рамы. Единица длины в системе координат элемента совпадает с единицей длины в глобальной системе координат. Начало системы координат стержня размещается в начальном узле  $A$  стержня, как показано на рисунке 4.2. Ось  $y_1$  стержня указывает от начального узла  $A$  до конечного узла  $B$ . Единичный базовый вектор в направлении оси  $y_1$  получается из глобальных координат точек  $A$  и  $B$ :

$$\mathbf{x}_A = \begin{bmatrix} x_{1A} \\ x_{2A} \\ x_{3A} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_{1B} \\ x_{2B} \\ x_{3B} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B$  векторы локаций узлов А и В в глобальной системе координат (4.14)

$x_{kA}, x_{kB}$  глобальные координаты узлов А и В

Длина члена и координаты единичного вектора:

$$a = \sqrt{(x_{1B} - x_{1A})^2 + (x_{2B} - x_{2A})^2 + (x_{3B} - x_{3A})^2} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{e}_1 := \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ e_{31} \end{bmatrix} = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} x_{1B} - x_{1A} \\ x_{2B} - x_{2A} \\ x_{3B} - x_{3A} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Единичный базовый вектор  $\mathbf{e}_2$  определяется так, чтобы он указывал в направлении главной оси сечения элемента. Плоскость, которая содержит эту главную ось, определяется с помощью узлов  $A$  и  $B$  и опорной точки  $P$  в пространстве. Вектор  $\mathbf{e}_2$  ортогонален базовому вектору  $\mathbf{e}_1$ . Он указывает на полуплоскость, содержащую точку  $P$  и ограниченную прямой линией, проходящей через точки  $A$  и  $B$ , как показано на рис. 4.4.

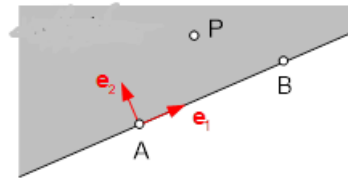


Рисунок 4.4—Полуплоскость, содержащая базисные векторы и опорную точку  $P$

Вектор глобального положения  $\mathbf{p}$  опорной точки  $P$  выражается через вектор глобального положения  $\mathbf{a}$  узла  $A$ , два базовых вектора и параметры  $c_1$  и  $c_2$ .

Параметры определяются так, чтобы базовые векторы были ортонормированы:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{a} + c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 & c_1 & \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_2 = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_2 = 1 \\ \mathbf{e}_1^T \mathbf{p} &= \mathbf{e}_1^T \mathbf{a} + c_1 & \rightarrow & c_1 = \mathbf{e}_1^T \mathbf{p} - \mathbf{e}_1^T \mathbf{a} \\ c_2 \mathbf{e}_2 &= \mathbf{p} - \mathbf{a} - c_1 \mathbf{e}_1 := \mathbf{t} & \rightarrow & c_2 = \sqrt{\mathbf{t}^T \mathbf{t}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_2 := \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{22} \\ e_{32} \end{bmatrix} = \frac{1}{c_2} \begin{bmatrix} p_1 - a_1 - c_1 e_{11} \\ p_2 - a_2 - c_1 e_{21} \\ p_3 - a_3 - c_1 e_{31} \end{bmatrix}$$

Третий базовый вектор  $\mathbf{e}_3$  определяется так, чтобы система координат стержня была правой системой:

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} e_{13} \\ e_{23} \\ e_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{21}e_{32} - e_{31}e_{22} \\ e_{31}e_{12} - e_{11}e_{32} \\ e_{11}e_{22} - e_{21}e_{12} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Правило преобразования координат для общей точки  $P$  с координатами  $(y_1, y_2, y_3)$  стержня определяется аналогично уравнению (4.6) для узловой системы координат с учетом точек, расположенных на единичном расстоянии от начала координат на осях стержневой системы координат. Три базовых вектора вводятся в три столбца матрицы вращения:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{R}_{xy}\mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

- $\mathbf{x}$  вектор локации точки  $P$  в глобальной системе координат
- $\mathbf{a}$  вектор локации узла  $A$  в глобальной системе координат
- $\mathbf{R}_{xy}$  матрица вращений для трансформации глобального элемента
- $\mathbf{y}$  вектор локации точки  $P$  системы координат для элементов

Поскольку базовые векторы  $\mathbf{e}_k$  ортонормированы, обратная матрица  $\mathbf{R}_{xy}$  вращения равна ее транспонированной матрице:

$$\mathbf{R}_{xy}^{-1} = \mathbf{R}_{xy}^T \quad (4.19)$$

Обратное преобразование глобальных координат  $\mathbf{x}$  точки  $P$  в координаты ее узлов  $s$  следует из (4.19) предварительным умножением на транспонированную матрицу вращения:

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}_{xy}^T (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

Координаты тензоров преобразуются между глобальным пространством и пространством элементов так же, как между глобальным пространством и пространством узлов:

$$\mathbf{u}_x = \mathbf{R}_{xy} \mathbf{u}_y \quad (4.20)$$

$$\mathbf{U}_x = \mathbf{R}_{xy} \mathbf{U}_y \mathbf{R}_{xy}^T \quad (4.21)$$

- $\mathbf{u}_x$     идентификатор координат тензора первого порядка в глобальной системе координат  
 $\mathbf{u}_y$     идентификатор координат тензора первого порядка в системе координат элементов  
 $\mathbf{U}_x$     идентификатор координат тензора второго порядка в глобальной системе координат  
 $\mathbf{U}_y$     идентификатор координат тензора второго порядка в системе координат элементов

Преобразование между системой координат элемента и системой координат узла получается путем подстановки вектора глобальных координат  $\mathbf{x}$  из выражения (4.6) в выражение (4.19):

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{R}_{xy}^T (\mathbf{r} + \mathbf{R}_{xs} \mathbf{s} - \mathbf{a}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{R}_{ys} \mathbf{s} + \mathbf{c} \\ \mathbf{R}_{ys} &= \mathbf{R}_{xy}^T \mathbf{R}_{xs} \quad \text{и} \quad \mathbf{c} = \mathbf{R}_{xy}^T (\mathbf{r} - \mathbf{a}) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Координаты тензоров преобразуются между пространством элементов и узлов так же, как между глобальным пространством и пространством узлов:

$$\mathbf{u}_y = \mathbf{R}_{ys} \mathbf{u}_s \quad (4.23)$$

$$\mathbf{U}_y = \mathbf{R}_{ys} \mathbf{U}_s \mathbf{R}_{ys}^T \quad (4.24)$$

- $\mathbf{u}_y$     идентификатор тензора первого порядка в системе координат элементов  
 $\mathbf{u}_s$     идентификатор тензора первого порядка в системе координат узлов  
 $\mathbf{U}_y$     идентификатор тензора второго порядка в системе координат элементов  
 $\mathbf{U}_s$     идентификатор тензора второго порядка в системе координат узлов

Локальная система координат для точки  $P$  на оси текущей конфигурации  $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{V}}$  смещенного элемента на рисунке 4.2 будет рассматриваться после определения смещения оси элемента.

С учетом приведенной выше информации матрица жесткости  $\mathbf{K}_m$  элемента устанавливает связь между обобщенным вектором силы  $\mathbf{q}_m$  и вектором смещения  $\mathbf{v}_m$  в трехмерном элементе тонкостенного сечения с двумя узлами с использованием методов конечных элементов:

$$\mathbf{q}_m = \mathbf{K}_m \mathbf{v}_m$$

Изменение смещения по длине балки связано с узловыми смещениями путем решения дифференциальных уравнений, определяющих дифференциальные уравнения для обобщенных смещений балки, так что значения функций смещения в узлах равны неизвестным значениям узловых смещений.

$$\mathbf{K}_m = \begin{pmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E \cdot I_3}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E \cdot I_3}{L^2} & 0 & -\frac{12E \cdot I_3}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E \cdot I_3}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12E \cdot I_2}{L^3} & 0 & -\frac{6E \cdot I_2}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12E \cdot I_2}{L^3} & 0 & -\frac{6E \cdot I_2}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G \cdot J}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{G \cdot J}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6E \cdot I_2}{L^2} & 0 & \frac{4E \cdot I_2}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E \cdot I_2}{L^2} & 0 & \frac{2E \cdot I_2}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6E \cdot I_3}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4E \cdot I_3}{L} & 0 & \frac{6E \cdot I_3}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2E \cdot I_3}{L} \\ -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E \cdot I_3}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6E \cdot I_3}{L^2} & 0 & \frac{12E \cdot I_3}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6E \cdot I_3}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12E \cdot I_2}{L^3} & 0 & \frac{6E \cdot I_2}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12E \cdot I_2}{L^3} & 0 & \frac{6E \cdot I_2}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G \cdot J}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G \cdot J}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6E \cdot I_2}{L^2} & 0 & \frac{2E \cdot I_2}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E \cdot I_2}{L^2} & 0 & \frac{4E \cdot I_2}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6E \cdot I_3}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2E \cdot I_3}{L} & 0 & -\frac{6E \cdot I_3}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4E \cdot I_3}{L} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_m = \begin{pmatrix} V_{1A} \\ V_{2A} \\ V_{3A} \\ \beta_{1A} \\ \beta_{2A} \\ \beta_{3A} \\ V_{1B} \\ V_{2B} \\ V_{3B} \\ \beta_{1B} \\ \beta_{2B} \\ \beta_{3B} \end{pmatrix} \quad \mathbf{q}_m = \begin{pmatrix} q_{1A} \\ q_{2A} \\ q_{3A} \\ t_{1A} \\ t_{2A} \\ t_{3A} \\ q_{1B} \\ q_{2B} \\ q_{3B} \\ t_{1B} \\ t_{2B} \\ t_{3B} \end{pmatrix}$$

Если деформация балки ограничена, то для вращения недостаточно использования линейной функции, поэтому в узлах вводятся дополнительные степени свободы, которые добавляются к вектору смещения балки. Поэтому в исследовании были рассмотрены результаты для пространственной рамы без сдерживаемого кручения [202]. Для указанных выше элементов пространственного каркаса, показанных на Рисунок 4.1, каждый член может быть выражен своим трехмерным конечным элементом как с локальными, так и с глобальными координатами. Учитывая пространственную раму на рисунке 4.1, каждый элемент рамы имеет следующие свойства сечения и нагрузки, и в этом исследовании представлены различные результаты.

Таблица 4.1–Свойства сечений и нагрузки

B(m)	H(m)	t(m)	z(m)	Area(m <sup>2</sup> )	I <sub>2</sub> (m <sup>4</sup> )	I <sub>3</sub> (m <sup>4</sup> )	J(m <sup>4</sup> )	E(kN/m <sup>2</sup> )	G(kN/m <sup>2</sup> )
------	------	------	------	-----------------------	----------------------------------	----------------------------------	--------------------	-----------------------	-----------------------

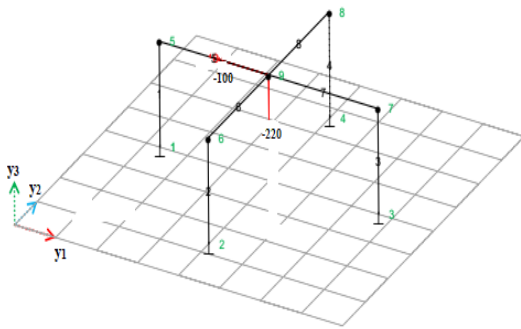
0.06	0.12	0.005	0.0077	0.00142	3.28E-06	2.15E-07	2.71E-08	2E+08	7.7E+07
H= -100 kN по оси y <sub>1</sub>					P= -220 kN по оси y <sub>2</sub>				

Координаты матриц жесткости, векторов перемещений и векторов нагрузки элементов преобразуются в глобальную систему координат таким образом, чтобы координаты тензора можно было складывать и вычитать, преобразования показаны ниже:

$$\mathbf{K}_{mx} = \mathbf{R}_m \mathbf{K}_{my} \mathbf{R}_m^T, \quad \text{and} \quad \mathbf{q}_{mx} = \mathbf{R}_m \mathbf{q}_{my} \quad \mathbf{u}_m = \mathbf{R}_m \mathbf{v}_m$$

Последним этапом является постобработка, мы получаем реакции на опорах, а также силы и моменты в каждом элементе пространственной рамы. Три смещения и вращения в каждом узле вдоль осей (y<sub>1</sub>, y<sub>2</sub>, y<sub>3</sub>) приведены ниже в таблице 4.2.

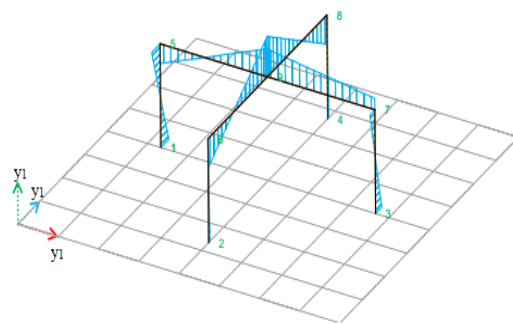
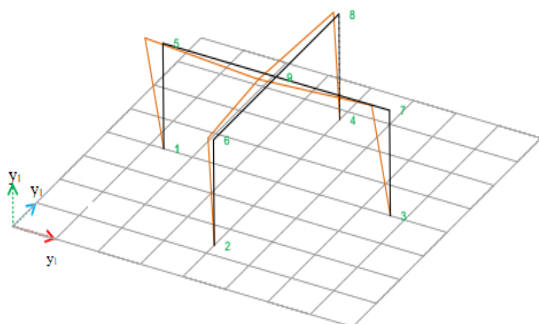
Таблица 4.2.–Узлы и определение элемента



Node	Support	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>3</sub>	Member	Length	i	j
		m	m	m		m		
1	Fixed	0	4	0	1	3	1	5
2	Fixed	4	0	0	2	3	2	6
3	Fixed	8	4	0	3	3	3	7
4	Fixed	4	8	0	4	3	4	8
5	Free	0	4	3	5	4	5	9
6	Free	4	0	3	6	4	6	9
7	Free	8	4	3	7	4	7	9
8	Free	4	8	3	8	4	8	9
9	Free	4	4	3				

Рисунок 4.5.–Конфигурация и состояние нагрузки образца пространственной рамы для верификационного анализа

Общая матрица жесткости и вектор нагрузки системы с 12 степенями свободы для каждой итерации составляются с помощью матрицы, а результаты представляются с помощью u. Диаграмма перемещений в каждом узле и диаграмма осей изгиба вдоль y<sub>2</sub>, y<sub>3</sub> показаны на следующем рисунке 4.6.





а)

б)

Рисунок 4.6—Перемещение (а) и диаграмма изгиба (б) вдоль плоскости  $u_2$ - $u_3$ :

#### 4.2. Комбинированный изгиб балки с ограниченным кручением

В настоящее время стальные элементы изготавливаются в виде тонкостенных профилей из-за их высокой прочности, гибкости, пластичности, быстроте возведения и эффективному разделению пространства, поэтому они широко используются в различных инженерных конструкциях. Балки, подвергающиеся в основном изгибу, называются тонкостенными.

Когда тонкостенные сечения подвергаются комбинированной нагрузке, их сопротивление нагрузке не эффективно. Это приводит к снижению прочностным свойствам балки. Рассмотрены различные исследования двутавровой балки трехмерного рамного элемента, подвергнутой комбинированной нагрузке, специально изгибающей с кручением [204-209]. Их поведение плохо описывается элементарными формулами, в которых механические компоненты сводятся к растяжению, изгибу и равномерному кручению (т.е. простейший случай равномерного распределения поперечного деформирования вдоль оси балки) [210]. Эффекты депланации возникают в основном в местах действия сосредоточенных крутящих моментов (за исключением свободных концов балки) и в сечениях с ограничениями на свободное секториальной площади. Эти эффекты включаются через дополнительную степень свободы в каждой узловой точке в виде первой производной от угла закручивания поперечного сечения балки [146], [62], [77].

Анализ растяжения, изгиба и прогиба достаточно прост, но анализ комбинированных деформаций кручения, коробления и деформации представляет собой серьезную проблему [148], [211], [212], [190]. В настоящее время большинство проектных спецификаций не содержат четких указаний по комбинированному расчету на изгиб и кручение, поэтому появляется необходимость в создании простого расчетного уравнения.

Для отдельного элемента балки, подверженного только изгибу, можно рассмотреть прямой метод [213]. Изменение смещения по сечению элемента выражается общей функцией для растяжения, кручения и изгиба [162].

двутавровой балки стальные балки широко используются в качестве конструктивных элементов из-за их эффективности при изгибе вокруг сильной оси. В ней поперечное сечение рассматривается, как абсолютно жесткое в собственной плоскости, а влиянием деформаций сдвига пренебрегают [214], [147].

Сначала были разработаны решения для тонкостенного сечения с неравномерным кручением, также есть исследования, в которых рассматриваются средства проектирования для простых случаев, как вспомогательные [15], [2]. Это является ограничением для тонких балок, где деформация сдвига на средней поверхности незначительна, однако для коротких глубоких балок и закрытых тонкостенных балок необходимо учитывать деформацию сдвига [215].

К сожалению, во многих случаях балки нагружаются эксцентрично и, как следствие, испытывают крутящие нагрузки в сочетании с изгибом. Важность ограниченного кручения тонкостенного профиля значительно возросла, поскольку деформации и напряжения, вызванные кручением, влияют на поведение конструкций как с открытым, так и с закрытым сечением [216], [139]. Как все открытые сечения, двутавровой балки стальные балки очень плохо сопротивляются кручению, а эффекты взаимодействия из-за кручения в сочетании с изгибом могут значительно снизить грузоподъемность балки.

Было разработано много методов проектирования для работы с комбинированным изгибом и кручением, но ни один из них не был повсеместно принят стандартами проектирования [217-219]. В последние десятилетия было проведено много соответствующих исследований. Различные коммерческие программы обычно учитывают шесть степеней свободы в каждом узле элемента пространственной рамы без учета эффекта ограничения деформации на концах элемента [220], [162], [221].

Современные программные пакеты для структурного анализа используют типы конечных элементов, которые учитывают до шести степеней свободы в узлах конструкции, что соответствует линейным и угловым смещениям в этих узлах, как для жестких тел [222]. Искривляющая часть первой производной угла закручивания рассматривается как дополнительная степень свободы в каждом узле на концах элемента, которую можно рассматривать как часть кривизны угла закручивания, вызванного искривляющим моментом [220], [87], [38]. В многочисленных исследованиях разработана матрица жесткости  $14 \times 14$  членов. Секториальной площади включается как дополнительная степень свободы, обычно для балок с открытым тонкостенным сечением [223], [157], [18], [19].

В данном исследовании будет представлена матрица жесткости пространственной рамы, которая более удобна для расширенного структурного анализа трехмерных балочных конструкций. Конструкции анализируются или проектируются с использованием только эффекта сопротивления кручению Сен-Венана, таким образом, анализ может не учитывать часть кручения в элементах, поэтому прочность конструкции может быть недооценена. Чтобы преодолеть эту неточность, некоторые исследователи пытались разработать матрицу жесткости с семью степенями свободы в каждом узле элемента пространственной рамы [173]-[180].

Подобная дополнительная матрица жесткости учитывает степень свободы деформации на концах элемента с тонкостенным сечением. В данной главе диссертации рассматривается метод конечных элементов трехмерной рамы, основанный на предположении, что результирующие деформации малы, и что равновесие может быть сформулировано для недеформированной конструкции в качестве приближения. Для этого рассматривается балочный элемент, и уравнение, необходимое для вычисления деформаций, будет выведено для расчета перемещений, внутренних сил и моментов в рамных конструкциях.

### 4.3. Геометрия и теория пространственных тонкостенных каркасных секций

При рассмотрении призматических тонкостенных балок прямого и постоянного поперечного сечения ось  $y_1$  определяется параллельно продольному направлению балки, а оси  $y_2$  и  $y_3$  описывают поперечную плоскость поперечного сечения. Балка связана с местной системой координат, и соответствующее поле смещения, принятое для осевого направления, равно  $v_1$ ,  $v_2$  и  $v_3$  используются для плоскости поперечного сечения. Аналогично,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  и  $\beta_3$  — это углы поворота вокруг осей  $y_1$ ,  $y_2$  и  $y_3$ , а  $\psi$  — поперечное коробление или секториальной площади сечения вдоль  $y_1$ .

Рассмотрим точку  $P$  с координатой стержня  $(y_1, y_2, y_3)$  в системе координат стержня. Основное допущение классической теории балок состоит в том, что поперечное сечение, ортогональное оси  $x$  в точке с координатой  $x$ , остается плоским и сохраняет свою форму при деформации.

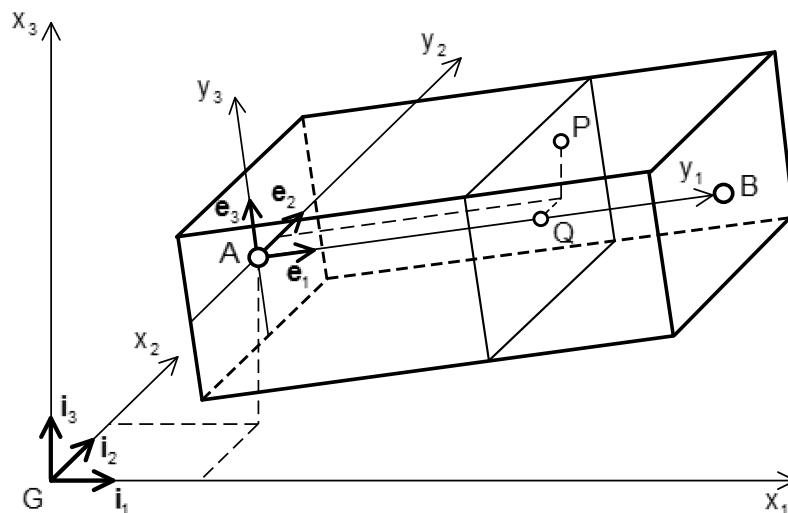


Рисунок 4.7—Ориентация систем координат для трехмерного сечения балки

В силу допущений классической теории балок сечение, ортогональное к оси  $y_1$  по координате  $y_1$ , остается плоским и сохраняет свою форму при деформации, а общая теория упругости для трехмерных твердых тел сводится к специальной теории для пространственных рам. Перемещение точки состоит из перемещения,

равного перемещению Центра тяжести  $S$  сечения  $y_1$ , вращательного перемещения, обусловленного вращением сечения, как твердого тела вокруг оси, проходящей через центроид, и деформирующего перемещения, нормального к сечению.

Пусть  $S$  — плоское сечение, нормальное к оси элемента, которое содержит точку  $P$  и пересекает ось в точке  $Q$ . Гипотеза поведения рамы [1] гласит, что форма сечения  $S$  в плоскости не меняется под нагрузкой, и что смещение точки  $P$  происходит за счет:

- (a) смещением точки  $Q$ ;
- (b) небольшим поворотом сечения  $S$  вокруг оси, проходящей через точку  $Q$ ;
- (c) искривляющим смещением в направлении, которое является произведением кручения с функцией депланации.

$$\begin{array}{c} v_{1P} \\ v_{2P} \\ v_{3P} \end{array} = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} + \begin{array}{c|c|c|c} 0 & y_3 & -y_2 & \beta_1 \\ \hline -y_3 & 0 & 0 & \beta_2 \\ \hline y_2 & 0 & 0 & \beta_3 \end{array} + \omega \begin{array}{c} \psi \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

$v_{kP}(y_1, y_2, y_3)$  изменение координат точки  $P$  в системе координат элементов (4.25)  
 $v_k(y_1)$  изменение координат центроида  $S$  сечения  $y_1$   
 $\beta_k(y_1)$  координаты вектора вращения сечения  
 $\omega(y_2, y_3)$  секториальная координата сечения в центре вращения  $S$   
 $\psi(y_1)$  угол поворота сечения

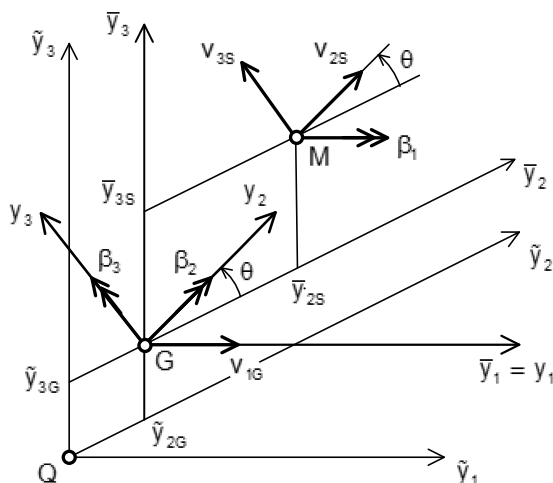


Рисунок 4.8—Кинематика балки, локальная и глобальная системы отсчета для матрицы масс

Координаты деформаций определяются с помощью линейных соотношений деформаций и перемещений линейной теории упругости. Поскольку гипотеза

деформации каркаса утверждает, что форма сечения в его плоскости не меняется, то деформациями пренебрегают.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= v_{1P,1} = v_{1,1} + y_3 \beta_{2,1} - y_2 \beta_{3,1} + \omega \psi_{,1} \\ \varepsilon_{12} &= v_{1P,2} + v_{2P,1} = -\beta_3 + \omega_{,2} \psi + v_{2,1} - y_3 \beta_{1,1} \\ \varepsilon_{13} &= v_{1P,3} + v_{3P,1} = \beta_2 + \omega_{,3} \psi + v_{3,1} + y_2 \beta_{1,1}\end{aligned}\quad (4.26)$$

Выражения для деформаций сдвига перестроены таким образом, чтобы вклад изгиба, равномерного кручения и ограничения кручения был представлен в явном виде:

$$\varepsilon_{12} = \underbrace{(v_{2,1} - \beta_3)}_{\text{изгиб}} - \underbrace{(y_3 + \omega_{,2}) \beta_{1,1}}_{\text{равномерное кручение}} + \underbrace{\omega_{,2}(\psi + \beta_{1,1})}_{\text{неравномерное кручение}}\quad (4.27)$$

$$\varepsilon_{13} = \underbrace{(v_{3,1} + \beta_2)}_{\text{изгиб}} + \underbrace{(y_2 - \omega_{,3}) \beta_{1,1}}_{\text{равномерное кручение}} + \underbrace{\omega_{,3}(\psi + \beta_{1,1})}_{\text{неравномерное кручение}}\quad (4.28)$$

Исходная гипотеза гласит, что деформациями в анализе из-за эффекта Пуассона можно пренебречь. Для линейно упругого материала с модулем упругости  $E$  и модулем сдвига  $G$  напряжение-деформация может быть рассчитано из уравнения 4.26 следующим образом:

$$\sigma_{11} = E \varepsilon_{11} = E(v_{1,1} + y_3 \beta_{2,1} - y_2 \beta_{3,1} + \omega \psi_{,1})\quad (4.29)$$

$$\sigma_{12} = G \varepsilon_{12} = G(-\beta_3 + \omega_{,2} \psi + v_{2,1} - y_3 \beta_{1,1})\quad (4.30)$$

$$\sigma_{13} = G \varepsilon_{13} = G(\beta_2 + \omega_{,3} \psi + v_{3,1} + y_2 \beta_{1,1})\quad (4.31)$$

$E$  коэффициент эластичности  
 $G$  коэффициент сдвига

Выражение энергии деформации  $\delta W_m$ , совершаемая напряжениями  $\sigma_{11}, \sigma_{12}$  и  $\sigma_{13}$  на возможных перемещениях, определяется из выражений (4.29)-(4.31) в объеме  $V$  элемента длиной  $a$  и площадью  $A$  за счет возможных деформаций  $\delta \varepsilon_{11}, \delta \varepsilon_{12}$  и  $\delta \varepsilon_{13}$  и выражается:

$$\begin{aligned}
\delta W_m &= \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dv = \\
&\int_0^a \int_A \sigma_{11} (\delta v_{1,1} + y_3 \delta \beta_{2,1} - y_2 \delta \beta_{3,1} + \omega \delta \psi_{,1}) dA dy_1 + \\
&\int_0^a \int_A \left( \sigma_{12} ((\delta v_{2,1} - \delta \beta_3) - (y_3 + \omega_{,2}) \delta \beta_{1,1} + \omega_{,2} (\delta \psi + \delta \beta_{1,1})) \right) dA dy_1 \\
&\int_0^a \int_A \left( \sigma_{13} ((\delta v_{3,1} - \delta \beta_2) + (y_2 - \omega_{,3}) \delta \beta_{1,1} + \omega_{,3} (\delta \psi + \delta \beta_{1,1})) \right) dA dy_1
\end{aligned} \tag{4.32}$$

$\varepsilon$  вектор деформации  
 $\sigma$  вектор напряжения

Интегралы произведений компонентов напряжения с геометрическими переменными с геометрическими величинами  $y_1, y_2, y_3$  и  $\omega$  по площади элемента называются результирующими напряжениями в элементе и обозначаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\text{Нагрузка в направлении оси } y_1 & n_1 = \int_A \sigma_{11} dA \\
\text{Поперечная нагрузка в направлении } y_2 & n_2 = \int_A \sigma_{12} dA \\
\text{Поперечная нагрузка в направлении } y_3 & n_3 = \int_A \sigma_{13} dA \\
\text{Изгибающий момент вокруг оси } y_2 & m_2 = \int_A \sigma_{11} y_3 dA \\
\text{Изгибающий момент вокруг оси } y_3 & m_3 = \int_A -\sigma_{11} y_2 dA \\
\text{бимомент из-за депланации} & m_\omega = \int_A \sigma_{11} \omega dA \\
\text{момента чистого кручения} & m_{Tp} = \int_A \left( \sigma_{13} (y_2 - \omega_{,3}) - \sigma_{12} (y_3 + \omega_{,2}) \right) dA \\
\text{секториального крутящего момента} & m_{Ts} = \int_A (\sigma_{13} \omega_{,3} + \sigma_{12} \omega_{,2}) dA
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Результирующие напряжения, действующие на положительной грани сечения, положительны, если они действуют в положительном направлении осей системы координат члена. Результирующие напряжения в члене (4.33) подставляются в выражение (4.32):

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dv = \int_0^a \left( n_1 \delta v_1 + n_2 (\delta v_{2,1} - \delta \beta_3) + n_3 (\delta v_{3,1} + \delta \beta_2) + m_2 \delta \beta_{2,1} + m_3 \delta \beta_{3,1} + m_\omega \delta \psi_{,1} + m_{Tp} \delta \beta_{1,1} + m_{Ts} (\delta \psi + \delta \beta_{1,1}) \right) dy_1 \tag{4.34}$$

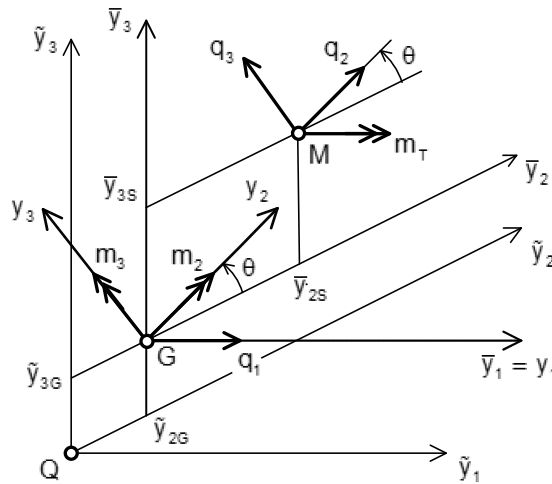


Рисунок 4.9–Локальная система отсчета и внутренние силы

Нагрузки, действующие на объем и поверхность элемента в теории упругости заменяются линейными нагрузками, действующими на оси  $y_1$ , и узловыми силами, действующими в узлах элемента, как показано на рисунке 3. Узловые силы, действующие в конечном узле, равны результирующим напряжениям, определяемым по уравнению 4.33. Силовой потенциал узловых сил, обусловленный изменением  $\delta v_k$  координат перемещения и  $\delta\beta_k$  координат вращения, определяется как:

$$\begin{aligned} \delta W_n = & m_{TpB} \delta\beta_{1B} - m_{TpA} \delta\beta_{1A} + m_{TsB} (\delta\psi_B + \delta\beta_{1B,1}) - m_{TsA} (\delta\psi_A + \delta\beta_{1A,1}) + \\ & m_{2B} \delta\beta_{2B} - m_{2A} \delta\beta_{2A} + m_{3B} \delta\beta_{3B} - m_{3A} \delta\beta_{3A} + m_{\omega B} \delta\psi_{B,1} - m_{\omega A} \delta\psi_{A,1} + \\ & \sum_{k=1}^3 (n_{kB} \delta v_{kB} - n_{kA} \delta v_{kA}) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Где  $\delta W_n$  силовой потенциал в узлах

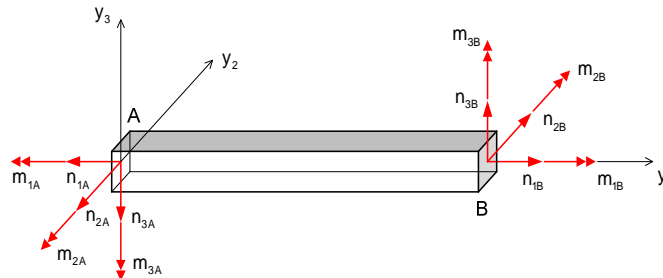


Рисунок 4.10–Положительные направления координат членов и узловых сил

Силовой потенциал нагрузок на элементы вследствие изменения  $\delta v_k$  (координат перемещения) и  $\delta\beta_k$  (координат поворота) дается в виде:



$$\delta W_q = \int_0^a \left( t_\omega \psi + \sum_{i=1}^3 (q_i \delta v_i + t_i \delta \beta_i) \right) dy_1$$

$q_i$       распределенная нагрузка в направлении оси  $i$       (4.36)  
 $t_i$       распределенный момент в направлении оси  $i$   
 $t_\omega$       распределенный бимомент

#### 4.4. Формирование метода конечных элементов для трехмерных тонкостенных каркасов

Управляющие уравнения для балки и рамы выводятся путем применения принципа силового потенциала к раме. Дифференциальные управляющие уравнения для обобщенных перемещений членов удовлетворяются для произвольных виртуальных перемещений и выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} E A v_{1,1} + q_1 &= 0 \\ E J_3 v_{2,1111} - q_2 + m_{3,1} &= 0 \\ E J_2 v_{3,1111} - q_3 - m_{2,1} &= 0 \\ E J_\omega \beta_{1,1111} - G J_T \beta_{1,11} - m_1 - m_{\omega,1} &= 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Изменение смещения по длине стержня связано с узловыми смещениями и определяется решением дифференциальных уравнений, являющихся дифференциальными уравнениями для обобщенных смещений балки. Поэтому значения функций смещения в узлах равны неизвестным значениям узловых смещений.

Для неравномерного кручения в качестве начального параметра используется тригонометрическая интерполяция вращения  $\beta_l$ , которая затем сравнивается с приближенным решением. Чтобы учесть деформацию защемленной балки, в узлах вводятся дополнительные степени свободы, которые добавляются к вектору смещения балки. Интерполяционная функция, содержащая гиперболические функции  $y_l$ , которая удовлетворяет основному дифференциальному уравнению для рассматриваемого кручения:

$$\begin{aligned} \beta_1(y_1) &= \mathbf{g}(y_1)^T \mathbf{b} \\ \mathbf{g}^T &= \begin{bmatrix} g_1(y_1) & g_2(y_1) & g_3(y_1) & g_4(y_1) \end{bmatrix} \\ \mathbf{b}^T &= \begin{bmatrix} \beta_{1A} & \beta_{1,1A} & \beta_{1B} & \beta_{1,1B} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\beta_1 = \mathbf{h}_\omega^T C$$

$$h_\omega^T = \begin{array}{|c|} \hline \sinh \theta z \\ \hline \cosh \theta z \\ \hline z \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad C = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ \hline \end{array}$$

Интерполяционные функции подставляются в левую часть и интегрирование по длине элемента выполняется для осевых и изгибающих нагрузок, но отдельно рассматривается для кручения, так как оно развивалось на основе двух различных методов

$$E A \int_0^a \delta v_1 v_{1,1} dy_1 = \delta \mathbf{v}_1^T \mathbf{K}_1 \mathbf{v}_1$$

$$E J_3 \int_0^a \delta v_2 v_{2,11} dy_1 = \delta \mathbf{v}_2^T \mathbf{K}_2 \mathbf{v}_2 \quad E J_2 \int_0^a \delta v_3 v_{3,11} dy_1 = \delta \mathbf{v}_3^T \mathbf{K}_3 \mathbf{v}_3$$

$$\mathbf{K}_1 = \frac{EA}{a} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline k_1 & k_2 \\ \hline k_2 & k_1 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{K}_2 = \frac{E J_2}{a^3} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 12 & 6a & -12 & 6a \\ \hline 6a & 4a^2 & -6a & 2a^2 \\ \hline -12 & -6a & 12 & -6a \\ \hline 6a & 2a^2 & -6a & 4a^2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline k_3 & k_4 & k_6 & k_4 \\ \hline k_4 & k_5 & k_7 & k_8 \\ \hline k_6 & k_7 & k_3 & k_7 \\ \hline k_4 & k_8 & k_7 & k_5 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{K}_3 = \frac{E J_3}{a^3} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 12 & -6a & -12 & -6a \\ \hline -6a & 4a^2 & 6a & 2a^2 \\ \hline -12 & 6a & 12 & 6a \\ \hline -6a & 2a^2 & 6a & 4a^2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline k_9 & k_{10} & k_{12} & k_{10} \\ \hline k_{10} & k_{11} & k_{13} & k_{14} \\ \hline k_{12} & k_{13} & k_9 & k_{13} \\ \hline k_{10} & k_{14} & k_{13} & k_{11} \\ \hline \end{array}$$

Вклад кручения во силовой потенциал управляющего дифференциального уравнения (4.37) дается в виде следующих выражений:

$$\int_0^a (E C_\omega \delta \beta_{1,11} \beta_{1,11} + G J_T \delta \beta_{1,1} \beta_{1,1}) dA = \delta \mathbf{b}^T (\mathbf{K}_{\omega 1} + \mathbf{K}_{\omega 2}) \mathbf{b}$$

$\mathbf{K}_{\omega 1}$  матрица напряжений при деформации

$\mathbf{K}_{\omega 2}$  матрица напряжений без деформации

Матрицы жесткости  $\mathbf{K}_{\omega 1}$  и  $\mathbf{K}_{\omega 2}$  добавляются к матрице жесткости  $\mathbf{K}_m$  элемента обычным образом.

$$\mathbf{K}_T = \frac{EC_\omega}{a^3} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline k_{T1} & k_{T2} & k_{T3} & k_{T4} \\ \hline k_{T2} & k_{T6} & k_{T7} & k_{T8} \\ \hline k_{T3} & k_{T7} & k_{T11} & k_{T12} \\ \hline k_{T4} & k_{T8} & k_{T12} & k_{T16} \\ \hline \end{array} \quad (4.38)$$

$$K_{T1} = K_{T11} = S * \theta \sinh \theta, \quad K_{T6} = K_{T16} = S * \left( \cosh \theta - \frac{\sinh \theta}{\theta} \right) * a^2$$

$$K_{T2} = K_{T4} = S * (\cosh \theta - 1) * a, \quad K_{T8} = S * \left( \frac{\sinh \theta}{\theta} - 1 \right) * a^2$$

$$S = \left( \frac{\theta^2}{Q} \right), \quad Q = 2(1 - \cosh \theta) + \theta \sinh \theta, \quad K_{T3} = -K_{T1}, \quad K_{T7} = K_{T12} = -K_{T2}$$

Приведенная выше матрица жесткости элемента для кручения с перекосом может быть использована путем деления на две матрицы. Параметры  $K_{T1}$ ,  $K_{T2}$ ,  $K_{T6}$  и  $K_{T8}$  могут быть заменены аппроксимацией, как показано ниже:

$$K_{T1a} = 12 + \frac{6}{5} * \theta^2 \qquad K_{T2a} = 6 + \frac{1}{10} * \theta^2$$

$$K_{T6a} = 4 + \frac{2}{15} * \theta^2 \qquad K_{T8a} = 2 - \frac{1}{30} * \theta^2$$

Учитывая вышеприведенные выражения серий, альтернативные матрицы можно выразить так, как показано ниже:

$$\mathbf{K}_{Ta} = \frac{EC_\omega}{a^3} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 12 & -6a & -12 & 6a \\ \hline 6a & 4a^2 & 6a & 2a^2 \\ \hline -12 & -6a & 12 & 6a \\ \hline 6a & 2a^2 & 6a & 4a^2 \\ \hline \end{array} + \frac{GJ}{30a} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 36 & -3a & -36 & -3a \\ \hline -3a & 4a^2 & 3a & -a^2 \\ \hline -3a & 3a & 36 & 3a \\ \hline -3a & -a^2 & 3a & 4a^2 \\ \hline \end{array}$$

Тригонометрические и приближенные решения интерполяционной функции рассматриваются для выражения матрицы жесткости для неравномерного кручения с учетом дополнительной степени свободы в каждом узле. Сравнивая оба метода, можно сделать вывод, что оба они одинаковы при малом значении  $\theta$ , а это обычно рассматривается для открытых тонкостенных сечений, поскольку их значение  $\theta$  невелико.

Процент ошибки между двумя методами матрицы жесткости элементов для кручения с деформацией покоя представлен графически, как показано ниже. Поскольку изменение суммарных компонентов кручения зависит от величины  $\theta$ , то

мы можем рассмотреть различные типы сечений. Для  $\theta=1$  и 2 ошибки находятся в диапазоне от 6,7 % до - 9,7 %, что считается допустимым, поэтому оба метода приемлемы для открытых тонкостенных секций. Таким образом, длина элементов может быть ограничена в зависимости от типа сечения и должна быть выбрана при небольшом значении  $\theta$ .

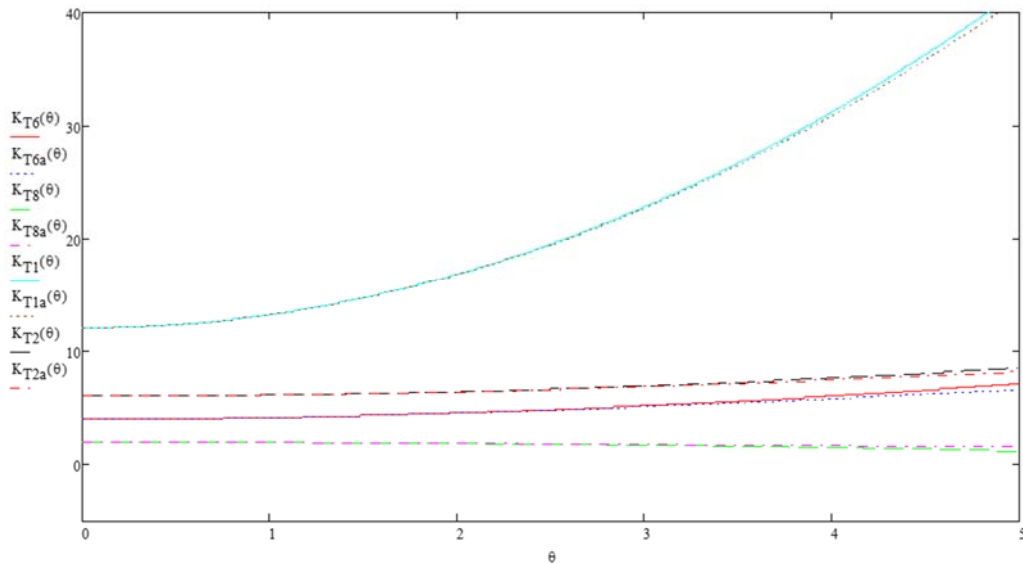


Рисунок 4.11—Анализ точных и приближенных методов для различных значений  $\theta$ .

Матрица жесткости, как известно, связь между обобщенным вектором силы  $q_m$  и обобщенным вектором перемещения  $v_m$  устанавливается матрицей жесткости  $K_m$  элемента.

$$\mathbf{q}_m = \mathbf{K}_m \mathbf{v}_m \quad (4.40)$$

В местной системе координат узловые перемещения и вектор нагрузки показаны ниже:

$$\mathbf{v}_e = \begin{bmatrix} v_{1A} & v_{2A} & v_{3A} & \beta_{1A} & \beta_{2A} & \beta_{3A} & \beta_{1,1A} & v_{1B} & v_{2B} & v_{3B} & \beta_{1B} & \beta_{2B} & \beta_{3B} & \beta_{1,1A} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{q}_m = \begin{bmatrix} n_{1A} & n_{2A} & n_{3A} & m_{1A} & m_{2A} & m_{3A} & m_{\omega A} & n_{1B} & n_{2B} & n_{3B} & m_{1B} & m_{2B} & m_{3B} & m_{\omega B} \end{bmatrix}^T$$

Результаты сравниваются с различными исследованиями в обоих методах для включения дополнительных степеней свободы, которые вводятся в узлах и добавляются к вектору перемещений членов [223], [157], [135]. Переменные элементы собраны в векторе перемещений элементов  $V_m$  и векторе нагрузки

элементов  $q_m$ , а матрицы расположены соответствующим образом в матрице жесткости элементов  $K_m$ .

$$K_m = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline k_1 & & & & & & & k_2 & & & & & & & \\ \hline & k_3 & & & & k_4 & & & k_6 & & & & & k_4 & \\ \hline & & k_9 & & k_{10} & & & & & k_{12} & & k_{10} & & & \\ \hline & & & k_{T1} & & & k_{T2} & & & & k_{T3} & & & k_{T4} & \\ \hline & & k_{10} & & k_{11} & & & & & k_{13} & & k_{14} & & & \\ \hline & k_4 & & & & k_5 & & & k_7 & & & & & k_8 & \\ \hline & & & k_{T5} & & & k_{T6} & & & & k_{T7} & & & k_{T8} & \\ \hline k_2 & & & & & & & k_1 & & & & & & & \\ \hline & k_6 & & & & k_7 & & & k_3 & & & & & k_7 & \\ \hline & & k_{12} & & k_{13} & & & & & k_9 & & k_{13} & & & \\ \hline & & & k_{T9} & & & k_{T10} & & & & k_{T11} & & & k_{T12} & \\ \hline & & k_{10} & & k_{14} & & & & & k_{13} & & k_{11} & & & \\ \hline & k_4 & & & & k_5 & & k_7 & & & & & & k_8 & \\ \hline & & & k_{T13} & & & k_{T14} & & & & k_{T15} & & & k_{T16} & \\ \hline \end{array}$$

После расчета величин смещения и вращения можно определить осевое и поперечное распределение внутренних сил и смещений. В случае неравномерного кручения для расчета локальных углов поворота и моментов кручения можно применить локальные передаточные соотношения. Новый трехмерный элемент конечной балки с ограничением на кручение был создан в proMathcad2 и протестирован на различных примерах.

#### 4.5. Численная и экспериментальная проверка достоверности метода конечных элементов тонкостенных секций с ограниченным кручением

Для подтверждения теоретического расчета поведения тонкостенного профиля при сдержанном кручении двутаврового профиля с длиной 500 мм, высотой 100 мм, толщиной фланца 5,7 мм, шириной фланца 55 мм и толщиной полотна 4,5 мм (как показано на рисунке 4.12).

Консольный двутавровой балки подвергается комбинированной нагрузке, которая представляет собой крутящий момент  $M_T$  или точечную нагрузку  $P$  с плечом рычага  $e$ , приложенную на свободном конце, как показано на рисунке 4.12. Свойства материала призматической консольной стальной балки (рисунок 4.12),

следующие: модуль Юнга  $E = 200$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$  и модуль сдвига  $G = E/(2(1+\nu)) = 76,92$  ГПа. Приложенная сосредоточенная сила прикладывается постепенно, и ее величина составляет 91,893 кг, включая собственный вес.

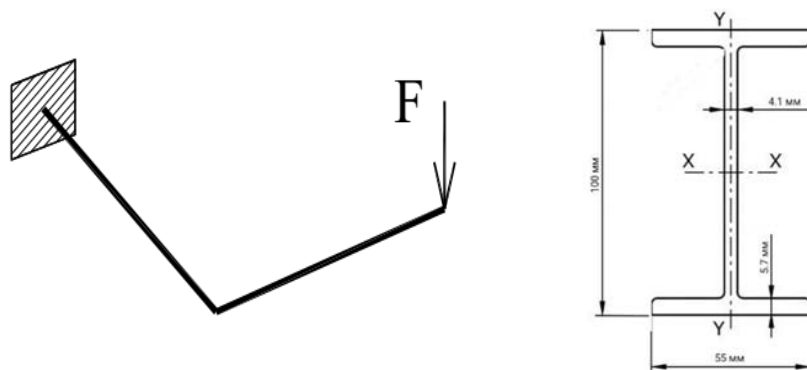


Рисунок 4.12–Геометрия, граничные условия, нагрузка и поперечное сечение рамы

Геометрия и экспериментальная центровка образца, а также свойства материала, использованного для изготовления сечения балки, приведены на рисунках 4.13 и 4.14.

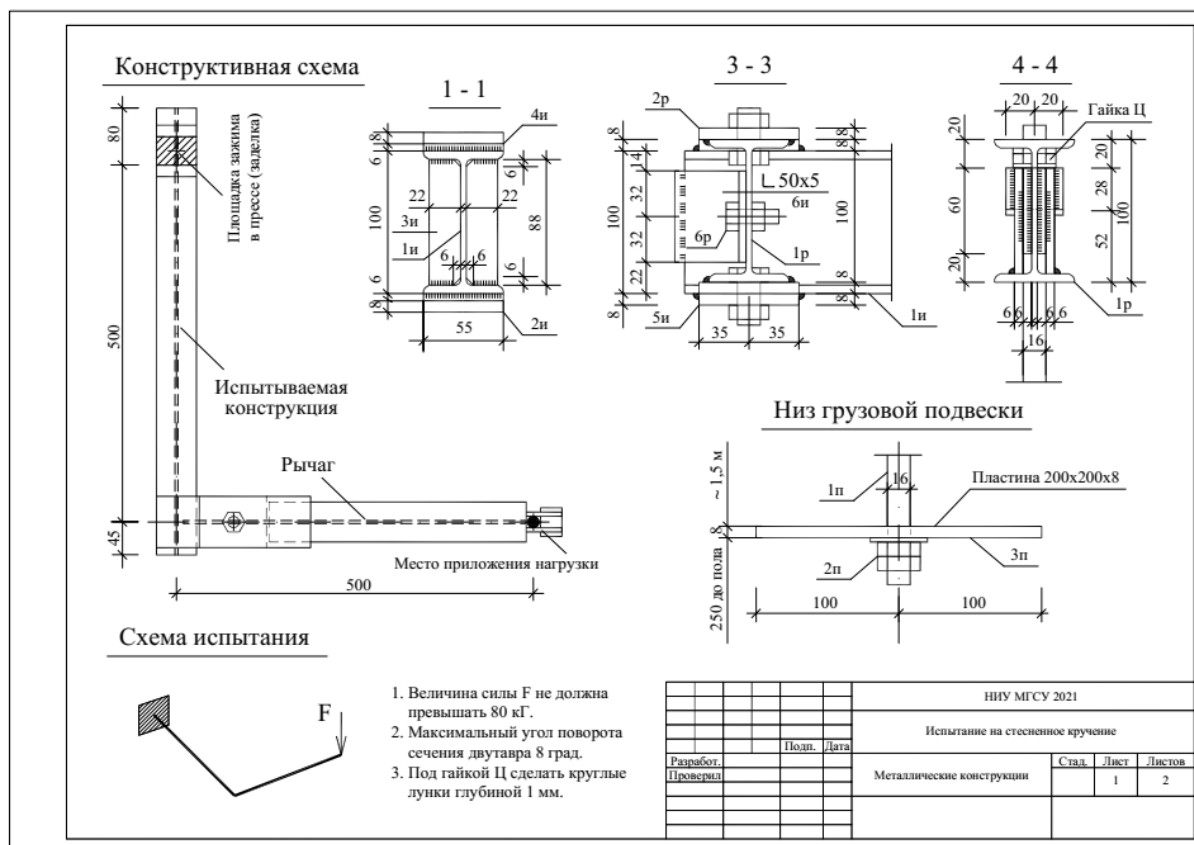


Рисунок 4.13—Информация об образцах двутаврового сечения тонкостенной стальной балки с различными видами (мм)

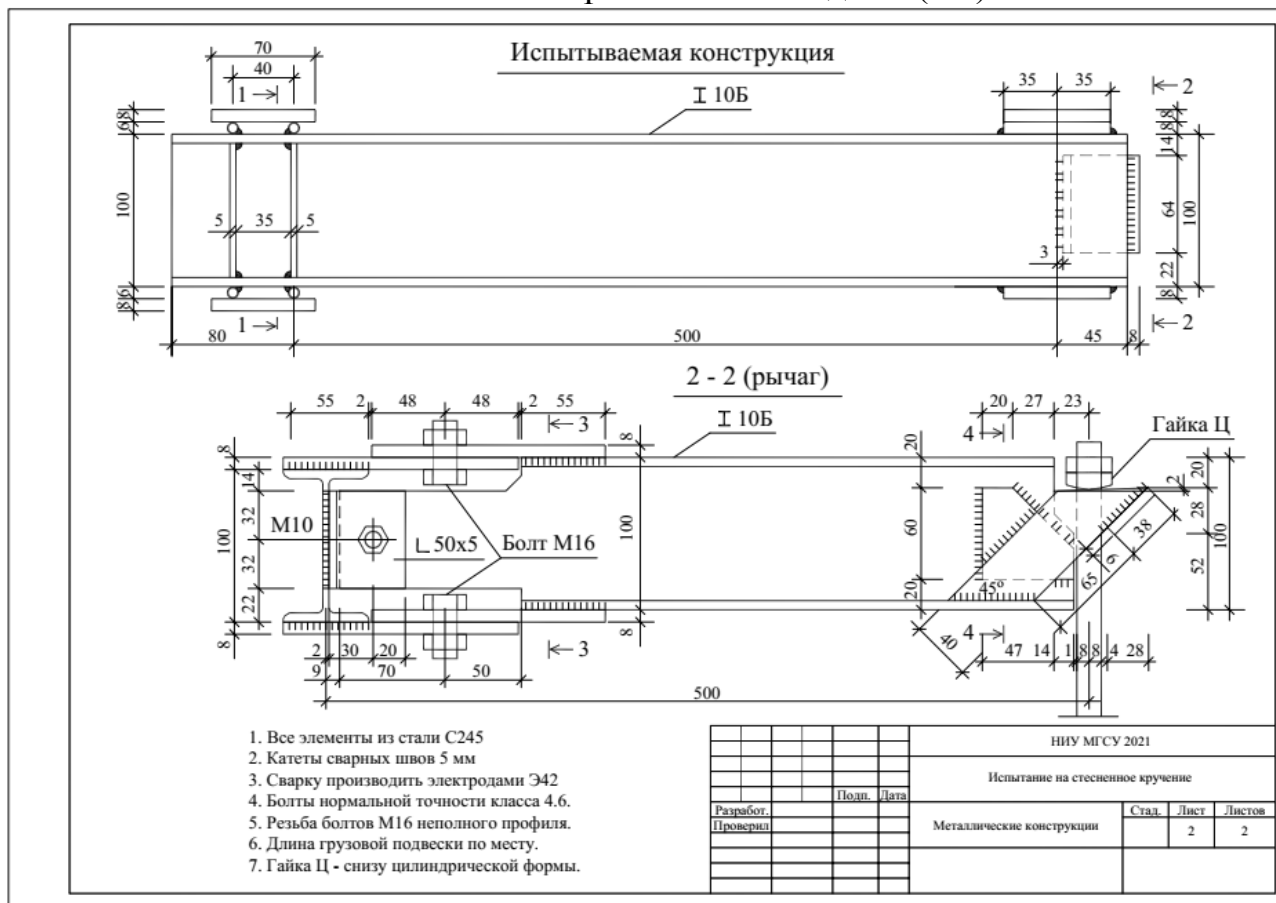


Рисунок 4.14—Информация об образцах Двутаврового сечения тонкостенной стальной балки с различными видами (мм)

#### 4.6. Расположение точек измерения и процедура испытания

На основании результатов упругого анализа двутаврового сечения тонкостенной балки можно определить напряжение и угол кручения через пролет балки. Размер и тип сечения выбирается на основе изгибно-крутильная характеристика стержня и лабораторного оборудования (Instron 1000HDX) таким образом, чтобы настроить образец в эксперименте. Была выбрана балка стандартного профиля 10Б, с пролетами 50 см, а материал балки — сталь С245. Расчеты были проведены путем приложения нагрузки в диапазоне упругости материала, что соответствует мощности имеющегося в лаборатории пресса Instron 1000HDX (10 тонн).

Поскольку соотношение изгибающих и секторальных напряжений меняется в зависимости от пролета испытываемых балок, эксцентриситет  $e$  принимается постоянным и равным в данном случае 50 см. После определения основных параметров расчетной схемы, нагрузки, эксцентриситетов, а также метода передачи нагрузки и попытки найти место для измерения деформации, деформации и углов путем предоставления датчиков и измерительных устройств, экспериментальные сборки были завершены.

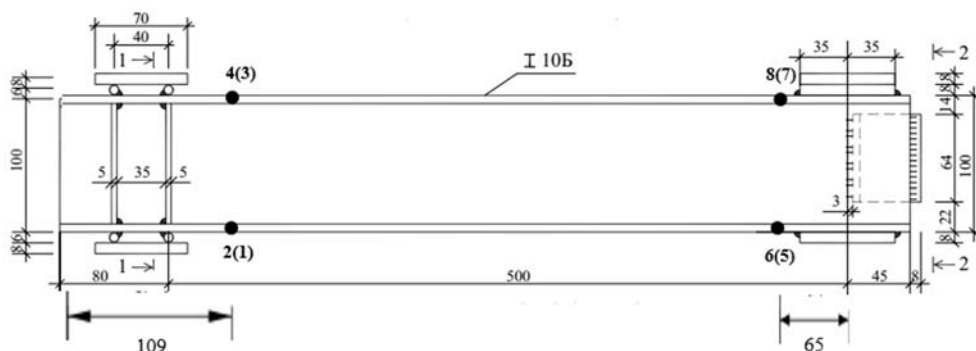


Рисунок 4.15—Положение и расположение датчиков в образце

#### 4.7. Экспериментальная установка для испытаний и контрольно-измерительные приборы

Деформация измеряется с помощью восьми датчиков LVDT, четыре из которых устанавливаются на неподвижном конце и четыре на свободном конце образца, как показано на рисунках 4.16.

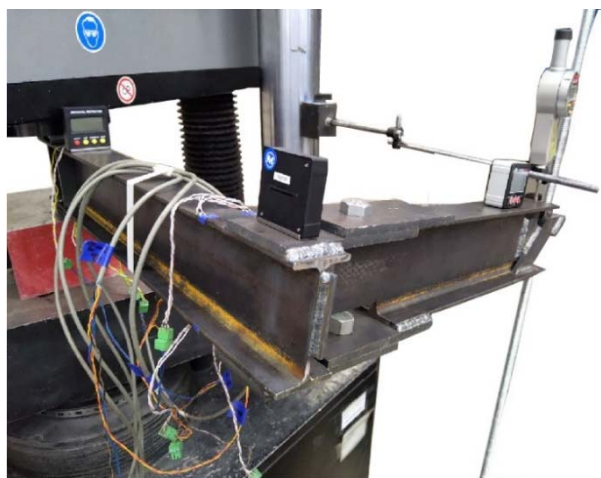


Рисунок 4.16—Стенд для выравнивания образцов и комбинированного нагружения



В верхней части секции используются два *LVDT*, и аналогично, в нижней части секции два *LVDT* устанавливаются как на неподвижном, так и на свободном концах. Применяется восемь датчиков *LVDTs*, из которых четыре *LVDTs* размещаются на неподвижном конце и четыре — на свободном конце образца, используемого для измерения деформации. Два *LVDT* используются в верхней части секции и аналогично два *LVDT* размещаются в нижней части секции в фиксированной и торцевой пластинах. После определения основных параметров метода расчета системы, значений нагрузки и эксцентриситетов были разработаны опоры, метод приложения нагрузки и точки установки тензометрических датчиков. На рисунке 4.16 показана собранная экспериментальная установка и деформированная балка после потери несущей способности и разгрузки.

Перед началом экспериментальных испытаний датчики деформации (датчики *LVDT*), углы закручивания и устройства измерения смещения рычага были установлены в местах, где нормальные напряжения в сечении должны были быть близки к максимальным, как показано на рисунке 4.16.

Образец регулируется для создания ограничителей деформации на одном конце и свободен на другом конце, как показано на рисунке 4.17. Образец осторожно помещается на испытательную установку и устанавливается на крепежную пластину так, чтобы можно было приложить требуемую нагрузку. Три устройства для измерения углового вращения используются для измерения угла скручивания по трем различным осям, как показано на рис. 4.17. Нагрузка прикладывается шаг за шагом при 14,50, 20,75, 27,07, 33,37, 39,64 и 45,95 КНсм. Для анализа было взято среднее значение результатов трех образцов.



(a)



(б)

Рисунок 4.17–Экспериментальная установка с деформированным образцом балки 10В (а) и комбинированными условиями нагружения (б)

#### 4.8. Результаты испытаний и обсуждение

С помощью экспериментов были получены данные о деформации, угле закручивания, деформации и напряжении соответствующих точек. Распределение результатов эксперимента в зависимости от условий приложенной нагрузки приведено ниже. Графики представляют собой сравнение между приложенной нагрузкой, углом закручивания и смещением точки приложения нагрузки для трех экспериментальных испытаний, как показано на рисунках 4.18-4.20.



Рисунок 4.18–Распределение результатов первого эксперимента по приложенной нагрузке, углу закручивания и смещению точки приложения нагрузки.

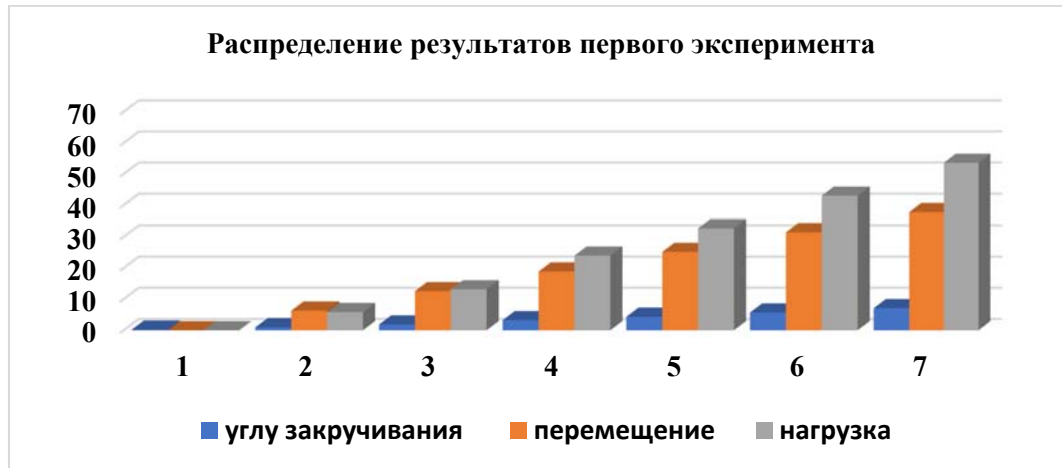


Рисунок 4.19–Распределение результатов второго эксперимента по приложенной нагрузке, углу закручивания и смещению точки приложения нагрузки.

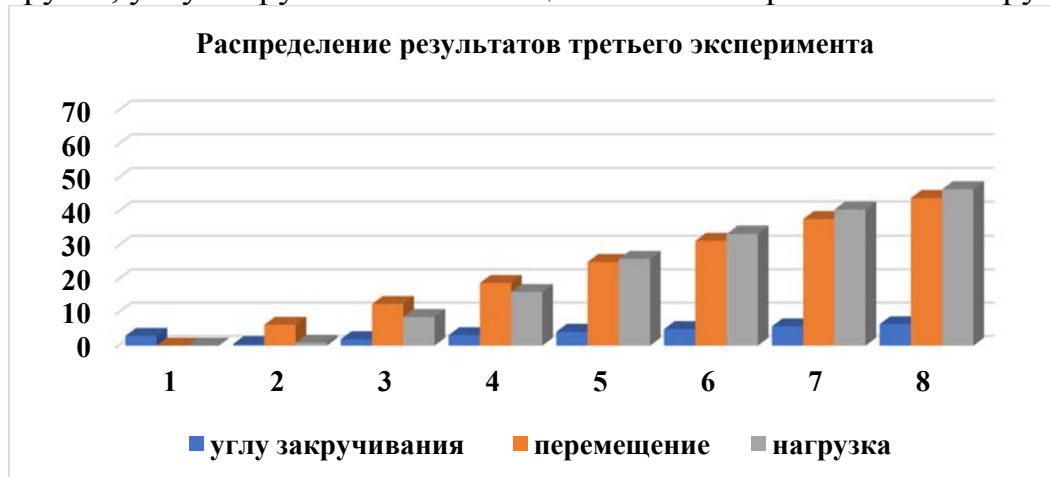


Рисунок 4.20–Распределение результатов третьего эксперимента по приложенной нагрузке, углу закручивания и смещению точки приложения нагрузки.

В процессе нагружения были измерены угол закручивания, деформация и прогиб концевой пролетной сечения балки. Графики зависимости деформаций и напряжений от деформации рычага, измеренной экспериментально, показаны на рисунке 4.21–22.

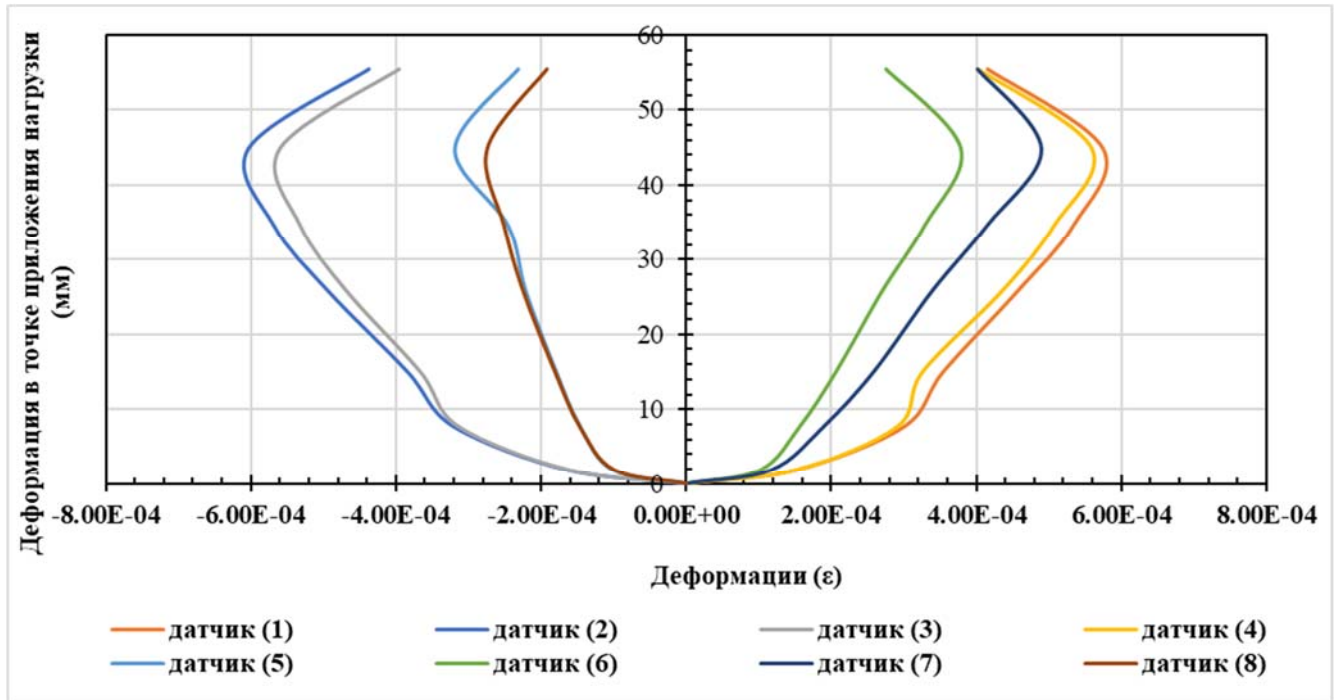


Рисунок 4.21–Деформации в зависимости от деформации рычага, измеренные экспериментально

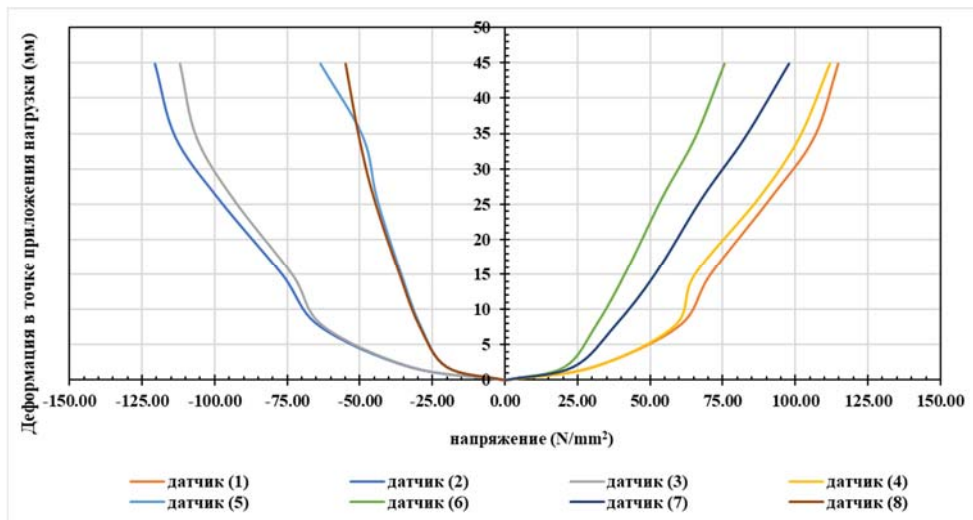


Рисунок 4.22 –Деформации рычага в зависимости от напряжения балки, измеренные экспериментально

В результате трех испытаний были измерены углы скручивания балок и представлены в виде графика зависимости угла скручивания от нагрузки, как показано на рисунке 4.23.

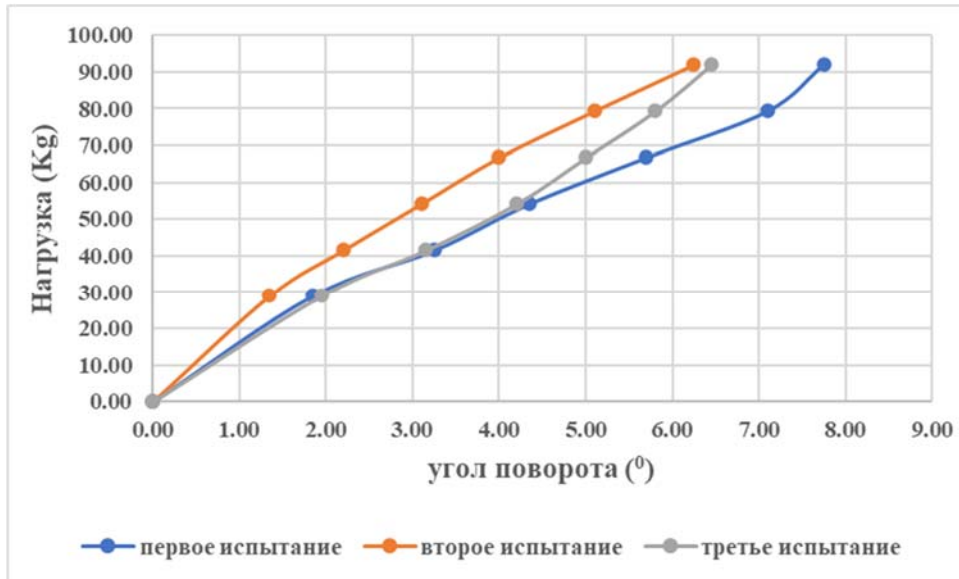


Рисунок 4.24 - Зависимость приложенной нагрузки от угла скручивания для трех испытаний

Кроме того, используя трехмерную конечно-элементную модель тонкостенного бруса с открытым поперечным сечением, разработанную в среде ANSYS, можно сравнить экспериментальные данные, как с теоретическими расчетами, так и с результатами численного моделирования, как показано на рисунке 4.25.

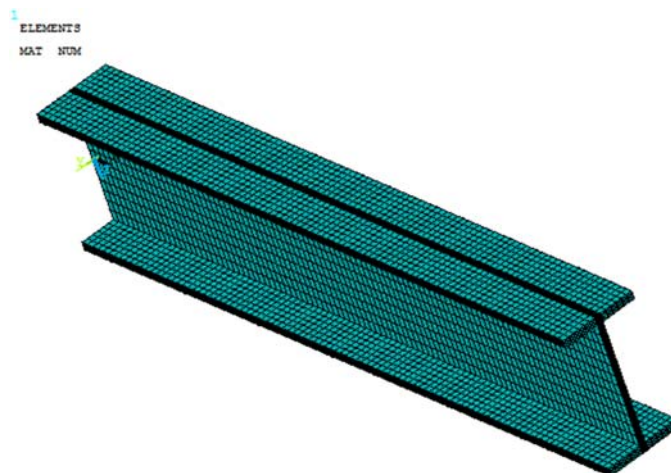


Рисунок 4.25—Конечно-элементная модель кручения тонкостенного бруса с открытым поперечным сечением

Для моделирования балки также использовалась программа конечных элементов ANSYS. Было проведено моделирование в Ansys с элементами

балки 189, с учетом дополнительной степени свободы. На основе предложенного конечно-элементного анализа создана компьютерная программа ProMathcad2[230] для анализа. Иллюстрация точности представленного метода продемонстрирована путем сравнения с использованием эксперимента и программы конечных элементов. Сравнение различных результатов представлено графически. К центру сдвига стены на свободном конце приложены сосредоточенный крутящий момент и точечная нагрузка.

На рисунке 4.26 показаны изменения угла закручивания по всему пролету в зависимости от приложенной комбинированной нагрузки для типичных балок.

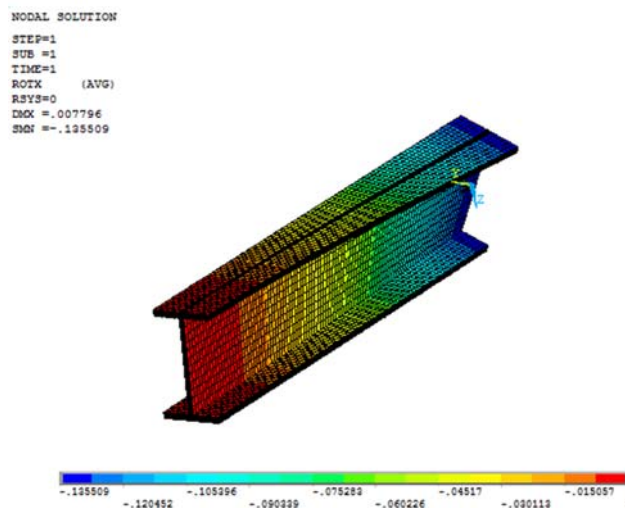


Рисунок 4.26—Значения угла закручивания с использованием конечно-элементной модели

В таблице 4.3 представлены значения угла закручивания, полученные теоретически, экспериментально и численно, а также сравнение этих двух значений для всех балок.

Таблица 4.3—Вращение поперечных сечений с использованием различных методов

Угол скручивания (°)				
Момент (KN cm)	Нагрузка (Kg)	Теоретические расчеты	Числовые расчеты	Эксперимент
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
14.50	0.29	2.52	1.33	0.95
20.75	0.42	3.64	2.35	1.85
27.07	0.54	4.96	4.16	3.25

33.37	0.67	6.10	5.20	4.35
39.64	0.79	7.33	6.25	5.70
45.95	0.92	8.01	7.74	7.10

В табл. 4.3 перечислены прогнозируемые повороты различными методами указанных сечений. На рисунке 4.27 показаны процентные различия экспериментальных испытаний по сравнению с результатами текущей теории и численными результатами. Зависимости нагрузки от угла и их корреляции для теоретических, экспериментальных и численных результатов представлены графически, как показано на рисунке 4.27.

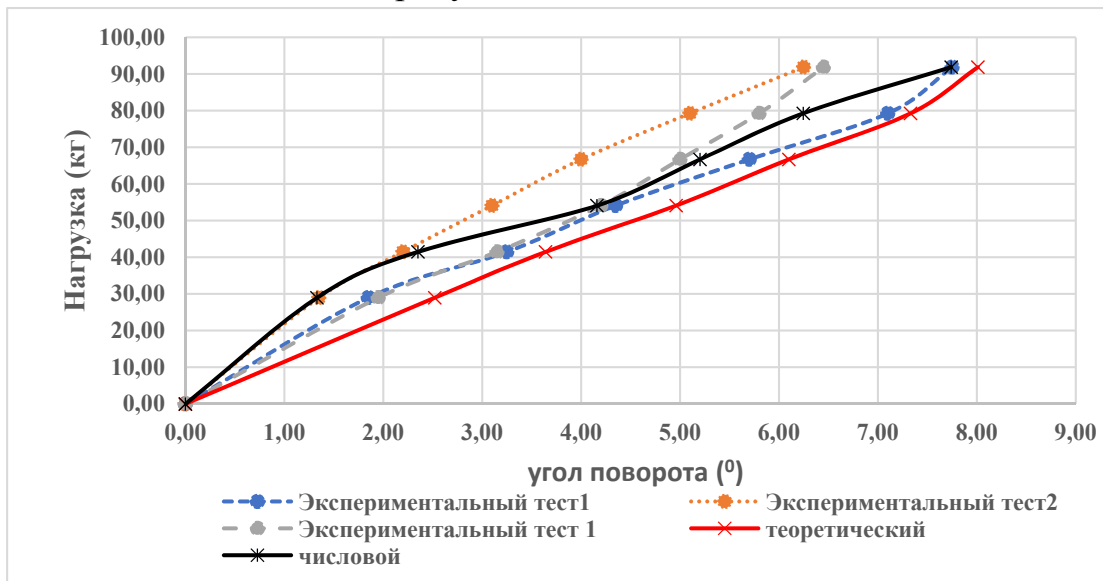


Рисунок 4.27—Графики зависимости нагрузки от угла скручивания трех экспериментальных испытаний, текущей теории и численных результатов.

Полученные результаты отображаются для заданных точек на поперечном сечении, которое рассматривается во время эксперимента. Для типичных балок концентрация напряжений в местах расположения датчиков в тонкостенном сечении двутавровой балки показана по всему пролету при приложенной комбинированной нагрузке, как показано на рисунке 4.28.

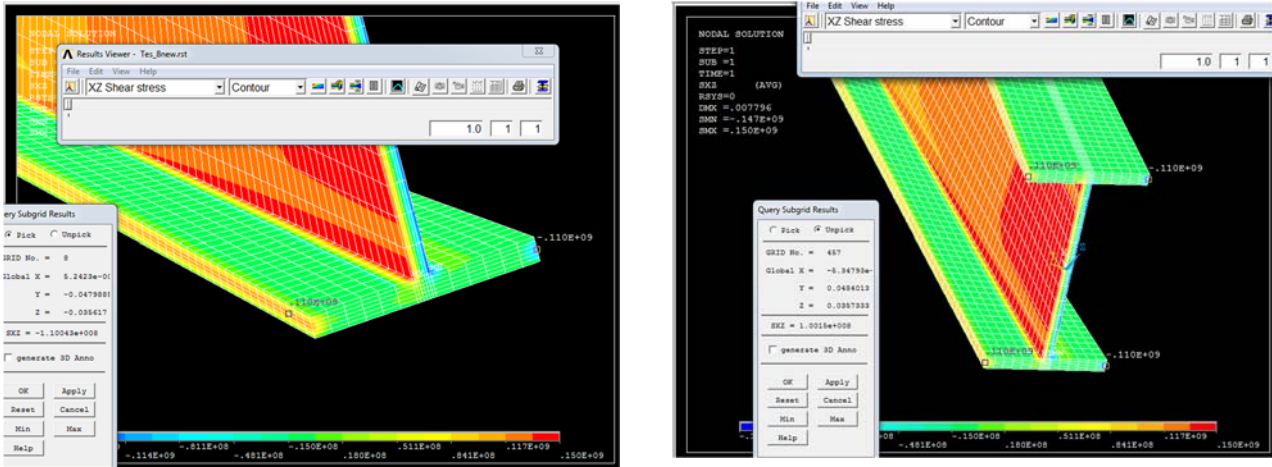


Рисунок 4.28 - значения распределения нормальных напряжений в сечении с помощью Ansys

На рисунке 4.29—Показано графическое выражение изменения напряжений с увеличением приложенных нагрузок, определенное экспериментальными, теоретическими и численными расчетами.

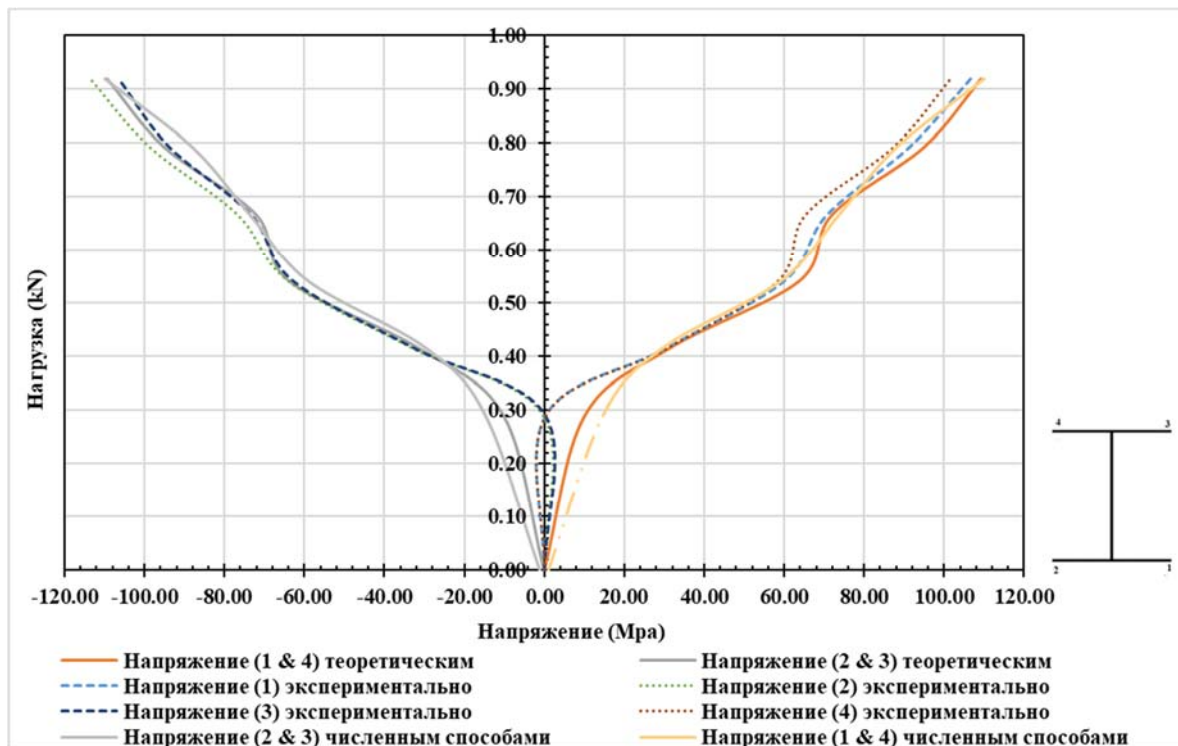


Рисунок 4.27—Результаты зависимости напряжений от нагрузок по экспериментальным, теоретическим и численным расчетам.



Теоретические, численные и экспериментальные распределения нормальных напряжений в поперечных сечениях двутавровой балки, расположенной на расстоянии 11 см от опоры, показаны на рисунке 4.28.

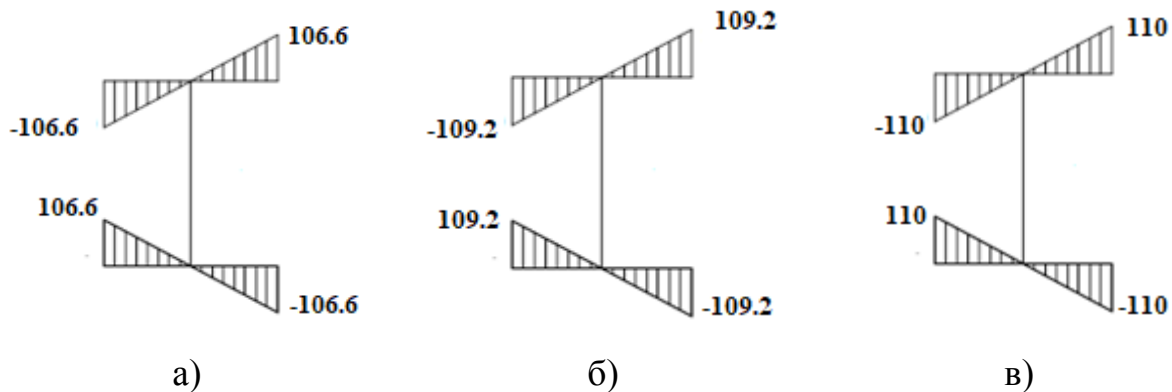


Рисунок 4.28–Теоретическое (а), численное (б) и экспериментальное распределения (в) нормальных напряжений в сечениях двутавровой балки, расположенной на расстоянии 11 см от опоры

Судя по рисунку 4.28, теоретический, численный и экспериментальный графики распределения нормальных напряжений практически идентичны друг другу. Относительное отклонение между тремя результатами оценивается в 2,5-3,5%.

#### Выводы четвертой главы

Часто используемый метод конечных элементов для тонкостенных профилей учитывает только шесть степеней свободы в каждом узле балки, но в данной главе было продемонстрировано, что включение депланации профиля в качестве дополнительной степеней свободы в структурный анализ может привести к созданию более безопасной и оптимальной конструкции по прочности. По результатам данного исследования сделаны следующие выводы.

1. Простые геометрические свойства сечения используются для создания матрицы жесткости для тонкостенных балочных сечений с восстановленным кручением. Рассматривая дополнительную степень свободы в каждом узле, тригонометрические и приближенные решения интерполяционной функции используются для выражения матрицы жесткости  $14 \times 14$  степеней свободы для неравномерного кручения.

2. Разработана и представлена матрица жесткости для трехмерных тонкостенных сечений, подверженных комбинированному нагружению. Это делает расширенный структурный анализ балочных элементов более удобным. Разработанная матрица жесткости более применима для открытых тонкостенных сечений, так как число характеристик для открытого сечения очень мало по сравнению с закрытыми тонкостенными сечениями.
3. Как и в третьей главе, для учета дополнительной степени свободы рассматриваются тригонометрический и приближенный методы, и для характеристик  $(\theta) = 1$  и  $2$  погрешности составляют от  $6,7\%$  до  $-9,7\%$ , что считается допустимым, и оба метода приемлемы для открытых тонкостенных сечений. Длина элемента ограничена в зависимости от типа сечения и при максимальном значении числа характеристик  $(\theta)$  менее  $2$ .
4. Было проведено сравнение между теоретическими, экспериментальными и численными результатами расчета двутаврового сечения балки в условиях комбинированного нагружения изгибом и кручением. Поведение экспериментальных образцов подтвердило, что балки при изгибе и кручении имеют значительные резервы несущей способности по сравнению прочностными характеристиками стали на стадии упругости. Поскольку эксперимент проводится в стадии упругости, углы поворота практически одинаковы для всех трех методов. В дополнение к результатам эксперимента, численные расчеты обычно используются в качестве сравнения в процедурах инженерного проектирования, поскольку они позволяют применить более широкий диапазон параметров процедуры инженерного проектирования балок при комбинированном нагружении.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном исследовании была представлена гипотеза поведения тонкостенных конструкций с ограниченным кручением рамных конструкций в связи с необходимостью учета поведения деформации тонкостенных сечений с ограниченным кручением, важность свойств сечения для моделирования тонкостенной балки с ограниченным кручением, поведение при искривлении открытых и закрытых тонкостенных сечений с ограниченным кручением, важность свойств сечения для поведения при искривлении, конечно-элементный анализ трехмерной тонкостенной балки с ограниченным кручением и моделирование тонкостенных элементов с ограниченным кручением с учетом свойств сечения. На основании проведенного исследования можно сделать следующие выводы:

1. Напряженно-деформированное состояние стержней под действием равномерного и стесненного кручения, а также деформация их сечений зависит от формы сечения. Деформации не подвержены круговые, квадратные, уголки и крестообразные сечения.
2. Установлено, что для определения деформации замкнутых сечений необходимо учитывать секториальный статический момент. Продольные деформации таких стержней зависят от нормальных и касательных напряжений, а также вида функции деформации.
3. Влияние деформации и изменение жесткости поперечного сечения по длине балки приводит к изменению изгибно-крутильной характеристики  $\theta$ , что соответствует неоднородному кручению. При значении  $\theta$  более 10 общий крутящий момент наблюдается на небольшой длине балки вблизи опоры. При  $\theta = 1$  компоненты общего крутящего момента распространяются по всей длине балки, и его величина изменяется постепенно. Малое значение  $\theta$  характерно для открытых сечений. С увеличением значения изгибно-крутильной характеристики  $M_{\text{тр}}$  быстро уменьшается, а момент чистого кручения составляет большую часть крутящего момента.
4. Для замкнутых тонкостенных сечений угол поворота и деформация незначительны. Однако, как показывают исследования, эффект деформации необходимо учитывать в случае неравномерного кручения балок замкнутого сечения.
5. Для построения подматрицы жесткости, отвечающей кручению тонкостенных стержней, в работе использованы гиперболическая и полиномиальная функции

- формы. Обе функции дают близкие результаты для малых значений  $\theta$ , что характерно для открытых тонкостенных сечений. Так, при  $\theta = 1$  и  $\theta = 2$  погрешность составляет 6,7 и 9,7 %, соответственно.
6. Угол закручивания при неравномерном кручении двутаврового сечения, прямоугольной трубы и швеллера отличается от равномерного кручения тех же сечений на 50%, 1,8% и 41%, соответственно.
  7. Если поперечное сечение стержня зашцемено, нормальные напряжения преобладают у опоры, при этом касательные напряжения очень малы и исчезают, когда нормальное напряжение достигает максимума. В противоположность этому, на свободном конце преобладают касательные напряжения, максимальные значения которых находится в серединах полок. Для замкнутых сечений касательные напряжения существенно ниже, чем для открытых.
  8. Получена матрица жесткости для пространственных стержневых элементов тонкостенного сечения, учитывающая стесненное кручение путем введения дополнительной степени свободы в узле. Использование данной матрицы дает возможность выполнять уточненный прочностной расчет балочных элементов, подвергающихся кручению с изгибом. Данная матрица имеет размерность 14x14 и позволяет получить точные результаты расчета для открытых тонкостенных сечений, обладающих малым значением числа  $\theta$ . В качестве интерполирующих функций использовались тригонометрические и полиномиальные функции.
  9. Проведено сравнение результатов, полученных по предложенной автором методике, с экспериментальными данными, а также с результатами расчетов, выполненных с использованием сертифицированных программных комплексов. В ходе экспериментов исследовался характер деформирования балки двутаврового сечения под действием кручения с изгибом. Хорошая согласованность результатов подтверждает достоверность предлагаемого автором метода.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белый Г.И. К расчету на устойчивость стержневых элементов конструкций из тонкостенных холодногнутых профилей // Вестник гражданских инженеров. 2016. Vol. № 3, № 56. P. 46–51.
2. Ададунов Р. А. Определение касательных напряжений в тонкостенных конструкциях вблизи заделки // Труды ЦАГИ. 1947. № 614. С. 1-13.
3. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. 568 с.
4. Тимошенко С.П. Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки // Известия СПб Политехнического института. Т. Vol. IV—V. P. С. 1905–1906.
5. Тимошенко С.П. История науки о сопротивлении материалов: С краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений: пер. с англ. // Под ред. А.Н. Митинского. Изд. 2-е, стереотипное. М.: КомКнига. 2006. 536с р.
6. Горбунов Б. Н., Стрельбицкая А. И. Теория рам из тонкостенных стержней. М.: Гостехиздат, 1948. 198 с
7. Гордеева А. О., Ватин Н. И. Расчетная конечно-элементная модель холодногнутого перфорированного тонкостенного стержня в программно-вычислительном комплексе SCAD Office // Инженерностроительный журнал. 2011. №3(21). С. 36-46
8. Дьяков И. Ф., Чернов С. А. К расчету оболочки, укрепленной тонкостенными стержнями // Автоматизация современные технологии: ежемесячный межотраслевой научно-технический журнал. 2008. №1. С. 16-20
9. Бондарь В.С. et al. Moscow State University of Mechanical Engineering (MAMI ),. 2014. P. 125–152.
10. Bondar V.S., Danshin V.V., Semenov P.V. Numerical modeling of nonlinear processes of damage accumulation due to cyclic loading // Comput. Contin. Mech. 2013. Vol. 6, № 3. P. 286–291.
11. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.: Гостехиздат, 1949. 784 с. р.
12. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни: Прочность, устойчивость, колебания. Москва, Ленинград: Государственное издательство строительной литературы, 1940. 276 с р.
13. Власов В.З. Кручение и устойчивость тонкостенных открытых профилей. Строительная промышленность, 1938. Vol. № 6. № 7. P. С. 49–53; С. 55–60.
14. Бычков Д.В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций. М.: Госстройиздат, 1962. 476 с. р.
15. Альхименко А. И., Ватин Н. И., Рыбаков В. А. Технология легких стальных

тонкостенных конструкций. СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. 27с.

16. Шатов Д.С. Конечноэлементное моделирование перфорированных стоек открытого сечения из холодногнутых профилей // Инженерно-строительный журнал. 2011. Vol. 3. P. 32–36.
17. В. В. Юрченко. Проектирование каркасов зданий из тонкостенных холодногнутых профилей в среде «SCAD Office» // Инженерно-строительный журнал. 2010. Vol. 8. P. 38–46.
18. Рыбаков В.А. Основы строительной механики легких стальных тонкостенных конструкций // Издво СПбГПУ. 2011. 2011. Vol. 0, № 0. 207 p.
19. Синельников А.С. Прочность просечно - растяжного профиля // Инженерно-строительный журнал. 2015. Vol. 5. P. 74–85.
20. Серпик И., Школяренко Р. расчет систем тонкостенных стержней корытообразного профиля с учетом стесненного кручения // Теория инженерных сооружений. Строительные конструкции. 2018. Vol. 4, № 78. P. 31–41.
21. Бейлин Е. А. Элементы теории кручения тонкостенных стержней произвольного профиля – С.Пб: Изд-во СПбГАСУ, 2003. 113 с..
22. Корсун Н., Простакишина Д. Анализ НДС составного сечения из тонкостенных профилей с учетом начальных геометрических несовершенств // Строительные науки. 2018. Vol. 4. P. 83–88.
23. Белый Г. И. Расчет упругопластических тонкостенных стержней по пространственно-деформируемой схеме // Межвуз. темат. сб. тр. 1983. №42 (Строительная механика сооружений). С. 40-48.
24. Данилов А., Туснина О. экспериментально-теоретические исследования напряженно-деформированного состояния прогона покрытия из сэндвич-панелей. 2014. P. 26–36.
25. Ватин Н. И., Попова Е. Н. Термопрофиль в легких стальных тонкостенных конструкциях. СПб.:Изд-во Политехн. ун-та, 2006. 63с.
26. Tusnin A.R., Prokic M. Behavior of symmetric steel I-sections under combined bending and torsion actions allowing for plastic deformations // Mag. Civ. Eng. 2014. Vol. 49, № 5.
27. Недвига П.Н. Рыбаков В. А. ,Эмпирические методы оценки несущей способности стальных тонкостенных просечно - перфорированных балок и балок со сплошной стенкой. // Инженерно-строительный журнал. 2009. P. 27–30.
28. Ветюков Ю. М., Елисеев В. В. Упругие деформации и устойчивость равновесия тонкостенных стержней открытого профиля // Научно-

- технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. 2007. № 52-1. С. 49-53
29. Воробьев Л. Н. Деформационный расчет и устойчивость тонкостенных стержней открытого профиля // Сб.научн.тр. Новочеркасского политехнического института. 1958. Том 69/83. С.3-48.
  30. Горбунов Б. Н., Стрельбицкая А. И. Теория рам из тонкостенных стержней. М.: Гостехиздат, 1948. 198 с
  31. Гордеева А.О., Ватин Н.И. Расчетная конечно-элементная модель холодногнутого перфорированного тонкостенного стержня в программно-вычислительном комплексе SCAD Office // Инженерностроительный журнал. 2011. №3(21). С. 36-46
  32. Гуркова М. А. Кручение тонкостенного стержня открытого и замкнутого профиля и автоматизация процесса расчета / дисс. на соиск. учен. степ. к.т.н., Спец.: 05.23.17. М., 2000. 168 с
  33. Джанелидзе Г. Ю., Пановко Я. Г. Статика упругих тонкостенных стержней. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. 208 с
  34. Дьяков С. Ф., Лалин В. В. Построение и анализ конечных элементов тонкостенного стержня открытого профиля с учетом деформации сдвига при кручении // Вестник Пермского государственного технического университета. Охрана окружающей среды, транспорт, безопасность жизнедеятельности. 2014, №. 1, с. 130-148
  35. Егоров В. В. Свободные колебания тонкостенных криволинейных стержней произвольного профиля, нагруженных параметрической нагрузкой / дисс. на соиск. учен. степ. к.т.н., Спец.: 05.23.17. СПб, 2001. 127 с
  36. Жмарин Е. Н., Рыбаков В. А. ЛСТК – инструмент для реализации программы «Доступное и комфортное жилье» // Журнал «СтройПРОФИль». 2007. № 6(60), № 7(61). С. 166-167
  37. Туснин А.Р., Прокич М. прочность двутавровых профилей при стесненном кручении с учетом развития пластических деформаций. // Проектирование и конструирование строительных систем. Проблемы механики в строительстве 2014, №. 1, с. 75—82.
  38. Wang Z.-Q., Zhao J.-C. Restrained Torsion of Thin-Walled Beams // J. Struct. Eng. 2014. Vol. 140, № 11. P. 04014089.
  39. Liping W., Ben Young M.A. Restrained Torsion of Thin-Walled Beams // ASCE J. Struct. Eng. 2007. Vol. 1, № June. P. 1–18.
  40. Gonçalves R., Camotim D. On the first-order and buckling behaviour of thin  $\square$

- walled regular polygonal tubes. 2016. Vol. 9, № 4. P. 279–290.
41. Иванов В. Н. Геометрические исследования, формообразование, разработка методов расчета и численный анализ напряженно-деформированного состояния тонкостенных оболочек сложной формы с системой плоских координатных линий / дисс. на соиск. учен. степ. д.т.н., Спец.: 05.23.17. Москва, 2006. 394 с
  42. Trubina, D., Abdulaev, D., Pichugin, E., Garifullin, M. The Loss of Local Stability of Thin-Walled Steel Profiles. *Applied Mechanics and Materials*. 2014. 633–634. Pp. 1052–1057.
  43. Гебре Т. Х. Выбор сечения стального элемента, подлежащего изгибу с кручением. Регистрация Программа для ЭВМ №:2021666160.01.10.2021г., 2021.
  44. Катранов И. Г. Испытания и расчет винтовых соединений легких стальных тонкостенных конструкций на растяжение // Вестник МГСУ. 2010. № 2. С. 89-93
  45. Константинов И. А. Лалин В. В., Лалина И. И. Строительная механика: учебник Санкт-Петербургский государственный политехнический университет. 2010. 425с.
  46. Кузьменко Д. В., Ватин Н. И. Ограждающая конструкция «нулевой» толщины – термопанель // Инженерностроительный журнал. 2008. №1. С.13-21.
  47. Floros M.W., Smith E.C. Finite element modeling of open-section composite beams with warping restraint effects // *AIAA J*. 1997. Vol. 35, № 8. P. 1341–1347.
  48. Кузьмин Н. А., Лукаш П. А., Милейковский И. Е. Расчет конструкций из тонкостенных стержней и оболочек. М.: Госстройиздат, 1960. 264 с
  49. Debski H., Kubiak T., Teter A. Buckling and postbuckling behaviour of thin-walled composite channel section column // *Compos. Struct*. 2013. Vol. 100. P. 195–204.
  50. Debski H., Jonak J. Failure analysis of thin-walled composite channel section columns // *Compos. Struct*. 2015. Vol. 132. P. 567–574.
  51. Chiew, S.P., Lee, C.K., Jin, Y.F., Cai, Y.Q. Impact of Structural Eurocodes on steel and composite structures // *IES J. Part A Civ. Struct. Eng. Taylor & Francis*, 2014. Vol. 7, № 1. P. 1–10.
  52. Timakul P., Rattanaprasit W., Aungkavattana P. Improving compressive strength of fly ash-based geopolymers by basalt fibers addition // *Ceram. Int*. Elsevier, 2016. Vol. 42, № 5. P. 6288–6295.
  53. Carrera E., Pagani A., Banerjee J.R. Linearized buckling analysis of isotropic and composite beam-columns by Carrera Unified Formulation and dynamic stiffness



- method // *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2016. Vol. 23, № 9. P. 1092–1103.
54. Куражова В. Г., Назмеева Т. В. Виды узловых соединений в легких стальных тонкостенных конструкциях // *Инженерно-строительный журнал.* 2011. №3(21). С. 47-52
  55. Куц А. С., Рыбаков В. А. Обоснование конструктивных и технологических решений при реконструкции зданий старого фонда с надстройкой мансард // XXXVIII Неделя науки СПбГПУ: материалы международной научно-практической конференции. Ч.1. 2009. С. 210-211.
  56. Лалин В. В., Колосова Г. С. Численные методы в строительстве. Решение одномерных задач методом конечных элементов: Учеб.пособие; СПбГТУ . Санкт-Петербург. Изд-во СПбГТУ, 2001. 72 с.
  57. Лалин В. В., Рыбаков В. А. Конечные элементы для расчета ограждающих конструкций из тонкостенных профилей // *Инженерно-строительный журнал.* 2011. №8(26). С. 69-80
  58. Лалин В. В., Колосова Г. С. Курс лекций по теории упругости: учеб. пособие; Санкт-Петербургский государственный политехнический университет. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. 135 с
  59. Туснин А. Р. Расчет и проектирование конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля / автореферат на соиск. учен. степ. к.т.н. Спец.: 05.23.01. М., 2004. 37 с
  60. Малинин М. Ю. Исследование напряженно-деформированного состояния пространственных тонкостенных конструкций сложной геометрии методом конечных элементов / дисс. на соиск. учен. степ.к.т.н. Спец.:01.02.04. Брежнев, 1984. 153 с.
  61. Мещеряков В. Б. О кручении тонкостенных стержней // *Сб. научн. тр. Моск. ин-т. инж. ж-д. тр-та.* 1967. Вып.236. С.77-85.
  62. Saadé K., Espion B., Warzée G. Non-uniform torsional behavior and stability of thin-walled elastic beams with arbitrary cross sections // *Thin-Walled Struct.* 2004. Vol. 42, № 6. P. 857–881.
  63. Назмеева Т. В. Обеспечение пространственной жесткости покрытия в зданиях из ЛСТК // *Инженерностроительный журнал.* 2009. №6(8). С. 12-15.
  64. Petrolo A.S., Casciaro R. 3D beam element based on Saint Venant's rod theory // *Comput. Struct.* 2004. Vol. 82, № 29–30. P. 2471–2481.
  65. El Fatmi R. Non-uniform warping including the effects of torsion and shear forces. Part I: A general beam theory // *Int. J. Solids Struct.* 2007. Vol. 44, № 18–19. P. 5912–5929.
  66. Никольчак М. В., Беженар И. С., Рыбаков В. А. Обоснование

- целесообразности применения технологии легких стальных тонкостенных конструкций в коттеджном строительстве // XXXVIII Неделя науки СПбГПУ: материалы международной научно-практической конференции. 2009. Ч.1. С.219.
67. Chatzis E., Triantafyllou S., Koumousis V. A thin walled beam element formulation for the non uniform torsion and distortion of closed sections. P. 505–514.
  68. Туснин А.Р. Т.О.А. Вычислительная система «Сталькон» для расчета и проектирования стержневых конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля // Промышленное и гражданское строительство. 2012. Vol. 8. P. 62–62.
  69. Бычков Д.В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций. М.: Госстройиздат, 1962. 476 с .
  70. Бычков Д.В. Расчет балочных и рамных стержневых систем из тонкостенных элементов. 208 с р.
  71. Туснин А.Р. Построение матрицы жесткости в общей системе координат при использовании тонкостенного конечного элемента // Компьютерное моделирование и проектирование пространственных конструкций: Тезисы докладов научной сессии.- М., 2001.- С.75-76.
  72. Перельмутер А. В., Сливкер В. И. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2010. Том 1. 704 с.
  73. Смазнов Д. Н. Устойчивость при сжатии составных колонн, выполненных из профилей из высокопрочной стали // Инженерно-строительный журнал. 2009. №3(5). С. 42-49.
  74. Vatin N.I., Gebre T.H., Gebreslassie S.B. The trends and practical look of advanced steel frame structures // Struct. Mech. Eng. Constr. Build. 2020. Vol. 16, № 3. P. 203–208.
  75. Qi H., Wang Z., Zhang Z. An Efficient Finite Element for Restrained Torsion of Thin-Walled Beams Including the Effect of Warping and Shear Deformation // IOP Conf. Ser. Earth Environ. Sci. 2019. Vol. 233, № 3.
  76. Sapountzakis E.J., Tsipiras V.J., Argyridi A.K. Torsional vibration analysis of bars including secondary torsional shear deformation effect by the boundary element method // J. Sound Vib. Elsevier, 2015. Vol. 355. P. 208–231.
  77. Sapountzakis E.J. Bars under Torsional Loading: A Generalized Beam Theory Approach // ISRN Civ. Eng. 2013. Vol. 2013. P. 1–39.
  78. Mohareb M., Nowzartash F. Exact finite element for nonuniform torsion of open sections // J. Struct. Eng. 2003. Vol. 129, № 2. P. 215–223.
  79. Ádány S. Constrained shell Finite Element Method for thin-walled members, Part

- 1: constraints for a single band of finite elements // *Thin-Walled Struct.* 2018. Vol. 128. P. 43–55.
80. Хайруллин Ф. С. Вариационные методы расчета тонкостенных конструкций сложной формы на основе аппроксимирующих функций произвольного порядка с конечными носителями / дисс. на соиск учен. степ. ф-м. наук. Спец.: 01.02.04. Казань, 2007. 267 с
  81. Duan L., Zhao J. A geometrically exact cross-section deformable thin-walled beam finite element based on generalized beam theory // *Comput. Struct.* 2019. Vol. 218. P. 32–59.
  82. Aminbaghai M. et al. Torsional warping elastostatic analysis of FGM beams with longitudinally varying material properties // *Eng. Struct.* Elsevier, 2019. Vol. 200, № P. 109694.
  83. Pavazza R., Matoković A. Bending of thin-walled beams of open section with influence of shear, part I: Theory // *Thin-Walled Struct.* 2017. Vol. 116, № April. P. 357–368.
  84. Murin J. et al. Second-order torsional warping modal analysis of thin-walled beams (COMPDYN 2017) // *COMPDYN 2017 - Proc. 6th Int. Conf. Comput. Methods Struct. Dyn. Earthq. Eng.* 2017. Vol. 1. P. 1–19.
  85. Emre Erkmen R., Mohareb M. Torsion analysis of thin-walled beams including shear deformation effects // *Thin-Walled Struct.* 2006. Vol. 44, № 10. P. 1096–1108.
  86. Wang Z.Q., Zhao J.C., Gong J.H. A new torsion element of thin-walled beams including shear deformation // *Appl. Mech. Mater.* 2011. Vol. 94–96. P. 1642–1645.
  87. Wang Z.Q. et al. Restrained torsion of open thin-walled beams including shear deformation effects // *J. Zhejiang Univ. Sci. A.* 2012. Vol. 13, № 4. P. 260–273.
  88. Schulz B.M., Filippou F.C., Member Z.A. z = o. 1998. № March. P. 339–347.
  89. Derler C., Unterweger H. Effects of warping torsion on the buckling behaviour of slender box sections // *Ce/Papers.* 2021. Vol. 4, № 2–4. P. 2173–2182.
  90. Murin J. et al. Numerical analysis and measurement of non-uniform torsion // *Civil-Comp Proc.* 2012. Vol. 99. P. 1–18.
  91. Sapountzakis E.J., Dikaros I.C. Advanced 3-D beam element including warping and distortional effects for the analysis of spatial framed structures // *Eng. Struct.* Elsevier, 2019. Vol. 188, № March. P. 147–164.
  92. El Fatmi R., Zenzri H. On the structural behavior and the Saint Venant solution in the exact beam theory: Application to laminated composite beams // *Comput. Struct.* 2002. Vol. 80, № 16–17. P. 1441–1456.
  93. Latalski J., Zulli D. Generalized beam theory for thin-walled beams with curvilinear

- open cross-sections // *Appl. Sci.* 2020. Vol. 10, № 21. P. 1–18.
94. Li X. et al. Finite beam element with exact shape functions for torsional analysis in thin-walled single- or multi-cell box girders // *J. Constr. Steel Res.* Elsevier Ltd, 2020. Vol. 172. P. 106189.
  95. Gebre T.H., Galishnikova V. V. The impact of section properties on thin walled beam sections with restrained torsion // *J. Phys. Conf. Ser.* 2020. Vol. 1687, № 1.
  96. Pavlenko A.D. et al. Non-uniform torsion of thin-walled open-section multi-span beams // *Mag. Civ. Eng.* 2016. Vol. 67, № 7. P. 55–69.
  97. American Institute of Steel Construction. *Steel Construction Manual* 13th Edition. 2005. P. 2181.
  98. Al-Mashary F., Fah Chen W. Elastic second-order analysis for frame design // *J. Constr. Steel Res.* 1990. Vol. 15, № 4. P. 303–322.
  99. Dewobroto W., Hidayat L., Yeltsin. A chart-based method for steel beam designs using the Indonesian section // *Procedia Eng.* Elsevier B.V., 2015. Vol. 125. P. 857–864.
  100. Toğay O., Slein R., White D.W. Application of inelastic buckling analysis for design assessment of frames using nonprismatic I-section members // *Struct. Stab. Res. Counc. Annu. Stab. Conf.* 2019, SSRC 2019. 2019. Vol. 1, № November. P. 91–110.
  101. Subramanian L., White D.W. Reassessment of the Lateral Torsional Buckling Resistance of I-Section Members: Uniform-Moment Studies // *J. Struct. Eng.* 2017. Vol. 143, № 3. P. 04016194.
  102. Analysis I. *Advanced Analysis in Steel Frame Design* // *Advanced Analysis in Steel Frame Design.* 2013.
  103. Salmon C.G., E.Johnson J., A.Malh F. *Steel Structures: Design and Behaviour: Emphasizing Load and Resistance Factor Design.* 2009.
  104. AISC-360-10. *Specification for structural steel buildings.* Chicago: American Institute of Steel Construction (AISC); 2010
  105. Surla A.S., Yong S., Juan J.V.S. A Comparison Study on Lateral Torsional Buckling of Monosymmetric Stepped I-beams Using Finite Element Method , AISC , AS4100 and EC3. 2013.
  106. Yong D.J., López A., Serna M.A. A comparative study of AISC-LRFD and EC3 approaches to beam-column buckling resistance // *Proc. Int. Colloq. Stab. Ductility Steel Struct. SDSS* 2006. 2006. № January 2006. P. 1109–1116.
  107. Claudio Bernuzzi B.C. *Structural Steel Design to Eurocode 3 and AISC Specifications.* 2016. 536 p.
  108. Gebre T.H., Lebed E.V., Galishnikova V.V. Comparative study of the AISC-LRFD,

- Eurocode 3 & SP 16.13330.2017 steel members design // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019. Vol. 675, № 1.
109. White D.W. et al. Stability Analysis and Design of Steel Building Frames Using the 2005 AISC Specification // *Steel Struct.* 2006. Vol. 6. P. 71–91.
  110. Galishnikova V. V, Gebre T.H. A comparative study of beam design curves against lateral torsional buckling using AISC, EC and SP // *Struct. Mech. Eng. Constr. Build.* 2019. Vol. 15, № 1. P. 25–32.
  111. White D.W. et al. Stability Analysis and Design of Steel Building Frames Using the 2005 AISC Specification. 2006. № September 2016.
  112. AISC-LRFD. Load and resistance factor design specification for structural steel build- ings. Chicago: American Institute of Steel Construction (AISC); 1993
  113. Bernuzzi C., Cordova B., Simoncelli M. Unbraced steel frame design according to EC3 and AISC provisions // *J. Constr. Steel Res.* Elsevier Ltd, 2015. Vol. 114. P. 157–177.
  114. Arrayago I., Real E., Gardner L. Description of stress–strain curves for stainless steel alloys // *Mater. Des.* 2015. Vol. 87. P. 540–552.
  115. Chen W.F. Toward practical advanced analysis for steel frame design // *Struct. Eng. Int. J. Int. Assoc. Bridg. Struct. Eng.* 2009. Vol. 19, № 3. P. 234–239.
  116. Chen W.F., Kim S.E. Design of Steel Structures with LRFD Using Advanced Analysis // *Stab. Ductility Steel Struct.* 1998. № 1. P. 153–166.
  117. Kim S.E., Choi S.H. Practical advanced analysis for semi-rigid space frames // *Int. J. Solids Struct.* 2001. Vol. 38, № 50–51. P. 9111–9131.
  118. Yang Y. Bin, Yau J.D., Leu L.J. Recent developments in geometrically nonlinear and postbuckling analysis of framed structures // *Appl. Mech. Rev.* 2003. Vol. 56, № 4. P. 431–449.
  119. Vimonsatit V., Tangaramvong S., Tin-Loi F. Second-order elastoplastic analysis of semirigid steel frames under cyclic loading // *Eng. Struct.* Elsevier Ltd, 2012. Vol. 45. P. 127–136.
  120. Thai H.T., Kim S.E. Practical advanced analysis software for nonlinear inelastic analysis of space steel structures // *Adv. Eng. Softw.* Elsevier Ltd, 2009. Vol. 40, № 9. P. 786–797.
  121. Silvestre N., Camotim D. Second-order generalised beam theory for arbitrary orthotropic materials // *Thin-Walled Struct.* 2002. Vol. 40, № 9. P. 791–820.
  122. Rezaiee-Pajand M., Gharaei-Moghaddam N. Frame nonlinear analysis by force method // *Int. J. Steel Struct.* 2017. Vol. 17, № 2. P. 609–629.
  123. Park S., Yeo D. Second-Order Effects on Wind-Induced Structural Behavior of High-Rise Steel Buildings // *J. Struct. Eng.* 2018. Vol. 144, № 2. P. 04017209.

124. Nguyen P.C., Kim S.E. An advanced analysis method for three-dimensional steel frames with semi-rigid connections // *Finite Elem. Anal. Des.* Elsevier, 2014. Vol. 80. P. 23–32.
125. Neuenhofer A., Filippou F.C. Geometrically Nonlinear Flexibility-Based Frame Finite Element // *J. Struct. Eng.* 1998. Vol. 124, № 6. P. 704–711.
126. Kim S.E., Park M.H., Choi S.H. Direct design of three-dimensional frames using practical advanced analysis // *Eng. Struct.* 2001. Vol. 23, № 11. P. 1491–1502.
127. Туснин А. Р. Расчет и проектирование конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля / автореферат на соиск. учен. степ. к.т.н. Спец.: 05.23.01. М., 2004. 37 с. Al-Bermani F.G.A., Kitipornchai S. Elasto-plastic large deformation analysis of thin-walled structures // *Eng. Struct.* 1990. Vol. 12, № 1. P. 28–36.
129. Alsafadie R., Hjiiaj M., Battini J.M. Three-dimensional formulation of a mixed corotational thin-walled beam element incorporating shear and warping deformation // *Thin-Walled Struct.* Elsevier, 2011. Vol. 49, № 4. P. 523–533.
130. Синельщиков А. В., Юзиков В. П. // Математическая модель тонкостенного стержневого конечного элемента с прямолинейной осью и переменным сечением // *Промышленное и гражданское строительство (ПГС)*. 2007 .№9 .С. 19-21
131. Осокин А. В. Развитие метода конечных элементов для расчета систем, включающих тонкостенные стержни открытого профиля / дисс. на соиск. учен. степ. к.т.н. Спец.: 05.23.17. М., 2010. 134 с.
132. Мещеряков В. Б. Общие уравнения теории тонкостенных стержней открытого профиля с учетом сдвигов // *Сб. научн. тр. Моск. ин-т. инж. ж-д. тр-та*. 1967. Вып.236. С.77-85
133. Лалин В. В., Колосова Г. С. Курс лекций по теории упругости: учеб. пособие; Санкт-Петербургский государственный политехнический университет. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. 135 с
134. Pavazza R. Torsion of thin-walled beams of open cross-section with influence of shear // *Int. J. Mech. Sci.* 2005. Vol. 47, № 7. P. 1099–1122.
135. Murín J. et al. 3D beam finite element including nonuniform torsion // *Procedia Eng.* 2012. Vol. 48, № July. P. 436–444.
136. Hjiiaj M.A. Axial Static Force Effect on Coupled Torsional-Warping Vibration for Thin- Journal of Engineering papers Axial Static Force Effect on Coupled Torsional-Warping Vibration for Thin-Walled I-Beams Subjected to Harmonic Torsional Moments. 2018. № February.
137. Murín J. et al. Extension of the FGM beam finite element by warping torsion //

- Stroj. Cas. 2019. Vol. 69, № 2. P. 57–76.
138. Ritchie S.J.K., Leever P.S. Non-uniform and dynamic torsion of elastic beams. Part 1: Governing equations and particular solutions // J. Strain Anal. Eng. Des. 1999. Vol. 34, № 5. P. 303–311.
  139. Banić D., Turkalj G., Brnić J. Finite element stress analysis of elastic beams under non-uniform torsion // Trans. Famena. 2016. Vol. 40, № 2. P. 71–82.
  140. Дьяков С. Ф., Лалин В. В. Построение и анализ конечных элементов тонкостенного стресса открытого профиля с учетом деформации сдвига при кручении // Вестник Пермского государственного технического университета. Охрана окружающей среды, транспорт, безопасность жизнедеятельности. 2011. № 2. С. 130-148.
  141. Gebre T., Galishnikova V., Tupikova E. Warping Behavior of Open and Closed Thin- Walled Sections with Restrained Torsion. 2022. Vol. 30, № 1.
  142. Murín J. et al. Effect of non-uniform torsion on elastostatics of a frame of hollow rectangular cross-section // Stroj. Cas. 2018. Vol. 68, № 2. P. 35–52.
  143. Tsipiras V.J., Sapountzakis E.J. Bars under nonuniform torsion - Application to steel bars, assessment of EC3 guidelines // Eng. Struct. Elsevier Ltd, 2014. Vol. 60. P. 133–147.
  144. Tsipiras V.J., Sapountzakis E.J. Secondary torsional moment deformation effect in inelastic nonuniform torsion of bars of doubly symmetric cross section by BEM // Int. J. Non. Linear. Mech. Elsevier, 2012. Vol. 47, № 4. P. 68–84.
  145. Gunnlaugsson G.A., Pedersen P.T. A finite element formulation for beams with thin walled cross-sections // Comput. Struct. Pergamon Press Limited, 1982. Vol. 15, № 6. P. 691–699.
  146. Murín J. et al. A new 3D Timoshenko finite beam element including non-uniform torsion of open and closed cross sections // Eng. Struct. 2014. Vol. 59. P. 153–160.
  147. Vatin N. et al. Thin-Walled Cross-Sections and their Joints : Tests and FEM-Modelling Thin-walled cross-sections and their joints : tests and FEM-modelling. 2014. № June.
  148. Kim J.H., Kim Y.Y. One-dimensional analysis of thin-walled closed beams having general cross-sections // Int. J. Numer. Methods Eng. 2000. Vol. 49, № 5. P. 653–668.
  149. Galishnikova V., Gebre T.H. The behaviour of thin-walled beam with restrained torsion // Mag. Civ. Eng. 2022. Vol. 110, № 2.
  150. Bischoff M., Ramm E., Irslinger J. Models and Finite Elements for Thin-Walled Structures // Encyclopedia of Computational Mechanics Second Edition. 2017. P. 1–86.

151. Cai J. Obtaining the modal participation of displacements, stresses, and strain energy in shell finite-element eigen-buckling solutions of thin-walled structural members via Generalized Beam Theory // *Thin-Walled Struct.* Elsevier Ltd, 2019. Vol. 134, № June 2018. P. 148–158.
152. Vieira R.F., Virtuoso F.B.E., Pereira E.B.R. A higher order thin-walled beam model including warping and shear modes // *Int. J. Mech. Sci.* Elsevier, 2013. Vol. 66. P. 67–82.
153. Pavazza R., Vlak F., Vukasović M. Short Steel Thin-walled Columns Subjected to Eccentric Axial Loads // *Procedia Eng.* 2016. Vol. 161. P. 349–355.
154. Fujitani Y., Fujii D. A structural analysis method of framed structures with thin-walled open section members based on the bending-torsional theory of beams. 1998. P. 1–10.
155. Гуркова М. А. Кручение тонкостенного стержня открытого и замкнутого профиля и автоматизация процесса расчета / дисс. на соиск. учен. степ. к.т.н., Спец.: 05.23.17. М., 2000. 168 с
156. Machado S.P. Non-linear buckling and postbuckling behavior of thin-walled beams considering shear deformation // *Int. J. Non. Linear. Mech.* 2008. Vol. 43, № 5. P. 345–365.
157. Xiao-Feng W., Qi-Lin Z., Qing-Shan Y. A new finite element of spatial thin-walled beams // *Appl. Math. Mech. (English Ed.)* 2010. Vol. 31, № 9. P. 1141–1152.
158. Hjadi M.A., Mohareb M. Coupled flexural-torsional response of harmonically excited mono-symmetric thin-walled vlasov beams-II. finite element solution // *Proceedings, Annu. Conf. - Can. Soc. Civ. Eng.* 2015. Vol. 3, № May 2014. P. 1729–1739.
159. Ruta G.C. et al. A beam model for the flexural-torsional buckling of thin-walled members with some applications // *Thin-Walled Struct.* 2008. Vol. 46, № 7–9. P. 816–822.
160. Yu C. et al. Behavior and Design of Thin-Walled Cold-Formed Steel Clip Angles Subjected to Shear Load. P. 1–9.
161. Kvaternik S., Turkalj G., Lanc D. Analysis of flexure, torsion and buckling of thinwalled frames with a focus on the joint warping behaviour // *Trans. Famena.* 2017. Vol. 41, № 4. P. 1–10.
162. Galishnikova V.V. A Theory for Space Frames with Warping Restraint at Nodes / ed. Razoumny Y.N.,Graziani F.,Guerman A.D. C.J.-M. Moscow, Russia: Univelt Inc., 2020. P. 22.
163. Ladevèze P., Sanchez P., Simmonds J.G. Beamlike (Saint-Venant) solutions for fully anisotropic elastic tubes of arbitrary closed cross section // *Int. J. Solids Struct.*



2004. Vol. 41, № 7. P. 1925–1944.
164. Horgan C.O. Recent developments concerning Saint-venant's principle: An update // *Appl. Mech. Rev.* 1989. Vol. 42, № 11. P. 295–303.
165. Шатов Д. С. Конечноэлементное моделирование перфорированных стоек открытого сечения из холодногнутых профилей // *Инженерно-строительный журнал.* 2011. №3(21). С. 32-35
166. Sapountzakis E.J. Solution of non-uniform torsion of bars by an integral equation method // *Comput. Struct.* 2000. Vol. 77, № 6. P. 659–667.
167. Sapountzakis E.J., Mokos V.G. Warping shear stresses in nonuniform torsion by BEM // *Comput. Mech.* 2003. Vol. 30, № 2. P. 131–142.
168. Galishnikova V. V et al. The design guide for space frames with or without warping restraint at nodes *The Design Guide for Space Frames with or without Warping Restraint at Nodes.* 2022. Vol. 050016, № August.
169. Синельщиков А. В., Юзиков В. П. // Математическая модель тонкостенного стержневого конечного элемента с прямолинейной осью и переменным сечением // *Промышленное и гражданское строительство (ПГС).* 2007 .№9 .С. 19-21
170. Гебре Т. Х. Расчет свойств сечения швеллерной балки тонкостенного сечения с использованием Mathcad. Moscow, Russia: Регистрация Программа для ЭВМ №:2022660841.09.07.2022г, 2022.
171. Trubina D. et al. Geometric Nonlinearity of the Thin-Walled Profile under Transverse Bending // *Appl. Mech. Mater.* 2014. Vol. 633–634. P. 1133–1139.
172. Skachkov S. V., Golotaystrova E.Y. Reliability Comparison of Trusses Made of Thin-Walled Steel Sections // *Mater. Sci. Forum.* 2018. Vol. 931. P. 280–287.
173. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. : Наука, 1969. 424 с.
174. Перельмутер А. В., Сливкер В. И. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Т.1: Общие теоремы. Устойчивость отдельных элементов механических систем. М. : СКАД СОФТ, 2010.
175. Stepan E., Salamakhin V. Моделирование узла винтового соединения тонкостенных стальных перфорированных профилей методом конечных элементов Modeling node screwing thin perforated steel profiles by finite element method. 2013. Vol. 4, № 9. P. 53–63.
176. Конечные элементы для расчета ограждающих конструкций из тонкостенных профилей. 2011.
177. Vatin N. et al. Thin-Walled Cross-Sections and their Joints : Tests and FEM-Modelling Thin-walled cross-sections and their joints : tests and FEM-modelling.

2014. № September 2015.
178. Solutions Q. Несущая способность болтовых соединений легких конструкций из холодногнутых профилей малых толщин. 2014. № 2. P. 1–10.
  179. Nicolaevich S.D. Научный журнал КубГАУ , № 67(03), 2011 года 1. 2011. Vol. 67, № 03. P. 1–14.
  180. Singeresu S. Rao. the Finite Element Method in Engineering (ISBN: 9781856176613). 2011. 754 p.
  181. Wu L., Mohareb M. Finite element formulation for shear deformable thin-walled beams // *Can. J. Civ. Eng.* 2011. Vol. 38, № 4. P. 383–392.
  182. Syllignakis S., Vosynek P. Finite Element Analysis Method Guide. 2016. P. 1–100.
  183. Lin X., Zhang Y.X., Pathak P. Finite element analysis of beams // *Nonlinear Finite Elem. Anal. Compos. Reinf. Concr. Beams.* 2020. P. 9–27.
  184. Lalin V. V. et al. Mixed finite-element method in V.I. Slivker's semi-shear thin-walled bar theory // *Mag. Civ. Eng.* 2019. Vol. 89, № 5. P. 79–93.
  185. Рыбаков В.А. Современные методы расчета металлоконструкций из тонкостенных профилей // *Стройметалл.* 2007. Vol. 2, № 2. P. 36–38.
  186. Рыбаков В.А. Надежность металлоконструкций из тонкостенных профилей // Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения // *Труды Междунар. Конф. СПб.* 2008. P. С. 292–295.
  187. Key P.W., Hancock G.J. A finite strip method for the elastic—plastic large displacement analysis of thin-walled and cold-formed steel sections // *Thin-Walled Struct.* 1993. Vol. 16, № 1–4. P. 3–29.
  188. Jin S. et al. Constrained shell finite element method of modal buckling analysis for thin-walled members with curved cross-sections // *Eng. Struct.* 2021. Vol. 240. P. 112281.
  189. Ajeesh S.S., Arul Jayachandran S. Spline finite strip analysis of thin-walled flexural members subjected to general loading with intermediate restraints // *Thin-Walled Struct.* 2021. Vol. 158. P. 107171.
  190. Bogdan P., Yong-Lin P., Trahair N.S. Bending and torsion of cold-formed channel beams // *J. Struct. Eng.* 1999. Vol. 9445, № May.
  191. Sapountzakis E.J., Tsipiras V.J., Gkesos P.G. Warping transmission in 3-D beam element including secondary torsional moment deformation effect // *ECCOMAS Spec. Interes. Conf. - SEECCM 2013 3rd South-East Eur. Conf. Comput. Mech. Proc. - An IACM Spec. Interes. Conf.* 2013. № June. P. 470–480.
  192. Askandar N.H., Mahmood A.D., Kurda R. Behaviour of RC beams strengthened with FRP strips under combined action of torsion and bending // *Eur. J. Environ.*

- Civ. Eng. Taylor & Francis, 2020. Vol. 0, № 0. P. 1–17.
193. Al-Rousan R., Abo-Msamh I. Impact of anchored CFRP on the torsional and bending behaviour of RC beams // Mag. Civ. Eng. 2020. Vol. 96, № 4. P. 79–93.
194. Ubaydulloyev M.N. Calculations of strengthened open profile thin-walled element enclosing structures // Mag. Civ. Eng. 2014. Vol. 52, № 8.
195. Jenkins W.. Structural analysis, a unified classical and matrix approach // Endeavour. 1978. Vol. 2, № 3. 149 p.
196. Aristizabal-Ochoa J.D. Matrix method for stability and second-order analysis of Timoshenko beam-column structures with semi-rigid connections // Eng. Struct. 2012. Vol. 34. P. 289–302.
197. Jafari V., Vahdani S.H., Rahimian M. Derivation of the consistent flexibility matrix for geometrically nonlinear Timoshenko frame finite element // Finite Elem. Anal. Des. Elsevier, 2010. Vol. 46, № 12. P. 1077–1085.
198. Перельмутер А. В., Сливкер В. И. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Т.1: Общие теоремы. Устойчивость отдельных элементов механических систем. М. : СКАД СОФТ, 2010. 681 с.
199. Гордеева М.А.О. Расчетная конечно - элементная модель холодногнутого перфорированного тонкостенного стержня в программно - вычислительном комплексе SCAD Office. 2011.
200. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М. : Мир, 1976. 464 с.
201. Гебре Т. Х. Конечно-элементный расчет тонкостенных конструкций с сдержанным кручением C Mathcad: 1. Москва: Программа для ЭВМ, 2022.
202. Gebre T. et al. Warping bimoment and its effect on analysis of thin-walled sections Warping Bimoment and Its Effect on Analysis of Thin- Walled Sections. 2022. Vol. 050012, № August.
203. Гебре Т. Х. Конечно-элементный анализ плоской фермы с использованием программирования на Java. Р: 1. Москва: Регистрация Программа для ЭВМ, 2022.
204. Серпик И. Н. Одноуровневые многосеточные алгоритмы решения задач строительной механики тонкостенных конструкций / дисс. на соиск. учен. степ. д.т.н. Спец.: 05.23.17. Брянск. 1999
205. Viridi K. Proceedings of the METNET Seminar 2011 in Aarhus. 2011. № October.
206. Galishnikova, V.V., & Gebre, T.H. Finite element analysis for thin-walled member subjected to combined Loading // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Vol.18, №.3. pp.65–77.
207. Quan C., Kucukler M., Gardner L. Out-of-plane stability design of steel beams by

- second-order inelastic analysis with strain limits // *Thin-Walled Struct.* Elsevier Ltd., 2021. Vol. 169, № August. P. 108352.
208. Quan C., Walport F., Gardner L. Equivalent imperfections for the out-of-plane stability design of steel beams by second-order inelastic analysis // *Eng. Struct.* Elsevier Ltd, 2022. Vol. 251. P. 113481.
209. Walter A. et al. 05.07: Structural behaviour of simple steel beams subject to axial compression, biaxial bending moments and torsion // *Ce/Papers.* 2017. Vol. 1, № 2–3. P. 1076–1085.
210. Saadé K., Warzée G., Espion B. Modeling distortional shear in thin-walled elastic beams // *Thin-Walled Struct.* 2006. Vol. 44, № 7. P. 808–821.
211. Jönsson J. Distortional theory of thin-walled beams // *Thin-Walled Struct.* 1999. Vol. 33, № 4. P. 269–303.
212. Gebre T.H., Galishnikova V.V., Lebed E.V. Tupikova E.M. Finite Element analysis of 3D thin-walled beam with restrained torsion. *Proceedings of FORM 2022, Lecture Notes in Civil Engineering* vol. 282, [https://doi.org/10.1007/978-3-031-10853-2\\_34](https://doi.org/10.1007/978-3-031-10853-2_34).
213. Гебре Т. Х. Проектирование элементов балки на изгиб с использованием Mathcad. , Регистрация Программа для ЭВМ №:2022662050.16.07.2022г., 2022.
214. Гордеева А. О., Ватин Н. И. Расчетная конечно-элементная модель холодногнутого перфорированного тонкостенного стержня в программно-вычислительном комплексе SCAD Office // *Инженерностроительный журнал.* 2011. №3(21). С. 36-46
215. Alwis W.A.M., Wang C.M. Wagner term in flexural-torsional buckling of thin-walled open-profile columns // *Eng. Struct.* 1996. Vol. 18, № 2. P. 125–132.
216. Gebre T.H., Galishnikova V. V. The impact of section properties on thin walled beam sections with restrained torsion // *J. Phys. Conf. Ser.* 2020. Vol. 1687. P. 012020.
217. Смазнов Д. Н. Конечноэлементное моделирование работы жестких вставок тонкостенных холодноформованных стальных профилей // *Научный журнал КубГАУ.* 2011. №67(03). С. 1-13
218. Bernardo D. New Finite Element for Analysis of Thin-Walled Structures // *J. Struct. Eng.* 2011. Vol. 137, № 10. P. 1153–1167.
219. Chick C., Rasmussen K.J.R. Thin-Walled Beam-Columns. II: Proportional Loading Tests // *J. Struct. Eng.* 1999. Vol. 1, № November. P. 1267–1276.
220. Murín J., Kutiš V. 3D-beam element with continuous variation of the cross-sectional area // *Comput. Struct.* 2002. Vol. 80, № 3–4. P. 329–338.

221. Jönsson J. Determination of shear stresses, warping functions and section properties of thin-walled beams using finite elements // *Comput. Struct.* 1998. Vol. 68, № 4. P. 393–410.
222. Perelmuter A., Yurchenko V. on the Issue of Structural Analysis of Spatial Systems From Thin Walled Bars With Open Profiles // *Met. Constr.* 2014. Vol. 20, № Vlasov 1940. P. 179–190.
223. Tusnin A. Finite Element for Calculation of Structures Made of Thin-Walled Open Profile Rods // *Procedia Eng. The Author(s)*, 2016. Vol. 150. P. 1673–1679.
224. Sapountzakis E.J., Mokos V.G. 3-D beam element of variable composite cross section including warping effect // *Acta Mech.* 2004. Vol. 171, № 3–4. P. 151–169.
225. Ye R. The Bi-moment Analysis for Thin-wall Component under Non-uniform Torsion // *J. Phys. Conf. Ser.* 2020. Vol. 1624, № 4.
226. Rodríguez Martín J., Deschappelles B. New Finite Element for Steel Shear Plate Analysis // *J. Eng. Mech.* 2014. Vol. 140, № 2. P. 418–425.
227. He S. et al. Damage-Plastic Constitutive Model of Thin-Walled Circular Steel Tubes for Space Structures // *J. Eng. Mech.* 2020. Vol. 146, № 12. P. 04020131.
228. Conci A. stiffness matrix for nonlinear analysis of thin-walled frames // *J. Eng. Mech.* 1993. Vol. 118, № 9. P. 1859–1875.
229. Montoya-Vargas S., Dario Aristizabal-Ochoa J. Torsion of prismatic I-beams with partially restrained warping at the end supports: Bending analogy method // *Eng. Struct.* Elsevier, 2019. Vol. 180, № November 2018. P. 621–629.
230. Гебре Т. Х. Конечно-элементный расчет тонкостенных конструкций при комбинированной нагрузке с учетом стесненного кручения с использованием Mathcad: 1. Москва, 2022. P. Программа для ЭВМ.



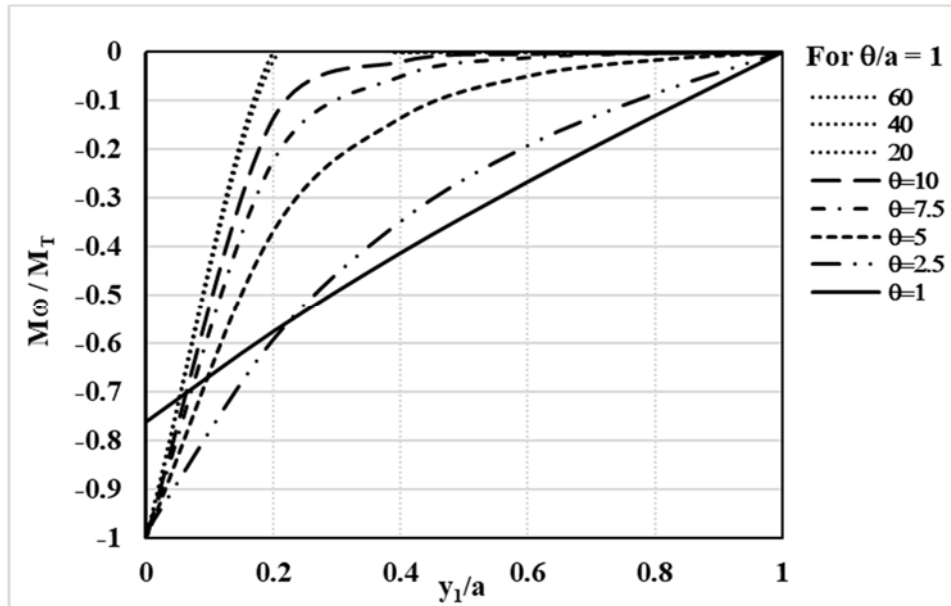


Рисунок А.1 - Изменение  $M_\omega$  для различных значений и для  $\theta/a = 1$

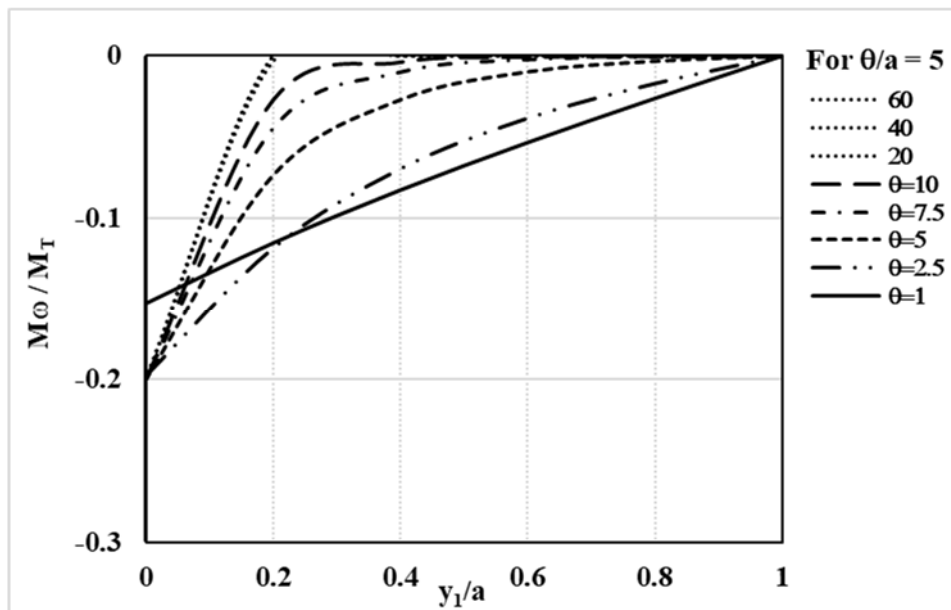


Рисунок А.2- Изменение  $M_\omega$  для различных значений и для  $\theta/a = 5$

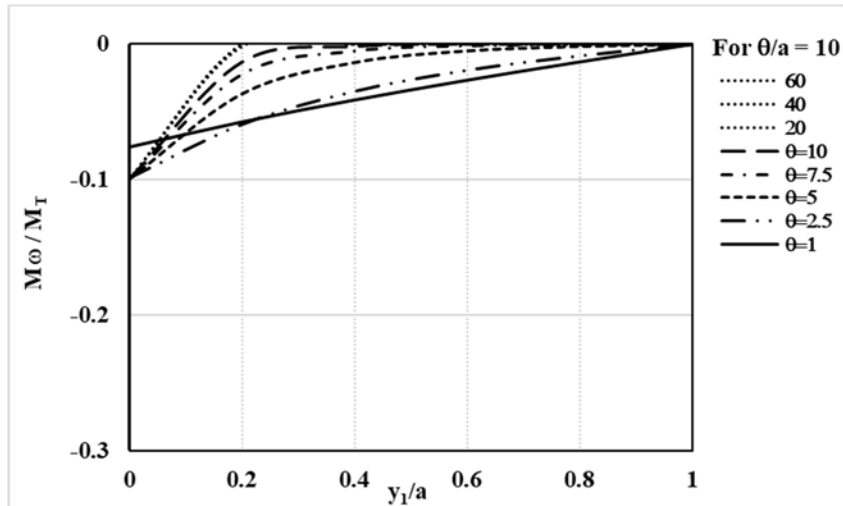
Рисунок А.3- Изменение  $M_{\omega}$  для различных значений  $\theta$  и для  $\theta/a = 5$ 

Таблица А4. Глобальные силы и моменты в каждом узле

Member	$n_{1A}$	$n_{2A}$	$n_{3A}$	$m_{1A}$	$m_{2A}$	$m_{3A}$	$n_{1B}$	$n_{2B}$	$n_{3B}$	$m_{1B}$	$m_{2B}$	$m_{3B}$
	kN	kN	kN	kN.m	kN.m	kN.m	kN	kN	kN	kN.m	kN.m	kN.m
0	74.66	0.00	58.77	0.00	106.10	0.00	-74.66	0.00	-58.77	0.00	117.88	0.00
1	4.71	53.78	62.69	-53.42	14.10	-0.07	-4.71	-53.78	-62.69	-107.93	0.04	0.07
2	15.89	0.00	31.34	0.00	47.47	0.00	-15.89	0.00	-31.34	0.00	0.21	0.00
3	4.71	-53.78	62.69	53.42	14.10	0.07	-4.71	53.78	-62.69	107.93	0.04	-0.07
4	76.40	0.00	60.59	0.00	-117.90	0.00	-76.40	0.00	-60.59	0.00	-124.46	0.00
5	4.72	52.89	64.23	108.02	-0.05	-0.09	-4.72	-52.89	-64.23	148.90	0.05	-18.80
6	17.63	0.00	31.00	0.00	-0.27	0.00	-17.63	0.00	-31.00	0.00	124.29	0.00
7	4.72	-52.89	64.23	-108.02	-0.05	0.09	-4.72	52.89	-64.23	-148.90	0.05	18.80

Таблица А5. Местные силы и моменты в каждом узле

Member	$n_{1A}$	$n_{2A}$	$n_{3A}$	$m_{1A}$	$m_{2A}$	$m_{3A}$	$n_{1B}$	$n_{2B}$	$n_{3B}$	$m_{1B}$	$m_{2B}$	$m_{3B}$
	kN	kN	kN	kN.m	kN.m	kN.m	kN	kN	kN	kN.m	kN.m	kN.m
0	74.66	58.77	0.00	0.00	0.00	-106.10	-74.66	-58.77	0.00	0.00	0.00	-117.88
1	4.71	62.69	-53.78	-53.42	-0.07	-14.10	-4.71	-62.69	53.78	-107.93	0.07	-0.04
2	15.89	31.34	0.00	0.00	0.00	-47.47	-15.89	-31.34	0.00	0.00	0.00	-0.21
3	4.71	62.69	53.78	53.42	0.07	-14.10	-4.71	-62.69	-53.78	107.93	-0.07	-0.04
4	0.00	76.40	60.59	117.90	0.00	0.00	0.00	-76.40	-60.59	124.46	0.00	0.00
5	4.72	52.89	64.23	108.02	-0.05	-0.09	-4.72	-52.89	-64.23	148.90	0.05	-18.80
6	0.00	-17.63	31.00	-0.27	0.00	0.00	0.00	17.63	-31.00	124.29	0.00	0.00
7	-4.72	52.89	64.23	108.02	0.05	0.09	4.72	-52.89	-64.23	148.90	-0.05	18.80



Таблица А6. Реакция и смещение пространственной рамы образца

Joint	Reaction						Deflection					
	F1	F2	F3	M1	M2	M3	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
	kN	kN	kN	kN.m	kN.m	kN.m	m	m	m	radian	radian	radian
1	<b>55.1</b>	<b>0.0</b>	<b>51.1</b>	<b>0.0</b>	<b>80.1</b>	<b>0.0</b>	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	<b>3.9</b>	<b>63.4</b>	<b>75.7</b>	<b>-63.3</b>	<b>11.4</b>	<b>-0.5</b>	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	<b>37.2</b>	<b>0.0</b>	<b>18.0</b>	<b>0.0</b>	<b>62.2</b>	<b>0.0</b>	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4	<b>3.9</b>	<b>-63.4</b>	<b>75.7</b>	<b>63.3</b>	<b>11.4</b>	<b>0.5</b>	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	<b>-2.6</b>	<b>0.0</b>	<b>0.0</b>	<b>0.0</b>	<b>0.2</b>	<b>0.0</b>
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	<b>-0.8</b>	<b>0.0</b>	<b>0.0</b>	<b>-0.1</b>	<b>-0.4</b>	<b>0.7</b>
7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	<b>-2.6</b>	<b>0.0</b>	<b>0.0</b>	<b>0.0</b>	<b>-0.4</b>	<b>0.0</b>
8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	<b>-0.8</b>	<b>0.0</b>	<b>0.0</b>	<b>0.1</b>	<b>-0.4</b>	<b>-0.7</b>
9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	<b>-2.6</b>	<b>0.0</b>	<b>-0.9</b>	<b>0.0</b>	<b>0.1</b>	<b>0.0</b>