

**Отзыв официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук Сахарова Сергея Игоревича
на тему: «О начально-краевых задачах для параболических систем в
плоских областях с негладкими боковыми границами»
по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и
математическая физика**

Актуальность темы

Диссертационная работа С.И. Сахарова посвящена изучению начально-краевых задач для параболических по Петровскому систем второго порядка с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини, как в полуограниченных, так и в ограниченных областях на плоскости с негладкими боковыми границами из класса Дини-Гёльдера, на которых для компонент искомых решений задаются линейные граничные условия общего вида.

В работе используются классические методы теории уравнений и систем уравнений с частными производными, математического и функционального анализа. Основным инструментом исследования рассматриваемых задач является метод параболических потенциалов (метод интегральных уравнений на границе области).

Тема диссертационной работы **актуальна**. Смешанные задачи для параболических уравнений и систем – важнейшее направление в математическом моделировании разнообразных и в первую очередь производственных процессов. Этим объясняется всеобъемлющий интерес к нахождению методов исследования и вычисления решений таких задач. Это направление науки представлено обширной библиографией научных книг и статей, а выбор темы работы С.И. Сахарова в рамках теории параболических задач обусловлена необходимостью дальнейшего развития метода потенциалов для исследования однозначной классической разрешимости начально-краевых задач для параболических систем в областях с негладкими границами. Отметим, что указанные задачи моделируют, в частности, нестационарные процессы тепло- и массопереноса в многокомпонентных материалах и, тем самым, их изучение является актуальной задачей для математического моделирования многочисленных физических и производственных процессов.

Достоверность и новизна результатов диссертации

Основным результатом диссертационной работы являются теоремы о существовании и единственности классических решений поставленных задач

из пространства вектор-функций, непрерывных и ограниченных вместе со своими пространственными производными первого порядка в замыкании области, доказанных в случае неоднородных параболических систем и ненулевых начальных вектор-функций. Кроме того, в работе исследован характер гладкости и получены интегральные представления решений в виде сумм векторных параболических потенциалов.

В диссертационной работе впервые в случае областей с боковыми границами из класса *Дини-Гёльдера* доказываются теоремы о *единственности* классических решений начально-краевых задач для параболических систем с коэффициентами, удовлетворяющими *двойному условию Дини*, с граничными условиями *общего вида с переменными коэффициентами* в пространстве вектор-функций, непрерывных и ограниченных вместе со своими пространственными производными первого порядка в замыкании области. Автор использует метод, разработанный Е.А. Бадерко при исследовании единственности решений начально-краевых задач для параболических уравнений высокого порядка со многими пространственными переменными. Ранее такой результат был получен Е.А. Бадерко и М.Ф. Череповой в частных случаях *первой и второй* начально-краевых задач для параболических систем с *гёльдеровыми* коэффициентами в *ограниченных* областях с негладкими боковыми границами из класса *Жевре*.

Далее, автором диссертации впервые в случае областей с боковыми границами из класса *Дини-Гёльдера* исследована классическая *разрешимость* начально-краевых задач для параболических систем с коэффициентами, удовлетворяющими *двойному условию Дини*, с граничными условиями *общего вида с переменными коэффициентами* и получены *интегральные представления* решений. Ранее в работах М. Зейнеддин, Е.А. Бадерко, М.Ф. Череповой при аналогичных условиях на коэффициенты параболических систем и боковые границы областей установлено существование и получены интегральные представления решений начально-краевых задач с граничными условиями *либо только первого, либо только второго рода*.

Также впервые исследуется разрешимость указанных выше задач в случае *ненулевых* начальных вектор-функций, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными первого порядка. Ранее В.А. Тверитиновым была исследована разрешимость *второй* начально-краевой задачи для параболической системы с *гёльдеровыми* коэффициентами в областях с боковыми границами из класса *Жевре* в случае начальной вектор-функции, обладающей *гёльдеровой производной* первого порядка. В упомянутых выше работах М. Зейнеддин, Е.А. Бадерко, М.Ф. Череповой установлена разрешимость *первой, второй и смешанной* начально-краевых задач для

параболических систем с коэффициентами, удовлетворяющими *двойному условию Дини*, в областях с боковыми границами из класса *Дини-Гёльдера* в случае *нулевых* начальных вектор-функций.

Автором показано, что накладываемые в работе требования на характер непрерывности боковых границ областей и правых частей граничных условий являются достаточно точными для справедливости теоремы существования решения поставленных задач из указанного выше пространства.

Отдельно отметим, что в диссертационной работе приведена новая формулировка алгебраического условия разрешимости начально-краевых задач с граничными условиями общего вида. Доказано, что условие разрешимости рассматриваемых задач в этой формулировке эквивалентно известному условию Лопатинского. Приведен пример, иллюстрирующий тот факт, что в отдельных случаях указанное выше условие может не выполняться. Кроме того, предложен алгоритм проверки выполнения этого условия в некоторых частных случаях. Следует отметить аккуратное изложение технических инструментов исследований, в частности, аппарата параболических потенциалов и применение оператора половинной производной, а также ясное изложение доказательств, например, изложение доказательства сведения вводимого автором условия разрешимости рассматриваемой задачи к условию Лопатинского.

В ходе исследования разрешимости систем интегральных уравнений Вольтерры первого и второго рода на границе области, индуцируемых граничными условиями поставленных задач, получены новые результаты о свойствах следов потенциала Пуассона и объемного потенциала на негладких кривых из класса Дини-Гёльдера, представляющие самостоятельный интерес. Кроме того, доказана теорема об условиях существования непрерывной дробной производной порядка $\frac{1}{2}$ произведения двух функций, также имеющая самостоятельный интерес.

Все результаты диссертационной работы С.И. Сахарова являются **новыми**. Они представляют значительный интерес в исследовании начально-краевых задач для параболических уравнений и систем в областях с негладкими боковыми границами.

Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации

Текст оформлен математически грамотно, полученные результаты сформулированы четко, доказательства соответствуют современным требованиям строгости и **достоверности** доказательств.

Ценность для науки и практики результатов работы

Разработанная в диссертации техника **может быть использована** в изучении многих вопросов, возникающих в теории классической разрешимости различных начально-краевых задач для уравнений и систем параболического типа. Например, могут быть получены новые результаты в исследовании задач для параболических систем с коэффициентами, разрывными на негладкой кривой раздела сред, а также в нелокальных параболических задачах типа Бицадзе-Самарского.

Предъявленные в диссертации интегральные представления решений могут служить теоретической основой для численного исследования поставленных задач быстро развивающимся в последнее время методом граничных элементов (методом граничных интегральных уравнений).

Подтверждение опубликования основных результатов диссертации в научной печати

Полученные С.И. Сахаровым результаты **опубликованы** в 9 статьях в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в MathSciNet, Scopus, Web of Science. Опубликованные работы отражают содержание диссертационной работы.

Работа прошла многократную апробацию. Результаты работы обсуждались и докладывались на международных научных конференциях и на научно-исследовательских семинарах.

Соответствие содержания автореферата основным положениям диссертации

Автореферат **соответствует** требованиям и адекватно отражает содержание диссертационной работы.

Замечания по работе

Отметим некоторые **замечания**, которые, однако, не влияют на общее благоприятное впечатление от всей работы в целом.

1. В нескольких местах текст содержит упоминание об ограниченном решении уравнения или системы без указания на его дифференцируемость. Действительно, где-то в самом начале такого текста имеется указание на то, что решение изначально предполагается классическим, то есть, непрерывно дифференцируемым столько раз, сколько потребуется при дальнейших доказательствах, чаще всего, дважды непрерывно дифференцируемым внутри цилиндра над областью

по $\$x\$$ и один раз по $\$t\$$. Однако такая манера изложения вызывает вопросы, особенно если текст утверждений читается читателем не с начала, а, например, с целью дальнейших ссылок, и особенно, когда читатель привык, что в современных текстах превалируют обобщенные решения. Такого рода текст имеется, например, на стр. 32,33 в определении фундаментальной матрицы решений. Возможно, утверждения лучше бы звучали, если бы в них решения упоминались как классические.

2. Имеются некоторые мелкие неточности и огрехи в тексте, например, на странице 42, 2-я строка, отсутствует тире; на странице 4 в 3-м абзаце в ссылке [25 32] отсутствует знак препинания (тире), хотя следует отметить, что в целом текст диссертации отличает грамотность и выверенность, что также положительно характеризует автора.
3. Возможно, здесь стоит выразить сожаление, что научные тексты Зейнеддин М., содержащие важные факты, касающиеся параболических потенциалов и использованные в работе, являются труднодоступными для читателя, хотя мне, как оппоненту, они были диссертантом предоставлены и не пришлось их добывать.

Заключение

Диссертационное исследование Сахарова Сергея Игоревича «О начально-краевых задачах для параболических систем в плоских областях с негладкими боковыми границами» является законченной научно-квалификационной работой, в которой содержится новое решение научной задачи об исследовании однозначной классической разрешимости начально-краевых задач для параболических систем с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини, в областях с негладкими боковыми границами из класса Дини-Гёльдера, на которых задаются граничные условия общего вида с переменными коэффициентами, имеющей важное значение для общей теории начальных и начально-краевых задач для параболических систем. Работа соответствует требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, согласно п. 2.2 раздела II Положения о присуждении ученых степеней в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы», утвержденного ученым советом РУДН протокол № УС-1 от 22.01.2024 г., а её автор, Сахаров Сергей Игоревич, заслуживает присуждения ученой степени кандидата

физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Официальный оппонент:

профессор кафедры высшей математики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

доктор физико-математических наук (01.01.02. Дифференциальные уравнения),

профессор

Бурский Владимир Петрович

«12»  2025 г.

141701, Россия, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

+7 (495) 408-45-54

bvp30@mail.ru

